Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels

Cours assuré par Sijia KONG

Rédigé par Corentin 邱天意 P2023

Semestre 2025-2026-1

Motivations

Le livre de ce cours n'est pas facile à comprendre. Il utilise les notations bizarres, est désordonné, et a été conçu de telle sorte que les élèves ne puissent pas apprendre par eux-mêmes. Je résume ici tous les théoremes/propositions à connaître et supprime tous les codes python et d'autre choses inutiles, et j'ajoute des commentaires pour faciliter la compréhension. Ce fichier ne contient aucune démonstration compliquée, seules les démonstrations exigées en colle apparaissent.

Les démonstrations exigées en colle sont en gros :

- Bessel et Parseval
- 3 propriétés sur les coefficients de Fourier
  - Unicité des coeffients
  - Riemann-Lebesgue, convergence vers 0
  - VItesse de décroissance sous certaines conditions
- 7 propriétés des transformées de Fourier.
  - La continuité du spectre
  - Riemann-Lebesgue, extinction des hautes fréquences
  - Symétrie hermitienne
  - Translation temporelle
  - Translation fréquentielle
  - Dérivée de la transformée
  - Transformée de la dérivée

Table des matières

Première partie

Séries de Fourier

Notations

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré,

$$\mathcal{L}^2(\Omega) \overset{\text{Not}}{=} \left\{ f \in \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K}),\ f \text{ mesurable}, \int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}\mu < +\infty \right\}$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour les séries de Fourier, nous travaillerons avec

$$(\Omega, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{BO}(\mathbb{R}), \lambda)$$

où $\mathcal{BO}(\mathbb{R})$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ et λ la mesure usuelle, définie par

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, [a < b] \implies [\lambda([a, b]) = b - a]$$

et

$$E = \left\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K}),\ f \text{ } 2\pi\text{-périodique et } f|_{[0,2\pi]} \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi]) \right\}$$

Corentin :

- 这门课前半部分讲的 L^p 空间在这里又变回 $\mathcal{L}^p$ 了，导致所有东西后面都拖着 presque partout
- 而且 E 的元素都是 2π 周期，这本书省略了有关周期的一些部分，计算的时候遇到其他周期函数得加上

Remarque I.1

Si $T \in \mathbb{R}_+^*$ et f T-périodique, alors

$$g : x \longmapsto f\left(\frac{T}{2\pi} x\right) \text{ est } 2\pi\text{-périodique}$$

Propriété I.1

La fonction définie sur E, par

$$f \longmapsto \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t}$$

est une semi-norme sur E, notée $\|f\|_{2,[0,2\pi]}$.

Corentin :

用这个就会导致拓扑学的东西无法使用，因为这个 norme 不满足 separation
两个不一样的函数的 norme 可能一样

1 Espaces $\mathcal{L}^p$

Corentin :

我记得孔老师某次习题的时候说过期末的时候 $\mathcal{L}^p$ 空间不考（有待证实）

Définition I.1

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, et $p \in [1, +\infty[$, on note

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{K}) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K},\ \text{mesurable}, |f|^p \text{ est intégrable sur } \Omega\}$$

Lorsqu'il n'y aura pas ambiguïté, nous noterons simplement $\mathcal{L}^p$.

Rappel I.1

Rappelons quelques inégalités vues dans le cours de topologie ou le cours d'intégration.

1. *Inégalité de Hölder* Si $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$, avec

   $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

   alors $fg \in \mathcal{L}^1$ et

   $$\int_\Omega |fg| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \sqrt[p]{\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu} \sqrt[q]{\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu}$$

2. On en déduit l'inégalité de Minkowski.

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{L}^p)^2, \quad \sqrt[p]{\int_\Omega |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu} \leqslant \sqrt[p]{\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu} + \sqrt[p]{\int_\Omega |g|^p \, \mathrm{d}\mu}$$

3. $\mathcal{L}^p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

4. L'application définie par

$$\begin{cases} \mathcal{L}^p \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f \longmapsto \sqrt[p]{\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu} \end{cases}$$

   est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$ (notée $\| \ \|_p$) et on a

$$\forall f \in \mathcal{L}^p, [\|f\|_p = 0] \implies [f = 0 \quad \mu - \text{p.p.}]$$

Rappel I.2 Suite de Cauchy

Soit (E,d) un espace métrique, on appelle *suite de Cauchy* toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant N, \forall q \geqslant N, d(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon$$

1. Toute suite de Cauchy est bornée.
2. Toute suite convergente est de Cauchy.
3. Toute suite de Cauchy **à valeurs réelles est convergente**.

Corentin :

度量空间没学过哪来的 rappel，上学期的定义是:

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de E.

On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **de Cauchy** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \geq n_0$ suffisamment grand tel que, pour tous $p, q \geq n$, la distance entre les deux termes est inférieur à ε.

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n \geq n_0, \ \forall p \geq n, \ \forall q \geq n, \ N\big(u_p - u_q\big) < \varepsilon.$$

Théorème I.1 Riesz

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$, alors toute suite de Cauchy de $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{K})$ pour la semi-norme $\| \ \|_p$ converge pour la semi-norme $\| \ \|_p$.

Corentin :

其实就是想说 $\mathcal{L}^p$ 是 complet 的

Remarque I.2

1. Le cas particulier $p = 2$, où la semi-norme découle d'un semi-produit scalaire défini par
$$\forall (f,g) \in \mathcal{L}^2, \langle f,g \rangle \overset{\text{Def}}{=} \int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu$$
a la même propriété que toute suite de Cauchy converge pour la semi-norme $\| \ \|_2$. En particulier, on peut lui appliquer le théorème de représentation sous la forme suivante. Comme nous n'avons qu'une semi-norme, la fonction f n'est plus unique, mais deux fonctions f_1 et f_2 représentant ψ seront égales $\mu - \mathbf{p.p.}$
2. On peut généraliser à $p = +\infty$ de la manière suivante
$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{R}) \overset{\text{Def}}{=} \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \text{mesurable}, \exists K \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leqslant K \quad \mu - \mathbf{p.p.}\}$$
La semi-norme est alors la semi-norme infinie définie par
$$\forall f \in \mathcal{L}^\infty, \|f\|_\infty = \inf\left(\{K \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leqslant K \quad \mu - \mathbf{p.p.}\}\right)$$
On a toujours le fait qu'une suite de Cauchy pour la semi-norme $\| \ \|_\infty$ converge pour la semi-norme $\| \ \|_\infty$.

Corentin :

$\mathcal{L}^\infty$ 也是 complet 的，但后边有些性质里 $\mathcal{L}^\infty$ 跟其他的不太一样

2 Convergence $\mathcal{L}^2$

Définition I.2

1. On munit E du « produit scalaire hermitien » suivant[1]

$$\forall (f,g) \in E^2, \langle f, g\rangle \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} \overline{f} g \,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Posons, pour $n \in \mathbb{Z}$

$$e_n : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto e^{inx} \end{cases}$$

   Clairement, $e_n \in E$ et pour $f \in E$, on appelle *n-ième coefficient de Fourier de* f l'expression

$$\boxed{c_n(f) \overset{\text{Not}}{=} \langle e_n, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\,\mathrm{d}t}$$

[a] Ce n'est pas réellement un produit scalaire, car il n'est pas défini

Proposition I.1 Système total

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un système total de E, c'est-à-dire

1. elle est orthonormée ;
2. le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille est dense dans E pour la semi-norme $\| \|_{2,[0,2\pi]}$.

Théorème I.2 Bessel et Parseval

Soit $f \in E$, on a alors

1. *Inégalité de Bessel :* pour $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $p < q$

$$\boxed{\sum_{n=p}^{q} |c_n(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x}$$

2. *Formule de Parseval*

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$$

Démonstration :

Cadre Géométrique

On munit l'espace E des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux du produit scalaire hermitien suivant :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\, dt$$

La norme associée est $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $e_n(t) = e^{int}$ est une **famille orthonormée** pour ce produit scalaire.

Démonstration de l'Inégalité de Bessel

Soit $f \in E$. On note $S_N(f)$ la somme partielle de rang N de la série de Fourier de f :

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$$

Étape 1 : Calcul de la norme de la somme partielle La famille (e_n) étant orthonormée, le théorème de Pythagore nous donne :

$$\|S_N(f)\|_2^2 = \left\| \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n \right\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2$$

Étape 2 : Orthogonalité du reste Posons le reste $R_N = f - S_N(f)$. Ce vecteur est orthogonal à l'espace engendré par les polynômes trigonométriques de degré N. En effet, pour tout $k \in \{-N, \dots, N\}$:

$$\begin{aligned}\langle f - S_N(f), e_k \rangle &= \langle f, e_k \rangle - \left\langle \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n, e_k \right\rangle \\ &= c_k(f) - c_k(f) = 0\end{aligned}$$

Étape 3 : Conclusion par Pythagore On peut décomposer f comme la somme de sa projection et du reste : $f = S_N(f) + (f - S_N(f))$. Ces deux termes étant orthogonaux, on a :

$$\|f\|_2^2 = \|S_N(f)\|_2^2 + \|f - S_N(f)\|_2^2$$

Puisque $\|f - S_N(f)\|_2^2 \geq 0$, on obtient l'inégalité de Bessel :

$$\|f\|_2^2 \geq \|S_N(f)\|_2^2 \implies \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt \geq \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2$$

Démonstration de l'Égalité de Parseval

Pour démontrer l'égalité, il faut montrer que le reste tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$. Reprenons l'égalité établie précédemment :

$$\|f - S_N(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2$$

L'égalité de Parseval équivaut donc à montrer que $\lim_{N\to+\infty} \|f - S_N(f)\|_2 = 0$.

Argument de densité D'après le théorème de densité (conséquence du théorème de Fejér ou de Weierstrass trigonométrique), l'espace des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace des fonctions continues 2π-périodiques (et donc dans l'espace des fonctions continues par morceaux pour la norme L^2).

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_2 < \varepsilon$. Soit N_0 le degré de ce polynôme P. Pour tout $N \geq N_0$, $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur l'espace des polynômes de degré N. Par propriété de minimisation de la distance de la projection orthogonale :

$$\|f - S_N(f)\|_2 \leq \|f - P\|_2 < \varepsilon$$

Ainsi, $\|f - S_N(f)\|_2 \to 0$ quand $N \to +\infty$. On conclut :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt$$

■

Remarque I.3 Interprétation géométrique de Bessel

L'inégalité de Bessel, $\sum |c_n(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2$, exprime que la norme de la projection orthogonale de f sur un sous-espace de dimension finie est toujours inférieure à celle de f. Une conséquence fondamentale est que la somme partielle de Fourier $S_N(f)$ réalise la **meilleure approximation** en norme $\mathcal{L}^2$ de f par un polynôme trigonométrique de degré $\leqslant N$:

$$\|f - S_N(f)\|_2 \leqslant \|f - T_N\|_2$$

Ceci est une application directe du théorème de la projection orthogonale dans un espace de Hilbert.

Remarque I.4 Parseval : Conservation et Application

L'égalité de Parseval, $\sum |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2$, est la condition nécessaire et suffisante pour que le système trigonométrique soit une base hilbertienne. Elle signifie qu'aucune énergie n'est perdue dans la transformation : la puissance totale du signal (intégrale de $|f|^2$) égale la somme des puissances de ses harmoniques ($|c_n|^2$). C'est aussi un outil de calcul puissant.

Corentin :

可以用能量守恒理解

Remarque I.5 Interprétation de la formule de Parseval

On a donc un deuxième produit sesqui-linéaire, hermitien, positif sur E, défini par

$$\boxed{\langle f, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n(f)}c_n(g)}$$

qui coïncide avec le précédent sur E.

Propriété I.2 Unicité des coefficients de Fourier pour les applications continues

L'application

$$\begin{cases} E \cap \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \\ f \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{cases}$$

est linéaire et injective.
Plus généralement, pour tout $f \in E$

$$[(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}}] \iff [\lambda\left(\{x \in [0, 2\pi], f(x) \neq 0\}\right) = 0]$$

Démonstration :
L'application est clairement linéaire, calculons son noyau. Soit $f \in E$, telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = 0$$

alors la formule de Parseval nous donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0$$

<u>Cas où f est continue</u>

Comme la fonction $t \longmapsto |f(t)|^2$ est positive, continue, on en déduit que $f = 0$.

<u>Cas où f est quelconque dans E</u>

1. ($\Rightarrow$) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$A_n = \left\{ x \in [0, 2\pi], |f(x)|^2 \geqslant \frac{1}{n} \right\}$$

alors

$$0 \leqslant \frac{1}{n}\lambda(A_n) \leqslant \int_{A_n} |f|^2 \, \mathrm{d}\lambda \leqslant \int_{[0,2\pi]} |f|^2 \, \mathrm{d}\lambda = 0$$

donc $\lambda(A_n) = 0$. Mais en ce cas

$$\Delta = \{x \in [0, 2\pi], f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$$

réunion dénombrable d'ensembles de λ-mesure nulle est de λ-mesure nulle, ou encore $\lambda(\Delta) = 0$.

2. ($\Leftarrow$) Par définition de l'intégrale, on a

$$\int_{[0,2\pi]} |f|^2 \, \mathrm{d}\lambda = \underbrace{\int_{[0,2\pi] \setminus \Delta} |f|^2 \, \mathrm{d}\lambda}_{=0 \text{ car } f \text{ est nulle en dehors de } \Delta} + \underbrace{\int_{\Delta} |f|^2 \, \mathrm{d}\lambda}_{=0 \text{ car } \lambda(\Delta)=0} = 0$$

■

Théorème I.3 Riemann-Lebesgue

Soit $f \in E$, alors

$$\boxed{c_n(f) \xrightarrow[n \to \pm\infty]{} 0}$$

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe alors $g_\varepsilon \in F$ (voir les notations de la proposition 1.1, page 13) telle que

$$\|f - g_\varepsilon\|_{2,[0,2\pi]} \leqslant \varepsilon$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz (Réf. [7]) nous assure alors que, pour $n \in \mathbb{Z}$

$$|\langle e_n, f \rangle - \langle e_n, g_\varepsilon \rangle| \leqslant \|f - g_\varepsilon\|_{2,[0,2\pi]} \leqslant \varepsilon$$

Mais

$$|\langle e_n, f\rangle - \langle e_n, g_\varepsilon\rangle| = |c_n(f) - c_n(g_\varepsilon)|$$

et, comme $g_\varepsilon \in F$, pour $|n|$ assez grand, $c_n(g_\varepsilon) = 0$ (une combinaison linéaire est une somme finie, Ce qui montre le résultat. ■

Proposition I.2

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, si f est de classe $\mathscr{C}^{p-1}$ et de classe $\mathscr{C}^p_{\text{p.m.}}$, alors

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^p}\right) \text{ au voisinage de } \pm\infty$$

Démonstration :

Cas $p = 1$

La fonction étant de classe $\mathscr{C}^0$, $\mathscr{C}^1$ par morceaux, il existe une subdivision de $[0, 2\pi]$

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_q = 2\pi$$

telle que, pour $k \in [\![1, q]\!]$, il existe une fonction $g_k \in \mathscr{C}^1([a_{k-1}, a_k], \mathbb{K})$ telle que

$$\forall x \in]a_{k-1}, a_k[,\ f(x) = g_k(x)$$

On a alors, par relation de Chasles, pour $n \in \mathbb{Z}^*$

Ce qui donne, en notant *abusivement* f' la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0, 2\pi[, \forall k \in [\![1, q]\!],\ [x \in]a_{k-1}, a_k[] \implies [f'(x) = g_k'(x)]$$

et, à nouveau par relation de Chasles

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(f) &= \frac{1}{in}\left(2\pi c_n(f') + \sum_{k=1}^{q}(g_k(a_{k-1}) - g_k(a_k))\right) \\ &= \frac{1}{in}\left(2\pi c_n(f') + \sum_{k=1}^{q}\left(f(a_{k-1}^+) - f(a_k^-)\right)\right) \end{aligned}$$

et, par périodicité

$$c_n(f) = \frac{1}{in}\left(c_n(f') + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{q}\left(f(a_k^+) - f(a_k^-)\right)\right) \tag{1.2}$$

Dans le cas qui nous intéresse, la fonction f étant supposée continue, on obtient[1]

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad c_n(f) = \frac{1}{in}c_n(f')}$$

Cas général

Il suffit de faire une récurrence sur p. ■

---

a On fera attention à cette formule.

1. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, la formule est exacte ;
2. si f est de classe $\mathscr{C}^0$ et $\mathscr{C}^1_{\text{p.m.}}$, la formule est exacte, mais la fonction f' n'est pas réellement la dérivée de f ;
3. si f est de classe $\mathscr{C}^1_{\text{p.m.}}$, la formule est *fausse*, car la formule (1.2), page 24 nous donne en général $inc_n(f) \neq c_n(f')$!

Définition I.3 Définition 1.3

La projection de f sur l'espace vectoriel engendré par les $(e_p)_{p\in[\![-n,n]\!]}$ est appelée[1] *série de Fourier complexe de* f, en écrivant chaque $e_p(t)$ sous forme trigonométrique, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(f)(t) = \sum_{p=-n}^{+n} c_p(f)e_p(t)$$

$$= a_0(f) + \sum_{p=1}^{n} (a_p(f)\cos(pt) + b_p(f)\sin(pt))$$

Les coefficients $(a_p(f))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p(f))_{p\in\mathbb{N}^*}$ s'appellent les *coefficients de Fourier trigonométriques* de f et la série

$$a_0(f) + \sum (a_p(f)\cos(pt) + b_p(f)\sin(pt))$$

s'appelle *série de Fourier trigonométrique de* f. On a de plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t}$$

et

$$\boxed{a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

---

1 **Attention :** Ce n'est pas une série, la terminologie est abusive.

Corentin :

信号学讲傅立叶分解的时候强调了每个三角函数里都有 pulsation ： $\sin(n\omega t)$ 和 $\cos(n\omega t)$，而 pulsation 的定义是 $\omega = \frac{2\pi}{T}$。在 $T = 2\pi$ 这个情况下刚好 pulsation 没了，但计算的时候一定要记得 ω。建议回去看袁老师的 ppt 里那一节

Remarque I.6

1. En général, la famille $(c_n(f).e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *ne définit pas des séries convergentes*, en tous cas ponctuellement, attention donc au fait que la somme s'effectue de $-n$ à $+n$. On a en fait
$$S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\ \|_{2,[0,2\pi]}} f$$
mais on ne sait *rien* sur la sommabilité de la famille $(c_n(f)e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Lorsque f est paire, on a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Lorsque f est impaire, on a $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Lorsque f est réelle, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) \in \mathbb{R}$$
Et, plus généralement
$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$$
5. La formule de Parseval devient alors
$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

3 Convolution

3.1 Théorèmes de Fubini

Rappel I.3

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, on dit que μ est *une mesure σ-finie sur* Ω si, il existe une famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) \in \mathbb{R}_+ \text{ (c'est-à-dire finie), et } \Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Proposition I.3

Soit $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés, où μ_1 et μ_2 sont σ-finies, alors il existe une unique mesure μ définie sur $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, vérifiant

$$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2,\ \mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \times \mu_2(A_2)$$

ce produit étant nul, dès que l'un de ses termes est nul. Cette mesure μ sera notée $\mu_1 \otimes \mu_2$. μ est une mesure σ-finie.

Les théorèmes de Fubini s'intéressent à la capacité d'intervertir deux intégrales (c'est donc bien un problème d'interversion de limites). On a deux versions différentes. L'une pour les fonctions positives, qui nous permettre aussi de montrer facilement qu'une fonction est intégrable par rapport à la tribu produit, et l'autre, plus générale, qui nous donnera une condition suffisante pour pouvoir intervertir.

Théorème I.4 Fubini-Tonelli

Soit $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés, les mesures étant σ-finies, soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow [0, +\infty]$, une application mesurable par rapport à la tribu produit $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, alors

1. L'application
$$F_1 : \begin{cases} \Omega_1 \longrightarrow [0, +\infty] \\ x \longmapsto \displaystyle\int_{\Omega_2} f(x, \bullet) \, \mathrm{d}\mu_2 \end{cases}$$
est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{T}_1$.

2. L'application
$$F_2 : \begin{cases} \Omega_2 \longrightarrow [0, +\infty] \\ y \longmapsto \displaystyle\int_{\Omega_1} f(\bullet, y) \, \mathrm{d}\mu_1 \end{cases}$$
est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{T}_2$.

3. On a de plus
$$\boxed{\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} F_1 \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_2} F_2 \, \mathrm{d}\mu_2}$$

Théorème I.5 Fubini-Lebesgue

Soit $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés. On suppose que μ_1 et μ_2 sont σ-finies. Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow [-\infty, +\infty]$, $\mu_1 \otimes \mu_2$-intégrable sur $\Omega_1 \times \Omega_2$, alors

1. La fonction
$$F_1 : \begin{cases} \Omega_1 \longrightarrow [-\infty, +\infty] \\ x \longmapsto \displaystyle\int_{\Omega_2} f(x, \bullet) \, \mathrm{d}\mu_2 \end{cases}$$
est définie $\mu_1 - \mathbf{p.p.}$ et intégrable sur Ω_1.

2. La fonction
$$F_2 : \begin{cases} \Omega_2 \longrightarrow [-\infty, +\infty] \\ y \longmapsto \displaystyle\int_{\Omega_1} f(\bullet, y) \, \mathrm{d}\mu_1 \end{cases}$$
est définie $\mu_2 - \mathbf{p.p.}$ et intégrable sur Ω_2.

3. On a de plus
$$\boxed{\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} F_1 \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_2} F_2 \, \mathrm{d}\mu_2}$$

Corentin :

- 拿到一个函数，如果是正的那就能用 Fubini-Toneli 换积分顺序
- 如果不是正的，给它套个绝对值就是正的了，这样就又能用 Fubini-Tonelli
- 带上绝对值之后如果积分能积出来，那就是 integrable（因为 integrable 的定义带绝对值）；而 integrable 又满足了 Fubini-Lebesgue 的要求，因此拿掉绝对值也可以变换积分顺序, 后面就能继续算

3.2 Définition et propriétés de convolution

Définition I.4

Soit $f : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est *à support compact* si

$$\exists K \text{ compact}, \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^s \setminus K, f(\underline{x}) = 0$$

On note $\mathscr{C}_c$ l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact.

Corentin :

下划线代表向量，没有特殊含义

Proposition I.4

Si $p \in [1, +\infty[$, alors $\mathscr{C}_c$ est dense dans $\mathcal{L}^p$ pour $\| \ \|_p$.

Remarque I.7

Comme une limite uniforme (pour la norme infinie) de fonctions continues est continue, ce résultat devient faux lorsque $p = +\infty$.

Définition I.5

Soit f et g deux fonctions mesurables (pour les tribus boréliennes) de $\mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$, on appelle *produit de convolution* de f et g et on note $f * g$, l'application (lorsqu'elle a un sens)

$$\begin{cases} \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R} \\ \underline{x} \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^s} \phi(\bullet, \underline{x}) \, \mathrm{d}\lambda, \end{cases}$$

où ϕ est l'application

$$(\underline{t}, \underline{x}) \longmapsto f(\underline{t}) \ g(\underline{x} - \underline{t})$$

Corentin :

就非得把重要的东西写在外边，这是人类版本：

$$\begin{cases} \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R} \\ \underline{x} \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^s} f(\underline{t}) \ g(\underline{x} - \underline{t}) \, \mathrm{d}t, \end{cases}$$

Propriété I.3

On a toujours

$$\boxed{f * g = g * f}$$

Propriété I.4

Si f et g sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^s, \mathcal{BO}(\mathbb{R}^s), \lambda)$, alors $f * g$ est défini $\lambda-\mathbf{p.p.}$ et, de plus, $f * g \in \mathcal{L}^1$.

Propriété I.5

Si $f \in \mathscr{C}_c$ et $g \in \mathcal{L}^p$ $(p \in [1, +\infty])$, alors $f * g$ est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}^s$.

Propriété I.6

Si $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$ $(p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, alors l'application $g \longmapsto f * g$ est lipschitzienne sur $\mathcal{L}^q$.

Propriété I.7

Si $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p \in [1, +\infty[$, alors $f * g$ est uniformément continue et bornée.

Deuxième partie

Convergence des séries de Fourier

1 Convergence ponctuelle

Théorème II.1 Dirichlet

Si $f \in E$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux,[1] alors la série de Fourier de f converge simplement vers la fonction

$$S(f) : x \longmapsto \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

[1] f n'est plus nécessairement continue.

2 Convergence uniforme

Propriété II.1

Soit $f \in E$, si $\sum |a_n(f)|$ et $\sum |b_n(f)|$ convergent, on a convergence uniforme de la série de Fourier trigonométrique.

Propriété II.2

Soit $f \in E$, si la famille $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, la famille $(c_n(f).e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille sommable et on a aussi convergence uniforme de la série de Fourier de f.

Théorème II.2 Convergence normale pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^1_{\text{p.m.}}$

Si $f \in E$ est continue, de classe $\mathscr{C}^1_{\text{p.m.}}$, alors

$$S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur } \mathbb{R}$$

Théorème II.3 Fejér

Soit $f \in E$, continue alors

$$\sigma_n(f) = \frac{S_0(f) + \cdots + S_n(f)}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur } \mathbb{R}$$

où $S_n(f)$ désigne la somme partielle de la série de Fourier de f.

3 Convolution avancée et Régularisation

Définition II.1

1. On appelle *approximation de Dirac* toute suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}^s$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telles que
   (a) *Régularité* les φ_n sont continues sur $\mathbb{R}^s$.
   (b) *Support compact* il existe un compact $K_0 \subset \mathbb{R}^s$, tel que
   $$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^s \setminus K_0, \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(\underline{x}) = 0$$
   (c) *Normalisation*
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}^s} \varphi_n \,\mathrm{d}\lambda = 1$$
   (d) *Convergence*
   $$\forall \delta > 0, \int_{BF(\underline{0},\delta)^c} \varphi_n \,\mathrm{d}\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
2. On appelle *suite régularisante* toute approximation de Dirac qui vérifie de plus
   (a) *Régularité* les φ_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.
   (b) *Convergence* il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$, tels que
   $$r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \{\underline{x} \in \mathbb{R}^s, \varphi_n(\underline{x}) \neq \underline{0}\} \subset BF(\underline{0}, r_n)$$

Corentin :

对于 suite regularisante 来说，除了 regularite 的唯一区别是：这些函数的 support 不能仅仅限定在 K_0，而是要向 0 收缩.

Propriété II.3

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de Dirac. Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$, si K est un compact de $\mathbb{R}^s$, alors

$$\boxed{\|\varphi_n * f - f\|_{\infty,K} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Remarque II.1

Si f est continue à support compact, on obtient alors

$$\|\varphi_n * f - f\|_{\infty,\mathbb{R}^s} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Théorème II.4 Weierstraß

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$, alors $\exists$ une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\|P_n - f\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Proposition II.1

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de Dirac. Si $p \in [1, +\infty[$ (ici, $p \neq +\infty$), et si $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^s, \mathcal{BO}(\mathbb{R}^s), \lambda)$, alors $\varphi_n * f$ est dans $\mathscr{L}^p$ et

$$\|\varphi_n * f - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Propriété II.4

Si $f \in \mathscr{L}^1$ et si $\varphi \in \mathscr{C}_c$ est de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$), alors $\varphi * f$ est de classe $\mathscr{C}^k$. On a de plus

$$\boxed{\forall i \in [\![1, s]\!],\ \partial_i(\varphi * f) = (\partial_i \varphi) * f}$$

Proposition II.2

Soit $p \in [1, +\infty[$, alors l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact (que nous noterons $\mathscr{C}_c^\infty$) est dense dans $\mathscr{L}^p$ pour $\| \ \|_p$.

Troisième partie

Transformées de Fourier

1 Théorie

Définition III.1

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{BO}(\mathbb{R}), \lambda; \mathbb{C})$, on appelle *transformée de Fourier de f* l'application

$$\widehat{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \omega \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t. \end{cases}$$

On dit souvent que t varie dans le domaine *temporel* et que ω varie dans le domaine *fréquentiel*.

Remarque III.1

On a clairement

$$\forall f \in \mathcal{L}^1, \left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leqslant \|f\|_1$$

Propriété III.1

$f \longmapsto \widehat{f}$ est linéaire.

Propriété III.2

L'application $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :
On applique le théorème de continuité sous le signe $\int$ à la fonction

$$g : (t, \omega) \longmapsto f(t)e^{-i\omega t}$$

Elle vérifie

1. $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $g(\bullet, \omega)$ est mesurable, car f l'est.
2. $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t, \omega)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Et on a

$$\forall (t,\omega) \in \mathbb{R}^2,\ |g(t,\omega)| \leqslant |f(t)| \text{ intégrable sur } \mathbb{R}$$

Proposition III.1 Lemme de Riemann-Lebesgue

Si $f \in \mathcal{L}^1$, on a

$$\widehat{f}(\omega) \xrightarrow[\omega \to \pm\infty]{} 0$$

Propriété III.3

1. Si f est réelle, alors
$$\forall \omega \in \mathbb{R},\ \widehat{f}(-\omega) = \overline{\widehat{f}(\omega)}$$
2. Si f est paire, alors $\widehat{f}$ est paire.
3. Si f est impaire, alors $\widehat{f}$ est impaire.

Propriété III.4

Translation temporelle

Si $x_0 \in \mathbb{R}$, et $f_{x_0} : x \longmapsto f(x + x_0)$, alors

$$\boxed{\forall \omega \in \mathbb{R},\ \widehat{f_{x_0}}(\omega) = \widehat{f}(\omega) e^{i\omega x_0}}$$

Translation fréquentielle

Si $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et $g_{\omega_0} : x \longmapsto f(x) e^{-i\omega_0 x}$, alors

$$\boxed{\forall \omega \in \mathbb{R},\ \widehat{f}(\omega + \omega_0) = \widehat{g_{\omega_0}}}$$

Lien avec le produit de deux fonctions

Si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{L}^1$, alors

$$\boxed{\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}}$$

Démonstration :

On sait que $f * g$ est définie $\lambda - \mathbf{p.p.}$ et dans $\mathscr{L}^1$, on peut donc définir sa transformée de Fourier, si $\omega \in \mathbb{R}$, alors

$$\widehat{f * g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t) e^{-i\omega t} \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - x) g(x) \,\mathrm{d}x \right) e^{-i\omega t} \,\mathrm{d}t$$

En intervertissant les intégrales (théorème de Fubini-Lebesgue), il vient

$$\widehat{f*g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$$

$$\underset{u=t-x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega(u+x)} \, \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}x$$

■

Proposition III.2

Si $f \in \mathcal{L}^1$, et soit

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto -ixf(x) \end{cases}$$

Si $g \in \mathcal{L}^1$, alors $\widehat{f}$ est dérivable et

$$\boxed{(\widehat{f})' = \widehat{g}}$$

Démonstration :
On applique le théorème de dérivation sous le signe $\int$ à la fonction

$$\phi : (t, \omega) \longmapsto f(t) e^{-i\omega t}$$

Elle vérifie

1. *Intégrabilité.*
$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \ |\phi(t,\omega)| = |f(t)| \text{ intégrable sur } \mathbb{R}$$
2. *Dérivabilité.*
$$\forall (t,\omega) \in \mathbb{R}^2, \ \partial_2 \phi(t,\omega) = -itf(t)e^{-i\omega t}$$
3. *Domination.*
$$\forall (t,\omega) \in \mathbb{R}^2, \ |\partial_2 \phi(t,\omega)| = |g(t)| \text{ intégrable sur } \mathbb{R}$$

■

Proposition III.3

Soit $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathscr{C}^1$ telle que $f' \in \mathcal{L}^1$, alors

$$\boxed{\forall \omega \in \mathbb{R}, \ \widehat{(f')}(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega)}$$

Démonstration :
On a par définition, pour $\omega \in \mathbb{R}$

$$\widehat{(f')}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t$$

on a envie de faire une IPP, mais quel est le comportement de f au voisinage de $\pm\infty$?

1. *Sous les hypothèses données,* $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$. En effet, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\, \mathrm{d}t$$

   donc

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \int_{[x,y]} |f'|\, \mathrm{d}\lambda \xrightarrow[x\to\infty,\ y\to\infty]{} 0$$

2. *Intégration par parties.* On a alors, pour $\omega \in \mathbb{R}$

$$\widehat{(f')}(\omega) = \left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega f(t) e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t = i\omega \widehat{f}(\omega)$$

■

Remarque III.2

On n'a pas besoin de $\mathscr{C}^1$, on a utilisé seulement le fait que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, \mathrm{d}t \quad \lambda - \textbf{p.p.}$$

ce qui se produit lorsque f est continue, dérivable, de dérivée dans $\mathcal{L}^1$. En particulier, cela sera vrai pour les fonctions continues, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur tout segment.

Théorème III.1 Inversion de Fourier

Si $f \in \mathcal{L}^1$ continue est telle que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$, alors

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{+i\omega x}\, \mathrm{d}\omega\right)}$$

Remarque III.3

Nous avons vu que la transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{L}^1$ était nécessairement continue, donc si $\widehat{f}$ est dans $\mathcal{L}^1$, alors $\widehat{(\widehat{f})}$ doit être continue, si on veut avoir l'expression de f comme dans l'énoncé, il faut supposer f continue...

Remarque III.4

L'application $f \longmapsto \widehat{f}$ définie sur $\mathcal{L}^1 \cap \mathscr{C}^0$ est injective.

Remarque III.5

Transformée de Fourier en dimension s. Il est facile de généraliser la notion de transformée de Fourier aux fonctions définies sur $\mathbb{R}^s$, en introduisant la fonction

$$\phi(\underline{x}, \underline{\omega}) = f(\underline{x}) e^{-i\langle \underline{x}, \underline{\omega} \rangle} \text{ où } \langle \underline{x}, \underline{\omega} \rangle = \sum_{k=1}^{s} x_k \omega_k$$

On définit alors $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}^s$ par

$$\forall \underline{\omega} \in \mathbb{R}^s, \ \widehat{f}(\underline{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^s} \phi(\bullet, \underline{\omega}) \, \mathrm{d}\lambda$$

La formule d'inversion pour $f \in \mathcal{L}^1$ et $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$ devient

$$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^s, \ f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{\mathbb{R}^s} \psi(\underline{x}, \bullet) \, \mathrm{d}\lambda$$

où

$$\psi(\underline{x}, \underline{\omega}) = \widehat{f}(\underline{\omega}) e^{+i\langle \underline{\omega}, \underline{x} \rangle}$$

2 Applications aux EDPs

3 Quelques EDPs importantes

4 Transformée de Fourier sur les fonctions complexes