cheating paper qiutianyi

CH1 ondes et particules

P2 Énergie du photon : $E = hf = \hbar\omega$.
Spectre atomique : $hf = \Delta E$.

P10 Relation d'Einstein-Planck : $E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ ($E = pc$).
Relation de de Broglie : $E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, $\boxed{\lambda = \frac{h}{p}}$.
Méthode : estimation $\lambda = h/p = h/mv$.

P16 $\psi(M,t)$ amplitude de probabilité. dim : $L^{-3/2}$ (espace).
$\rho(M,t) = |\psi|^2 = \psi^*\psi$ densité de probabilité. dim : L^{-3}.
Unidimensionnelle : $dP_{x,t,dx} = \rho(x,t)dx = |\psi(x,t)|^2 dx$.
3 dimensions : $dP_{M,t,dV_M} = \rho(M,t)dV_M = |\psi(M,t)|^2 dV_M$.
Proba de trouver ... dans V : $P_{t,V} = \int_V \rho(M,t)dV_M$.

P17 Normalisation : $\int_E |\psi|^2 dV_M = 1$. Unidim : $E = \mathbb{R}$.
Densité de probabilité invariante par multiplication par $e^{i\alpha}$.

P18 Notation de Dirac : $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int \psi_1^*\psi_2 dV_M$.
Hermitien sesquilinéaire à gauche. $||\psi|| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$.

P19 Ortho : $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$. Normé : $\langle\psi_1|\psi_1\rangle = 1$.

P20 Position moyenne : $\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x,t)dx$ (1D).
$\langle\vec{OM}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{OM}\rho(M,t)dV_M$ (3D).
$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$.
En général $\langle f(M,t)\rangle = \int_E \psi^*(M,t)f(M,t)\psi(M,t)dx$

P21 Distribution de Gauss 1D : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
Normalisée. $\langle x\rangle = \mu$. $\Delta x = \sigma$.
Fonction d'onde : $\psi_L(x) = \frac{1}{(2\pi L^2)^{1/4}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4L^2}}$.
$|\psi_L|^2$ distribution de Gauss 1D. $\langle x\rangle = x_0$. $\Delta x = L$.

P22 Distribution de Dirac : $\delta(x - x_0) = \lim_{L\to 0}\psi_L^2(x)$.
$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dk$.
Méthode échantillonnage : $f(x_0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x - x_0)dx$.
Positions et incertitudes $\langle x\rangle = x_0$. $\Delta x = 0$

P23 Onde de de Broglie : OPPM.
1D : $\psi_P(x,t) = A\exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right]$. $E = \frac{p^2}{2m}$.
3D : remplacer x par le vecteur position.

P24 OPPM normalisable si $x \in [-\frac{L_{max}}{2}, +\frac{L_{max}}{2}]$.
$\psi_P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L_{max}}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right]$.
$L_{max} \gg \lambda_{\text{caractéristique}}$.
Grandeurs physiques ne dépendent pas de L_{max}.

P27 Représentation impulsion.
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(p)e^{ipx/\hbar}dp$ (TF).
$g(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ipx/\hbar}dx$.

P32 Parseval-Plancherel : $f_1(x) \leftrightarrow g_1(p)$; $f_2(x) \leftrightarrow g_2(p)$.
$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^* f_2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1^*(p)g_2(p)dp$.

P34 $f(x) \to \psi(x,t)$ $\quad g(p) \to \phi(p,t)$.
Représentation en position/impulsion.

P36-37 Dirac : $\psi(x) = \delta(x - x_0)$.
$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-ipx_0/\hbar}$. $\begin{cases}\langle x\rangle = x_0\\ \Delta x = 0, \Delta p \to +\infty\end{cases}$.
Broglie : $\psi(x) = Ae^{ip_0x/\hbar}e^{-iEt/\hbar}$.
$\phi(p) \propto \delta(p - p_0)$. $\begin{cases}\Delta x \to +\infty\\ \Delta p = 0, \langle p\rangle = p_0\end{cases}$.
Gauss : $\langle p\rangle = 0$. $\Delta p = \frac{\hbar}{2L}$. $\langle x\rangle = x_0$. $\Delta x = L$. $\boxed{\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}}$.

P38 Mesure d'impulsion $dP_{x,t,dx} = |\psi(x,t)|^2 dx$.
$dP_{p,t,dp} = |\phi(p,t)|^2 dp$.

P39-40 $g(p) \Rightarrow \langle g\rangle = \int \phi^* g\phi dp \quad \Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$.
$\langle p\rangle = \int \phi^* p\phi dp = \int \psi^*\hat{p}\psi dx$ avec $\boxed{\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}}$ (1D).
En dimension 3 les dérivées deviennent le gradient.

P43 : $\psi_{p_0}(x,t) = A\exp\frac{i}{\hbar}(p_0x - Et)$. $\hat{p}\psi_{p_0} = p_0\psi_{p_0}$.
État propre de $\hat{p}$, valeur propre p_0.

P45 : Inversement : $\hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$.

P47 : Opérateurs utiles. ① Position $x \to \hat{x}$.
② Potentielle : $V(x,t) \to \hat{V}(x,t)$. ③ $p \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$.
④ $E_{cinetique}$: $E_c = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.
⑤ $E_{mecanique}$: $\boxed{\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{V}(x,t)}$ Hamiltonien.

P48-50 Heisenberg : $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ (Gaussienne $\to$ égalité).
ODG : $\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar$.

P51-52 $\lambda \ll L$: classique | $\lambda \sim L$: quantique.

P56 : $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$.
ΔE : largeur spectrale d'un niveau d'énergie. Δt : durée de vie.
La durée de vie est infinie dans un état stationnaire.

CH2 mécanique ondulatoire

P3-4 : ES : $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$ (variables M,t).
$\boxed{\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}}$ $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$ (variable x,t).

P5 : Broglie : $V = 0$. ψ_P satisfait ES. $E = \frac{p^2}{2m}$.

P7-8 : $V(M,t) \to V(M)$. $\psi(M,t) = \tilde{\psi}(M)\chi(t)$.
$\psi(M,t) = \tilde{\psi}(M)\exp(-iEt/\hbar)$.

$$\boxed{\begin{gathered}-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\tilde{\psi}\frac{1}{\tilde{\psi}} + V = E = i\hbar\frac{1}{\chi(t)}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\chi(t)\\ \hat{H}\tilde{\psi} = E\tilde{\psi} \qquad \chi(t) = e^{-iEt/\hbar}\end{gathered}}$$

P9 ES indépendance du temps. $\hat{H}\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}$.
États propres $\to$ états stationnaires $\tilde{\psi}_n$.
Méthode : $\psi = \sum C_n\tilde{\psi}_n(M)e^{-iE_nt/\hbar}$.
Étape 1 : $\hat{H}\tilde{\psi}_n = E_n\tilde{\psi}_n$.
Étape 2 : $\psi(M, t = 0) = \sum C_n\tilde{\psi}_n(M)$ (Conditions initiales).
Étape 3 : $\psi(M,t) = \sum C_n\tilde{\psi}_n(M)e^{-iE_nt/\hbar}$.

P10 État stationnaire : valeur moyenne de toute grandeur physique indépente du temps.

P11 Courant de proba : $\vec{J} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{m}\psi^*\hat{p}\psi\right)$.
$\vec{J} = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\vec{\mathrm{grad}}\psi - \psi\vec{\mathrm{grad}}\psi^*\right)$.

P15-16 Particule libre de potentiel nul
① $\hat{H}\tilde{\psi} = E\tilde{\psi} \to \psi_p = \exp(ipx/\hbar)$. $E = p^2/2m$.
② $\psi(x,0) = \int \frac{g(p)}{\sqrt{2\pi\hbar}}\psi_p dp$. $g(p)$ l'amplitude de proba de p.

$$\boxed{\psi(M,t=0) = \sum_n C_n\tilde{\psi}_n(M) \text{ avec } C_n \leftrightarrow \frac{g(p)}{\sqrt{2\pi\hbar}}}$$

$$\boxed{\psi(M,t) = \sum_n C_n\tilde{\psi}_n(M)e^{-iE_nt/\hbar}}$$

③ $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int g(p)\exp(ipx/\hbar)\exp(-iEt/\hbar)dp$.

P19-20 Barrière de potentiel. Discontinuité finie/infinie.
On applique $\int_{-\epsilon}^{\epsilon}$ à l'éq $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\tilde{\psi}}{dx^2} + V(x)\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}$.
$\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{d^2\tilde{\psi}}{dx^2}dx = \boxed{[\tilde{\psi}']_{-\epsilon}^{\epsilon}} = -\frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}(E - V(x))\tilde{\psi}dx$.
$V(x)$ finie : $\tilde{\psi}'$ continue. Discontinue si $V(x)$ infinie.

P22-25 Marche de potentiel $0 < E < V_0$.

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m(E-V)}{\hbar^2}\psi = 0}.$$

$E > V \to e^{\pm ikx}$ oscillation. $E < V \to e^{\pm qx}$ exponentielle.
- $x < 0$. $V = 0, E > V$. $\psi = \alpha e^{ikx} + \beta e^{-ikx}$. $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.
- $x > 0$. $V(x) = V_0, E < V_0$. $\psi(x) = \gamma e^{-qx}$. $q = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}(V_0 - E)$. (onde évanescente).

Continuïté en $x = 0$. ψ continue : $\alpha + \beta = \gamma$.
ψ' continue : $ik(\alpha - \beta) = -q\gamma$.
Courant : $\vec{J}_{\text{incident}} = |\alpha|^2\frac{\hbar k}{m}\vec{e_x}$.
$\vec{J}_{\text{réfléchi}} = -|\beta|^2\frac{\hbar k}{m}\vec{e_x}$. $R = |\frac{\beta}{\alpha}|^2 = 1$.
$\vec{J}_{\text{évanescente}} = 0$. Effet tunnel $L \approx \frac{1}{2q}$.

P26-27 Marche, $E > V_0$.
Même sauf : $x > 0$. $\psi(x) = \gamma e^{ik'x}$. $k' = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}(E - V_0)$.
Continuité : $\alpha + \beta = \gamma$ et $ik(\alpha - \beta) = ik'\gamma$.
$\vec{J}_i = |\alpha|^2\frac{\hbar k}{m}\vec{e_x}$ $R = |\frac{\beta}{\alpha}|^2 = (\frac{k-k'}{k+k'})^2$. $T = |\frac{\gamma}{\alpha}|^2 \cdot \frac{k'}{k}$.
$\vec{J}_r = -|\beta|^2\frac{\hbar k}{m}\vec{e_x}$.
$\vec{J}_t = |\gamma|^2\frac{\hbar k'}{m}\vec{e_x}$. $R + T = 1$.

P28 Marche $E < 0 \Rightarrow \alpha = \gamma = 0$ par continuité.

P29-30 Barrière $0 < E < V_0$.
- $x < 0$: $\psi = \alpha e^{ikx} + \beta e^{-ikx}$. $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ ondulatoire.
- $0 < x < a$: $\psi = \gamma e^{qx} + \delta e^{-qx}$. $q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}$ exponentielle.
- $x > a$: $\psi = \varepsilon e^{ikx} \to$ ondulatoire.

ψ et ψ' continue en $0, a \Rightarrow 4$ éqs.

P33 Barrière $E > V_0$.
Même sauf $0 < x < a$: $\psi = \gamma e^{-ik'x} + \delta e^{ik'x}$. $k' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)}$.

P35-38 Puits infinis $\psi(x) = 0$ si $x \in]-\infty, 0] \cup [a, +\infty[$.

$$\boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m(E)}{\hbar^2}\psi = 0}$$

- $0 < x < a$: $\tilde{\psi}(x) = C_1\cos kx + iC_2\sin kx$. $k = \sqrt{2mE}/\hbar$.

CL : $C_1 = 0$. $C_2\sin ka = 0 \Rightarrow ka = n\pi$. $\boxed{E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}}$ $n \in \mathbb{N}^*$.

Normalisation : $\boxed{\tilde{\psi}_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)}$. Énergie quantifiée.

P39-42 États stationnaires $\to$ base orthonormée, complète.
$[f(x) = \sum C_n\tilde{\psi}_n(x)$ $\langle\psi_n|f\rangle = C_n$ projection].
Mesurer l'énergie : $E =$ une des E_n.
La proba associée à E_n est $P(E_n) = |\langle\psi_n|\psi\rangle|^2 = |C_n|^2$.
$\langle E\rangle = \sum E_nP(E_n) = \left\langle\psi\middle|\hat{H}\psi\right\rangle$.

P48-55 Puits fini. $E > 0 \to$ état de diffusion.
$-V_0 < E < 0$ état lié.
États liés $-V_0 < E < 0$. Ondulatoire dedans et décroissance exponentielle à l'extérieur.
- $x > a/2$: $\psi(x) = A_1e^{-qx}$. $q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(-E)}$.
- $-a/2 < x < a/2$: $\psi(x) = A_2\cos kx + A_2'\sin kx$. $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)}$.
- $x < -a/2$: $\psi(x) = A_3e^{qx}$.

Continuité : 4 équations.
Spectre : nombre fini d'énergies discrètes (énergie négative).
Les états de diffusion forment un continuum (énergie positive).

Méthodes vues

- Estimation de l'ODG par Heisenberg en **TD1 Ex1 Q1**
- Égalité de la relation de Heisenberg atteinte pour une forme Gaussienne **TD1 Ex2 Q1**
- Calcul par normalisation et transformations de Fourier.
- Séparation des composants spatials et temporels dans l'ES, sous condition que V ne dépend que de x. Voir **CH2 P7-8**
- Étude dans un potentiel cste par morceaux en 2 étapes :
  1. résolution explicite de l'équation différentielle qui donne les solutions ondulatoires/exponentielles
  2. déterminer les constantes en s'inspirant des conditions de continuité ou par la condition de normalisation.
- Étude dans un puits : voir **CH2 P35-38** et **CH2 P48-55**