

# Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels

Cours assuré par Sijia KONG

Rédigé par Corentin 邱天意 P2023

Semestre 2025-2026-1



## Motivations

Le livre de ce cours n'est pas facile à comprendre. Il utilise les notations bizarres, est désordonné, et a été conçu de telle sorte que les élèves ne puissent pas apprendre par eux-mêmes. Je mets ici tous les théorèmes/propositions à connaître, et des commentaires pour faciliter la compréhension. Ce fichier ne contient aucune démonstration compliquée, seules les démonstrations exigées en colle apparaissent.

Les démonstrations exigées en colle sont en gros :

- Bessel et Parseval
- 3 propriétés sur les coefficients de Fourier
  - Unicité des coefficients
  - Riemann-Lebesgue, convergence vers 0
  - VITESSE de décroissance sous certaines conditions
- 7 propriétés des transformées de Fourier.
  - La continuité du spectre
  - Riemann-Lebesgue, extinction des hautes fréquences
  - Symétrie hermitienne
  - Translation temporelle
  - Translation fréquentielle
  - Dérivée de la transformée
  - Transformée de la dérivée

## Table des matières

<b>I Séries de Fourier</b>	<b>4</b>
<b>1 Espaces <math>\mathcal{L}^p</math></b>	<b>5</b>
<b>2 Convergence <math>\mathcal{L}^2</math></b>	<b>8</b>
<b>3 Convolution</b>	<b>14</b>
3.1 Théorèmes de Fubini . . . . .	14
3.2 Définition et propriétés de convolution . . . . .	16

<b>II Convergence des séries de Fourier</b>	<b>19</b>
<b>1 Convergence ponctuelle</b>	<b>19</b>
<b>2 Convergence uniforme</b>	<b>19</b>
<b>3 Convolution avancée et Régularisation</b>	<b>20</b>
<b>III Transformées de Fourier</b>	<b>22</b>

# Première partie

## Séries de Fourier

### Notations

Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré,

$$\mathcal{L}^2(\Omega) \stackrel{\text{Not}}{=} \left\{ f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K}), f \text{ mesurable}, \int_{\Omega} |f|^2 d\mu < +\infty \right\}$$

où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Pour les séries de Fourier, nous travaillerons avec

$$(\Omega, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{BO}(\mathbb{R}), \lambda)$$

où  $\mathcal{BO}(\mathbb{R})$  désigne la tribu borélienne de  $\mathbb{R}$  et  $\lambda$  la mesure usuelle, définie par

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, [a < b] \implies [\lambda([a, b]) = b - a]$$

et

$$E = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K}), f \text{ } 2\pi\text{-périodique et } f|_{[0, 2\pi]} \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi]) \}$$

Corentin :

- 这门课前半部分讲的  $L^p$  空间在这里又变回  $\mathcal{L}^p$  了，导致所有东西后面都拖着 presque partout
- 而且  $E$  的元素都是  $2\pi$  周期，这本书省略了有关周期的一些部分，计算的时候遇到其他周期函数得加上

### Remarque I.1

Si  $T \in \mathbb{R}_+^*$  et  $f$   $T$ -périodique, alors

$$g : x \mapsto f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) \text{ est } 2\pi\text{-périodique}$$

## Propriété I.1

La fonction définie sur  $E$ , par

$$f \mapsto \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$$

est une semi-norme sur  $E$ , notée  $\|f\|_{2,[0,2\pi]}$ .

Corentin :

用这个就会导致拓扑学的东西无法使用，因为这个 norme 不满足 separation  
两个不一样的函数的 norme 可能一样

1 Espaces  $\mathcal{L}^p$ 

Corentin :

我记得孔老师某次习题的时候说过期末的时候  $\mathcal{L}^p$  空间不考（有待证实）

## Définition I.1

Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré, et  $p \in [1, +\infty[$ , on note

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{K}) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}, \text{ mesurable, } |f|^p \text{ est intégrable sur } \Omega\}$$

Lorsqu'il n'y aura pas ambiguïté, nous noterons simplement  $\mathcal{L}^p$ .

## Rappel I.1

Rappelons quelques inégalités vues dans le cours de topologie ou le cours d'intégration.

1. *Inégalité de Hölder* Si  $f \in \mathcal{L}^p$  et  $g \in \mathcal{L}^q$ , avec

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

alors  $fg \in \mathcal{L}^1$  et

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \sqrt[p]{\int_{\Omega} |f|^p d\mu} \sqrt[q]{\int_{\Omega} |g|^q d\mu}$$

2. On en déduit l'inégalité de Minkowski.

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{L}^p)^2, \quad \sqrt[p]{\int_{\Omega} |f + g|^p d\mu} \leq \sqrt[p]{\int_{\Omega} |f|^p d\mu} + \sqrt[p]{\int_{\Omega} |g|^p d\mu}$$

3.  $\mathcal{L}^p$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

4. L'application définie par

$$\begin{cases} \mathcal{L}^p \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f \longmapsto \sqrt[p]{\int_{\Omega} |f|^p d\mu} \end{cases}$$

est une semi-norme sur  $\mathcal{L}^p$  (notée  $\|\cdot\|_p$ ) et on a

$$\forall f \in \mathcal{L}^p, [\|f\|_p = 0] \implies [f = 0 \text{ p.p.}]$$

### Rappel I.2 Suite de Cauchy

Soit  $(E, d)$  un espace métrique, on appelle *suite de Cauchy* toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  telle que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, d(u_p, u_q) \leq \varepsilon$$

1. Toute suite de Cauchy est bornée.
2. Toute suite convergente est de Cauchy.
3. Toute suite de Cauchy à valeurs réelles est convergente.

Corentin :

度量空间没学过哪来的 rappel, 我把 seb 写的定义贴在这:

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite d'éléments de  $E$ .

On dit que  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est **de Cauchy** si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n \geq n_0$  suffisamment grand tel que, pour tous  $p, q \geq n$ , la distance entre les deux termes est inférieur à  $\varepsilon$ .

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \geq n_0, \forall p \geq n, \forall q \geq n, d(u_p, u_q) < \varepsilon.$$

### Théorème I.1 Riesz

Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré,  $p \in [1, +\infty[$ , alors toute suite de Cauchy de  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{K})$  pour la semi-norme  $\|\cdot\|_p$  converge pour la semi-norme  $\|\cdot\|_p$ .

Corentin :

其实就是想说  $\mathcal{L}^p$  是 complet 的

### Remarque I.2

- Le cas particulier  $p = 2$ , où la semi-norme découle d'un semi-produit scalaire défini par

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}^2, \langle f, g \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{\Omega} fg \, d\mu$$

a la même propriété que toute suite de Cauchy converge pour la semi-norme  $\|\cdot\|_2$ . En particulier, on peut lui appliquer le théorème de représentation sous la forme suivante. Comme nous n'avons qu'une semi-norme, la fonction  $f$  n'est plus unique, mais deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  représentant  $\psi$  seront égales  $\mu - \text{p.p.}$

- On peut généraliser à  $p = +\infty$  de la manière suivante

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{R}) \stackrel{\text{Def}}{=} \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable}, \exists K \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leq K \quad \mu - \text{p.p.}\}$$

La semi-norme est alors la semi-norme infinie définie par

$$\forall f \in \mathcal{L}^\infty, \|f\|_\infty = \inf (\{K \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leq K \quad \mu - \text{p.p.}\})$$

On a toujours le fait qu'une suite de Cauchy pour la semi-norme  $\|\cdot\|_\infty$  converge pour la semi-norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

Corentin :

$\mathcal{L}^\infty$  也是 complet 的, 但后边有些性质里  $\mathcal{L}^\infty$  跟其他的不太一样

## 2 Convergence $\mathcal{L}^2$

### Définition I.2

- On munit  $E$  du « produit scalaire hermitien » suivant<sup>1</sup>

$$\forall (f, g) \in E^2, \langle f, g \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} \overline{f} g \, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) \, dt$$

- Posons, pour  $n \in \mathbb{Z}$

$$e_n : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto e^{inx} \end{cases}$$

Clairement,  $e_n \in E$  et pour  $f \in E$ , on appelle  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $f$  l'expression

$$c_n(f) \stackrel{\text{Not}}{=} \langle e_n, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, dt$$

<sup>a</sup> Ce n'est pas réellement un produit scalaire, car il n'est pas défini! En effet, si  $f \in E$ , alors

$$[\langle f, f \rangle = 0] \iff [f(x) = 0 \quad \text{p.p.}]$$

### Proposition I.1 Système total

La famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un système total de  $E$ , c'est-à-dire

- elle est orthonormée ;
- le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par cette famille est dense dans  $E$  pour la semi-norme  $\| \cdot \|_{2,[0,2\pi]}$ .

### Théorème I.2 Bessel et Parseval

Soit  $f \in E$ , on a alors

1. *Inégalité de Bessel* : pour  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $p < q$

$$\sum_{n=p}^q |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

2. *Formule de Parseval*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Démonstration :

#### Remarque I.3 Interprétation géométrique de Bessel

L'inégalité de Bessel,  $\sum |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$ , exprime que la norme de la projection orthogonale de  $f$  sur un sous-espace de dimension finie est toujours inférieure à celle de  $f$ . Une conséquence fondamentale est que la somme partielle de Fourier  $S_N(f)$  réalise la **meilleure approximation** en norme  $\mathcal{L}^2$  de  $f$  par un polynôme trigonométrique de degré  $\leq N$  :

$$\|f - S_N(f)\|_2 \leq \|f - T_N\|_2$$

Ceci est une application directe du théorème de la projection orthogonale dans un espace de Hilbert.

#### Remarque I.4 Parseval : Conservation et Application

L'égalité de Parseval,  $\sum |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2$ , est la condition nécessaire et suffisante pour que le système trigonométrique soit une base hilbertienne. Elle signifie qu'aucune énergie n'est perdue dans la transformation : la puissance totale du signal (intégrale de  $|f|^2$ ) égale la somme des puissances de ses harmoniques ( $|c_n|^2$ ). C'est aussi un outil de calcul puissant.

Corentin :

可以用能量守恒理解

## Remarque I.5 Interprétation de la formule de Parseval

On a donc un deuxième produit sesqui-linéaire, hermitien, positif sur  $E$ , défini par

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f)} c_n(g)$$

qui coïncide avec le précédent sur  $E$ .

## Propriété I.2 Unicité des coefficients de Fourier pour les applications continues

L'application

$$\begin{cases} E \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \\ f \longmapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$

est linéaire et injective.

Plus généralement, pour tout  $f \in E$

$$[(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}}] \iff [\lambda(\{x \in [0, 2\pi], f(x) \neq 0\}) = 0]$$

**Démonstration :**

L'application est clairement linéaire, calculons son noyau. Soit  $f \in E$ , telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = 0$$

alors la formule de Parseval nous donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = 0$$

Cas où  $f$  est continue

Comme la fonction  $t \longmapsto |f(t)|^2$  est positive, continue, on en déduit que  $f = 0$ .

Cas où  $f$  est quelconque dans  $E$ 

1. ( $\Rightarrow$ ) Soit, pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$A_n = \left\{ x \in [0, 2\pi], |f(x)|^2 \geq \frac{1}{n} \right\}$$

alors

$$0 \leq \frac{1}{n} \lambda(A_n) \leq \int_{A_n} |f|^2 d\lambda \leq \int_{[0, 2\pi]} |f|^2 d\lambda = 0$$

donc  $\lambda(A_n) = 0$ . Mais en ce cas

$$\Delta = \{x \in [0, 2\pi], f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$$

réunion dénombrable d'ensembles de  $\lambda$ -mesure nulle est de  $\lambda$ -mesure nulle, ou encore  $\lambda(\Delta) = 0$ .

2. ( $\Leftarrow$ ) Par définition de l'intégrale, on a

$$\int_{[0,2\pi]} |f|^2 d\lambda = \underbrace{\int_{[0,2\pi] \setminus \Delta} |f|^2 d\lambda}_{=0 \text{ car } f \text{ est nulle en dehors de } \Delta} + \underbrace{\int_{\Delta} |f|^2 d\lambda}_{=0 \text{ car } \lambda(\Delta)=0} = 0$$

■

### Théorème I.3 Riemann-Lebesgue

Soit  $f \in E$ , alors

$$c_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow \pm\infty]{} 0$$

**Démonstration :**

Soit  $\varepsilon > 0$ , on sait qu'il existe alors  $g_\varepsilon \in F$  (voir les notations de la proposition 1.1, page 13) telle que

$$\|f - g_\varepsilon\|_{2,[0,2\pi]} \leq \varepsilon$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz (Réf. [7]) nous assure alors que, pour  $n \in \mathbb{Z}$

$$|\langle e_n, f \rangle - \langle e_n, g_\varepsilon \rangle| \leq \|f - g_\varepsilon\|_{2,[0,2\pi]} \leq \varepsilon$$

Mais

$$|\langle e_n, f \rangle - \langle e_n, g_\varepsilon \rangle| = |c_n(f) - c_n(g_\varepsilon)|$$

et, comme  $g_\varepsilon \in F$ , pour  $|n|$  assez grand,  $c_n(g_\varepsilon) = 0$  (une combinaison linéaire est une somme finie, Ce qui montre le résultat. ■

### Proposition I.2

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ , si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{p-1}$  et de classe  $\mathcal{C}_{\text{p.m.}}^p$ , alors

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^p}\right) \text{ au voisinage de } \pm\infty$$

**Démonstration :**

Cas  $p = 1$

La fonction étant de classe  $\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^1$  par morceaux, il existe une subdivision de  $[0, 2\pi]$

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_q = 2\pi$$

telle que, pour  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ , il existe une fonction  $g_k \in \mathcal{C}^1([a_{k-1}, a_k], \mathbb{K})$  telle que

$$\forall x \in ]a_{k-1}, a_k[, f(x) = g_k(x)$$

On a alors, par relation de Chasles, pour  $n \in \mathbb{Z}^*$

Ce qui donne, en notant *abusivement*  $f'$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in [0, 2\pi[, \forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket, [x \in ]a_{k-1}, a_k[] \implies [f'(x) = g'_k(x)]$$

et, à nouveau par relation de Chasles

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(f) &= \frac{1}{in} \left( 2\pi c_n(f') + \sum_{k=1}^q (g_k(a_{k-1}) - g_k(a_k)) \right) \\ &= \frac{1}{in} \left( 2\pi c_n(f') + \sum_{k=1}^q (f(a_{k-1}^+) - f(a_k^-)) \right) \end{aligned}$$

et, par périodicité

$$c_n(f) = \frac{1}{in} \left( c_n(f') + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^q (f(a_k^+) - f(a_k^-)) \right) \quad (1.2)$$

Dans le cas qui nous intéresse, la fonction  $f$  étant supposée continue, on obtient<sup>1</sup>

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}^*, c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')}$$

### Cas général

Il suffit de faire une récurrence sur  $p$ . ■

a On fera attention à cette formule.

1. Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , la formule est exacte ;
2. si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^0$  et  $\mathcal{C}_{\text{p.m.}}^1$ , la formule est exacte, mais la fonction  $f'$  n'est pas réellement la dérivée de  $f$  ;
3. si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}_{\text{p.m.}}^1$ , la formule est *fausse*, car la formule (1.2), page 24 nous donne en général  $inc_n(f) \neq c_n(f')$  !

## Définition I.3 Définition 1.3

La projection de  $f$  sur l'espace vectoriel engendré par les  $(e_p)_{p \in [-n,n]}$  est appelée<sup>1</sup> *série de Fourier complexe de  $f$* , en écrivant chaque  $e_p(t)$  sous forme trigonométrique, il vient

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(f)(t) &= \sum_{p=-n}^{+n} c_p(f) e_p(t) \\ &= a_0(f) + \sum_{p=1}^n (a_p(f) \cos(pt) + b_p(f) \sin(pt)) \end{aligned}$$

Les coefficients  $(a_p(f))_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(b_p(f))_{p \in \mathbb{N}^*}$  s'appellent les *coefficients de Fourier trigonométriques* de  $f$  et la série

$$a_0(f) + \sum (a_p(f) \cos(pt) + b_p(f) \sin(pt))$$

s'appelle *série de Fourier trigonométrique de  $f$* . On a de plus, pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

et

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

**1 Attention :** Ce n'est pas une série, la terminologie est abusive.

Corentin :

信号学讲傅立叶分解的时候强调了每个三角函数里都有 pulsation :  $\sin(n\omega t)$  和  $\cos(n\omega t)$ , 而 pulsation 的定义是  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 。在  $T = 2\pi$  这个情况下刚好 pulsation 没了, 但计算的时候一定要记得  $\omega$ 。建议回去看袁老师的 ppt 里那一节

## Remarque I.6

1. En général, la famille  $(c_n(f).e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  ne définit pas des séries convergentes, en tous cas ponctuellement, attention donc au fait que la somme s'effectue de  $-n$  à  $+n$ . On a en fait

$$S_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\parallel_{2,[0,2\pi]}} f$$

mais on ne sait rien sur la sommabilité de la famille  $(c_n(f)e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Lorsque  $f$  est paire, on a  $b_n(f) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. Lorsque  $f$  est impaire, on a  $a_n(f) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Lorsque  $f$  est réelle, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) \in \mathbb{R}$$

Et, plus généralement

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$$

5. La formule de Parseval devient alors

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

### 3 Convolution

#### 3.1 Théorèmes de Fubini

## Rappel I.3

Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré, on dit que  $\mu$  est une mesure  $\sigma$ -finie sur  $\Omega$  si, il existe une famille dénombrable  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^\mathbb{N}$  vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) \in \mathbb{R}_+ \text{ (c'est-à-dire finie), et } \Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

**Proposition I.3**

Soit  $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$  et  $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$  deux espaces mesurés, où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont  $\sigma$ -finies, alors il existe une unique mesure  $\mu$  définie sur  $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ , vérifiant

$$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2, \mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \times \mu_2(A_2)$$

ce produit étant nul, dès que l'un de ses termes est nul. Cette mesure  $\mu$  sera notée  $\mu_1 \otimes \mu_2$ .  $\mu$  est une mesure  $\sigma$ -finie.

Les théorèmes de Fubini s'intéressent à la capacité d'intervertir deux intégrales (c'est donc bien un problème d'interversion de limites). On a deux versions différentes. L'une pour les fonctions positives, qui nous permettre aussi de montrer facilement qu'une fonction est intégrable par rapport à la tribu produit, et l'autre, plus générale, qui nous donnera une condition suffisante pour pouvoir intervertir.

**Théorème I.4 Fubini-Tonelli**

Soit  $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$  et  $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$  deux espaces mesurés, les mesures étant  $\sigma$ -finies, soit  $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, +\infty]$ , une application mesurable par rapport à la tribu produit  $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ , alors

1. L'application

$$F_1 : \begin{cases} \Omega_1 \rightarrow [0, +\infty] \\ x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, \bullet) d\mu_2 \end{cases}$$

est mesurable par rapport à la tribu  $\mathcal{T}_1$ .

2. L'application

$$F_2 : \begin{cases} \Omega_2 \rightarrow [0, +\infty] \\ y \mapsto \int_{\Omega_1} f(\bullet, y) d\mu_1 \end{cases}$$

est mesurable par rapport à la tribu  $\mathcal{T}_2$ .

3. On a de plus

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} F_1 d\mu_1 = \int_{\Omega_2} F_2 d\mu_2$$

## Théorème I.5 Fubini-Lebesgue

Soit  $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$  et  $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$  deux espaces mesurés. On suppose que  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont  $\sigma$ -finies. Soit  $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [-\infty, +\infty]$ ,  $\mu_1 \otimes \mu_2$ -intégrable sur  $\Omega_1 \times \Omega_2$ , alors

1. La fonction

$$F_1 : \begin{cases} \Omega_1 \rightarrow [-\infty, +\infty] \\ x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, \bullet) d\mu_2 \end{cases}$$

est définie  $\mu_1$  - p.p. et intégrable sur  $\Omega_1$ .

2. La fonction

$$F_2 : \begin{cases} \Omega_2 \rightarrow [-\infty, +\infty] \\ y \mapsto \int_{\Omega_1} f(\bullet, y) d\mu_1 \end{cases}$$

est définie  $\mu_2$  - p.p. et intégrable sur  $\Omega_2$ .

3. On a de plus

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} F_1 d\mu_1 = \int_{\Omega_2} F_2 d\mu_2$$

Corentin :

- 拿到一个函数，如果是正的那就能用 Fubini-Tonelli 换积分顺序
- 如果不是正的，给它套个绝对值就是正的了，这样就又能用 Fubini-Tonelli
- 带上绝对值之后如果积分能积出来，那就是 integrable (因为 integrable 的定义带绝对值)；而 integrable 又满足了 Fubini-Lebesgue 的要求，因此拿掉绝对值也可以变换积分顺序，后面就能继续算

## 3.2 Définition et propriétés de convolution

## Définition I.4

Soit  $f : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est à support compact si

$$\exists K \text{ compact}, \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^s \setminus K, f(\underline{x}) = 0$$

On note  $\mathcal{C}_c$  l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact.

Corentin :

下划线代表向量，没有特殊含义

Proposition I.4

Si  $p \in [1, +\infty[$ , alors  $\mathcal{C}_c$  est dense dans  $\mathcal{L}^p$  pour  $\|\cdot\|_p$ .

Remarque I.7

Comme une limite uniforme (pour la norme infinie) de fonctions continues est continue, ce résultat devient faux lorsque  $p = +\infty$ .

Définition I.5

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions mesurables (pour les tribus boréliennes) de  $\mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ , on appelle *produit de convolution* de  $f$  et  $g$  et on note  $f * g$ , l'application (lorsqu'elle a un sens)

$$\begin{cases} \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R} \\ \underline{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^s} \phi(\bullet, \underline{x}) \, d\lambda, \end{cases}$$

où  $\phi$  est l'application

$$(\underline{t}, \underline{x}) \mapsto f(\underline{t}) g(\underline{x} - \underline{t})$$

Corentin :

就非得把重要的东西写在外边，这是人类版本：

$$\begin{cases} \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R} \\ \underline{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^s} f(\underline{t}) g(\underline{x} - \underline{t}) \, dt, \end{cases}$$

## Propriété I.3

On a toujours

$$f * g = g * f$$

## Propriété I.4

Si  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^s, \mathcal{BO}(\mathbb{R}^s), \lambda)$ , alors  $f * g$  est défini  $\lambda$ -p.p. et, de plus,  $f * g \in \mathcal{L}^1$ .

## Propriété I.5

Si  $f \in \mathcal{C}_c$  et  $g \in \mathcal{L}^p$  ( $p \in [1, +\infty]$ ), alors  $f * g$  est uniformément continue et bornée sur  $\mathbb{R}^s$ .

## Propriété I.6

Si  $f \in \mathcal{L}^p$  et  $g \in \mathcal{L}^q$  ( $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ), alors l'application  $g \mapsto f * g$  est lipschitzienne sur  $\mathcal{L}^q$ .

## Propriété I.7

Si  $f \in \mathcal{L}^p$  et  $g \in \mathcal{L}^q$ , où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $p \in [1, +\infty[$ , alors  $f * g$  est uniformément continue et bornée.

## Deuxième partie

# Convergence des séries de Fourier

### 1 Convergence ponctuelle

Théorème II.1 Dirichlet

Si  $f \in E$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux,<sup>1</sup> alors la série de Fourier de  $f$  converge simplement vers la fonction

$$S(f) : x \mapsto \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

<sup>1</sup>  $f$  n'est plus nécessairement continue.

### 2 Convergence uniforme

Propriété II.1

Soit  $f \in E$ , si  $\sum |a_n(f)|$  et  $\sum |b_n(f)|$  convergent, on a convergence uniforme de la série de Fourier trigonométrique.

Propriété II.2

Soit  $f \in E$ , si la famille  $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable, la famille  $(c_n(f).e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une famille sommable et on a aussi convergence uniforme de la série de Fourier de  $f$ .

Théorème II.2 Convergence normale pour les fonctions de classe  $\mathcal{C}_{\text{p.m.}}^1$ .

Si  $f \in E$  est continue, de classe  $\mathcal{C}_{\text{p.m.}}^1$ , alors

$$S_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} f \text{ sur } \mathbb{R}$$

## Théorème II.3 Fejér

Soit  $f \in E$ , continue alors

$$\sigma_n(f) = \frac{S_0(f) + \cdots + S_n(f)}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} f \text{ sur } \mathbb{R}$$

où  $S_n(f)$  désigne la somme partielle de la série de Fourier de  $f$ .

### 3 Convolution avancée et Régularisation

## Définition II.1

1. On appelle *approximation de Dirac* toute suite de fonctions  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies sur  $\mathbb{R}^s$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  telles que

- (a) *Régularité* les  $\varphi_n$  sont continues sur  $\mathbb{R}^s$ .
- (b) *Support compact* il existe un compact  $K_0 \subset \mathbb{R}^s$ , tel que

$$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^s \setminus K_0, \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(\underline{x}) = 0$$

- (c) *Normalisation*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}^s} \varphi_n \, d\lambda = 1$$

- (d) *Convergence*

$$\forall \delta > 0, \int_{BF(\underline{0}, \delta)^c} \varphi_n \, d\lambda \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

2. On appelle *suite régularisante* toute approximation de Dirac qui vérifie de plus

- (a) *Régularité* les  $\varphi_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
- (b) *Convergence* il existe une suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in ]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$ , tels que

$$r_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \{\underline{x} \in \mathbb{R}^s, \varphi_n(\underline{x}) \neq 0\} \subset BF(\underline{0}, r_n)$$

Corentin :

对于 suite régularisante 来说，除了 regularite 的唯一区别是：这些函数的 support 不能仅仅限定在  $K_0$ ，而是要向 0 收缩。

## Propriété II.3

Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une approximation de Dirac. Si  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$ , si  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^s$ , alors

$$\|\varphi_n * f - f\|_{\infty, K} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

## Remarque II.1

Si  $f$  est continue à support compact, on obtient alors

$$\|\varphi_n * f - f\|_{\infty, \mathbb{R}^s} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

## Théorème II.4 Weierstraß

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ , alors  $\exists$  une suite de fonctions polynomiales  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\|P_n - f\|_{\infty, [a, b]} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

## Proposition II.1

Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une approximation de Dirac. Si  $p \in [1, +\infty[$  (ici,  $p \neq +\infty$ ), et si  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^s, \mathcal{BO}(\mathbb{R}^s), \lambda)$ , alors  $\varphi_n * f$  est dans  $\mathcal{L}^p$  et

$$\|\varphi_n * f - f\|_p \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

## Propriété II.4

Si  $f \in \mathcal{L}^1$  et si  $\varphi \in \mathcal{C}_c$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ ), alors  $\varphi * f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .  
On a de plus

$$\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \quad \partial_i(\varphi * f) = (\partial_i \varphi) * f$$

## Proposition II.2

Soit  $p \in [1, +\infty[$ , alors l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact (que nous noterons  $\mathcal{C}_c^\infty$ ) est dense dans  $\mathcal{L}^p$  pour  $\|\cdot\|_p$ .

## Troisième partie

# Transformées de Fourier