

Fiche Récapitulatif du Cours : FL1902P

Corentin 邱天意

Rédigé en Hiver 2025



Avant-propos

FL1902P est le premier cours de mathématiques(et de physique) que les élèves de SPEIT vont rencontrer après 2,5 ans de classes préparatoires. Plus spécifiquement, toutes les notions et objets mathématiques qu'on va étudier ici font partie des bases des mathématiques. La logique, les ensembles, les méthodes de démonstration et les applications sont à maîtriser si vous souhaitez bien réussir en mathématiques par la suite. Cependant, après avoir entendu les commentaires des professeurs de deuxième année, il est clair que la rédaction et les raisonnements sont encore un désastre. Plus fondamentalement, les élèves ne comprennent pas l'importance de tout cela.

On voit que dans le code du cours, il y a l'abréviation FL pour foreign language, mais cela ne signifie pas qu'on n'y étudiera que la langue. À cause de cela (et du fait que ce cours ne compte que 4 crédits, soit moins qu'un cours de langue, par exemple), certains élèves pensent parfois que c'est un cours facile, sans importance, et qu'il est une perte de temps d'y consacrer trop d'efforts pour bien en comprendre le contenu. Ce sont des opinions erronées et myopes. De plus, il est inutile de blâmer le professeur de mathématiques si quelqu'un n'avait, dès le départ, aucune intention d'apprendre la matière !

Ce fichier servira donc à rappeler les notions fondamentales de FL1902P aux élèves de première ou deuxième année. Il contient quatre chapitres, qui couvrent le programme du cours : la logique, les ensembles, les applications et les démonstrations. J'ai légèrement modifié l'ordre des chapitres, car, pour bien comprendre les ensembles, certains éléments de logique doivent être expliqués au préalable.

Une remarque : le programme de ce cours a été modifié plusieurs fois, et je pense que l'école publiera une version papier plus tard, avec de nombreux changements. Pour ma part, la partie sur les probabilités était encore incluse, mais l'année prochaine, les élèves étudieront la dénombrabilité et la cardinalité, etc. Ici, je ne conserverai que les quatre premiers chapitres.

Bonne continuation et bon courage à toutes et à tous !

Table des matières

Avant-propos	2
I La logique	6
1 Assertions, ensembles, et prédicats	6
1.1 Assertions	6
1.2 Ensembles	7
1.3 Prédicats	8
2 Quantificateurs et connecteurs	8
2.1 Quantificateur universel/existentiel	8
2.2 La négation	9
2.3 La conjonction et la disjonction	10
2.4 L'implication	10
2.5 Réciproque et contraposée	12
2.6 L'équivalence	12
II Les ensembles	14
1 Inclusion et égalité	14
1.1 L'inclusion	14
1.2 L'équivalence	15
2 Intersection, réunion, différence et complémentaire	16
2.1 L'intersection et la réunion	16
2.2 La différence et le complémentaire	17
3 Ensemble des sous-ensembles	17
4 Couple, n-uplet et produit cartésien	18
4.1 Couples et n-uplets	18
4.2 Produit cartésien	18

III	Les applications	19
1	Premières définitions	19
1.1	Définitions	19
1.2	Quelques exemples	21
1.3	Bref retour aux ensembles indexés	21
2	Injectivité, surjectivité et bijectivité	22
2.1	L'injectivité	22
2.2	La surjectivité	23
2.3	La bijectivité	24
3	La composition	24
3.1	Composition des fonctions	24
3.2	L'application réciproque	25
4	Images directes et réciproques	27
IV	La démonstration	28
1	À partir des définitions...	28
1.1	Assertions universelles	28
1.2	Assertions existentielles	29
1.3	Implication(des assertions)	29
1.4	Équivalence(des assertions)	30
1.5	Inclusion des ensembles	30
1.6	Égalité des ensembles	31
1.7	Unicité	31
2	Méthodes et types de démonstration	32
2.1	Raisonnement par disjonction des cas*	32
2.2	Raisonnement déductif*	32
2.3	Raisonnement par l'absurde	33
2.4	Raisonnement par la contraposée	33
2.5	Raisonnement par analyse-synthèse	33

2.6	Récurrence	33
2.6.1	Récurrence simple	33
2.6.2	Récurrence double(éventuellement à pas fixé*)	34
2.6.3	Récurrence forte	34
2.6.4	Récurrence finie*	34

Première partie

La logique

Dans cette partie on va rappeler les notions de logique vraiment fondamentales que vous avez vu au lycée ou dans le cours FL1902P. Pas trop difficile mais très important, parce que vous ne pouvez pas construire un bâtiment sans une base, et c'est la base si vous avez envie d'aller plus loin dans les mathématiques de prépa.

1 Assertions, ensembles, et prédicats

On définit d'abord les objets mathématiques sans lesquels on ne peut pas progresser.

1.1 Assertions

Pour nous, la notion d'assertion(ou une affirmation) peut être difficile à définir rigoureusement. Cependant, je vais vous donner ici quelques exemples d'affirmations, à partir desquels on peut extraire une définition généralisée. Voici des exemples :

- $1 + 1 = 2$
- 1 est un entier pair
- $x = 1$
- $ab = ba$

La première est vraie, la deuxième est fausse. 3 et 4 sont un peu plus compliquées car leurs vérités dépendent de l'ensemble de définition ou les valeurs de x , a et b . Par exemple, si on sait déjà que x vaut 1, l'assertion 3 est vraie et fausse sinon ; et la 4e est vraie si a et b sont les réels, mais on ne peut rien dire s'ils sont les matrices carrées d'ordre n .

Donc, on va utiliser une définition (qui n'est pas vraiment rigoureuse):

Définition 1.1

Intuitivement, une **assertion** est une phrase mathématique sans variable, à laquelle on peut donner un sens. On admet de plus qu'une telle assertion est soit vraie soit fausse.

Ici, on dit qu'une assertion est sans variable car les affirmations mathématiques avec variables seront définies plus tard dans ce chapitre(appelées **Prédicats**).

Remarque : dans les exemples que je vous ai donné, le 3 et 4 sont des assertions SEULEMENT si x et a, b ont été définies au préalable.

D'une manière similaire, on peut dire(intuitivement) qu'une assertion mathématique ne peut pas être vraie et fausse simultanément. Comme on se place dans le domaine des maths, on a unicité et pas les deux. Plus formellement on dit que c'est le **principe du tiers exclu**.

Maintenant qu'on a une définition, on pensera immédiatement : Comment puis-je écrire ça d'une manière rigoureuse et claire ? Ensuite, comment puis-je écrire moins de mots au cours d'une démonstration ? Par convention on peut se donner quelques conseils sur l'écriture.

Soit P une assertion :

- Au lieu de " P est vraie" on écrit souvent " $\text{on a } P$ " ou " $\text{donc } P$ "
- Au lieu de " $\text{supposons que } P \text{ est une assertion vraie}$ ", on écrit " $\text{supposons } P$ "

1.2 Ensembles

Les études axiomatiques et abstraites ne sont pas les destinations pour nous dans ce chapitre, c'est plutôt le vocabulaire et les utilisations que nous nous intéresserons. Vous avez peut-être la question : pourquoi on a une section sur les ensembles dans le chapitre sur la logique ? La réponse, c'est que les objets mathématiques sont vraiment liés, et j'ai décidé d'ajouter un petit morceau ici pour qu'on puisse bien faire les quantificateurs après. Voyez le deuxième chapitre sur les ensembles s'ils vous intéressent.

Voici une définition qui est (encore une fois) informelle :

Définition 1.2

Un **ensemble** est simplement une collection d'objets distincts, et on appelle ces objets "**éléments**" de l'ensemble.

Maintenant qu'on a défini un ensemble et les éléments, on s'intéressera aux notations utilisées.

Soit E un ensemble et a un objet mathématique qui peut appartenir à E

- Comme on a déjà parlé des assertions, on peut les appliquer ici : L'assertion " a appartient à E " ou " $\text{l'ensemble } E \text{ contient } a$ " est vraie si a est en fait un élément de E , et fausse sinon. On peut utiliser les symboles \in et \notin pour écrire la phrase.
- On utilise habituellement les lettres minuscules pour les éléments et les lettres majuscules pour les ensembles. Mais ce n'est pas toujours le cas(voir la remarque après).

— On note l'ensemble E contenant n éléments (a_1 jusqu'à a_n) deux-à-deux distincts :

$$E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

Remarque important : Quand on parle des ensembles et des éléments, il faut faire attention : les définitions sont relatives et un objet mathématique peut, à la même fois, être un ensemble et un élément. Tout simplement, un ensemble lui-même peut être un élément d'un autre ensemble, ce qui est parfois difficile à imaginer et comprendre.

1.3 Prédicats

Définition 1.3

Un **prédicat** est une phrase mathématique qui fait apparaître des variables, et qui deviendra une assertion vraie ou fausse lorsqu'on y attribue les valeurs.

Exemple : voir les exemples que je vous ai donné dans 1.1.1

Remarque : Dans le cas où une assertion dépend d'une variable on peut la noter $P(x)$, avec x la variable et P l'assertion.

2 Quantificateurs et connecteurs

2.1 Quantificateur universel/existentiel

En fait, idée des quantificateurs est simple : on utilise ces expressions tous les jours à l'oral mais pour qu'on puisse les utiliser dans le langage des maths, on les définit rigoureusement. Il y en a deux qui sont les plus courants et les autres qui sont permutations de ces deux en quelque sort. Comme dans presque tous les exercices, on commence avec les phrases qui décrivent notre situation.

Soit $A(x)$ un prédicat à une variable x qui appartient à l'ensemble E . On peut dire que, pour n'importe quelle valeur x_0 on choisit dans E , $A(x_0)$ soit une assertion. Construisons les explications suivantes :

Définition 1.4

L'assertion : " $\forall x \in E, A(x)$ " se lit : "pour tout x appartenant à E , on a $A(x)$ ". Cette assertion est vraie si l'assertion $A(x)$ est vérifiée pour tous les valeurs de x dans E .

On appelle le symbole \forall le quantificateur universel.

Définition 1.5

L'assertion : " $\exists x \in E, A(x)$ " se lit : "il existe un x appartenant à E , tel que $A(x)$ ". Cette assertion est vraie s'il existe au moins un x dans E tel que $A(x)$ soit vraie.

On appelle le symbole \exists le quantificateur existentiel.

Comprenez bien ces symboles. Quand vous lisez les assertions longs et lourds il faut retenir la logique d'arrière chaque quantificateur. Ne mélangez pas les étapes différents car ça peut changer le sens de l'assertion. Vous verrez plein d'exemples plus tard, où les changements d'ordre peut impliquer les définitions très différences (un exemple : la convergence simple et la convergence uniforme for les suites des fonctions que vous allez étudier avec Milan en 2e année).

2.2 La négation

Vous avez vu au lycée, qu'avec une assertion il y aura quatre assertions liées qui s'écrivent en utilisant la négation et la contraposition. Ici on va d'abord essayer de définir les connecteurs logiques usuels avant de les utiliser, car au lycée on n'a pas vraiment les étudié d'une manière rigoureuse.

On commence avec la négation, un truc qu'on va très souvent utiliser dans les exercices.

Définition 1.6

La proposition qui est la "négation" ou la "contraire" de P est notée $\text{non}(P)$. Elle est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.

Exemple : les deux assertions suivantes sont les assertions contraires.

- $\forall x \in E, P(x)$
- $\exists x \in E, P(x)$ est fausse

Ceci est logique, parce qu'on ne peut pas dire qu'un truc marche tous le temps s'il y a les exceptions.

Une remarque : vous avez peut-être vu les exercices qui vous demandent une assertion contraire. Normalement c'est assez facile mais je vous donne un point méthode si vous vous êtes trompé(e)s.

Point méthode 1.1

Si on veut la négation d'une assertion, on permute les symboles \forall et \exists , et puis on nie la conclusion.

2.3 La conjonction et la disjonction

Je utilise ici les gros mots “conjonction et disjonction”, mais il existe une manière simple pour décrire qu'est-ce que c'est.

Soit P et Q deux assertions :

Définition 1.7

- La proposition (P **et** Q) est appelée la **conjonction** des deux assertions. Elle est vraie lorsque P et Q sont toutes les deux vraies, et fausse sinon.
- La proposition (P **ou** Q) est appelée la **disjonction** des deux assertions. Elle est vraie lorsque au moins une des deux assertions sont vraie(s), et fausse sinon.

2.4 L'implication

On écrit toujours les phrases qui sont de la forme : “si ... alors...” ou “on sait que ... donc ...”, et dans les mathématiques on doit expliquer rigoureusement les implications des assertions.

Définition 1.8.1

On se donne deux propositions logiques P et Q .

On dit que P implique Q et on note $P \Rightarrow Q$ lorsque, si P est vraie, alors Q est vraie.

Point vocabulaire : Si par définition on trouve que $P \Rightarrow Q$, alors on dit que P est une condition suffisante de Q et que Q est une condition nécessaire de P . Pour que Q soit vraie, il suffit que P soit vraie. Pour que P soit vraie, il faut que Q soit vraie. Ca peut être difficile à comprendre, mais ne vous inquiétez pas, c'était le cas pour moi aussi.

Mais justement, vous voyez que ce n'est pas vraiment rigoureuse. C'est facile à comprendre bien sûr, mais on peut faire mieux avec les connecteurs qu'on a défini avant. Voici l'autre définition de l'implication :

Définition 1.8.2

On se donne deux propositions logiques P et Q .

L'assertion $(\text{non}P)\text{ou}Q$ se note $P \Rightarrow Q$.

Lorsque P est fausse, notre assertion est vraie car $\text{non}P$ est vraie. Si les assertions P et $(\text{non}P)\text{ou}Q$ sont vraies, par logique, Q est forcément vraie.

Ici on voit que l'assertion Q peut être fausse même si l'assertion $(\text{non}P)\text{ou}Q$ est vraie, ce qui peut paraître bizarre. Mais réfléchissez un peu : on a l'habitude d'utiliser \Rightarrow au lieu de quelques mots de français, mais en fait l'utilisation doit être réservée pour les assertions mathématiques. Vous pouvez imaginer les exemples où c'est possible et ça servira à éviter les problèmes comme ceci.

Aussi, on voit que la deuxième définition nous permet d'écrire facilement sa négation, avec le point méthode en vert que je vous ai donné.

Propriété 1.1

On se donne deux propositions logiques P et Q .

La négation de l'assertion $(\text{non}P)\text{ou}Q$ s'écrit $P \text{ et } (\text{non}Q)$

Maintenant on sait qu'est-ce que c'est l'implication, mais ce qu'on ne sait pas encore, c'est la démonstration. Comment démontrer l'implication, comment démontrer une autre proposition à partir d'une implication ? Je vous donne quelques points méthodes pour les exercices éventuels.

Point méthode 1.2

Soient P et Q deux assertions. On veut démontrer que P implique Q .

- Si on sait que l'assertion P est fausse, il n'y a rien à faire.
- Si l'assertion P est vraie, alors on doit démontrer que Q est vraie.

Si vous commencez comme ça : "Supposons que P est vraie" et puis essayer de démontrer que Q est vraie, c'est FAUX. Vous ne pouvez pas supposer directement que P est vraie.

De la même manière, on peut déduire les choses à partir d'une implication.

Point méthode 1.3

Soient P et Q deux assertions. On va supposer dans ce cas que $P \Rightarrow Q$.

- Si on sait que l'assertion P est vraie, alors dans ce cas Q est forcément vraie aussi.
- Si l'assertion P est fausse, ou on ne sait rien sur la vérité de P , alors on ne peut rien dire sur la vérité de Q .

2.5 Réciproque et contraposée

Ayant défini l'implication, on peut aller plus loin et expliquer la réciproque et la contraposée (et plus tard, l'équivalence) d'une assertion, qui peut aider dans certaines démonstrations.

Définition 1.9

On se donne deux propositions logiques P et Q .

- L'implication $(\text{non}Q) \Rightarrow (\text{non}P)$ est appelée la contraposition ou la contraposée de $P \Rightarrow Q$.
- L'implication $Q \Rightarrow P$ est appelée l'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$.

Propriété 1.2.1

L'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie si et seulement si sa contraposée est vraie.

Démonstration : Manipuler les connecteurs et traduire l'implication en utilisant les symboles. C'est un très bon entraînement. On verra une autre méthode plus tard.

2.6 L'équivalence**Définition 1.10**

On se donne deux propositions logiques P et Q .

On dit que P et Q sont équivalentes si on a (à la même fois) $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. On note dans ce cas $P \Leftrightarrow Q$

On peut l'appeler la **double implication**, et c'est similaire à la double inclusion qu'on voit avec les ensembles. De plus on utilise la notion de *CNS*, qui est l'abréviation de **condition nécessaire et suffisante** et pas celle de Cell, Nature et Science.

Il reste un point sur lequel on va préciser. C'est effectivement un point méthode : **la table de vérité**. Elle est notamment utile dans les démonstrations concernant les propositions, et si deux propositions ont même table de vérité, on peut dire qu'elles sont équivalentes. Pour l'écrire, on associe simplement les propositions en colonnes et les différents cas en lignes, ce qui donne un truc comme le figure 1.

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	non \mathcal{P}	\mathcal{P} et \mathcal{Q}	\mathcal{P} ou \mathcal{Q}	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

FIGURE 1 – Une table de vérité

Comme on a défini l'équivalence et donné la méthode de la table de vérité, on peut écrire plus rigoureusement la propriété 1.2 qu'on a vu en utilisant ces notions.

Propriété 1.2.2

On se donne deux propositions logiques P et Q .

On a : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P)$, elles sont équivalentes.

Démonstration : Ecrire les tables de vérité de ces deux propositions.

Finalement, révisez bien les exemples et les exercices de TD que Hamza va vous donner (ou vous a donné), ce sont les choses très importantes et vous devez vous entraîner sur cette section des maths.

Deuxième partie

Les ensembles

On a déjà défini l'ensemble dans la section 1.1.2, et dans ce chapitre on s'intéressera des opérations, les notions nouvelles et les calculs. On va commencer avec quelques définitions sur les relations entre ensembles. Parmi tous les notions, l'idée de l'inclusion et de l'égalité est la plus simple qui est nécessaire pour qu'on puisse avancer.

Remarque : dans ce chapitre on va rester dans la situation de deux ensembles. Ces notions des relations se généraliseront avec plusieurs ensembles, après la définition de la fonction d'indexation, dans le chapitre suivant.

1 Inclusion et égalité

1.1 L'inclusion

En fait cette idée est naturel. Si on a deux sacs qui peut contenir les objets, alors on peut mettre un (petit)sac dans un autre (grand)sac. Dans ce cas, un objet qui se trouve dans le petit sac est aussi dans l'un qui est grand. A partir de cette imagination on peut définir la **relation d'inclusion** des ensembles.

Définition 2.0

Regardez la définition d'un ensemble sur la page 5.

Définition 2.1

Soient E et F deux ensembles.

L'assertion : $\forall x \in F, x \in E$ (qui peut être vraie ou fausse) est noté $F \subset E$, et on dit : " F est une partie de E " ou " F est inclus dans E "

Si l'assertion est vraie on peut dire que F est un **sous-ensemble** de F .

Remarque : vous pouvez voir qu'on a enlevé la variable x ici, parce qu'il n'est pas nécessaire pour exprimer une inclusion. C'est une variable **muette**, à laquelle on peut donner n'importe quel nom.

Alors, pour démontrer cela, on va toujours essayer au début d'utiliser la définition. Voici un point méthode :

Point méthode 2.1

Soient E et F deux ensembles. On veut montrer que F est une partie de E . Dans ce cas, on prends un élément aléatoire de F , et on montre qu'il est aussi un élément de E .
Donc il faut commencer avec : "Soit $x \in F$ "

Avec le point méthode fait ci-dessus on peut démontrer une autre propriété intéressant : le fait que l'inclusion peut être "transmise", en quelque sorte.

Propriété 2.1

Soient E, F, G trois ensembles. Si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.

Démonstration : faire en utilisant le point méthode, en s'aidant avec un diagramme si besoin.

Parmi une grande variété d'ensembles, il y en a un qui nous intéresse au début : qu'est-ce qui se passe si on a un "sac" vide, avec aucun élément y appartenant ? Un tel ensemble peut être vu comme quoi par rapport aux autres ensembles ? Formellement on l'appelle **l'ensemble vide**. Formalisons l'idée :

Propriété 2.2

Soit E un ensemble et \emptyset l'ensemble vide. $\emptyset \subset E$

1.2 L'équivalence

La relation entre ensembles n'est pas un one-way street. On peut imaginer que, si deux ensembles sont exactement les mêmes, alors si je trouve un truc particulier dans le premier, alors le même objet doit exister dans l'autre aussi. En généralisant on obtient la définition de deux ensembles égaux :

Définition 2.2

Soient E et F deux ensembles.

Les deux ensembles sont égaux si on a $F \subset E$ et $E \subset F$ à la même fois. Dans ce cas on note $E = F$.

2 Intersection, réunion, différence et complémentaire

Vous avez certainement vu qu'au lycée on utilise les **diagrammes de Venn** pour présenter la relation entre ensembles. Si vous essayez de mettre les ensembles sur un plan vous trouverez qu'il y aura les formes qu'on ne sait pas encore décrire. Dans cette section on explique quelques opérations et leurs résultats (qui sont souvent les ensembles aussi).

Remarque : les noms de ces opérations vous donnent déjà quelques idées sur leurs natures. Donc je ne vais pas faire une introduction détaillée pour chaque définition, on se donnera les définitions directement pour gagner du temps.

Note : ajoute les dessins plus tard

2.1 L'intersection et la réunion

Définition 2.3

Soient E et F deux ensembles et x un objet mathématique.

L'intersection de E et F est notée $E \cap F$ (qui se lit E **inter** F).

On dit que x est un élément de $E \cap F$ s'il appartient à E **et** à F .

Définition 2.4

Soient E et F deux ensembles et x un objet mathématique.

La **réunion** de E et F est notée $E \cup F$ (qui se lit E **union** F).

On dit que x est un élément de $E \cup F$ s'il appartient à E **ou** à F .

Remarque : Les noms usuels sont assez faciles à retenir. On prend une partie du mot de l'opération.

2.2 La différence et le complémentaire

Définition 2.5

Soient E et F deux ensembles et x un objet mathématique.

La **différence** $E - F$ est notée $E \setminus F$ (qui se lit E **privé de** F).

x est un élément de $E \setminus F$ s'il appartient à E mais pas à F .

Définition 2.6

Soient E et F deux ensembles et x un objet mathématique.

Supposons que $F \subset E$, dans ce cas la différence $E \setminus F$ s'appelle le **complémentaire** de F dans E , et on le note $C_E F$.

Remarque : toutes ces définitions s'écrivent aussi avec la logique propositionnelle.

3 Ensemble des sous-ensembles

Définition 2.7

Soit E un ensemble.

Il existe l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble, on le note $\mathcal{P}(E)$.

On a $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$

L'existence est assuré par un axiome de la théorie des ensembles.

Cela peut être difficile à comprendre au début. Ici, tous les sous-ensembles de E sont des éléments d'un grand ensemble, qui est l'ensemble des parties de E . Attention au fait que les ensembles lui-mêmes peuvent être les éléments.

Exercice : Posons l'ensemble : $E = \{1, 2, 3\}$, écrivez l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ associé à E . Ici, il faut faire attention : l'ensemble $\{1\}$ n'est pas l'élément 1 ou le nombre 1 ! Pour que deux objets soient égaux il faut qu'ils soient de même nature. C'est similaire à la homogénéité qu'on a vu en physique, avec les unités.

4 Couple, n-uplet et produit cartésien

4.1 Couples et n-uplets

Au lycée on a l'habitude de représenter un point sur le plan avec deux variables mises en parenthèses. Par exemple, (x, y) est un point sur le plan \mathbb{R}^2 . On appelle cela un **couple**.

Propriété 2.3

Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux couples dans \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire les variables sont des réels.

On a les propriétés suivantes :

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- Si $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, alors $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$

Remarque :

- Cette partie est nécessaire si on veut s'intéresser à la géométrie euclidienne plus tard dans MATH1301P.
- Plus généralement on peut construire les “couples” avec 3, 4 variables et éventuellement un “couple” indexé dans un ensemble. On appelle **n-uplet** un tel objet avec n variables, ou n est un nombre naturel supérieur à 2.

4.2 Produit cartésien

Pour qu'on puisse construire les couples(et éventuellement les n-uplets), on définit le **produit cartésien** de deux ensembles :

Définition 2.8

Soient E et F deux ensembles.

On appelle l'ensemble $E \times F$ le **produit cartésien** de E et F , l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.

On écrit souvent : $E \times F = \{(x, y); x \in E \text{ et } y \in F\}$

Cela se généralise avec les n-uplets aussi.

Remarque : On utilise couramment un produit cartésien quand on travaille dans le plan usuel et dans un repère cartésien(voir le cours PHY1301P : Mécanique I) et on identifie chaque point du plan avec le couple de ses coordonnées.

Troisième partie

Les applications

Les applications ou les fonctions sont les objets mathématiques très importants, qui apparaissent dans presque tous les sous-domaines. Ici on fait et on explique d'abord l'idée générale des applications, et vous verrez les fonctions réelles plus tard dans MATH1301P.

Dans ce chapitre, on utilisera les notations E , F , G , H pour les ensembles quelconques sans les préciser dans chaque case.

1 Premières définitions

1.1 Définitions

Une application peut être vue comme une relation entre deux ensembles. Prenons un élément x de E , en passant par une application on peut lui associer un élément de F (on note souvent y). Les opérations mathématiques et physiques passent souvent par une telle applications.

Donc, on va définir chaque objet (x, y, E, F, \dots) et quelques notations pour les représenter.

Définition 3.1

On dit que f est une **application** de E dans F si, à tout élément x de E , f associe un unique élément de F , qui est appelé **l'image** de x par f , noté $f(x)$.

E est appelé **l'ensemble de départ**, et F **l'ensemble d'arrivée**.

Pour un élément y de l'ensemble F , on appelle tout élément x dans E un **antécédent** de y s'il vérifie $y = f(x)$.

Remarque : Observez qu'ici j'ai utilisé les mots "l'image" et "un antécédent". Ca veut dire que pour un élément de l'ensemble de départ, il n'y a qu'une image, et pour un élément de l'ensemble d'arrivée, on peut trouver plusieurs antécédents. le nombre exact dépend de l'application étudiée et le point choisi.

De plus, deux applications sont **égaux** si elles ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée, et si pour n'importe quel élément dans l'ensemble de départ, ses images par rapport aux deux applications sont égales.

Notation 3.1

Avec les variables utilisées dans la définition 3.1, on donne la notation usuelle qui précise toutes les informations.

$$f : \begin{cases} E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

Souvent, quand on travaille avec les fonctions on dessine son **graphe** sur le plan \mathbb{R}^2 . Ici on généralise avec les applications quelconques.

Si on veut dessiner le graphe, on doit connaître tous les points, qui s'expriment comme un couple (l'élément et son image). Prenons un point, deux points, et éventuellement on aura une forme qui représente l'application. Ce n'est pas toujours possible, car il y a les objets qu'on ne sait pas décrire sur un dessin, mais un tel graphe est toujours généralisable de cette manière :

Définition 3.2

Soit une application f de E dans F .

On appelle **graphe** de f le sous-ensemble Γ de $E \times F$, où Γ est défini par :

$$\Gamma = \{(x, f(x)), x \in E\}$$

Exemple : Une courbe que vous pouvez dessiner sur le plan \mathbb{R}^2 est effectivement un de ses sous-ensembles.

Comme on a défini l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E , on fait la même chose avec les applications entre deux ensembles spécifiques.

Notation 3.2

On utilise $\mathcal{F}(A, B)$ pour représenter l'ensemble des applications de A dans B .

Remarque importante

Remarque sur les applications : si on veut définir rigoureusement une application, on la définit à partir de son graphe, donc comme un sous-ensemble de $E \times F$.

En fait, f est une application de E vers F si f est un sous-ensemble de $E \times F$ vérifiant : $\forall x \in E, \exists ! y \in F, (x, y) \in f$.

On choisit de noter " $f(x) = y$ " plutôt que " $(x, y) \in f$ ".

1.2 Quelques exemples

Ici on donne quelques exemples importants qui sont à connaître.

- **L'identité** : on appelle **l'application identité** d'un ensemble E l'application qui à x associe x (ici x est un élément de E). On la note comme :

$$Id_E : \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x \end{cases}$$

- **L'indicatrice** : Supposons que E est un sous-ensemble de F . On définit **l'application indicatrice** de E comme la suivante :

$$1_A : \begin{cases} E \rightarrow \{0, 1\} \\ x \mapsto 1_A(x) \end{cases}$$

Où $1_A(x) = 1$ si $x \in A$, et 0 sinon. Une remarque : voir aussi le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$, l'idée est similaire. On décide si un critère est satisfait, et puis traduire le résultat comme vrai/faux ou 1/0.

- **L'indexation de E** : Soit un ensemble I fini (on utilise souvent l'ensemble $I = \{1, 2, \dots, n\}$ car cela nous permet d'utiliser les mots premier deuxième, etc). On appelle **famille d'éléments de E indexée par I** toute application de I dans E . On note la famille : $(x_i)_{i \in I}$.

Ce dernier exemple est l'indexation dont on a parlé dans le chapitre 2. On peut généraliser les propriétés des fonctions de cette manière.

1.3 Bref retour aux ensembles indexés

Au début du chapitre 2 je vous ai expliqué qu'on peut généraliser les notions sur les ensembles avec une indexation. Voici quelques définitions et propriétés que j'ai généralisé en utilisant l'indexation :

Notation 3.3 : Généralisation de la réunion, de l'intersection et du produit cartésien

On utilise la notation $\bigcup_{i \in I} E_i$ au lieu d'écrire l'ensemble : $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \dots \cup E_n$.

On utilise la notation $\bigcap_{i \in I} E_i$ au lieu d'écrire l'ensemble : $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \dots \cap E_n$.

On utilise la notation $\prod_{i \in I} E_i$ au lieu d'écrire l'ensemble : $E_1 \times E_2 \times E_3 \dots \times E_n$.

Ici $I = \{1, 2, \dots, n\}$ pour n ensembles, mais on peut prendre I infini.

Vous verrez plein d'exemples de l'indexation plus tard...

2 Injectivité, surjectivité et bijectivité

On a dit que pour une application f et un élément x dans son domaine de définition, l'image de x par rapport à f est unique, mais la réciproque n'est pas vraie. Donc il est naturel de se demander : pour un spécifique y appartenant à l'ensemble d'arrivée, on peut trouver combien d'antécédents ? Et puis, est-ce que c'est généralisable sur tout l'ensemble d'arrivée ? En discutant les situations, on peut généraliser ces pensées et produire trois définitions qui portent sur la nature d'une application.

Dans cette section f désigne une application de E dans F . De plus je vais utiliser les fonctions usuelles de \mathbb{R} dans \mathbb{R} comme les exemples pour que vous ayez une idée concrète.

2.1 L'injectivité

On se demande : combien d'antécédents peut-on trouver pour $y \in F$? Dans cette situation on divise l'univers en trois parties : pas d'antécédent, un unique antécédent et finalement la situation où on a deux ou plus.

Traitions d'abord le cas où on a 0 ou 1 :

Définition 3.3

On dit que l'application f est **injective** ou qu'elle est une **injection** si chaque élément de F admet **au plus** un antécédent dans E .

On dit qu'une application est **non-injective** si elle ne vérifie pas l'assertion énoncée ci-dessus.

Remarque : Notez qu'ici on dit **au plus**. On y ajoute la possibilité des éléments n'ayant pas d'antécédent, parce que rien nous dit que l'ensemble d'arrivée doit être "rempli". Il existe souvent les éléments de F qui n'ont pas d'antécédent par rapport à f . Par exemple, on dit que l'application qui à x associe x^2 est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , mais il y a clairement les valeurs de \mathbb{R} qui n'ont pas de racine carrée réelle (donc pas d'antécédent).

Plus simplement, l'injectivité nous donne l'unicité de l'antécédent lorsqu'il existe.

Point méthode 3.1

On veut montrer qu'une application f est injective. Elle est injective si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Donc, on prend deux éléments x_1 et x_2 satisfaisant $f(x_1) = f(x_2)$, puis démontrer que dans cette situation $x_1 = x_2$.

Ayant traité ce cas, on se demandera de plus : il y a les éléments de l'ensemble d'arrivée qui n'ont pas d'antécédent. Comment décrire ce phénomène ? L'ensemble est-il rempli ? Pour ça on va définir la surjectivité.

2.2 La surjectivité

Définition 3.4

On dit que l'application f est **surjective** ou qu'elle est une **surjection** si chaque élément de F admet **au moins** un antécédent dans E .

On dit qu'une application est **non-surjective** si elle ne vérifie pas l'assertion énoncée ci-dessus.

Point méthode 3.2

On veut montrer qu'une application f est surjective. Elle est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$$

Donc, on prend un élément quelconque de F puis démontrer qu'il existe au moins un antécédent.

Finalement, si une application est à la fois injective et surjective, alors il y a une correspondance biunivoque (gros mot ici, ça veut dire one-to-one en anglais). On donne un nom : la bijectivité.

2.3 La bijectivité

Définition 3.5

On dit que l'application f est **bijective** ou qu'elle est une **bijection** si chaque élément de F admet un **unique** antécédent dans E .

On dit qu'une application est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.

C'est une bonne propriété pour une application, car elle nous donne la correspondance biunivoque entre les éléments de deux ensembles. Plus tard vous allez voir que cela peut être lié avec la cardinalité des ensembles. Dans la définition, le mot "chaque" nous donne la surjectivité, et le mot "unique" nous donne l'injectivité. Il est naturel de conclure que la bijectivité peut être vue comme une combinaison de ces deux.

3 La composition

3.1 Composition des fonctions

Les transformations peuvent être faites une après l'autre. Dans les calculs on peut décider de d'abord ajouter 2, puis multiplier par 3, ou bien d'abord multiplier par 3, puis ajouter 2. On peut généraliser cette idée avec les applications, plus spécifiquement la composition.

Définition 3.6

Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G .

On appelle **composition** de g et f l'application notée $g \circ f$ définie par :

$$g \circ f : \begin{cases} E \rightarrow G \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

Remarque : attention à l'ordre des opérations ! Pour l'application $g \circ f$ on passe d'abord par f et puis par g .

Le sens est assez claire pour cette opération. Mais pour qu'elle soit bien définie, on doit vérifier que l'image de x par f est dans le domaine de définition de g . Il y a quelques propriétés simples qui peuvent être utilisées en passant par la composition, notamment les trois dont on vient de parler.

Propriété 3.1

Soient E, F, G, H des ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F), g \in \mathcal{F}(F, G), h \in \mathcal{F}(G, H)$.

- Pour tout $f \in \mathcal{F}(E, F)$, on a : $f \circ Id_E = f$.
- Pour tout $f \in \mathcal{F}(E, F)$, on a : $Id_F \circ f = f$.
- La composition est associative :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Remarque : Notez que dans les deux premiers points on a utilisé deux identités différents, car “au milieu” des deux applications on doit trouver le même ensemble.

La propriété 3.1 est fondamentale. On continue avec les propriétés résultantes sur l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.

Propriété 3.2

On se donne deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
Inversement, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
Inversement, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.
Inversement, si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

Prenez du temps et démontrer ces propriétés vous-mêmes, c'est un bon entraînement logique, et sachez que l'intuition n'est pas toujours correcte dans ce domaine car ces trois propriétés ne sont pas évidentes.

3.2 L'application réciproque

Ayant parlé de la bijectivité, on peut imaginer que : si une application est bijective, alors pour un élément du domaine de définition, on peut lui associer son image unique. De plus

le sens réciproque est vraie : pour l'image on peut trouver un unique antécédent. Cela nous permet de construire **l'application réciproque** ou **la bijection réciproque**.

Il faut justifier que ce soit une bijection avant de définir sa réciproque !

Définition 3.7

Soient f une application de E dans F qui est **bijective**.

On appelle **l'application réciproque** de f l'application notée f^{-1} définie par :

$$f^{-1} : \begin{cases} F \rightarrow E \\ y \mapsto f^{-1}(y) \end{cases}$$

Ici $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f , qui existe et est unique grâce à la bijectivité de f .

A partir de ceci on trouvera quelques propriétés qui sont, encore une fois, liées aux propriétés des applications déjà expliquées.

Propriété 3.3

On se donne deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

- Si f et g sont les bijections, alors $g \circ f$ est aussi une bijection. Ces applications et leurs réciproques vérifie la relation :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

- Si f est une **bijection** de E dans F , alors son application réciproque f^{-1} est aussi bijective, vérifiant : $(f^{-1})^{-1} = f$.

On utilise parfois une autre méthode/propriété pour démontrer qu'une application est bijective, en utilisant la relation avec l'identité.

Propriété 3.4

L'application f de E dans F est **bijective** si et seulement si il existe une application g de F dans E telle que :

$$g \circ f = Id_E \quad \text{et} \quad f \circ g = Id_F.$$

L'application g est alors l'**application réciproque** de f .

4 Images directes et réciproques

Étant donné un élément, on peut lui associer une image. Dans cette section on étend ceci aux ensembles, qui ne sont que les collections d'éléments.

Définition 3.8

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Si $A \subset E$ et $B \subset F$, on appelle :

— **image directe** de A par f , l'ensemble :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A \quad y = f(x)\} = \{f(x); x \in A\},$$

— **image réciproque** de B par f , l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Vous pouvez voir que l'image directe d'un ensemble est la collection des images de ses éléments, et l'inverse pour l'image réciproque.

Attention : j'écris $f^{-1}(B)$ pour l'image réciproque de B par f , mais f n'est pas forcément bijective, ne confondez pas avec l'application réciproque.

Vous trouverez qu'une application et ses propriétés sont très générales, car on ne spécifie pas la nature des éléments. Plus tard vous allez étudier d'abord les fonctions réelles des variables réelles, où l'ensemble de définition est une partie de \mathbb{R} , et les fonctions vectorielles, qui projettent les éléments dans l'espace de dimension n . Travaillez bien ce chapitre pour que vous puissiez maîtriser les autres chapitres plus tard.

Quatrième partie

La démonstration

Dans cette partie on va donner quelques types de raisonnements pour vous aider dans les démonstrations. Après chaque point, vous trouverez un exemple classique ou un exemple extrait du cours/TD de Monsieur Hamza que j'ai suivi, avec la correction, pour vous montrer comment rédiger proprement un exercice.

1 À partir des définitions...

Dans cette section on donne les méthodes et les propriétés qui sont utiles pour les démonstrations. Comme le titre dit, la majorité de ces méthodes sont les applications directes des définitions qu'on connaît déjà.

1.1 Assertions universelles

On veut montrer une **assertion universelle**, c'est-à-dire une assertion de la forme générale :

$$\forall x \in E, P(x)$$

Où E est un ensemble et $P(x)$ un prédicat dépendant de x .

Point méthode 4.1

Dans ce cas, comme on veut le démontrer pour tous les éléments, on prend un élément x quelconque de E , puis démontrer $P(x)$.

Exercice

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$

Preuve : On commence toujours par “**soit**”

Preuve à rédiger

1.2 Assertions existentielles

On veut montrer une **assertion existentielle**, c'est-à-dire une assertion de la forme générale :

$$\exists x \in E, P(x)$$

Où E est un ensemble et $P(x)$ un prédicat dépendant de x .

Point méthode 4.2

L'existence se démontre avec un exemple, c'est-à-dire on peut démontrer l'assertion en posant un x particulier, avec $P(x)$ vraie.

Exercice

Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists z \in \mathbb{R}, z > x + y$

Preuve : Avez-vous un **exemple** à donner ?

Preuve à rédiger

1.3 Implication(des assertions)

Je vous rappelle le point méthode 1.2 qu'on a vu dans le premier chapitre.

Point méthode 4.3/1.2

Soient P et Q deux assertions. On veut démontrer que P implique Q .

- Si on sait que l'assertion P est fausse, il n'y a rien à faire.
- Si l'assertion P est vraie, alors on doit démontrer que Q est vraie.

Si vous commencez comme ça : "Supposons que P est vraie" et puis essayer de démontrer que Q est vraie, c'est FAUX. Vous ne pouvez pas supposer directement que P est vraie. Parfois on doit faire une disjonction des cas, la méthode que vous allez voir plus tard.

Remarque : Je dis qu'on doit discuter d'abord la vérité de P , mais dans les exercices on commence(presque toujours) avec une assertion vraie. Prenez garde quand même.

Exercice

Montrer que : $\forall x \in [0, 1], x - x^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0, 1\}$

Preuve : La vérité de la première assertion implique quoi ?

Preuve à rédiger

1.4 Équivalence(des assertions)

Deux assertions P et Q sont équivalentes si et seulement si les assertions $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraies.

Point méthode 4.4

Écrivez deux étapes et démontrer l'implication pour chaque étape.

Exercice

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\sqrt{x+4} - \sqrt{x+2} = 1$ si et seulement si $x = \frac{-7}{4}$

Preuve : Le sens direct et le sens réciproque !

Preuve à rédiger

1.5 Inclusion des ensembles

Point méthode 4.5/2.1

Soient E et F deux ensembles. On veut montrer que F est une partie de E . Dans ce cas, on prends un élément aléatoire de F , et on montre qu'il est aussi un élément de E .
Donc il faut commencer avec : "Soit $x \in F$ "

Exercice

On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs, et on pose : $E = \{k(k+1), k \in \mathbb{N}\}$.
Montrer que : $E \subset 2\mathbb{N}$

Preuve : Commencez avec "soit"

Preuve à rédiger

1.6 Égalité des ensembles

Point méthode 4.6

Deux ensembles sont égaux si on peut démontrer la double inclusion.

Exercice

Montrer les égalités suivantes :

$$]-1, 1[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right] \quad \text{et} \quad [-1, 1] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right]$$

Preuve : Encore une fois, deux sens à rédiger

Preuve à rédiger

1.7 Unicité

On veut montrer que l'objet x qui vérifie $P(x)$ est unique.

Point méthode 4.7

Soient $x, x' \in E$. Faisons l'hypothèse que $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{P}(x')$. Montrons que : $x = x'$.

Remarque : On veut montrer l'unicité d'un objet dans un ensemble E vérifiant une propriété \mathcal{P} , ceci n'est pas équivalente à montrer l'assertion : $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$! Pour une assertion $\exists!$ on doit montrer l'existence et l'unicité, mais c'est le deuxième qu'on veut démontrer ici.

Exercice

Soit E un ensemble.

Montrer que : $\exists! A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), A \subset B$.

Preuve : Existence, puis unicité.

Preuve à rédiger

2 Méthodes et types de démonstration

Cette section donne les “vraies” méthodes, et pas simplement celles qui s’obtiennent directement avec les définitions. Vous devez penser à ces méthodes si vous êtes bloqués dans une démonstration.

Remarque : les méthodes non étoilées sont celles qui ont été introduites par Hamza pendant les cours magistraux. J’ai mis des étoiles sur les méthodes qui ne sont pas directement au programme, mais elles peuvent être utiles. Jetez un coup d’œil si vous voulez.

2.1 Raisonnement par disjonction des cas*

Dans un exercice un peu plus compliqué on trouve qu’il y a besoin de discuter plusieurs cas. On commence par écrire les cas possibles, puis on démontre pour chaque cas séparément. C’est une intuition que vous avez déjà rencontré au lycée, et vous savez qu’il est important de ne pas oublier un cas, de ne pas répéter un cas.

Point méthode 4.8

On se donne un exemple : une assertion universelle. Supposons qu’on veut démontrer l’assertion : $\forall x \in \mathbb{E}, P(x)$. En séparant E comme $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$, puis en prouvant $P(x)$ pour chaque E_i , on peut montrer l’assertion universelle.

Ici la famille peut être indexée.

Exercice

2.2 Raisonnement déductif*

Point méthode 4.9

Exercice

2.3 Raisonnement par l'absurde

Point méthode 4.10

Exercice

2.4 Raisonnement par la contraposée

Rappelez-vous que la contraposée d'une implication $P \Rightarrow Q$ est $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$, et qu'elles ont même valeur de vérité dans une TDV.

Point méthode 4.11

On peut essayer de démontrer une implication en démontrant sa contraposée, car $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$

Exercice

2.5 Raisonnement par analyse-synthèse

Point méthode 4.12

Exercice

2.6 Récurrence

2.6.1 Récurrence simple

Point méthode 4.13

Exercice

2.6.2 Récurrence double(éventuellement à pas fixé*)

Point méthode 4.14

Exercice

2.6.3 Récurrence forte

Point méthode 4.15

Exercice

2.6.4 Récurrence finie*

Point méthode 4.16

Exercice