résumé de mécanique quantique ch1-2 - Corentin qiutianyi

CH1 ondes et particules

P2 Énergie du photon : $E = hf = \hbar\omega$.
$h = 6.63\times10^{-34} Js$

P10 Einstein-Planck : $E=\hbar\omega$, $\vec p = \hbar\vec k$ ($E=pc$).
Relation de de Broglie : $\boxed{\lambda = \frac{h}{p}}$.
Méthode : estimation $\lambda = h/p = h/mv$.

P16 $\psi(M,t)$ amplitude de probabilité. dim : $L^{-3/2}$ (espace).
$\rho(M,t) = |\psi|^2 = \psi^*\psi$ densité de probabilité. dim : L^{-3}.
dim1 : $dP_{x,t,dx} = \rho(x,t)dx = |\psi(x,t)|^2dx$.
dim3 : $dP_{M,t,dV_M} = \rho(M,t)dV_M = |\psi(M,t)|^2dV_M$.
Proba dans V : $P_{t,V} = \int_V \rho(M,t)dV_M$.

P17 Normalisation : $\int_E |\psi|^2 dV_M = 1$. Unidim : $E=\mathbb{R}$. Densité de probabilité invariante par multiplication par $e^{i\alpha}$.

P18 Notation de Dirac : $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int\psi_1^*\psi_2 dV_M$. Propriétés : Hermitien sesquilinéaire à gauche. $||\psi|| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$.

P19 Ortho : $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$. Normé : $\langle\psi_1|\psi_1\rangle = 1$.

P20 $\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x,t)dx$.
$\langle \vec{OM}\rangle = \int \vec{OM}\rho(M,t)dV_M$ (3D).
$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$.
$\langle f(M,t)\rangle = \int_E \psi^*(M,t)f(M,t)\psi(M,t)dx$

P21 Gauss 1D : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
Normalisée. $\langle x\rangle=\mu$. $\Delta x = \sigma$.
Fonction d'onde gaussienne : $\psi_L(x) = \frac{1}{(2\pi L^2)^{1/4}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4L^2}}$.
$|\psi_L|^2$ dist. de Gauss 1D. $\langle x\rangle = x_0$. $\Delta x = L$.

P22 Distribution de Dirac : $\delta(x-x_0) = \lim_{L\to0}\psi_L^2(x)$.
Bien normalisée. $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dk$.
Méthode échantillonnage : $f(x_0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x-x_0)dx$.
Positions et incertitudes $\langle x\rangle = x_0$. $\Delta x = 0$

P23 Onde de de Broglie : OPPM avec p et λ uniques. Cas 1D : $\psi_P(x,t) = A\exp\left[\frac{i}{\hbar}(px-Et)\right]$. $E=\frac{p^2}{2m}$.
3D : remplacer x par le vecteur position.

P24 OPPM normalisable si $x\in[-\frac{L_{max}}{2}, +\frac{L_{max}}{2}]$.
$\psi_P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L_{max}}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}(px-Et)\right]$.
$L_{max} \gg \lambda_{\text{caractéristique}}$. Grandeurs physiques ne dépendent pas de L_{max}.

P27 Représentation impulsion, transformations de Fourier
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(p)e^{ipx/\hbar}dp$. $g(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ipx/\hbar}dx$.

P32 Parseval-Plancherel :
$f_1(x) \leftrightarrow g_1(p)$; $f_2(x)\leftrightarrow g_2(p)$.
$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*f_2dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1^*(p)g_2(p)dp$.

P34 $f(x)\to\psi(x,t)$ $g(p)\to\phi(p,t)$. position/impulsion.

P36-37 Dirac : $\psi(x) = \delta(x-x_0)$.
$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-ipx_0/\hbar}$. $\begin{cases}\langle x\rangle = x_0\\ \Delta x = 0, \Delta p\to+\infty\end{cases}$
Broglie : $\psi(x) = Ae^{ip_0x/\hbar}e^{-iEt/\hbar}$.
$\phi(p)\propto\delta(p-p_0)$. $\begin{cases}\Delta x\to+\infty\\ \Delta p = 0, \langle p\rangle = p_0\end{cases}$.
Gauss : $\langle p\rangle = 0$. $\Delta p = \frac{\hbar}{2L}$. $\langle x\rangle = x_0$. $\Delta x = L$. $\boxed{\Delta x\cdot\Delta p = \frac{\hbar}{2}}$.

P38 Mesure d'impulsion $dP_{x,t,dx} = |\psi(x,t)|^2dx$. $dP_{p,t,dp} = |\phi(p,t)|^2dp$.

P39-40 $g(p)\Rightarrow\langle g\rangle = \int\phi^*g\phi dp$ $\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$.
$\langle p\rangle = \int\phi^*p\phi dp = \int\psi^*\hat p\psi dx$ avec $\boxed{\hat p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}}$ (1D).
En dim 3 les dérivées deviennent le gradient.

P43 : $\psi_{p_0}(x,t) = A\exp\frac{i}{\hbar}(p_0x - Et)$. $\hat p\psi_{p_0} = p_0\psi_{p_0}$.
État propre de $\hat p$, valeur propre p_0.

P45 : Inversement : $\hat x = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$.

P47 : Opérateurs. ① Position $x\to\hat x$.
② Potentielle : $V(x,t)\to\hat V(x,t)$.
③ $p\to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$.
④ $E_{cinetique}$: $E_c = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.
⑤ $E_{mecanique}$: $\boxed{\hat H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat V(x,t)}$
Hamiltonien.

P48-50 Heisenberg : $\Delta x\cdot\Delta p\geq\frac{\hbar}{2}$ (Gaussienne → égalité). ODG : $\Delta x\cdot\Delta p\approx\hbar$.

P51-52 $\lambda\ll L$: classique | $\lambda\sim L$: quantique.

P56 : $\Delta E\cdot\Delta t\geq\frac{\hbar}{2}$.
ΔE : largeur spectrale d'un niveau d'énergie. Δt : durée de vie. La durée de vie est infinie dans un état stationnaire.

CH2 mécanique ond.

P3-4 : ES : $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$ (variables M,t).
$\boxed{\hat H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}}$ $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$ (variable x,t).

P5 : Broglie : $V=0$. ψ_P satisfait ES. $E=\frac{p^2}{2m}$.

P7-8 : $V(M,t)\to V(M)$. $\psi(M,t) = \tilde\psi(M)\chi(t)$.
$\psi(M,t) = \tilde\psi(M)\exp(-iEt/\hbar)$.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\tilde\psi\frac{1}{\tilde\psi} + V = E = i\hbar\frac{1}{\chi(t)}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\chi(t)$$
$$\hat H\tilde\psi = E\tilde\psi \qquad \chi(t) = e^{-iEt/\hbar}$$

P9 ES indépendance de t. $\hat H\tilde\psi = E\tilde\psi$.
États propres → états stationnaires $\tilde\psi_n$.
Méthode : $\psi = \sum C_n\tilde\psi_n(M)e^{-iE_nt/\hbar}$.
Étape 1 : $\hat H\tilde\psi_n = E_n\tilde\psi_n$.
Étape 2 : $\psi(M,t=0) = \sum C_n\tilde\psi_n(M)$. (Conditions initiales).
Étape 3 : $\psi(M,t) = \sum C_n\tilde\psi_n(M)e^{-iE_nt/\hbar}$.

P10 État stationnaire : valeur moyenne de toute grandeur phys. indépente de t.

P11 Courant de proba : $\vec J = \text{Re}\left(\frac{1}{m}\psi^*\hat p\psi\right)$.
$\vec J = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\vec{\text{grad}}\psi - \psi\vec{\text{grad}}\psi^*\right)$.

P15-16 Particule libre de potentiel nul
① $\hat H\tilde\psi = E\tilde\psi\to\psi_p = \exp(ipx/\hbar)$. $E = p^2/2m$.
② $\psi(x,0) = \int\frac{g(p)}{\sqrt{2\pi\hbar}}\psi_pdp$. $g(p)$ l'amplitude de proba de p.
$$\boxed{\psi(M,t=0) = \sum_n C_n\tilde\psi_n(M)}$$
avec $C_n\leftrightarrow\frac{g(p)}{\sqrt{2\pi\hbar}}$
$$\boxed{\psi(M,t) = \sum_n C_n\tilde\psi_n(M)e^{-iE_nt/\hbar}}$$
③ $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int g(p)e^{\frac{ipx}{\hbar}}e^{\frac{-iEt}{\hbar}}dp$.

P19-20 Barrière de potentiel. Discontinuité finie/infinie.
applique $\int_{-\epsilon}^{\epsilon}$ à l'éq $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\tilde\psi}{dx^2} + V(x)\tilde\psi = E\tilde\psi$.
$\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{d^2\tilde\psi}{dx^2}dx = \boxed{[\tilde\psi']_{-\epsilon}^{\epsilon}} = -\frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}(E - V(x))\tilde\psi dx$.
$V(x)$ finie : $\tilde\psi'$ continue. Discontinue si $V(x)$ infinie.

P22-25 Marche de potentiel $0<E<V_0$.
Faible énergie : $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m(E-V)}{\hbar^2}\psi = 0$.
$E>V\to e^{\pm ikx}$ oscillation. $E<V\to e^{\pm qx}$ exponentielle.
• $x<0$. $V=0, E>V$. $\psi = \alpha e^{ikx}+\beta e^{-ikx}$. $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.
• $x>0$. $V(x) = V_0, E<V_0$. $\psi(x) = \gamma e^{-qx}$. $q = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}(V_0-E)$.
(onde évanescente).
Continuïté en $x=0$. ψ continue : $\alpha+\beta=\gamma$.
ψ' continue : $ik(\alpha-\beta) = -q\gamma$.
Courant : $\vec J_{\text{incident}} = |\alpha|^2\frac{\hbar k}{m}\vec{e_x}$.
$\vec J_{\text{réfléchi}} = -|\beta|^2\frac{\hbar k}{m}\vec{e_x}$. $R = |\frac{\beta}{\alpha}|^2 = 1$.
$\vec J_{\text{évanescente}} = 0$. Effet tunnel $L\approx\frac{1}{2q}$.

P26-27 Marche, $E>V_0$. Haute énergie
Même qu'avant sauf : $x>0$. $\psi(x) = \gamma e^{ik'x}$. $k' = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}(E-V_0)$.
Continuité : $\alpha+\beta=\gamma$ et $ik(\alpha-\beta) = ik'\gamma$.
$\vec J_i = |\alpha|^2\frac{\hbar k}{m}\vec{e_x}$ $\vec J_r = -|\beta|^2\frac{\hbar k}{m}\vec{e_x}$ $\vec J_t = |\gamma|^2\frac{\hbar k'}{m}\vec{e_x}$.
$R = |\frac{\beta}{\alpha}|^2 = (\frac{k-k'}{k+k'})^2$. $T = |\frac{\gamma}{\alpha}|^2\cdot\frac{k'}{k}$ $R+T=1$.

P28 Marche $E < 0 \Rightarrow \alpha = \gamma = 0$ par continuité.Énergie négative impossible.

P29-30 Barrière $0 < E < V_0$. Faible E
• $x < 0 : \psi = \alpha e^{ikx} + \beta e^{-ikx}$. $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ ondulatoire.
• $0 < x < a : \psi = \gamma e^{-qx} + \delta e^{qx}$. $q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}$ exponentielle.
• $x > a : \psi = \varepsilon e^{ikx} \rightarrow$ ondulatoire.
ψ et ψ' continue en $0, a \Rightarrow 4$ éqs.

P33 Barrière $E > V_0$. Haute énergie
Même sauf $0 < x < a : \psi = \gamma e^{-ik'x} + \delta e^{ik'x}$. $k' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)}$.

P35-38 Puits infinis $\psi(x) = 0$ si $x \in]-\infty, 0] \cup [a, +\infty[$. $\boxed{\dfrac{d^2\psi}{dx^2} + \dfrac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0}$
• $0 < x < a : \tilde{\psi}(x) = C_1 \cos kx + iC_2 \sin kx$. $k = \sqrt{2mE}/\hbar$.
CL : $C_1 = 0$. $C_2 \sin ka = 0 \Rightarrow ka = n\pi$.
$\boxed{E_n = \dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}}$ $n \in \mathbb{N}^*$.
Normalisation : $\boxed{\tilde{\psi}_n = \sqrt{\dfrac{2}{a}} \sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right)}$.
Énergie quantifiée.

P39-42 États stationnaires $\rightarrow$ base orthonormée, complète.
[$f(x) = \sum C_n \tilde{\psi}_n(x)$ $\langle \psi_n | f \rangle = C_n$ projection].
Mesurer l'énergie : $E =$ une des E_n.
La proba associée à E_n est $P(E_n) = |\left\langle \tilde{\psi_n} \middle| \psi \right\rangle|^2 = |C_n|^2$.
$\langle E \rangle = \sum E_n P(E_n) = \left\langle \psi \middle| \hat{H}\psi \right\rangle$.

P48-55 Puits fini. $E > 0 \rightarrow$ état de diffusion. $-V_0 < E < 0$ état lié.
États liés $-V_0 < E < 0$. Ondulatoire dedans et décroissance exponentielle à l'extérieur.
• $x > a/2 : \psi(x) = A_1 e^{-qx}$. $q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(-E)}$.
• $-a/2 < x < a/2 : \psi(x) = A_2 \cos kx + A_2' \sin kx$. $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)}$.
• $x < -a/2 : \psi(x) = A_3 e^{qx}$.
Continuité : 4 équations.
Spectre : nombre fini d'énergies discrètes (énergie négative).
Les états de diffusion forment un continuum (énergie positive).

CH3 opérateurs

CH4 spin