

# Mathématiques I

---

M121

*Alain Chillès (祁冲), Adrien Joseph, 欧亚飞*

*(mise à jour : Rémi Weidenfeld)*



欧亚飞

祁冲

# Préambule à la première version

Je tiens avant toutes choses à remercier ici le professeur 陆佳亮 pour son aide précieuse lors de la relecture de ce polycopié. Je tiens aussi à remercier mon ami Franz Ridde, professeur en MPSI au lycée du Parc de Lyon, qui m'a fourni un grand nombre d'exercices.

Ce livre *n'est pas le cours*. Il servira de support au cours, de guide et permettra, à ceux qui le souhaitent, d'approfondir quelques sujets. Il ne s'agit en aucun cas d'apprendre par cœur son contenu. D'ailleurs, l'apprentissage par cœur est, en général, une mauvaise technique d'apprentissage pour les mathématiques, qui proposent peu de résultats, peu de notions, mais demandent une compréhension profonde de ces notions.

Le cours est découpé en trois parties, avec pour objectif de préparer aux outils de la physique :

- autour de la dérivation ;
- initiation à la géométrie du plan et de l'espace ;
- introduction aux fonctions de plusieurs variables et manipulation des systèmes de coordonnées.

Les calculs et les dessins ont été, pour la plupart, effectués grâce au logiciel `Wxmaxima`, outil d'une très grande qualité, gratuit et fonctionnant sur tout système (Linux, Windows, Mac, Android). Signalons aussi l'outil (écrit en `java`) de géométrie plane `Geogebra` et l'excellent `Ipe` qui permet d'annoter en  $\text{\LaTeX}$  les dessins produits directement ou à l'aide d'un autre outil.

Alain Chillès

数学早 身体好



# Préambule à la seconde version

Je remercie mon collègue et ami Alain Chillès qui a rédigé une très grande partie de ce livre. Je tiens à remercier aussi le professeur 欧亚飞 qui m'a aidé dans la relecture de l'ancienne version et dans l'élaboration de cette nouvelle version.

De nombreux exercices sont proposés à la fin de chaque paragraphe. Pour bien assimiler le cours, il est très important de faire des exercices. L'étudiant aura bien sûr tendance à préférer s'entraîner sur des exercices corrigés. Toutefois, chercher la résolution d'un exercice non corrigé est une démarche très enrichissante, même si on ne parvient pas à trouver la solution. Les professeurs seront ravis d'aider et d'orienter les étudiants qui ne sont pas parvenus à résoudre entièrement un problème.

Adrien Joseph



# Préambule à la troisième version

欧亚飞





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Compléments sur les ensembles</b>	<b>17</b>
1.1	Injectivité, surjectivité, bijectivité . . . . .	17
1.2	Cardinalité . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Fonctions réelles de la variable réelle</b>	<b>23</b>
2.1	Compléments . . . . .	23
2.1.1	Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ . . . . .	23
2.1.2	Monotonie . . . . .	25
2.2	Limites . . . . .	27
2.2.1	Premières définitions . . . . .	27
2.2.2	Techniques . . . . .	32
2.3	Continuité . . . . .	35
2.3.1	Définitions et premières propriétés . . . . .	35
2.3.2	Quelques résultats . . . . .	38
2.4	Dérivabilité . . . . .	45
2.4.1	Définition . . . . .	45
2.4.2	Résultats . . . . .	50
<b>3</b>	<b><math>\mathbb{R}^n</math> euclidien (<math>n \geq 2</math>)</b>	<b>67</b>
3.1	Quelques rappels . . . . .	67
3.2	Propriétés euclidiennes . . . . .	71
3.2.1	Norme et produit scalaire . . . . .	71
3.2.2	Angles . . . . .	75
3.3	Droites, plans, etc. . . . .	79
3.3.1	Définitions . . . . .	79
3.3.2	Mise en équation(s) . . . . .	81
3.3.3	Distances . . . . .	93
3.3.4	Retour sur les angles . . . . .	102
3.4	Barycentres . . . . .	103
3.5	Quelques applications particulières . . . . .	108
3.5.1	Translation . . . . .	108
3.5.2	Homothétie . . . . .	108
3.5.3	Projection orthogonale . . . . .	109
3.5.4	Symétrie orthogonale . . . . .	110
3.5.5	Rotation . . . . .	112
3.6	Bases et repères . . . . .	117
3.6.1	Point de vue vectoriel . . . . .	117
3.6.2	Point de vue affine . . . . .	121
<b>4</b>	<b>Fonctions de plusieurs variables et systèmes de coordonnées</b>	<b>125</b>
4.1	Dérivation d'une fonction de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ . . . . .	125
4.2	Fonctions de plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ . . . . .	129
4.2.1	Ouverts de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	129
4.2.2	Continuité des fonctions de plusieurs variables . . . . .	132
4.2.3	Dérivées partielles . . . . .	138
4.2.4	Caractérisation des extremums locaux . . . . .	147

4.3	Systèmes de coordonnées . . . . .	151
4.3.1	Dans le plan . . . . .	153
4.3.2	Dans l'espace . . . . .	159

# Liste des codes Wxmaxima

3.1 Formule de Lagrange . . . . .	77
3.2 Changements de points de vue . . . . .	81
3.3 Droites de l'espace . . . . .	85
3.4 Formule de Lagrange (dans l'espace) . . . . .	86
3.5 Double produit vectoriel . . . . .	87
3.6 Cercle dans l'espace . . . . .	89
3.7 Distance entre deux droites . . . . .	98
4.1 Exemple de dérivées partielles . . . . .	126
4.2 Dérivées partielles non continues . . . . .	139
4.3 Développements limités d'une fonction . . . . .	141
4.4 Dérivées partielles d'ordre $> 1$ . . . . .	142
4.5 Vérification du théorème de Schwarz . . . . .	144
4.6 Interspersion des dérivations illégales . . . . .	145
4.7 Étude d'un extremum . . . . .	148
4.8 Non existence d'un extremum . . . . .	148



# Liste des figures

2.1	Partie entière . . . . .	26
2.2	Fonction sans limite . . . . .	28
2.3	Carré inscrit dans un triangle . . . . .	40
2.4	Triangle équilatéral inscrit dans une ellipse . . . . .	40
2.5	Graphes d'une fonction réciproque . . . . .	43
2.6	Fonction arcsin . . . . .	44
2.7	Fonction arccos . . . . .	45
2.8	Fonction arctan . . . . .	46
2.9	Interprétation géométrique de la dérivée . . . . .	47
2.10	Une fonction continue, mais pas dérivable . . . . .	51
2.11	Illustration du théorème de Rolle . . . . .	52
2.12	Illustration du théorème des accroissements finis . . . . .	53
2.13	La tangente en un point vue comme limite des tangentes . . . . .	58
2.14	Fonction radical . . . . .	59
2.15	Exemple de raccordement de classe $\mathcal{C}^\infty$ . . . . .	59
2.16	Minimum local . . . . .	64
3.1	Un vecteur . . . . .	67
3.2	Somme de deux vecteurs . . . . .	68
3.3	Multiplication d'un vecteur par un réel . . . . .	69
3.4	Un point . . . . .	70
3.5	Théorème de Pythagore . . . . .	74
3.6	Angles orientés dans le plan . . . . .	75
3.7	Angles de l'espace . . . . .	76
3.8	Déterminant $2 \times 2$ . . . . .	77
3.9	Relations angles/côtés . . . . .	78
3.10	Croisement des bissectrices . . . . .	78
3.11	Théorème de Morley . . . . .	79
3.12	Droites du plan . . . . .	79
3.13	Plans de l'espace . . . . .	80
3.14	Produit vectoriel . . . . .	85
3.15	Cercle du plan . . . . .	88
3.16	Sphère . . . . .	89
3.17	Cercle de l'espace . . . . .	91
3.18	Angle inscrit . . . . .	94
3.19	Théorème de l'angle au centre . . . . .	95
3.20	Un parallélépipède . . . . .	96
3.21	Distance d'un point à une droite . . . . .	97
3.22	Distance d'un point à un plan . . . . .	98
3.23	Distance d'un point à une droite de l'espace . . . . .	99
3.24	Perpendiculaire commune . . . . .	100
3.25	Droites parallèles . . . . .	101
3.26	Cercle circonscrit . . . . .	102
3.27	Orthocentre . . . . .	103
3.28	Cercle inscrit . . . . .	104
3.29	Lieu des centres d'un cercle circonscrit . . . . .	104
3.30	Orthocentres alignés . . . . .	105

3.31	Deux cercles . . . . .	106
3.32	Deux cercles sur une même sphère . . . . .	107
3.33	Angle entre deux droites du plan . . . . .	108
3.34	Angle entre deux plans . . . . .	109
3.35	Angle entre une droite et un plan de l'espace . . . . .	109
3.36	Intersection des médianes d'un triangle . . . . .	110
3.37	Droite d'Euler . . . . .	111
3.38	Co-cyclicité et parabole . . . . .	112
3.39	Bimédianes d'un tétraèdre . . . . .	113
3.40	Translation . . . . .	114
3.41	Homothétie . . . . .	114
3.42	Projection orthogonale . . . . .	115
3.43	Projection orthogonale sur un plan . . . . .	115
3.44	Symétrie orthogonale par rapport à une droite . . . . .	116
3.45	Symétrie orthogonale par rapport à un plan . . . . .	117
3.46	Rotation du plan vectoriel . . . . .	118
3.47	Rotation du plan affine . . . . .	118
3.48	Rotation de l'espace (vectoriel) . . . . .	119
3.49	Rotation de l'espace (affine) . . . . .	119
3.50	Lieu d'une projection . . . . .	120
3.51	Alignement de trois projections . . . . .	121
3.52	Théorème de Feuerbach (9 points) . . . . .	121
3.53	Orthocentres alignés . . . . .	122
3.54	Intersections de diagonales . . . . .	123
4.1	Ouvert de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	130
4.2	Connexe par arcs . . . . .	131
4.3	Non connexe par arcs . . . . .	132
4.4	Lignes de niveaux d'une fonction continue . . . . .	134
4.5	Lignes de niveaux d'une fonction discontinue en 0 . . . . .	135
4.6	Une autre fonction continue . . . . .	135
4.7	Une autre fonction discontinue . . . . .	137
4.8	Démonstration du théorème de Schwarz . . . . .	144
4.9	Interversion des dérivations illégales . . . . .	145
4.10	Étude d'un extremum . . . . .	149
4.11	Non existence d'un extremum . . . . .	149
4.12	Extremum . . . . .	150
4.13	Extremum . . . . .	150
4.14	Triangle d'aire maximale . . . . .	151
4.15	Représentation d'une droite . . . . .	153
4.16	Système de coordonnées adapté à une droite du plan . . . . .	154
4.17	Équation normalisée d'une droite du plan . . . . .	155
4.18	Coordonnées polaires . . . . .	156
4.19	Système de coordonnées polaires . . . . .	157
4.20	Épicycloïde . . . . .	159
4.21	Stophoïde . . . . .	160
4.22	Construction pour l'exercice 4.8.7, page 158 . . . . .	160
4.23	Cardioïde : première propriété . . . . .	161
4.24	Cardioïde : deuxième propriété . . . . .	161
4.25	Système de coordonnées adapté à une droite de l'espace . . . . .	162
4.26	Système de coordonnées adapté à un plan de l'espace . . . . .	163
4.27	Système de coordonnées cylindriques . . . . .	164
4.28	Coordonnées sphériques . . . . .	165
4.29	Triangle sphérique . . . . .	166
4.30	Coordonnées bipolaires . . . . .	167

# Programme

## Compléments sur les ensembles

1. Ensembles finis, dénombrables.

## Fonctions réelles de la variable réelle

*On travaillera sans discrétisation en valorisant la propriété de la borne supérieure.*

1. Ordre sur  $\mathbb{R}$ , fonctions monotones, propriétés de la borne supérieure.
2. Limite d'une fonction (en un point, en  $\pm\infty$ ), limite infinie.
3. Continuité d'une fonction en un point, sur un intervalle. Théorème des valeurs intermédiaires, caractère borné des applications continues sur un segment, continuité d'une réciproque. Introduction des fonctions trigonométriques réciproques (arcsin, arccos et arctan).
4. Dérivabilité d'une fonction en un point, sur un intervalle, traductions en termes géométriques, en termes de développements limités (notations  $o$  et  $O$ ). Théorèmes de Rolle et des accroissements finis.
5. Dérivabilité d'une fonction réciproque, fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ , théorème de prolongement  $\mathcal{C}^1$ .
6. Dérivées d'ordre supérieur, fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $\mathcal{C}^\infty$ . Formule de Leibniz.
7. Recherche d'extrémums d'une fonction réelle de la variable réelle.

## $\mathbb{R}^n$ , point de vue euclidien

*La notion de vecteur en tant qu'objet est difficile à appréhender par les étudiants. Cela pose de gros problèmes en mécanique par exemple (avec de surcroît la notion de référentiel). Il s'agit donc ici de traduire les expressions connues par les étudiants en termes de vecteurs.*

1. Séparation sémantique des objets :  $n$ -uplet, vecteur, point. Opérations usuelles sur ces objets et interprétations.
2. Norme euclidienne canonique, produit scalaire euclidien canonique, distance euclidienne canonique. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Théorème de Pythagore.
3. Notion d'angle, d'angle orienté du plan. Lien avec la trigonométrie.
4. Définitions géométriques, paramétriques, cartésiennes et vectorielles des objets usuels du plan (droite, cercle) et de l'espace (droite, plan, sphère, cercle). Produit vectoriel et propriétés. Distances entre les points, les droites et les plans.
5. Barycentres et raisonnements barycentriques.
6. Transformations usuelles élémentaires du plan et de l'espace (point de vue vectoriel et affine) : translation, homothétie, projection orthogonale, symétrie orthogonale, rotation.
7. Notions de base et de repère orthonormé. Mise en évidence de l'intérêt de la mise en forme vectorielle à travers les changements de base orthonormée.

## Fonctions de plusieurs variables et systèmes de coordonnées

*Il s'agit ici d'initier les étudiants aux notions de changement de variable en coordonnées polaires, cylindriques et sphériques, en lien avec la géométrie du système. De faire apparaître les bases mobiles qui y sont reliées et leur utilisation.*

1. Fonctions de plusieurs variables réelles à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Applications partielles, applications composantes. Continuité. Pour une fonction à valeurs réelles, interprétation en courbes de niveaux.

2. Notion de dérivée partielle. Fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . Règles de calcul. Fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$ , puis  $\mathcal{C}^\infty$ . Théorème de Schwarz (admis à ce moment).
3. Caractérisation des extremums locaux.
4. Systèmes de coordonnées adaptés aux situations suivantes (quadrillage rectangle du plan : rotation, cercles concentriques du plan : coordonnées polaires, quadrillage plans/droites de l'espace : rotation, cylindres coaxiaux : coordonnées cylindriques, sphères concentriques : coordonnées sphériques). Dans tous les cas, faire apparaître le lien entre la géométrie du problème et le choix du système de coordonnées, apprendre à trouver la base mobile associée, à dériver cette base mobile et à faire des calculs dans cette base mobile)...



# Chapitre 1

## Compléments sur les ensembles

### 1.1 Injectivité, surjectivité, bijectivité

#### Rappel 1.1

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $E$  à valeurs dans un ensemble  $F$ .

1. Si  $y \in F$ , on dit que  $x \in E$  est *un antécédent de  $y$  par  $f$* , si  $y = f(x)$ .
2. On dit que  $f$  est *injective* de  $E$  dans  $F$  si :

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

(Unicité de l'antécédent)

3. On dit que  $f$  est *surjective* de  $E$  sur  $F$  si :

$$\forall z \in F, \exists x \in E, z = f(x).$$

(Existence de l'antécédent)

4. On dit que  $f$  est *bijective* de  $E$  sur  $F$  si  $f$  est injective et surjective de  $E$  sur  $F$ .  
(Existence et unicité de l'antécédent)

#### Remarque 1.1

Une fonction  $f : E \rightarrow F$  étant donnée, on peut définir

$$f(E) = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

On dit que  $f(E)$  est *l'image de  $E$  par  $f$* . Lorsque  $f$  est injective, alors l'application définie par :

$$\tilde{f} : \begin{cases} E \rightarrow f(E), \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

est bijective de  $E$  sur  $f(E)$ .

#### Remarque 1.2

Quand  $f$  est bijective de  $E$  sur  $F$ , on définit *la fonction réciproque de  $f$* , et on note  $f^{-1}$  l'application

$$\begin{cases} F \rightarrow E, \\ y \mapsto x, \text{ tel que } y = f(x). \end{cases}$$

### Remarque importante 1.3

Ne pas confondre avec l'application *image réciproque* qui, elle, est *toujours* définie par :

$$\forall B \subset F, f^{-1}(B) \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \in E, f(x) \in B\}.$$

Il n'y a pas d'ambiguïté de notation, car son argument est un sous-ensemble de  $F$  !

### Exercice(s) 1.1

1.1.1 Une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  est-elle strictement monotone ? (Si oui, le prouver, si non, trouver un contre-exemple).

1.1.2 Soit

$$f : x \mapsto \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

(a) Montrer que  $f$  est bijective de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $I$  à préciser.

(b) Expliciter sa réciproque.

1.1.3 Soit

$$f : \begin{cases} ]-1, +1[ \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto \frac{2x}{1-x^2}. \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est bijective sur  $\mathbb{R}$  et déterminer sa réciproque.

1.1.4 Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$  avec  $a \neq 0$ . Soit  $f : x \in \mathbb{Z} \mapsto a \times x^2 + b \times x + c$ . Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $(a, b, c)$  pour que  $f$  soit injective.

1.1.5 Montrer que

$$f : \begin{cases} \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, \\ (a, b) \mapsto 2^a \times (2b+1) - 1 \end{cases}$$

est bijective.

1.1.6 Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow H$ , telles que :

$$g \circ f \text{ est injective.}$$

(a) Montrer que  $f$  est injective.

(b) Donner un exemple où  $g$  n'est pas injective.

(c) Montrer que, si  $f$  est surjective, alors  $g$  est injective.

1.1.7 Reprendre l'exercice précédent en supposant cette fois :

$$g \circ f \text{ surjective.}$$

1.1.8 Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que pour tout  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ ,  $f(f(a) + f(b)) = a + b$ . Montrer que  $f = Id$ .

1.1.9 Déterminer une CNS <sup>a</sup> sur  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  pour que

$$f : \begin{cases} \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ (x, y) \mapsto (a \times x + b \times y, c \times x + d \times y) \end{cases}$$

soit bijective.

1.1.10 Soit  $f$  une bijection de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ . Montrer que

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{N}^3, a < b < c \text{ et } \frac{f(a) + f(c)}{2} = f(b).$$

1.1.11 Soit  $f : X \rightarrow Y$ . Montrer que

(a)  $f$  est injective si et seulement si, il existe  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $g \circ f = Id_X$ .

(b)  $f$  est surjective si et seulement si, il existe  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ g = Id_Y$ .

1.1.12 Soient  $E$  un ensemble et  $A, B$  deux parties de  $E$ . On note  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ . On pose

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B). \end{cases}$$

(a) Montrer que si  $A \cup B = E$  alors  $f$  est injective.

(b) Réciproque ?

(c) Donner une CNS pour que  $f$  soit surjective.

a. CNS=Condition Nécessaire et Suffisante.

## 1.2 Cardinalité

### Théorème 1.1 – Cantor-Bernstein

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f$  une injection de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une injection de  $F$  dans  $E$ , alors :

$$\exists \psi : E \rightarrow F, \text{ bijective.}$$

#### Démonstration

Cette démonstration est difficile, elle pourra être sautée dans un premier temps.

1. *Quelques idées.* Il faut construire la bijection  $\psi$  à l'aide des fonctions  $f$  et  $g$ , pour cela, il est naturel de prendre une partie  $A$  de  $E$  et de construire  $\psi$  de la manière suivante :

$$\psi : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in E \setminus A. \end{cases}$$

À quelle condition obtient-on  $\psi$  bijective ?

- (a) Bonne définition. Pour définir correctement  $\psi$ , il faut que  $E \setminus A \subset g(F)$ , on a donc une première condition sur  $A : A \supset E \setminus g(F)$ .
- (b) Injectivité. La condition d'injectivité s'écrit ici :

$$f(A) \cap g^{-1}(E \setminus A) = \emptyset.$$

On peut voir facilement que cette condition s'écrit aussi  $g \circ f(A) \cap (E \setminus A) = \emptyset$ . c'est-à-dire  $A \supset g \circ f(A)$ .

- (c) Surjectivité. La condition de surjectivité  $\psi(E) = F$  devient ici :

$$f(A) \cup g^{-1}(E \setminus A) = F.$$

Or, cette condition s'écrit encore :  $\forall b \in F, b \notin g^{-1}(E \setminus A) \Rightarrow b \in f(A)$ , c'est-à-dire  $\forall c \in g(F), c \notin E \setminus A \Rightarrow c \in g \circ f(A)$ , c'est-à-dire  $\forall c \in g(F), c \in A \Rightarrow c \in g \circ f(A)$ . La condition de surjectivité est donc :  $A \cap g(F) \subset g \circ f(A)$ .

La question devient donc : est-il possible de trouver une partie  $A$  de  $E$  vérifiant :

$$A \supset E \setminus g(F), A \supset g \circ f(A) \text{ et } A \cap g(F) \subset g \circ f(A) ?$$

La réponse est souvent dans la recherche d'un individu vérifiant une condition d'extrémalité.

2. *Rédaction de la preuve.* Posons

$$\mathcal{F} = \{M \subset E, M \supset E \setminus g(F) \text{ et } M \supset g \circ f(M)\}.$$

$\mathcal{F} \neq \emptyset$  (car  $E \in \mathcal{F}$ ) et est stable par intersections<sup>a</sup>. On considère alors

$$A = \bigcap_{M \in \mathcal{F}} M.$$

Il s'agit du plus petit élément<sup>b</sup> de  $\mathcal{F}$ . Montrons que  $A$  convient.

- (a)  $A \supset E \setminus g(F)$ , car tous les éléments  $M$  de  $\mathcal{F}$  vérifie cette propriété.

(b)  $A \supset g \circ f(A)$ , car tous les éléments  $M$  de  $\mathcal{F}$  vérifie cette propriété. Donc :

$$g \circ f(A) = g \circ f \left( \bigcap_{M \in \mathcal{F}} M \right) \subset \bigcap_{M \in \mathcal{F}} g \circ f(M) \subset \bigcap_{M \in \mathcal{F}} M = A.$$

(c) Supposons que  $A$  ne vérifie pas la dernière propriété : on a donc  $A \cap g(F) \not\subset g \circ f(A)$ . Il existe donc  $a \in A \cap g(F) \setminus g \circ f(A)$ . Posons  $B = A \setminus \{a\}$ . Alors  
— On a :  $B \cup \{a\} \supset E \setminus g(F)$ , donc comme  $a \in g(F)$ , on a :  $B \supset E \setminus g(F)$ .  
—  $g \circ f(B) \subset g \circ f(A) \subset A = B \cup \{a\}$ . Mais  $a \notin g \circ f(A)$ , donc  $a \notin g \circ f(B)$ . Finalement  $g \circ f(B) \subset B$ .  
On conclut que  $B \in \mathcal{F}$ , donc par minimalité de  $A$ , on a :  $A \subset B$ . Comme  $a \in A$ , on a donc :  $a \in B$ , ce qui est absurde.

a. Si  $(M_i)_{i \in I}$  sont dans  $\mathcal{F}$ , alors  $A = \bigcap_{i \in I} M_i \in \mathcal{F}$ .

b. Voilà la condition d'extrémalité cherchée. On vérifiera que  $A \in \mathcal{F}$ . Clairement,  $\forall M \in \mathcal{F}, A \subset M$ .

### Proposition 1.1

Plus généralement, si on a un ensemble  $E$  et une propriété  $P$  sur les parties de  $E$  (ie  $P : \mathcal{P}(E) \rightarrow \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$ ), on peut considérer :

$$\mathcal{F} = \{A \subset E, P(A) = \text{Vrai}\}.$$

Si, de plus, la propriété vérifie :

1.  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  ;
2.  $\forall (M_i)_{i \in I} \in \mathcal{F}^I, \bigcap_{i \in I} M_i \in \mathcal{F}$ , alors

$$A_0 = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \in \mathcal{F},$$

et  $\forall A \in \mathcal{F}, A \supset A_0$ . (On dit que  $A_0$  est un plus petit élément de  $\mathcal{F}$ .)

### Proposition 1.2

De même, si la propriété vérifie :

1.  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  ;
2.  $\forall (M_i)_{i \in I} \in \mathcal{F}^I, \bigcup_{i \in I} M_i \in \mathcal{F}$ , alors

$$A_0 = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \in \mathcal{F},$$

et  $\forall A \in \mathcal{F}, A \subset A_0$ . (On dit que  $A_0$  est un plus grand élément de  $\mathcal{F}$ .)

### Démonstration de la proposition 1.1, de la présente page

La démonstration de la proposition 1.2, de la présente page sera identique.

( $A_0 \in \mathcal{F}$ ) Il suffit d'appliquer la propriété d'intersection au cas où  $I = \mathcal{F}$  et

$$\forall A \in \mathcal{F}, M_A = A.$$

( $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \supset A_0$ ) Clairement, d'après la définition de  $A_0$  comme intersection de tous les  $A \in \mathcal{F}$ , on a, pour tout  $A \in \mathcal{F}, A_0 \subset A$ .

### Définition 1.1

1. Un ensemble  $E$  sera dit *infini* si :

$$\exists f : \mathbb{N} \rightarrow E \text{ injective.}$$

On notera  $\mathbb{N} \hookrightarrow E$ .

2. Un ensemble  $E$  sera dit *dénombrable* si :

$$\exists f : E \rightarrow \mathbb{N} \text{ injective } (E \hookrightarrow \mathbb{N}).$$

3. Un ensemble  $E$  sera dit *fini*, s'il n'est pas infini.

Proposition 1.3

Soit  $E$  un ensemble non vide alors :

$$E \text{ fini} \iff \exists ! n \in \mathbb{N}, E \text{ en bijection avec } \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Définition 1.2

Soit  $E$  un ensemble fini non vide, l'entier  $n$  de la proposition 1.3, de la présente page s'appelle le *cardinal* de  $E$  et se note  $\text{Card}(E)$ .

Exercice(s) 1.2

1.2.1 Montrer qu'un ensemble fini est dénombrable. La réciproque est-elle vraie ?

1.2.2 Soit  $E$  un ensemble, montrer que :

$$E \text{ infini et dénombrable} \iff E \text{ en bijection avec } \mathbb{N}.$$

1.2.3 Montrer que  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{N}^k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ),  $\mathbb{Q}^k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) sont infinis et dénombrables (donc en bijection avec  $\mathbb{N}$ ).

1.2.4 Soit  $E$  un ensemble infini, montrer que  $E$  non dénombrable si, et seulement si,

$$\forall D \subset E, D \text{ dénombrable} \Rightarrow E \setminus D \text{ en bijection avec } E.$$

1.2.5 Montrer que  $E$  et  $\mathcal{P}(E)$  ne sont jamais en bijection. <sup>a</sup>

1.2.6 Montrer que  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  n'est pas dénombrable. <sup>b</sup>

1.2.7 Soient  $(E_i)_{i \in I}$  une famille d'ensembles dénombrables indexée par un ensemble  $I$  dénombrable. Montrer que :

$$\bigcup_{i \in I} E_i \text{ est dénombrable.}$$

1.2.8 Montrer que  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.

1.2.9 Soient 3 ensembles  $E$ ,  $F$  et  $G$ , trouver une bijection entre

$$E^{F \times G} \text{ et } (E^F)^G.$$

1.2.10 Montrer que l'ensemble  $\mathcal{P}$  des nombres premiers est dénombrable.

1.2.11 Montrer que  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est en bijection avec  $\mathbb{R}$ . <sup>c</sup>

a. Si  $f$  est une application de  $E$  dans  $\mathcal{P}(E)$ , on pourra considérer :

$$A = \{x \in E, x \notin f(x)\}.$$

b. Si  $f$  est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ , en notant  $f(n) = (u_p^{(n)})_{p \in \mathbb{N}}$ , on pourra considérer la suite définie par :

$$v_n = 1 + u_n^{(n)}.$$

c. On pourra remarquer que  $\mathbb{R}$  est en bijection avec  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .

---

## Dénombrabilité

---

L'article *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* de Georg Cantor, paru en 1874, est l'acte de naissance de la théorie des ensembles. Cantor y étudie les parties de  $\mathbb{R}$  à bijection près et distingue les parties en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$  de celles qui ne le sont pas.

Dans le cadre de la théorie de l'intégration, les ensembles en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$  tiennent un rôle particulier.

**Définition.** On dit qu'un ensemble  $E$  est *dénombrable* s'il est en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$ .

**Proposition.** Tout ensemble dénombrable est soit fini, soit en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

*Démonstration.* — Il suffit de démontrer que toute partie infinie  $E \subset \mathbb{N}$  est en bijection avec  $\mathbb{N}$ . On construit une telle bijection par récurrence : on pose  $f(0) = \min E$  puis, par récurrence,  $f(k) = \min(E \setminus \{f(0), \dots, f(k-1)\})$  (les ensembles dont on prend les minima ne sont jamais vides car  $E$  est infini). Cette fonction réalise alors une bijection  $\mathbb{N} \rightarrow E$ .  $\square$

### Remarques.

- On dit parfois que  $E$  et  $F$  sont *équipotents* s'il existe une bijection entre  $E$  et  $F$ . On dit aussi (plus fréquemment) qu'ils *ont le même cardinal*.
- Notons que la définition que nous avons donnée se reformule en : *un ensemble  $E$  est dénombrable s'il existe une injection  $E \hookrightarrow \mathbb{N}$* . On dit aussi qu'un tel ensemble *s'injecte dans  $\mathbb{N}$* .
- Notons que pour certains auteurs, « dénombrable » veut dire « en bijection avec  $\mathbb{N}$ . » Cette convention, par ailleurs très raisonnable, n'est pas la plus commode pour la théorie de l'intégration.

### Exemples d'ensembles dénombrables

Si  $f : E \hookrightarrow \mathbb{N}$  est une injection, alors toute partie de  $E$  s'injecte également dans  $\mathbb{N}$  (il suffit de considérer la restriction  $f|_E$ ). De la même façon, si  $F$  s'injecte dans  $E$ ,  $F$  est dénombrable (il suffit de considérer  $f \circ \iota$ , où  $\iota : F \hookrightarrow E$  est une injection).

**Proposition.** Si  $f : E \twoheadrightarrow F$  est une surjection et que  $E$  est dénombrable, alors  $F$  est dénombrable.

*Démonstration.* — Pour tout  $y \in F$ , la surjectivité de  $f$  entraîne que l'ensemble  $f^{-1}\{y\}$  est non vide. Définissons une fonction  $g : F \rightarrow E$  en prenant, pour chaque  $y \in F$  un élément  $g(y) \in f^{-1}\{y\}$ . On a donc trouvé une fonction  $g : F \rightarrow E$  telle que  $f \circ g = \text{id}_F$  (ce qu'on appelle une *section* de la fonction  $f$ ). En particulier,  $g$  est injective et  $F$  est donc dénombrable.  $\square$

**Remarque.** De manière plus générale, on a démontré en passant que s'il existe une surjection  $E \rightarrow F$ , il existe une injection  $F \hookrightarrow E$ . La réciproque est également vraie (quand  $F$  est non vide), ce qui permet de n'avoir qu'une seule notion rigoureuse signifiant «  $E$  est plus grand que  $F$ . »

**Proposition.** Les ensembles  $\mathbb{N}^k$  (pour un entier  $k \geq 1$ ),  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Q}$  sont dénombrables.

*Démonstration.* — Soit  $p_1, \dots, p_k$  des nombres premiers distincts. D'après le théorème fondamental de l'arithmétique,  $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{N}^k & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (a_1, \dots, a_k) & \mapsto & p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} \end{matrix}$  est une injection.

$\psi : \begin{matrix} \mathbb{N}^2 & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ (a, b) & \mapsto & (-1)^a b \end{matrix}$  est une surjection.

$\chi : \begin{matrix} \mathbb{N}^3 & \rightarrow & \mathbb{Q} \\ (a, b, c) & \mapsto & (-1)^a \frac{b}{c+1} \end{matrix}$  est une surjection. □

Comme ces ensembles sont clairement infinis, il s'ensuit qu'il existe une bijection entre eux et  $\mathbb{N}$ . Il n'est d'ailleurs pas si difficile d'en construire d'explicites, mais il faut être un peu plus soigneux.

Pour construire plus d'ensembles dénombrables, il est commode de montrer des propriétés de *stabilité*. On en a déjà deux : les parties d'un ensemble dénombrable et les images surjectives d'un ensemble dénombrable sont dénombrables.

**Proposition.**

- Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable : si  $A_1, \dots, A_k$  sont dénombrables,  $A_1 \times \cdots \times A_k$  l'est également.
- Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable : si  $E = \bigcup_{i \in I} A_i$ , et que  $I$  et les  $(A_i)$  sont dénombrables,  $E$  l'est également.

**Remarque.** Attention : comme on le verra plus loin, un produit *infini*, même dénombrable, d'ensembles dénombrables n'est presque jamais dénombrable.

*Démonstration.* — Pour  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , soit  $\varphi_i : A_i \hookrightarrow \mathbb{N}$  une injection. L'application

$$\begin{matrix} A_1 \times \cdots \times A_k & \rightarrow & \mathbb{N}^k \\ (a_1, \dots, a_k) & \mapsto & (\varphi_1(a_1), \dots, \varphi_k(a_k)) \end{matrix}$$

est alors une injection. Comme  $\mathbb{N}^k$  est dénombrable,  $A_1 \times \cdots \times A_k$  l'est aussi.

Pour le deuxième point, soit  $\varphi : I \hookrightarrow \mathbb{N}$  une injection et, pour  $n \in \varphi(I)$ , on considère  $\psi_n : A_{\varphi^{-1}(n)} \hookrightarrow \mathbb{N}$  une injection. Pour chaque élément  $e \in E$ , on note  $m(e) = \min_{\substack{i \in I \\ e \in A_i}} \varphi(i)$  et

$\chi(e) = (m(e), \psi_{m(e)}(e))$ . L'application  $\chi : E \rightarrow \mathbb{N}^2$  est bien définie car  $m(e) \in \varphi(I)$  par définition, et c'est alors une injection :  $E$  est dénombrable. □

## Exemples d'ensembles non dénombrables : la puissance du continu

L'exemple le plus simple d'ensemble non dénombrable est l'ensemble  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  des parties de  $\mathbb{N}$ . On peut en fait démontrer simplement un théorème plus général.

**Théorème (Cantor, 1891).** Soit  $E$  un ensemble. Il n'existe pas de bijection  $E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ .

*Démonstration.* — Supposons qu'il existe une telle bijection  $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ . Posons

$$F = \left\{ x \in E \mid x \notin f(x) \right\}.$$

Puisque  $F \subset E$ , on peut trouver  $x_0$  tel que  $f(x_0) = F$ . On a donc soit  $x_0 \in F$ , soit  $x_0 \notin F$ .

– Si  $x_0 \in F$ , par définition,  $x_0 \notin f(x_0) = F$ , une contradiction ;

– si  $x_0 \notin F$ , par définition,  $x_0 \in f(x_0) = F$ , une contradiction.

L'hypothèse de départ était donc absurde : il n'existe pas de telle bijection.  $\square$

Ainsi, aucun ensemble en bijection avec  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  (on dit qu'un tel ensemble a la *puissance du continu*) n'est dénombrable. C'est notamment le cas de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  : les applications

$$\begin{array}{ccc} \{0, 1\}^{\mathbb{N}} & \xleftrightarrow{\quad} & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} & \mapsto & \left\{ i \in \mathbb{N} \mid a_i = 1 \right\} \\ ([i \in A])_{i \in \mathbb{N}} & \leftrightarrow & A \end{array}$$

sont deux bijections réciproques (dans la dernière ligne, le crochet est un *crochet d'Iverson* :  $[P]$  vaut 1 si la proposition  $P$  est vraie et 0 sinon.) Notons que cela donne un exemple de produit dénombrable d'ensembles dénombrables qui ne soit pas dénombrable. On peut donc vérifier qu'un produit infini n'est dénombrable que dans les cas triviaux (i.e. si l'un des facteurs est vide ou si, à l'exception d'un nombre fini, les facteurs sont des singletons). Pour donner d'autres exemples sans exhiber des bijections explicites qui pourraient être un peu pénibles, on va utiliser le théorème suivant.

**Théorème (Cantor-Schröder-Bernstein, 1895).** Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles. S'il existe une injection de  $E$  dans  $F$  et une injection de  $F$  dans  $E$ ,  $E$  et  $F$  sont en bijection.

D'après ce qu'on a déjà dit, ce théorème implique que si l'on a deux fonctions  $E \rightarrow F$ , l'une injective et l'autre surjective, alors  $E$  et  $F$  sont en bijection.

On peut maintenant donner d'autres exemples d'ensembles en bijection avec  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

**Proposition.** Soit  $a < b$  deux réels. Les ensembles  $[a, b]$ ,  $]a, b[$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^k$  (pour un entier  $k \geq 1$ ) et  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ont la puissance du continu.

*Démonstration.* — Commençons par démontrer que les trois premiers sont en bijection. Déjà, une simple transformation affine montre que pour  $a < b$ ,  $[a, b]$  est en bijection avec  $[-1, 1]$  et  $]a, b[$  avec  $] -1, 1[$ . La fonction tangente hyperbolique est une bijection entre  $\mathbb{R}$  et  $] -1, 1[$ . Puisqu'il y a une injection claire entre  $] -1, 1[$  et  $[-1, 1]$  et que  $x \mapsto x/2$  injecte  $[-1, 1]$  dans  $] -1, 1[$ , le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein implique que tous ces ensembles sont en bijection.



Les propriétés du développement en base 2 et en base 3 montrent que

$$\begin{aligned}\{0, 1\}^{\mathbb{N}} &\rightarrow [0, 1] \\ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} &\mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}\end{aligned}$$

est une surjection et que

$$\begin{aligned}\{0, 2\}^{\mathbb{N}} &\rightarrow [0, 1] \\ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} &\rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^{i+1}}\end{aligned}$$

est une injection (son image est *l'ensemble triadique de Cantor*). Le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein (avec la bijection  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \simeq \mathcal{P}(\mathbb{N})$  déjà évoquée) montre alors que  $[0, 1]$  et  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  sont en bijection.

Enfin, vu la bijection  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \simeq \mathbb{R}$ , il suffit de montrer  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \simeq \mathcal{P}(\mathbb{N})^k \simeq \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$  pour obtenir  $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^k \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . En fait, étant donné deux ensembles A et B, on a une bijection<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A)^B &\rightarrow \mathcal{P}(A \times B) \\ (X_b)_{b \in B} &\mapsto \bigcup_{b \in B} \left\{ (a, b) \mid a \in X_b \right\}\end{aligned}$$

Les ensembles  $\mathcal{P}(\mathbb{N})^k$  et  $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$  sont donc en bijection avec  $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \llbracket 1, k \rrbracket)$  et  $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ . Les ensembles  $\mathbb{N} \times \llbracket 1, k \rrbracket$  et  $\mathbb{N}^2$  étant en bijection avec  $\mathbb{N}$ , on obtient le résultat voulu.  $\square$

## Une application

Rappelons qu'un nombre (réel ou complexe) est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers et qu'il est *transcendant* sinon.

**Théorème (Liouville, 1844).** Il existe des nombres réels transcendants.

Ce que l'on vient de voir permet de donner une preuve de ce théorème (c'est le but de l'article original de Cantor, comme son titre l'indique).

*Démonstration.* — Si on note  $\mathbb{Z}_n[X] \subset \mathbb{Z}[X]$  l'ensemble des polynômes entiers de degré  $\leq n$ , on a une bijection

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{Z}_n[X] \\ (a_0, \dots, a_n) &\mapsto a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n.\end{aligned}$$

L'ensemble  $\mathbb{Z}_n[X]$  est donc dénombrable. Puisque  $\mathbb{Z}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_n[X]$  est une union dénombrable d'ensembles dénombrables, il est lui-même dénombrable. Enfin, si l'on note

---

1. Notons que si l'on adopte la notation  $2^A$  pour  $\mathcal{P}(A)$  (ce qui est sensé au vu de la bijection  $\mathcal{P}(A) \simeq \{0, 1\}^A$  évoquée plus haut dans le cas  $A = \mathbb{N}$ ), cette bijection s'écrit agréablement  $(2^A)^B \simeq 2^{A \times B}$ . De manière générale, on a une bijection  $(C^A)^B \simeq C^{A \times B}$ .

$Z(P) \subset \mathbb{R}$  l'ensemble des racines réelles d'un polynôme  $P$ , l'ensemble des nombres réels algébriques s'écrit

$$\bigcup_{\substack{P \in \mathbb{Z}[X] \\ P \neq 0}} Z(P).$$

Union dénombrable d'ensembles finis, il est donc dénombrable.

Puisque  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable, il existe un nombre transcendant (il en existe même une quantité non dénombrable).  $\square$

## Preuve du théorème de Cantor-Schröder-Bernstein

Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow E$  deux injections. On pose  $E' = f[E] \subset F$  et  $F' = g[F] \subset E$ . Les applications  $f$  et  $g$  sont des bijections de  $E$  sur  $E'$  et de  $F$  sur  $F'$ , respectivement. On va construire une bijection  $h : E \rightarrow F'$ , et l'application  $g^{-1} \circ h$  sera alors une bijection de  $E$  dans  $F$ .

Pour cela, posons  $E_0 = E \setminus F'$  puis, par récurrence,  $E_1 = g \circ f[E_0]$ ,  $E_2 = g \circ f[E_1]$ , etc. Par construction,  $g \circ f$  envoie  $\bigcup_{i \geq 0} E_i$  sur  $\bigcup_{i \geq 1} E_i$ , qui est inclus dans  $g[F] = F'$ . On pose alors

$$h : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ a & \mapsto & \begin{cases} (g \circ f)(a) & \text{si } a \in \bigcup_{i \geq 0} E_i ; \\ a & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

On a alors  $h[E] = F'$ . Comme en outre  $h$  est obtenue en recollant deux injections d'images disjointes,  $h$  est injective. On a donc obtenu la bijection  $h : E \rightarrow F'$  recherchée.



## Chapitre 2

# Fonctions réelles de la variable réelle

### 2.1 Compléments

#### 2.1.1 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

##### Rappel 2.1

- La relation "inférieur ou égal" ( $\leq$ ) sur  $\mathbb{R}$  est :
  1. réflexive :  $\forall a \in \mathbb{R}, a \leq a$  ;
  2. antisymétrique :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b \text{ et } b \leq a) \Rightarrow a = b$  ;
  3. transitive :  $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (a \leq b \text{ et } b \leq c) \Rightarrow a \leq c$ .

On dit que c'est une *relation d'ordre* sur  $\mathbb{R}$  et que  $\mathbb{R}$  est un *ensemble ordonné*.

- La relation "inférieur ou égal" est *compatible* avec l'addition :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \leq b \Rightarrow (a + c) \leq (b + c);$$

et avec la multiplication par un réel positif :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (a \leq b \text{ et } c \geq 0) \Rightarrow a \times c \leq b \times c.$$

##### Définition 2.1 – majoré - majorant - maximum

Soit  $E$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}$ . On dit que :

1.  $E$  est *majoré* lorsque :
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, x \leq M;$$
2.  $M$  est un *majorant* de  $E$  lorsque :
$$\forall x \in E, x \leq M;$$
3.  $M$  est le *maximum* (ou le *plus grand élément*) de  $E$  et on note  $M = \max(E)$  lorsque :
$$M \in E \text{ et } M \text{ est un majorant de } E,$$

##### Remarque 2.1

Soit  $E$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}$ .

1.  $E$  est soit non majoré soit non majoré. Dans le premier cas il n'a pas de majorant, dans le second cas, il en a une infinité.
2. Si  $E$  est majoré, il peut ne pas avoir de maximum. Si  $E$  a un maximum alors il est unique.
3. On définit de manière similaire :

(a)  $E$  est *minoré* lorsque :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E, m \leq x;$$

(b)  $m$  est un *minorant* de  $E$  lorsque :

$$\forall x \in E, m \leq x;$$

(c)  $m$  est le *minimum* (ou le *plus petit élément*) de  $E$  et on note  $m = \min(E)$  lorsque :

$$m \in E \text{ et } m \text{ est un minorant de } E.$$

4.  $E$  est *borné* lorsque  $E$  est majoré et minoré.

#### Exemple 2.1

1.  $E_1 = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 2\}$  et  $E_2 = \{x \in \mathbb{R}, x \leq \sqrt{2}\}$  sont majorés et admettent chacun un maximum.
2.  $E_3 = \{x \in \mathbb{Q}, x \leq 2\}$  et  $E_4 = \{x \in \mathbb{Q}, x \leq \sqrt{2}\}$  sont majorés,  $E_3$  admet un maximum mais pas  $E_4$ .

#### Remarque 2.2

Si un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}$  a un maximum  $M$  alors  $M$  est le plus petit des majorants de  $E$ .

#### Définition 2.2 – Borne supérieure

Soit  $E$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}$  alors :

1. la *borne supérieure* de  $E$  est, lorsqu'il existe, le plus petit des majorants de  $E$  et on le note  $\sup(E)$  ;
2. la *borne inférieure* de  $E$  est, lorsqu'il existe, le plus grands des minorants de  $E$  et on le note  $\inf(E)$ .

#### Remarque 2.3

1. Si  $E$  admet un maximum alors  $E$  admet une borne supérieure et :

$$\sup(E) = \max(E).$$

2. Si  $E$  admet une borne supérieure et  $\sup(E) \in E$  alors  $E$  admet un maximum et :

$$\max(E) = \sup(E).$$

3. Si  $E$  admet une borne supérieure  $M$  alors  $M$  est l'unique réel vérifiant :

$$\forall x \in E, x \leq M \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, M - \varepsilon < x.$$

On a une propriété similaire sur la borne inférieure.

#### Exemple 2.2

Quelques exemples de bornes supérieures :

1. *Cas des intervalles*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b \Rightarrow \sup [a, b[ = \sup [a, b] = b.$$

2. *Ensembles plus compliqués*

$$\sup \{\sin(x), x \in \mathbb{R}\} = 1.$$

#### Proposition 2.1 – propriété de la borne supérieure

*Toute sous-ensemble non vide et majorée de  $\mathbb{R}$  possède une borne supérieure.*

#### Remarque 2.4

1. On étend la définition de  $\sup(E)$  à tout les sous-ensembles  $E$  de  $\mathbb{R}$  :
  - (a) si  $E$  est vide, on pose  $\sup(E) = -\infty$  ;
  - (b) si  $E$  n'est pas majoré, on pose  $\sup(E) = +\infty$ .
2. On a une propriété similaire à 2.1, page ci-contre pour la borne inférieure.

#### Exemple 2.3

Quelques exemples de bornes supérieures :

3. *Cas non majorés*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \sup[a, +\infty[ = +\infty.$$

#### Exercice(s) 2.1

- 2.1.1 Soit  $E = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ , déterminer l'ensemble des majorants de  $E$  et, si elles existent, sa borne supérieures et son maximum. Faire de même pour les minorants, la borne inférieure et le minimum.
- 2.1.2 Soient  $A$  et  $B$  deux parties bornées de  $\mathbb{R}$ , montrer que :

$$A \subset B \Rightarrow (\sup(A) \leq \sup(B) \text{ et } \inf(A) \geq \inf(B)).$$

- 2.1.3 Montrer que :

$$x = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon.$$

- 2.1.4 Montrer que  $\mathbb{R}$  vérifie :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \exists n \in \mathbb{N}, nx \geq y.$$

## 2.1.2 Monotonie

#### Rappel 2.2

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

1. On dit que  $f$  est *croissante* si :

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

2. On dit que  $f$  est *strictement croissante* si :

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

3. On dit que  $f$  est *décroissante* si :

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

4. On dit que  $f$  est *strictement décroissante* si :

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

5. On dit que  $f$  est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.
6. On dit que  $f$  est *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

### Remarque 2.5

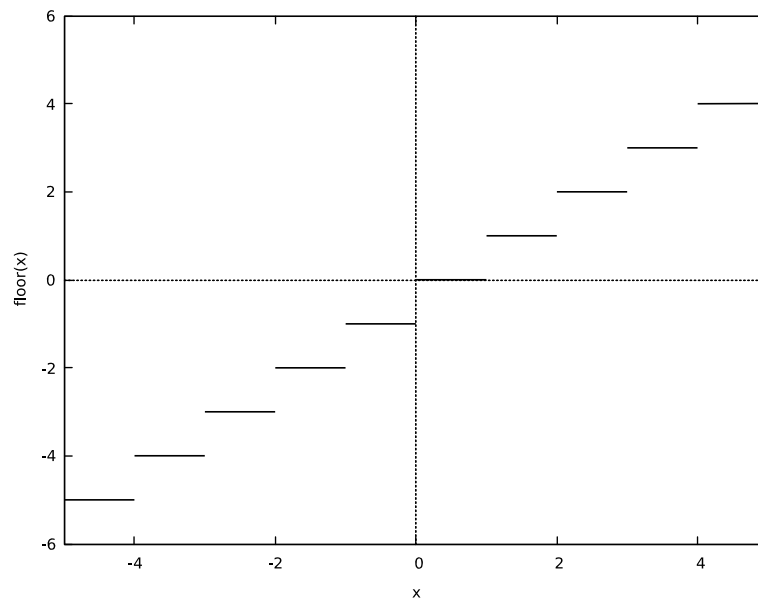
La fonction *partie entière* définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = n \iff \begin{cases} n \in \mathbb{Z}, \\ n \leq x < n+1, \end{cases}$$

est croissante, mais n'est pas strictement croissante.

Son graphe est donné à la figure 2.1, de la présente page

Figure 2.1 – Partie entière



### Exercice(s) 2.2

2.2.1 Montrer que la fonction  $x \mapsto x^3$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ . Est-elle strictement croissante ?

2.2.2 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  (un entier naturel non nul), étudier la monotonie de  $x \mapsto x^n$  lorsque  $n$  est impair. Le montrer. Où intervient l'impairité de  $n$  ?

2.2.3 Soit  $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$  (un rationnel strictement positif), que dire de la monotonie de  $x \mapsto x^\alpha$  ?

2.2.4 Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , montrer que :

$$f \text{ strictement croissante} \iff (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b \iff f(a) \leq f(b)).$$

2.2.5 Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , croissante. Montrer que

$$\exists a \in [0, 1], f(a) = a.$$

## 2.2 Limites

### 2.2.1 Premières définitions

#### Notation 2.1

1. Soit  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ , nous noterons  $\bar{I}$ , l'ensemble des points *adhérents* à  $I$  et  $\overset{\circ}{I}$ , l'ensemble des points *intérieurs* à  $I$ , de la manière suivante :

$I$	$\bar{I}$	$\overset{\circ}{I}$
$[a, b]$	$[a, b]$	$]a, b[$
$]a, b[$	$[a, b]$	$]a, b[$
$[a, b]$	$[a, b]$	$]a, b[$
$]a, b[$	$[a, b]$	$]a, b[$
$[a, +\infty[$	$[a, +\infty[$	$]a, +\infty[$
$]a, +\infty[$	$[a, +\infty[$	$]a, +\infty[$
$] - \infty, a]$	$] - \infty, a]$	$] - \infty, a[$
$] - \infty, a[$	$] - \infty, a]$	$] - \infty, a[$
$] - \infty, +\infty[$	$] - \infty, +\infty[$	$] - \infty, +\infty[$

Dans ce cours, nous emploierons le mot *voisinage* dans le sens suivant<sup>a</sup> :

2. Un voisinage de  $a \in \bar{I}$  dans  $I$ , est de la forme  $I \cap ]a - \eta, a + \eta[$  ( $\eta > 0$ ).
3. Un voisinage de  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) est de la forme  $[A, +\infty[$  (resp.  $] - \infty, -A]$ ) où  $A \in \mathbb{R}$ .
4. Nous noterons  $[-\infty, +\infty]$  l'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

a. Une définition plus usuelle sera donnée dans le cours M222.

#### Définition 2.3 – Limite d'une fonction

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , soit  $a$  un point de  $\bar{I}$ , on dit que  $f$  admet une limite  $\lambda$  en  $a$  (resp. limite à gauche, limite à droite) et on note :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \text{ (resp. } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \lambda, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \lambda),$$

si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \left| \begin{array}{l} \text{resp. } \forall x \in I \cap ] - \infty, a[, \\ \text{resp. } \forall x \in I \cap ]a, +\infty[, \end{array} \right| |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon.$$

On note aussi :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x < a} \lambda, \text{ pour la limite à gauche,}$$

et

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x > a} \lambda, \text{ pour la limite à droite.}$$

#### Remarque 2.6

En termes simples : cela signifie que plus on se rapproche de  $a$ , plus la valeur de la fonction se rapproche de  $\lambda$ .

#### Exemple 2.4 – Limites ou non ?

1. La fonction *partie entière* admet une limite en tout point de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et une limite à droite et à gauche en tout point de  $\mathbb{Z}$ .

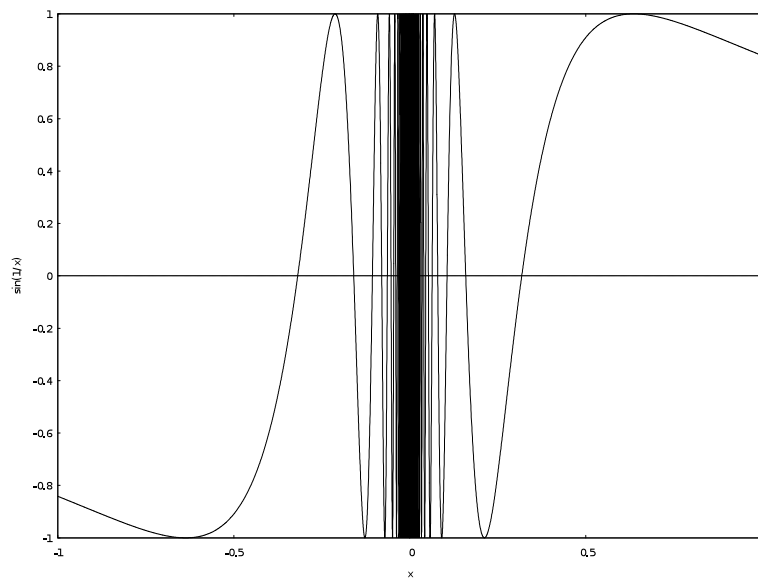


2. La fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

a une limite en tout point de  $\mathbb{R}^*$ , mais n'a pas de limite en 0. Voir son graphe, figure 2.2, de la présente page.

Figure 2.2 – Fonction sans limite



#### Définition 2.4

On peut généraliser la notion de limite lorsque  $\lambda$  prend une valeur infinie, et quand  $a$  prend une valeur infinie (en ce cas,  $I$  doit contenir un sous-intervalle de la forme  $[\alpha, +\infty[$  ou  $] -\infty, \alpha]$ ), soit :

1. ( $\lambda = +\infty$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ) :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$$

se traduit par :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A.$$

Et (limite à gauche)

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} +\infty$$

se traduit par :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap ]-\infty, a[, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A.$$

Enfin (limite à droite)

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} +\infty$$

se traduit par :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap ]a, +\infty[, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A.$$

2. ( $\lambda = -\infty$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ) :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$$

se traduit par :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq -A.$$

Et (limite à gauche)

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} -\infty$$

se traduit par :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap ]-\infty, a[, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq -A.$$

Enfin (limite à droite)

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} -\infty$$

se traduit par :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap ]a, +\infty[, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq -A.$$

3.  $(\lambda \in \mathbb{R}, a = +\infty)$  :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lambda$$

se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon.$$

4.  $(\lambda \in \mathbb{R}, a = -\infty)$  :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \lambda$$

se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I, x \leq -A \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon.$$

5.  $(\lambda = +\infty, a = +\infty)$  :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

se traduit par :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A.$$

6. ... (les autres cas sont laissés en exercice)

#### Remarque 2.7

Ces définitions ne sont pas pratiques ! On peut les résumer de la manière suivante : soit  $\lambda \in [-\infty, +\infty]$ , soit  $a \in \bar{I}$ , alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda$$

signifie :

Pour tout voisinage  $W$  de  $\lambda$ , il existe un voisinage  $V$  de  $a$ , tel que, si  $x \in V$  alors  $f(x) \in W$ .

#### Remarque importante 2.8

Ces définitions ne sont pas pratiques ! Pour simplifier, nous allons procéder de la manière suivante :

1. considérer les fonctions de référence usuelles et connaître leurs limites ;
2. combiner ces fonctions de référence usuelles (addition, soustraction, multiplication, division, composition...)

#### Propriété 2.1

Si  $f$  admet une limite (resp. limite à gauche, limite à droite) en  $a \in [-\infty, +\infty]$ , alors cette limite est unique.

### Propriété 2.2

Si  $f$  et  $g$  définies sur  $I$  admettent des limites (resp. limites à gauche, limites à droite)  $\lambda$  et  $\mu$  réelles en  $a \in [-\infty, +\infty]$ , alors  $f + g$  admet la limite (resp. limite à gauche, limite à droite)  $\lambda + \mu$  en  $a$ .

### Remarque 2.9

Il est encore possible de conclure dans certains cas lorsque  $\lambda$  et  $\mu$  sont dans  $[-\infty, +\infty]$ , avec les règles suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad & \ll x + \infty \gg = \ll \infty + x \gg = \ll +\infty + \infty \gg = +\infty, \\ & \ll x - \infty \gg = \ll -\infty + x \gg = \ll -\infty - \infty \gg = -\infty, \end{aligned}$$

### Remarque importante 2.10

En revanche, il est impossible de conclure de manière générale (on parle de *forme indéterminée*) pour les cas :

$$\ll +\infty - \infty \gg \text{ et } \ll -\infty + \infty \gg.$$

### Propriété 2.3

Si  $f$  admet une limite (resp. limite à gauche, limite à droite)  $\lambda$  réelle en  $a \in [-\infty, +\infty]$ , si  $k \in \mathbb{R}$ , alors  $k.f$  admet une limite (resp. limite à gauche, limite à droite)  $k.\lambda$  en  $a$ .

### Remarque 2.11

Il est encore possible de conclure dans certains cas lorsque  $\lambda \in [-\infty, +\infty]$ , avec les règles suivantes :

$$\begin{aligned} \forall k > 0, \quad & \ll k.(+\infty) \gg = +\infty \\ & \ll k.(-\infty) \gg = -\infty \\ \forall k < 0, \quad & \ll k.(+\infty) \gg = -\infty \\ & \ll k.(-\infty) \gg = +\infty \end{aligned}$$

### Propriété 2.4

Si  $f$  et  $g$  définies sur  $I$  admettent des limites (resp. limites à gauche, limites à droite)  $\lambda$  et  $\mu$  réelles en  $a \in [-\infty, +\infty]$ , alors  $f \times g$  admet la limite (resp. limite à gauche, limite à droite)  $\lambda \times \mu$  en  $a$ .

### Remarque 2.12

Il est encore possible de conclure dans certains cas lorsque les limites sont dans  $[-\infty, +\infty]$ , avec les règles suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad & \ll x \times +\infty \gg = \ll +\infty \times x \gg = \ll +\infty \times +\infty \gg \\ & = \ll -\infty \times -\infty \gg = +\infty \\ \forall x < 0, \quad & \ll x \times +\infty \gg = \ll +\infty \times x \gg = \ll +\infty \times -\infty \gg \\ & = \ll -\infty \times +\infty \gg = -\infty \end{aligned}$$

### Remarque importante 2.13

En revanche, il est impossible de conclure de manière générale (on parle de *forme indéterminée*) pour les cas :

$$\ll 0 \times (+\infty) \gg \text{ et } \ll 0 \times (-\infty) \gg.$$

### Propriété 2.5

Si  $f$  admet une limite (resp. limite à gauche, limite à droite)  $\lambda \in [-\infty, +\infty]$  en  $a \in [-\infty, +\infty]$ , si  $g$  est définie au voisinage de  $\lambda$  et admet une limite  $\mu \in [-\infty, +\infty]$  en  $\lambda$ , alors  $g \circ f(x)$  admet la limite (resp. limite à gauche, limite à droite)  $\mu$  en  $a$ .

### Exemple 2.5

Soit  $a \in [-\infty, +\infty]$ ,  $f$  définie sur un voisinage de  $a$  et  $\lambda \in [-\infty, +\infty]$  tel que :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda,$$

alors, si  $\lambda \neq 0$  :

$$\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \begin{cases} 1/\lambda & \text{si } \lambda \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } \lambda \in \{-\infty, +\infty\}. \end{cases}$$

En revanche, si  $\lambda = 0$ , il faut différencier trois cas :

$$\begin{cases} \text{Si } f(x) \geq 0 \text{ au voisinage de } a & \text{alors } 1/f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \\ \text{si } f(x) \leq 0 \text{ au voisinage de } a & \text{alors } 1/f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty \\ \text{sinon, on ne peut rien dire.} \end{cases}$$

### Notation 2.2

L'unicité de la limite vue dans la propriété 2.1, page 29 permet d'utiliser les autres notations suivantes ( $a \in \mathbb{R}$  ou  $[-\infty, +\infty]$ ,  $\lambda \in [-\infty, +\infty]$ ) : <sup>a</sup>

$$\begin{array}{lll} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda & \text{peut s'écrire} & \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lambda \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \lambda & \text{peut s'écrire} & \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lambda \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \lambda & \text{peut s'écrire} & \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lambda. \end{array}$$

<sup>a</sup>. Dans le cas où  $a \in \{-\infty, +\infty\}$ , on n'utilise pas les notations  $a^+$  et  $a^-$ , car cela n'a pas de sens.

### Exemple 2.6 – Limites usuelles (à connaître)

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &\xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0 \\ \frac{1}{x} &\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty \\ \frac{1}{x} &\xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty \\ \forall \alpha > 0, x^\alpha &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \\ \ln(x) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \\ \ln(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty \\ e^x &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \\ e^x &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \end{aligned}$$

### Exercice(s) 2.3

2.3.1 Soit  $f$  définie sur un voisinage de  $+\infty$ , on suppose que  $f$  admet une limite réelle en  $+\infty$ , montrer que  $f$  est bornée au voisinage de  $+\infty$ . Que pensez-vous de la réciproque ?

2.3.2 Étudier les limites des fonctions suivantes :

$$\frac{x}{2 + \sin(1/x)} \quad \text{en } 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{4x^4 + x^2 + x - 6} \quad \text{en } 1 \quad (2.2)$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x} - \sqrt{x}}} \quad \text{en } +\infty \quad (2.3)$$

2.3.3 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  périodique admettant une limite finie en  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est constante.

2.3.4 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bijective, strictement croissante, telle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty.$$

2.3.5 Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  croissante telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - f(x) = 0.$$

Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Donner un contre-exemple lorsque  $f$  n'est plus croissante.

2.3.6 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On pose

$$\forall x \neq 0, g(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}.$$

On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{f(x)}{x} = \frac{f(\frac{x}{2^n})}{x} + \sum_{k=1}^n \frac{g(\frac{x}{2^k})}{2^k}.$$

(b) En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

## 2.2.2 Techniques

*Nous ne parlerons ici que de limites, les résultats se généralisent facilement aux limites à gauche et à droite.*

### Proposition 2.2

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont telles que, il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ , et  $a \in \bar{I}$  avec

$$\forall x \in I, f(x) \leq g(x), \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \mu,$$

alors

$$\lambda \leq \mu.$$

#### Démonstration

Soit  $\varepsilon > 0$ , fixé, on peut trouver <sup>a</sup> un  $\eta_1 > 0$  et un  $\eta_2 > 0$  tel que :

$$\forall x \in I, |x - a| \leq \eta_1 \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon$$

et

$$\forall x \in I, |x - a| \leq \eta_2 \Rightarrow |g(x) - \mu| \leq \varepsilon.$$

Posons  $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ , et prenons  $x \in I$ , tel que  $|x - a| \leq \eta$ , alors

$$\lambda \leq f(x) + \varepsilon \leq g(x) + \varepsilon \leq \mu + 2\varepsilon.$$

On obtient donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \lambda \leq \mu + 2\varepsilon.$$

Ceci n'est possible que si

$$\lambda \leq \mu.$$

a. Dans la suite du cours, nous résumerons tout cela en disant que  $\eta$  est *associé* à  $\varepsilon$ .

#### Remarque 2.14

La démonstration nous permet de voir que si l'inégalité est stricte le résultat reste *avec une inégalité large* ! Soit, si

$$\forall x \in I, f(x) < g(x), f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \text{ et } g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \mu,$$

alors

$$\lambda \leq \mu.$$

On ne peut pas en général obtenir d'inégalité stricte, comme le montre l'exemple suivant :

$$f(x) = x^2, g(x) = |x|, I = ]0, 1[, a = 0, \lambda = \mu = 0.$$

#### Remarque 2.15

1. Le résultat est encore vrai lorsque  $a = \pm\infty$  (seule la démonstration change un peu).
2. Le résultat est encore vrai lorsque  $\mu = -\infty$  ou  $\lambda = +\infty$ .

#### Théorème 2.1 – Lemme des gendarmes

Soit  $f, g$  et  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{I}$ ,  $\lambda \in [-\infty, +\infty]$ , tels que :

$$\forall x \in I, f(x) \leq g(x) \leq h(x), f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \text{ et } h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda$$

alors

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda.$$

#### Démonstration

Nous ne traiterons que le cas  $a \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , les autres cas sont similaires.

Soit  $\varepsilon > 0$  donné,  $\eta_1$  associé à  $\varepsilon$  pour  $f$  et  $\eta_2$  associé à  $\varepsilon$  pour  $h$ . Posons  $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$  et prenons  $x \in I$  tel que  $|x - a| \leq \eta$ , alors

$$g(x) - \lambda \leq h(x) - \lambda \leq \varepsilon \text{ et } \lambda - g(x) \leq \lambda - f(x) \leq \varepsilon.$$

Donc, pour un tel  $x$ ,

$$|g(x) - \lambda| \leq \varepsilon.$$

On a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |g(x) - \lambda| \leq \varepsilon.$$

C'est la définition de

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda.$$

### Exemple 2.7

On a, en utilisant les propriétés graphiques connues des fonctions concernées, par encadrement :

$$\begin{aligned} \sin(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ \ln(1+x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ e^x - 1 &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

### Exercice(s) 2.4

2.4.1 Montrer, par encadrement des fonctions et en utilisant les propriétés graphiques, que :

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad (2.4)$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad (2.5)$$

$$\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad (2.6)$$

2.4.2 Étudier les limites suivantes :

$$\frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x} \text{ en } 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\tan x}{\sqrt{x^2+4} + x - 2} \text{ en } 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \text{ en } 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1} \text{ en } \frac{\pi}{2} \quad (2.10)$$

$$\frac{\tan(x + \frac{\pi}{4}) - 1}{\sqrt{3} - 2 \cos(x + \frac{\pi}{6})} \text{ en } 0 \quad (2.11)$$

2.4.3 Soit  $f$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in \bar{I}$  tels que :

$$g \text{ est bornée sur } I \text{ et } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0,$$

montrer que

$$(f \times g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

2.4.4 Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  croissante.

(a) Montrer que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lambda.$$

(b) Montrer que :

$$\lambda \in \mathbb{R} \iff f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+.$$

*Plus généralement, toute fonction croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) admet une limite.*

2.4.5 Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monotone, où  $I = ]\alpha, \beta[$ .

- (a) Montrer qu'en tout point  $a \in I$ ,  $f$  admet une limite à gauche et une limite à droite.  
 (b) Montrer que

$$\left\{ a \in I, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right\} \text{ est dénombrable.}$$

## 2.3 Continuité

### 2.3.1 Définitions et premières propriétés

#### Définition 2.5 – Fonction continue

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

— Soit  $a \in I$ , on dit que  $f$  est *continue en  $a$*  si

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a).$$

Si  $f$  n'est pas continue en  $a$ , on dit que  $f$  est *discontinue en  $a$* .

— On dit que  $f$  est *continue sur  $I$*  si elle est continue en tout point de  $I$ .

#### Propriété 2.6

Une fonction continue en  $a$  vérifie donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

#### Propriété 2.7

Une fonction continue sur  $I$  vérifie donc :

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

#### Proposition 2.3

Si  $f$  est continue en  $a$  et  $f(a) > 0$ , alors il existe un voisinage de  $a$  où  $f$  ne prend que des valeurs strictement positives. (On peut énoncer une propriété semblable lorsque  $f(a) < 0$ ).

#### Exemple 2.8

1. La fonction  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$  est continue en tout point de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Elle n'est pas continue en tout point de  $\mathbb{Z}$ .
2. Les fonctions  $x \mapsto x$ ,  $x \mapsto x^2$ ,  $x \mapsto \sqrt{x}$ ,  $x \mapsto x^{1/3}$ ,  $x \mapsto \sin(x)$ ,  $x \mapsto \tan(x)$ ,  $x \mapsto \ln(x)$  et  $x \mapsto e^{-x}$  sont continues sur leur ensemble de définition.

#### Proposition 2.4

Des propriétés des limites, il découle pour la continuité en un point,  $f$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $a$  dans  $I$ .

1. Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $a$ , alors  $f + g$  est continue en  $a$ .
2. Si  $f$  est continue en  $a$  et si  $k \in \mathbb{R}$ , alors  $k.f$  est continue en  $a$ .
3. Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $a$ , alors  $f \times g$  est continue en  $a$ .



4. Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $a$  et si  $g(a) \neq 0$ , alors  $f/g$  est continue en  $a$ .
5. Si  $f$  est continue en  $a$  et si  $h$  est une fonction définie au voisinage de  $f(a)$  et continue en  $f(a)$ , alors  $h \circ f$  est continue en  $a$ .

#### Proposition 2.5

De même, si  $f$  et  $g$  sont définies, continues sur  $I$  et si  $h$  est définie, continue sur  $J \supset f(I)$ , alors

1.  $f + g$  est continue sur  $I$ .
2. Pour tout  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k.f$  est continue sur  $I$ .
3.  $f \times g$  est continue sur  $I$ .
4. Si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $f/g$  est continue sur  $I$ .
5.  $h \circ f$  est continue sur  $I$ .

#### Remarque importante 2.16

Les *fonctions polynomiales*<sup>a</sup> sont continues sur  $\mathbb{R}$ .

a. De la forme

$$x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \times x^k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

#### Remarque importante 2.17

Les *fonctions rationnelles* (quotient de deux fonctions polynomiales, celle du dénominateur étant non nulle) sont continues sur leur ensemble de définition.<sup>a</sup>

a. Qui sera souvent une réunion de plusieurs intervalles sur chacun desquels la fonction sera continue.

#### Exemple 2.9

1. Les fonctions suivantes sont continues :

$$\begin{aligned} x &\mapsto \sin(x) && \text{sur } \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x) && \text{sur } \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan(x) && \text{sur } \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \\ x &\mapsto \sqrt{x} && \text{sur } \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \ln(x) && \text{sur } \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto e^x && \text{sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. Si  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , on peut définir une *fonction puissance* sur  $\mathbb{R}_+^*$  de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^\alpha \stackrel{\text{Def}}{=} \exp(\alpha \times \ln(x)).$$

Lorsque  $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}^*$ , où  $q$  est impair, on peut définir cette fonction sur  $\mathbb{R}^*$ . Lorsque  $p/q \in \mathbb{Q}_+^*$ , on peut définir cette fonction sur  $\mathbb{R}_+$ . Dans tous les cas, elle est continue sur les intervalles composant son domaine de définition.

#### Définition 2.6

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ , on dit que :

—  $f$  est continue à gauche en  $a$ , si

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} f(a).$$

—  $f$  est continue à droite en  $a$ , si

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a).$$

— Soit  $f$  définie, continue sur un intervalle de type  $]a, b]$  et vérifiant :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \lambda \in \mathbb{R},$$

on peut alors définir la fonction  $\tilde{f}$  sur  $[a, b]$  par :

$$\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in ]a, b] \\ \lambda & \text{si } x = a. \end{cases}$$

La fonction  $\tilde{f}$  est alors continue sur  $[a, b]$  et s'appelle le *prolongement par continuité* de  $f$ .

#### Exemple 2.10

La fonction partie entière est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , continue à droite en tout point de  $\mathbb{Z}$ .

#### Exercice(s) 2.5

2.5.1 Étudier la continuité de

(a)  $f(x) = x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ .

(b)  $g(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ .

(c)  $h(x) = |x - \lfloor x + 1/2 \rfloor|$ .

2.5.2 Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $I$ , montrer que  $\max(f, g)$  et  $\min(f, g)$  le sont. *Ne pas utiliser la définition de la continuité, mais les propriétés ci-dessus !*

2.5.3 La fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

a-t-elle des points de continuité ? Si oui, préciser lesquels.

2.5.4 Montrer que chacun des énoncés suivants est faux, en donnant un exemple de fonction  $f$  ne le vérifiant pas.  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  inclus dans le domaine de définition de  $f$ . Un dessin peut suffire.

(a) Si  $I = [a, b]$  et  $f$  croissante sur  $I$ , alors  $f(I) = [f(a), f(b)]$ .

(b) Si  $I = [a, b]$  et  $f(I) = [f(a), f(b)]$  alors  $f$  est continue sur  $I$ .

(c) Si  $f(I)$  est un intervalle alors  $f$  est continue sur  $I$ .

(d) Si  $f$  est strictement monotone sur  $I$ , alors  $f(I)$  est un intervalle.

(e) Si  $f$  est injective sur  $I$ , et  $f(I) = I$ , alors  $\exists x \in I, f(x) = x$ .

2.5.5 Soit  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  telle que  $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$  soit décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Montrer que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

## 2.3.2 Quelques résultats

### 2.3.2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

#### Théorème 2.2 – Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Pour toute fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $I$ ,  $f(I)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

#### Démonstration

Comment reconnaître un intervalle ? C'est exactement une partie  $K$  de  $\mathbb{R}$  qui vérifie :

$$\forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall t \in [0, 1], \alpha + t \times (\beta - \alpha) \in K.$$

Nous allons donc montrer que  $f(I)$  vérifie cette propriété.

Soit donc  $(\alpha, \beta) \in f(I)^2$  et  $t \in [0, 1]$ . On peut supposer  $\alpha < \beta$ . On sait qu'il existe  $a$  et  $b$  dans  $I$  tels que  $\alpha = f(a)$  et  $\beta = f(b)$ . Posons  $\gamma = \alpha + t \times (\beta - \alpha)$  et montrons que  $\gamma \in f(I)$ .

- Si  $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$ , il n'y a rien à faire.
- Sinon,  $\alpha < \gamma < \beta$  et regardons :

$$\Delta = \{\mu \in [0, 1], f(a + \mu \times (b - a)) < \gamma\}.$$

Puisque  $\Delta$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide ( $0 \in \Delta$ ) et majorée (par 1), on sait que  $\delta = \sup \Delta$  est un réel (appartenant à  $[0, 1]$ ). Montrons que  $f(a + \delta \times (b - a)) = \gamma$ .

- Montrons que  $f(a + \delta \times (b - a)) \leq \gamma$ . Supposons par l'absurde que  $f(a + \delta \times (b - a)) > \gamma$ . Alors comme  $\alpha < \gamma$ , on a :  $\delta > 0$ . D'autre part, comme  $f$  est continue, la fonction  $t \mapsto f(a + t \times (b - a))$  l'est aussi, donc

$$\lim_{\mu \rightarrow \delta} f(a + \mu \times (b - a)) > \gamma.$$

On en déduit qu'il existe un  $\eta \in ]0, \delta]$  tel que

$$\forall \mu \in [\delta - \eta, \delta], f(a + \mu \times (b - a)) > \gamma.$$

On en déduit que pour tout  $\mu \in [\delta - \eta, \delta]$ ,  $\mu \notin \Delta$ . Comme d'autre part, pour tout  $\mu \in ]\delta, 1]$ ,  $\mu \notin \Delta$ , on en déduit que  $\Delta \subset [0, \delta - \eta[$ , donc  $\delta \leq \delta - \eta$ , donc  $\eta \leq 0$ , ce qui est absurde.

- Montrons que  $f(a + \delta \times (b - a)) \geq \gamma$ . Supposons par l'absurde que  $f(a + \delta \times (b - a)) < \gamma$ . Alors comme  $\beta > \gamma$ , on a :  $\delta < 1$ . D'autre part, comme  $f$  est continue, la fonction  $t \mapsto f(a + t \times (b - a))$  l'est aussi, donc

$$\lim_{\mu \rightarrow \delta} f(a + \mu \times (b - a)) < \gamma.$$

On en déduit qu'il existe un  $\eta \in ]0, 1 - \delta]$  tel que

$$\forall \mu \in [\delta, \delta + \eta], f(a + \mu \times (b - a)) < \gamma.$$

En particulier,  $f(a + (\delta + \eta) \times (b - a)) < \gamma$ , donc  $\delta + \eta \in \Delta$ , donc  $\delta + \eta \leq \delta$ . D'où  $\eta \leq 0$ , ce qui est absurde.

#### Remarque 2.18

Le TVI assure en particulier que si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur  $I$ , alors pour tout  $J \subset I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ , comme  $f|_J$  est une fonction continue sur un intervalle,  $f|_J(J)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire  $f(J)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

#### Exemple 2.11

Il peut toutefois y avoir changement de *nature* de l'intervalle, ainsi :

$f$	$J$	$f(J)$
$x \mapsto \sin(x)$	$[-1, 1]$	$[-\sin(1), \sin(1)]$
	$] -1, 1[$	$] -\sin(1), \sin(1)[$
	$[-2, 2]$	$[-1, 1]$
	$] -2, 2[$	$[-1, 1]$
$x \mapsto x^2$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$
	$] -1, 1[$	$[0, 1[$

**Remarque 2.19**

Le TVI est équivalente à la propriété suivante :

si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue avec  $f(a) \leq 0 \leq b$  alors

$$\exists c \in [a, b], f(c) = 0.$$

On peut déterminer une valeur approchée de  $c$  par la méthode de dichotomie.

**Exercice(s) 2.6**

2.6.1 Montrer qu'une fonction continue sur un intervalle à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et qui ne s'annule pas, garde un signe constant.

2.6.2 Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , continue. Montrer que  $f$  admet un point fixe (ie  $\exists a \in [0, 1], f(a) = a$ ).

2.6.3 Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , continue et injective. Montrer que  $f$  est strictement monotone. Étudier la réciproque.

2.6.4 Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , montrer que l'application

$$x \mapsto x^n - n \times x + 1$$

possède exactement 2 points d'annulation sur  $[0, +\infty[$ .

2.6.5 Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et surjective. Montrer que  $f$  s'annule une infinité de fois.

2.6.6 En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que si  $T$  est un triangle non plat du plan alors il existe un carré inscrit dans  $T$  (i.e. ses quatre sommets sont sur  $T$ ). Voir la figure 2.3, page suivante

2.6.7 Soit  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x} + \sin(x) + 2 \cos(x)$ . Donner l'allure du graphe de  $f$  et montrer qu'elle s'annule une infinité de fois.

2.6.8 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $I$  et  $J$  deux intervalles tels que  $J \subset f(I)$ . Existe-t-il un intervalle  $K$  tel que  $f(K) = J$ ? On pourra discuter suivant la nature de  $J$ .

2.6.9 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continue. On suppose que  $|f(x)|$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ . Prouver que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  ou bien tend vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

2.6.10 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $x \mapsto \sin(f(x))$  tend vers 0 en  $+\infty$ . Que dire de  $f$  en  $+\infty$ ?

2.6.11 Montrer que la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \neq 0$$

vérifie le théorème des valeurs intermédiaires sans pour autant être continue.

2.6.12 Soit  $\mathcal{E}$  une ellipse du plan, montrer, en utilisant le TVI, que pour tout point  $C$  de  $\mathcal{E}$ , il existe un triangle équilatéral inscrit dans  $\mathcal{E}$  dont l'un des sommets est  $C$ . Proposer une construction géométrique de ces triangles. Voir la figure 2.4, page suivante.

2.6.13 (a) Montrer que tout sous-ensemble fini de  $[0, 1]$  est l'ensemble des racines d'une fonction continue à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

(b) Montrer qu'il existe une fonction continue sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , nulle sur aucun intervalle non vide de type  $]a, b[$  et qui, pourtant, a une infinité de racines.

(c) À quelle condition un intervalle de  $\mathbb{R}$  est-il l'ensemble des racines d'une fonction continue à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ?

2.6.14 Soit  $f$  une application continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que  $f(0) = f(1)$ . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x \in [0, 1], f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

Faire les cas  $n = 2$ , et  $n = 3$  pour commencer.

Figure 2.3 – Carré inscrit dans un triangle

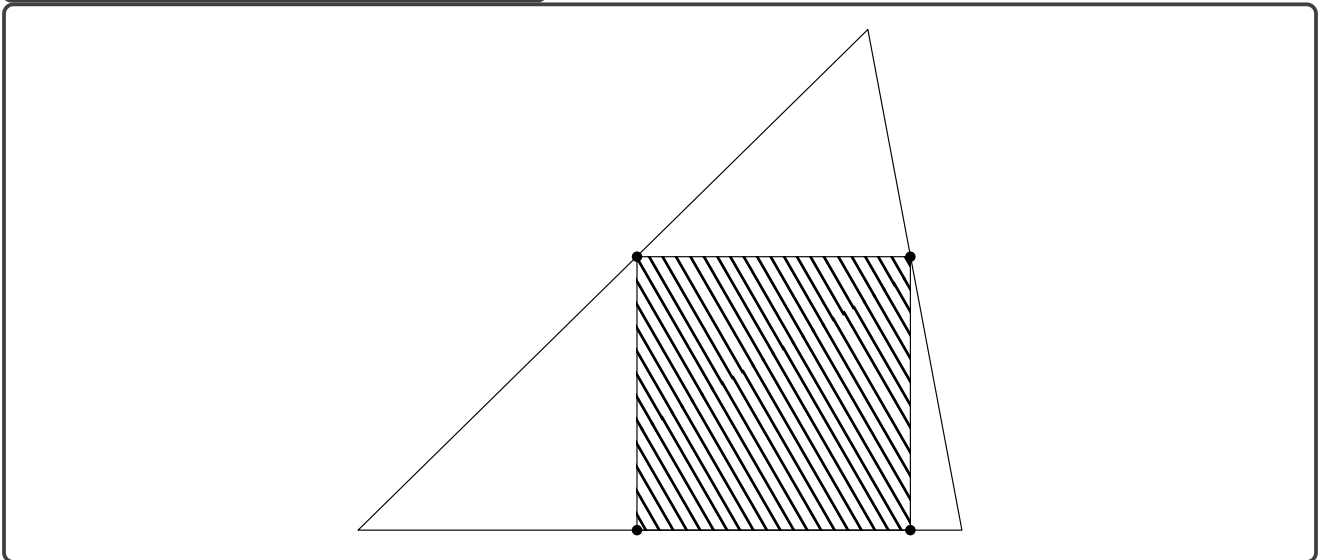
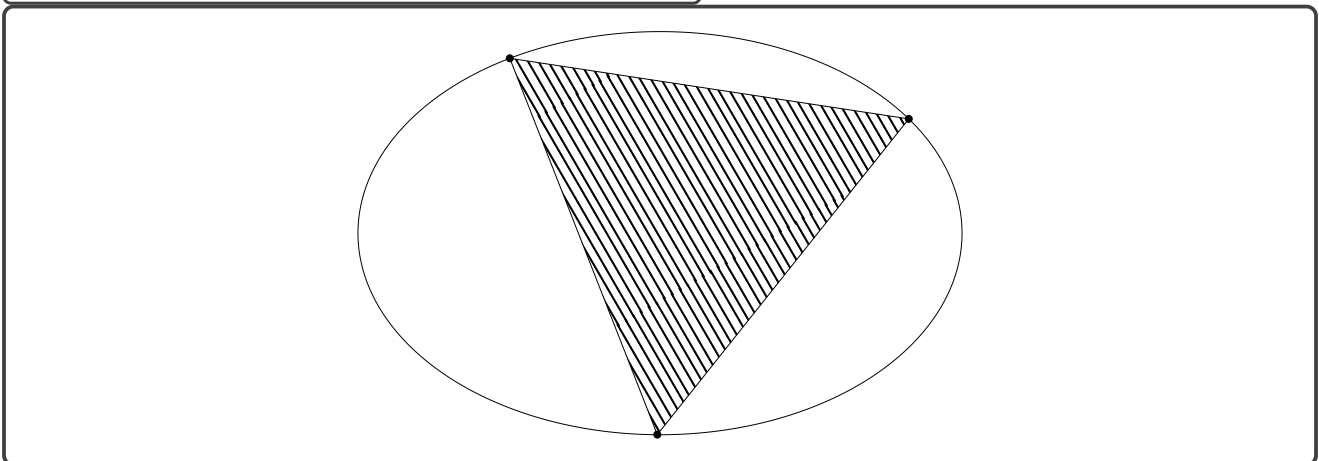


Figure 2.4 – Triangle équilatéral inscrit dans une ellipse



### 2.3.2.2 Caractère borné des fonctions continues sur un segment

Théorème 2.3 – Caractère borné des fonctions continues sur un segment

*Soit  $f$  une fonction continue définie sur un segment  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , alors  $f$  est bornée (ie  $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in [a, b], \alpha \leq f(x) \leq \beta$ ), et les bornes inférieure et supérieure sont atteintes (on parle de minimum et de maximum) : il existe  $(c, d) \in [a, b]^2$  tel que pour tout  $x \in [a, b], f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ .*

Remarque importante 2.20

Ce résultat devient faux si l'intervalle n'est pas un segment  $x \mapsto 1/(1-x)$  sur  $[0, 1[$ , ou si  $f$  n'est plus continue

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

### Démonstration du théorème 2.3, page ci-contre

- Montrons d'abord que  $f$  est bornée. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde, en supposant, par exemple, que  $f$  n'est pas majorée.

— L'idée simple est de regarder comment évolue le sup de la fonction sur  $[a, b]$ , en posant :

$$\forall \alpha \in [a, b], \varphi(\alpha) = \sup_{x \in [a, \alpha]} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

— L'hypothèse faite nous dit que  $\varphi(b) = +\infty$ , regardons plus précisément le moment où le sup devient  $+\infty$  en regardant :

$$\Delta = \{\alpha \in [a, b], \varphi(\alpha) = +\infty\}.$$

Puisque  $\Delta$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide ( $b \in \Delta$ ) et minorée (par  $a$ ), on sait que  $\delta = \inf \Delta$  est un réel (appartenant à  $[a, b]$ ).

— Puisque  $f$  est continue en  $\delta$ , en prenant par exemple  $\varepsilon = 1$  et  $\eta$  associé, on a

$$\forall x \in [\delta - \eta, \delta + \eta] \cap [a, b], f(x) - f(\delta) \leq 1.$$

— Finalement,  $f$  est majorée sur  $[a, \delta - \eta]$  par définition de  $\delta$  et  $f$  est majorée sur  $[\delta - \eta, \delta + \eta] \cap [a, b]$  par la remarque précédente. Ceci contredit la définition de  $\delta$ .  
— L'hypothèse faite est donc absurde. Ce qui montre le résultat.

- Montrons maintenant que les bornes sont atteintes. On procède de même, montrons par exemple, que la borne supérieure est atteinte. Posons

$$M = \varphi(b) \text{ et } \delta = \inf \{x \in [a, b], \varphi(x) = M\}.$$

La continuité de  $f$  en  $\delta$  nous donne immédiatement que  $f(\delta) = M$ .

#### Remarque 2.21



$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, |x - \delta| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(\delta)| < \varepsilon$$

Cette démonstration est intéressante car elle nous montre que la difficulté est de prendre les bons objets (ici  $\varphi$  et  $\delta$ ), ce qui ne peut se faire que si l'on a compris ce qui se passait. Pour cela, un dessin est souvent plein d'enseignement.

#### Remarque importante 2.22

Lorsque l'on prend des bornes supérieure et inférieure d'un ensemble de réels, il faut généralement justifier que l'ensemble est non vide. Si l'on veut de plus, montrer que ce sont des maximum et minimum, il faut montrer :

- que les bornes supérieure et inférieure sont dans  $\mathbb{R}$ ;
- qu'elles sont atteintes.

*On pourra se demander si dans la démonstration précédente, toutes ces vérifications ont bien été effectuées.*

#### Exercice(s) 2.7

2.7.1 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $\mathbb{R}$  et admettant des limites finies en  $\pm\infty$ . Montrer que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . Les bornes sont-elles nécessairement atteintes ?

2.7.2 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} +\infty.$$

Montrer que  $f$  admet un minimum global (ie  $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(a)$ ).

2.7.3 Soient  $0 < a < b$ . Montrer l'existence et calculer

(a) Soit  $r \in [a, b]$ ,

$$M(r) = \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{r - x}{x} \right|.$$

(b) Puis

$$m = \min_{r \in [a, b]} M(r).$$

2.7.4 Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue, montrer que la fonction  $\varphi$  définie par :

$$\forall x \in [a, b], \varphi(x) = \sup_{t \in [a, x]} f(t) \text{ est continue.}$$

2.7.5 Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , croissante, continue, bornée. Donner une CNS pour que la borne supérieure soit un maximum.

2.7.6 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $T > 0$ , on dit que  $f$  est  $T$ -périodique si elle vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x).$$

Montrer qu'une fonction  $T$ -périodique continue est bornée.

- 2.7.7 (a) Montrer qu'il existe  $f$  définie, continue sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f$  n'est pas bornée mais  $f \circ f$  l'est.  
 (b) Soit  $f$  définie, continue sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f \circ f \circ f$  est bornée. Montrer que  $f \circ f$  l'est aussi.  
 (c) Généraliser.

### 2.3.2.3 Continuité de la fonction réciproque

Il s'agit ici de la fonction réciproque d'une application bijective !

#### Théorème 2.4 – Continuité de la fonction réciproque

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction continue, strictement monotone. Alors :

1.  $f$  est bijective de  $I$  sur l'intervalle  $f(I)$  ;
2.  $f^{-1}$  est continue sur  $f(I)$ .

#### Démonstration

1. La stricte monotonie de  $f$  nous en assure l'injectivité. Le TVI nous permet de dire que  $f(I)$  est un intervalle. La surjectivité dans  $f(I)$  est évidente.
2. Nous allons utiliser le résultat de l'exercice 2.4.5, page 34. Supposons, sans perte de généralité, que  $f$  est strictement croissante. Alors  $f^{-1}$  est strictement croissante. Soit  $\alpha \in f(I)$ . Supposons, sans perte de généralité, qu'il existe  $\eta > 0$  tel que  $[\alpha, \alpha + \eta] \subset f(I)$ . Montrons que  $f^{-1}$  est continue à droite en  $\alpha$ . Comme  $f^{-1}$  est monotone,  $f^{-1}$  admet une limite à droite en  $\alpha$ , notée  $b$  :

$$f^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha^+} b.$$

Montrons que  $b = f^{-1}(\alpha)$ . Remarquons que pour tout  $x \in ]\alpha, \alpha + \eta]$ , on a :  $f^{-1}(x) \in ]f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\alpha + \eta)]$ , donc en passant à la limite quand  $x \rightarrow \alpha^+$ , on a :  $b \in [f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\alpha + \eta)]$ . Comme  $f^{-1}(\alpha)$  et  $f^{-1}(\alpha + \eta)$  appartiennent à l'intervalle  $I$ , on en déduit que  $b \in I$ . Finalement, on a :

(a) pour tout  $x \in ]\alpha, \alpha + \eta]$ ,  $f^{-1}(x) \in I$

(b)  $f^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha^+} b$ ,

(c)  $f$  est continue en  $b \in I$ .

Donc  $f(f^{-1}(x)) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha^+} f(b)$ , donc  $\alpha = f(b)$ , puis  $b = f^{-1}(\alpha)$ .

On a prouvé que

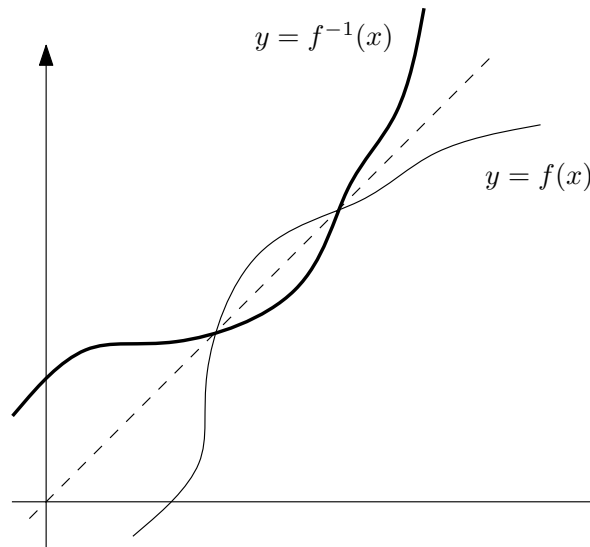
$$f^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha^+} f^{-1}(\alpha),$$

donc  $f^{-1}$  est continue à droite en  $\alpha$ .

#### Remarque importante 2.23

Le graphe d'une fonction réciproque s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice. Voir la figure 2.5, page ci-contre.

Figure 2.5 – Graphe d'une fonction réciproque



### Définition 2.7 – Fonctions trigonométriques réciproques

1. La fonction sin est continue strictement croissante sur  $[-\pi/2, +\pi/2]$ , elle admet donc une réciproque appelée *fonction arcsinus* et notée :

$$\arcsin : \begin{cases} [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \\ x \mapsto \arcsin(x) = y \end{cases} \quad \text{tel que } \sin(y) = x \text{ et } y \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}].$$

Son graphe est donnée à la figure 2.6, page suivante

2. La fonction cos est continue strictement décroissante sur  $[0, \pi]$ , elle admet donc une réciproque appelée *fonction arccosinus* et notée :

$$\arccos : \begin{cases} [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \\ x \mapsto \arccos(x) = y \end{cases} \quad \text{tel que } \cos(y) = x \text{ et } y \in [0, \pi].$$

Son graphe est donnée à la figure 2.7, page 45

3. La fonction tan est continue strictement croissante sur  $]-\pi/2, +\pi/2[$ , elle admet donc une réciproque appelée *fonction arctangente* et notée :

$$\arctan : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ x \mapsto \arctan(x) = y \end{cases} \quad \text{tel que } \tan(y) = x \text{ et } y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Son graphe est donnée à la figure 2.8, page 46

### Exercice(s) 2.8

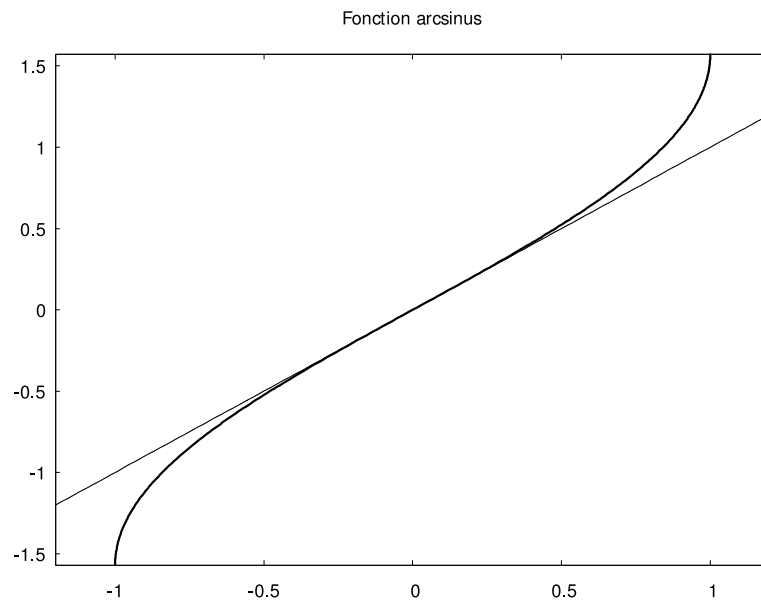
2.8.1 Résoudre  $\arccos(x) + \arccos(2x) = 2$ .

2.8.2 Calculer

$$\forall x \neq 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$



Figure 2.6 – Fonction arcsin



2.8.3 Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , tels que  $x \times y \neq 1$ , comparer

$$\arctan(x) + \arctan(y) \text{ et } \arctan\left(\frac{x+y}{1-x \times y}\right).$$

2.8.4 Montrer que

$$\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{56}{65}\right).$$

2.8.5 Résoudre

$$\arctan(x-3) + \arctan(x-2) + \arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = 0.$$

2.8.6 Que valent, en fonction de  $x$  et d'une partie entière d'une fonction de  $x$ , les expressions suivantes (on précisera aussi les domaines de définition des fonctions concernées) ?

- $\sin(\arcsin(x))$  et  $\arcsin(\sin(x))$ .
- $\cos(\arccos(x))$  et  $\arccos(\cos(x))$ .
- $\tan(\arctan(x))$  et  $\arctan(\tan(x))$ .

2.8.7 Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  l'équation :

$$x + y = \arcsin(\sin(x)) + \arccos(\cos(y)).$$

2.8.8 Résoudre

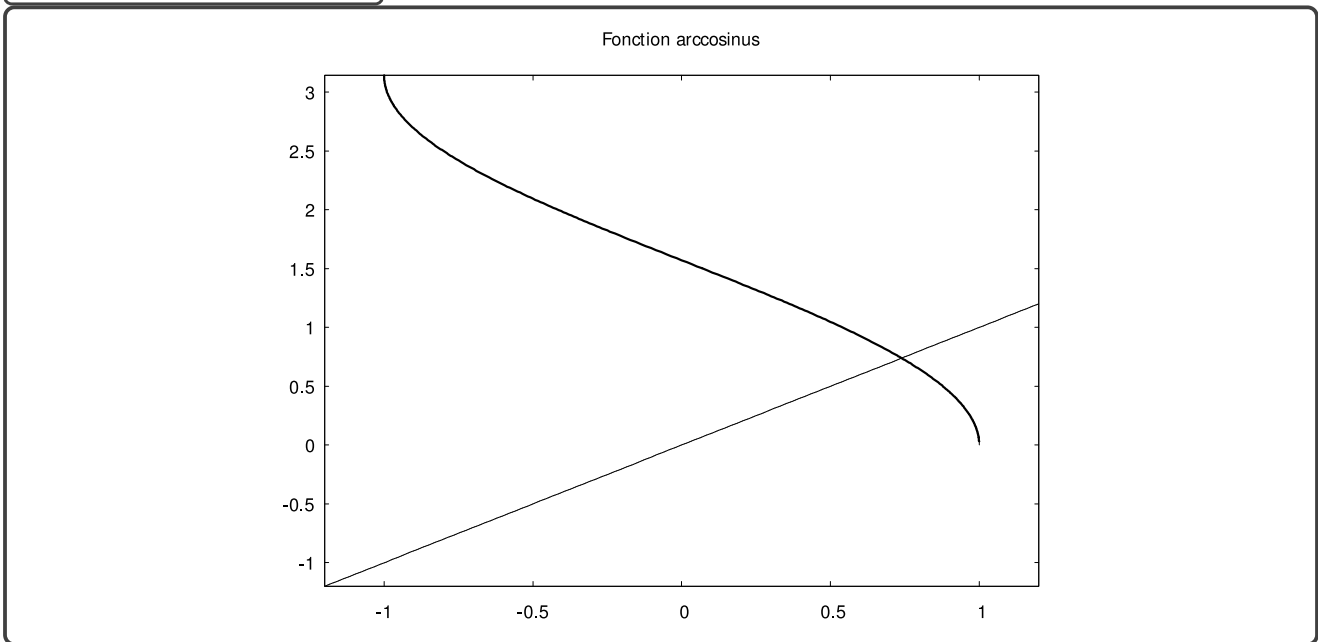
$$\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

2.8.9 Montrer que

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Cette formule est appelée formule de Machin. Quel est son intérêt par rapport à la relation  $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$  ?

Figure 2.7 – Fonction arccos



## 2.4 Dérivabilité

### 2.4.1 Définition

#### Notation 2.3 – Notation de Landau (petit $o$ )

On utilisera souvent les notations suivantes, soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \bar{I}$  (si  $I$  n'est pas bornée, alors  $x_0$  peut être dans  $\{-\infty, +\infty\}$ ),  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , telle qu'il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  tel que :

$$\forall x \in V \setminus \{x_0\}, g(x) \neq 0.$$

Alors

$$f(x) = o_{x_0}(g(x)) \text{ signifie } \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0,$$

#### Notation 2.4 – Notation de Landau (grand $o$ )

$$f(x) = O_{x_0}(g(x)) \text{ signifie } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ borné au voisinage de } x_0.$$

#### Remarque 2.24

Comme  $x_0$  vaut souvent 0, on écrit souvent  $o(g(x))$  et  $O(g(x))$  au lieu de  $o_0(g(x))$  et  $O_0(g(x))$ .

#### Remarque 2.25

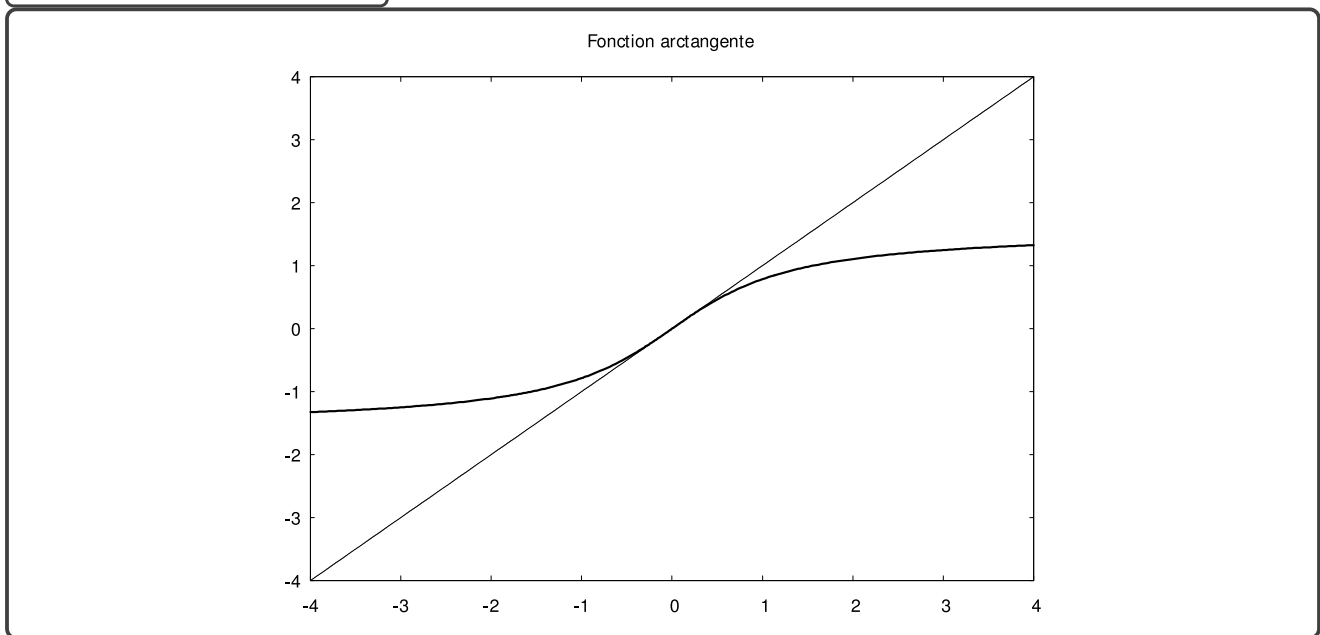
Clairement, si  $f(x) = o_{x_0}(g(x))$ , alors  $f(x) = O_{x_0}(g(x))$ . On a de plus,

$$o_{x_0}(o_{x_0}(g(x))) = o_{x_0}(g(x)), O_{x_0}(o_{x_0}(g(x))) = o_{x_0}(g(x)), o_{x_0}(O_{x_0}(g(x))) = o_{x_0}(g(x))$$

et

$$O_{x_0}(O_{x_0}(g(x))) = O_{x_0}(g(x)).$$

Figure 2.8 – Fonction arctan



### Définition 2.8 – Fonction dérivable en un point

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ , on dit que  $f$  est *dérivable en  $x_0$*  si, la fonction *taux d'accroissement en  $x_0$*  définie par :

$$\tau_{x_0} : \begin{cases} I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{cases}$$

admet une limite finie  $\lambda$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ .  $\lambda$  s'appelle alors *le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$* .

### Exemple 2.12

La fonction  $f : x \mapsto |x|$  est dérivable en tout point de  $\mathbb{R}^*$ , mais n'est pas dérivable en 0.

### Démonstration

1. *Dérivabilité en tout point de  $\mathbb{R}^*$*  Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ , alors, pour  $x$  assez proche de  $x_0$  et  $x \neq x_0$ ,  $x$  est du même signe que  $x_0$  (quel propriété de la fonction utilise-t-on ?). Donc

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 & \text{si } x_0 > 0 \\ \frac{-x + x_0}{x - x_0} = -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On trouve un nombre dérivé égal à 1 pour les  $x > 0$  et à  $-1$  pour les  $x < 0$ .

2. *Non dérivabilité en 0* On a, pour  $x \neq 0$  :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Il n'y a donc pas de limite quand  $x$  tend vers 0.

### Remarque importante 2.26

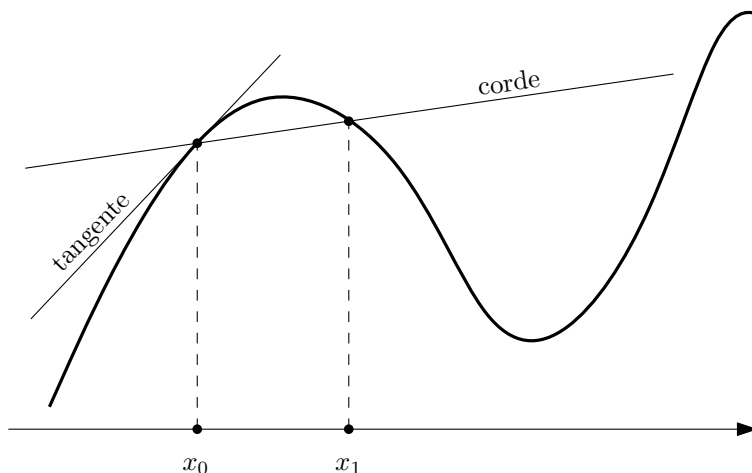
Géométriquement, le taux d'accroissement en  $x_0$ , pris en  $x_1$  représente la pente de la corde reliant les points  $(x_0, f(x_0))$  et  $(x_1, f(x_1))$ . Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors, lorsque  $x_1$  tend vers  $x_0$ , cette pente a une limite  $\lambda$ , on dit que le graphe de la fonction  $f$  a une tangente en  $x_0$  : c'est la droite

passant par  $(x_0, f(x_0))$  de pente  $\lambda$ . Son équation est :

$$y = f(x_0) + \lambda \times (x - x_0).$$

Voir la figure 2.9, de la présente page.

Figure 2.9 – Interprétation géométrique de la dérivée



Remarque importante 2.27

On peut aussi interpréter l'existence d'un nombre dérivé en  $x_0$ , sous la forme d'un *développement limité* :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \times \lambda + o(x - x_0).$$

Remarque 2.28

À comparer à l'équation de la tangente en  $x_0$  :

$$y = f(x_0) + (x - x_0) \times \lambda.$$

On travaille plus volontiers avec la relation :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \times f'(x_0) + o(h),$$

où il est sous-entendu que  $h$  tend vers 0.

Remarque 2.29

Comme pour les limites, on peut facilement définir des notions de nombre dérivé à gauche et à droite...

Définition 2.9 – Fonction dérivable sur un intervalle

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est *dérivable sur*  $I$  si

$$\forall x_0 \in I, f \text{ est dérivable en } x_0.$$

La fonction définie par :

$$x_0 \mapsto \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

s'appelle la (fonction) *dérivée de  $f$*  et se note  $f'$ .

#### Notation 2.5 – Dérivées à gauche et à droite

Lorsque  $f$  admet en tout point une dérivée à gauche (resp. à droite), on note  $f'_g$  (resp.  $f'_d$ ) la fonction dérivée à gauche (resp. à droite) obtenue.

#### Propriété 2.8

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , dérivables sur  $I$  et  $k \in \mathbb{R}$ , alors

1.  $f + g$  est dérivable sur  $I$  et  $(f + g)' = f' + g'$ .
2.  $k.f$  est dérivable sur  $I$  et  $(k.f)' = k.f'$ .
3.  $f \times g$  est dérivable sur  $I$  et

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'.$$

#### Démonstration

$$\begin{aligned} & (f \times g)(x_0 + h) \\ = & f(x_0 + h) \times g(x_0 + h) \\ = & (f(x_0) + h \times f'(x_0) + o(h)) \times (g(x_0) + h \times g'(x_0) + o(h)) \\ = & f(x_0) \times g(x_0) + h \times (f(x_0) \times g'(x_0) + f'(x_0) \times g(x_0)) + \\ & \underbrace{h^2 \times f'(x_0) \times g'(x_0) + f(x_0) \times o(h) + o(h) \times g(x_0) + h \times f'(x_0) \times o(h) + o(h) \times h \times g'(x_0) + o(h) \times o(h)}_{o(h^2)}. \end{aligned}$$

#### Propriété 2.9

Si  $h : J \supset f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ , est dérivable sur  $J$ , alors  $h \circ f$  est dérivable sur  $I$  et

$$(h \circ f)' = (h' \circ f) \times f'.$$

#### Démonstration

$$\begin{aligned} h \circ f(x_0 + \delta) &= h \left( f(x_0) + \underbrace{\delta \times f'(x_0) + o(\delta)}_{\xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} 0} \right) \\ &= h(f(x_0)) + (\delta \times f'(x_0) + o(\delta)) \times h'(f(x_0)) \\ &\quad + \underbrace{\left( o(\delta \times f'(x_0) + o(\delta)) \right)}_{o(\delta)}. \end{aligned}$$

### Exemple 2.13

Ainsi, si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I$ ,  $g$  ne s'annulant pas sur  $I$ , on a :

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \text{ et } \left(\frac{f}{g}\right)' = -\frac{f' \times g + f \times g'}{g^2}.$$

### Remarque importante 2.30

La notation  $f'$  est réservée aux fonctions ! Il arrive parfois que l'on veuille dériver des expressions d'une variable  $x$ . Nous utiliserons alors la notation :

$$\frac{d}{dx}(f(x)) \stackrel{\text{Not}}{=} f'(x).$$

Cette notation sera utilisée avec précaution : en effet, comment note-t-on  $f'(y)$  ? Ou  $f'(x+y)$  ?

### Exemple 2.14 – Dérivées usuelles

On a le tableau suivant des dérivations des fonctions usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$e^x$	$e^x$

### Remarque 2.31

La connaissance de ces dérivées nous permet de retrouver rapidement les limites usuelles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1}{x} &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \\ \frac{\sin(x)}{x} &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \\ \frac{\cos(x) - 1}{x} &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ \frac{\tan(x)}{x} &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \end{aligned}$$

### Exercice(s) 2.9

- 2.9.1 À l'aide du tableau précédent, calculer les dérivées des fonctions suivantes (on précisera le domaine où la fonction est dérivable) :  $x \mapsto x^\alpha$  (où  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ),  $x \mapsto \tan(x)$ ,  $x \mapsto \cotan(x)$ .
- 2.9.2 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :  $x \mapsto 1/f(x)$ ,  $x \mapsto \ln(f(x))$ ,  $x \mapsto f(x)^\alpha$  (où  $\alpha \neq 0$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est dérivable).
- 2.9.3 Calculer les dérivées (si elles existent) des fonctions (dont on aura précisé le domaine de définition, ainsi que le domaine de dérivabilité) :

$$\begin{aligned} x &\mapsto \ln\left(1 + \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right) \\ x &\mapsto \frac{e^x}{x} \\ x &\mapsto \frac{x}{1 + |x|} \\ x &\mapsto \cos(x) \times \left(1 + \tan(x) \times \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\ x &\mapsto \sqrt{(x^x)^{2x+1}} \\ x &\mapsto x^{\frac{x}{x-1}} \\ x &\mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}\right) \\ x &\mapsto \begin{cases} x^3 \times \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2 \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

- 2.9.4 Soit  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables et  $h = \max(f, g)$ . Donner une CNS pour que  $h$  soit également dérivable.
- 2.9.5 Soit  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f \leq g \leq h$ . On suppose qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f(a) = h(a)$  et  $f$  et  $h$  sont dérivables en  $a$ . Montrer que  $g$  est également dérivable en  $a$ .

## 2.4.2 Résultats

### 2.4.2.1 Rolle et accroissements finis

#### Propriété 2.10

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $a \in I$ , alors :

$$f \text{ dérivable en } a \Rightarrow f \text{ continue en } a.$$

La réciproque est fausse.

#### Démonstration

Si  $f(a+h) = f(a) + h \times \lambda + o(h)$ , alors et de manière immédiate  $f(a+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(a)$ .

#### Exemple 2.15

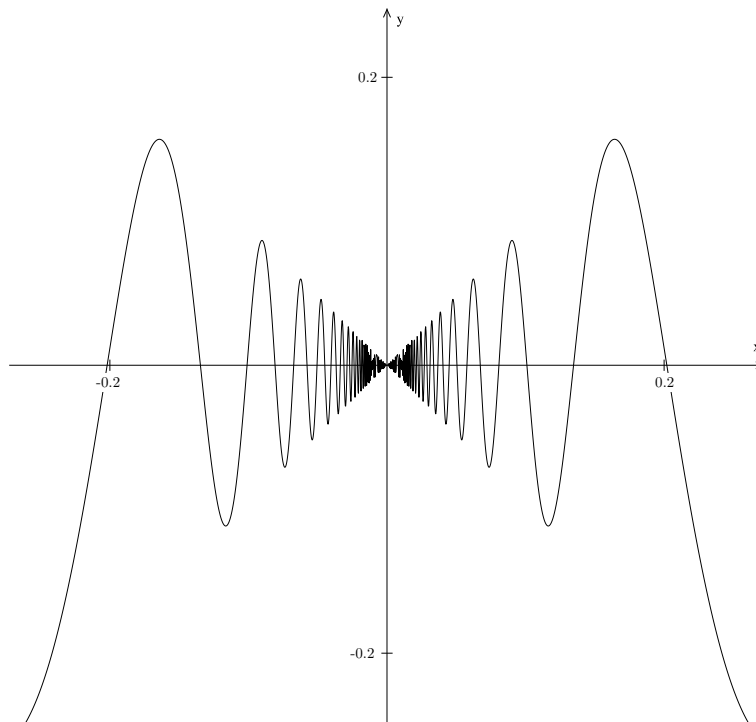
- On a vu que la fonction  $x \mapsto |x|$  était continue, mais pas dérivable en 0. Voir l'exemple 2.12, page 46.

2. Il peut y avoir des exemples plus compliqués :

$$x \mapsto \begin{cases} x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est continue sur tout  $\mathbb{R}$  (en particulier en 0) et n'est pas dérivable en 0. Voir la figure 2.10, de la présente page.

Figure 2.10 – Une fonction continue, mais pas dérivable



#### Remarque 2.32

Il est donc naturel de se concentrer sur les fonctions dérivables (donc continues) de fonction dérivée continue. Une telle fonction sera dite *de classe  $\mathcal{C}^1$* .

#### Théorème 2.5 – Théorème de Rolle

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $I$ , dérivable sur  $I^\circ$ , soit  $(a, b) \in I^2$ , tels que  $a < b$  et  $f(a) = f(b)$ , alors

$$\exists c \in ]a, b[, f'(c) = 0.$$

#### Démonstration

Voir la figure 2.11, page suivante.

1. Soit  $f$  est constante entre  $a$  et  $b$ , en ce cas, tout  $c$  de  $]a, b[$  convient.
2. Si  $f$  n'est pas constante sur  $]a, b[$ , alors, comme  $f$  est continue, elle possède un minimum  $m$  et un maximum  $M$  et au moins l'un des deux est différent de  $f(a)$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $M > f(a)$ .  $M$  est atteint en une valeur  $c \in ]a, b[$ , et, pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq M$ .



3. Donc :

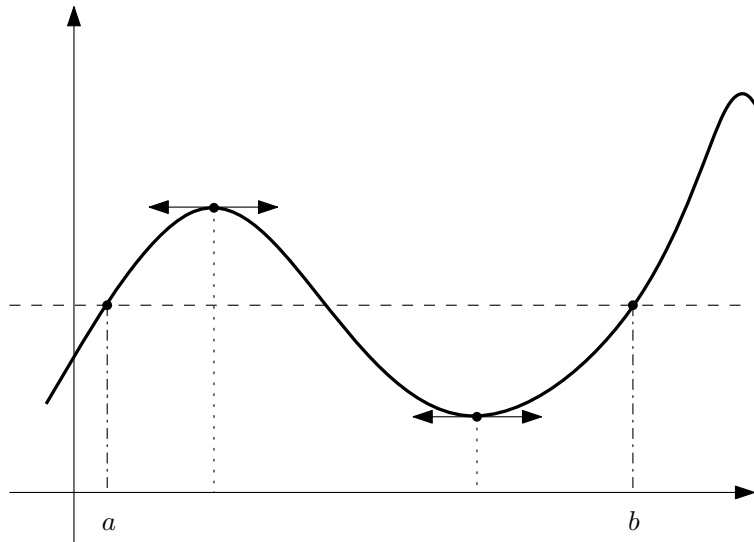
$$\forall x \in ]a, c[, \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \text{ donc } f'(c) \geq 0,$$

et

$$\forall x \in ]c, b[, \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \text{ donc } f'(c) \leq 0,$$

finalement  $f'(c) = 0$ .

Figure 2.11 – Illustration du théorème de Rolle



#### Théorème 2.6 – Théorème des accroissements finis (TAF)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $I$ , dérivable sur  $I$ , soit  $(a, b) \in I^2$ , tels que  $a < b$ , alors

$$\exists c \in ]a, b[, \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

#### Démonstration

Voir la figure 2.12, page ci-contre.

Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction :

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times (x - a).$$

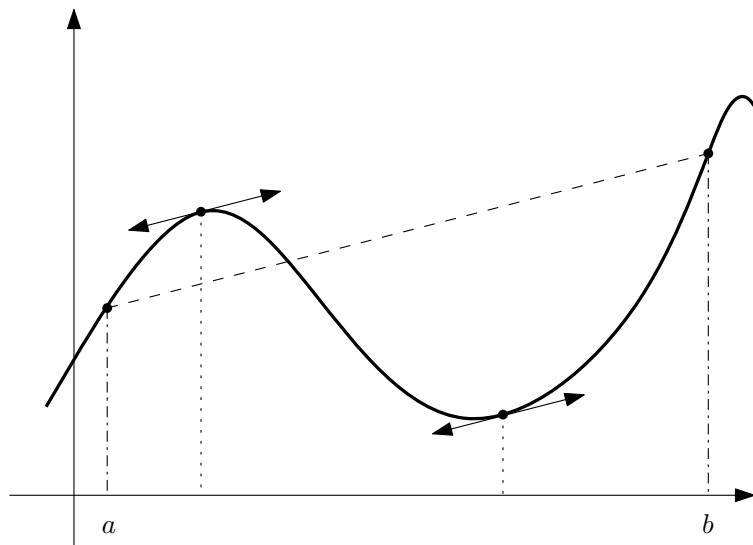
#### Remarque importante 2.33

Comme on le voit sur la figure 2.12, page suivante, le  $c$  n'est pas unique. Il est d'ailleurs, en général, difficile d'obtenir des informations précises sur le  $c$ . La seule information disponible est  $a < c < b$ .

#### Propriété 2.11

Si  $f$  est dérivable sur  $I$ , alors  $f'$  vérifie le théorème des valeurs intermédiaires (ie  $f'(I)$  est un intervalle). Attention !  $f'$  n'est pas nécessairement continue !

Figure 2.12 – Illustration du théorème des accroissements finis



#### Démonstration

Soit  $(\alpha, \beta) \in f'(I)^2$  ( $\alpha < \beta$ ). On sait que

$$\exists (c, d) \in I^2, f'(c) = \alpha \text{ et } f'(d) = \beta.$$

En ce cas, la fonction taux d'accroissement prolongée, définie par :

$$\tilde{\tau}_c(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} & \text{si } x \neq c \\ f'(c) & \text{si } x = c \end{cases}$$

est continue sur  $I$ , en particulier d'après le TVI,  $\tilde{\tau}_c(I) \supset [\min(\tilde{\tau}_c(c), \tilde{\tau}_c(d)), \max(\tilde{\tau}_c(c), \tilde{\tau}_c(d))]$ , donc

$$\tilde{\tau}_c(I) \supset \left[ \min \left( \alpha, \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \right), \max \left( \alpha, \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \right) \right].$$

De même,  $\tilde{\tau}_d(I) \supset [\min(\tilde{\tau}_d(d), \tilde{\tau}_d(c)), \max(\tilde{\tau}_d(d), \tilde{\tau}_d(c))]$ , donc

$$\tilde{\tau}_d(I) \supset \left[ \min \left( \beta, \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \right), \max \left( \beta, \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \right) \right].$$

Donc

$$\tilde{\tau}_c(I) \cup \tilde{\tau}_d(I) \supset [\alpha, \beta].$$

Finalement, soit  $\gamma \in ]\alpha, \beta[$ , il s'écrit sous la forme d'un

$$\tilde{\tau}_{c \text{ ou } d}(x), \quad x \in ]\min(c, d), \max(c, d)[,$$

le TAF permet alors d'écrire  $\gamma$  sous la forme d'un  $f'(e)$ ,  $e \in ]\min(c, d), \max(c, d)[$ .

#### Exercice(s) 2.10

2.10.1 Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivable sur  $I$ . Montrer que :

$$f \text{ est constante} \iff \left( \forall x \in I, f'(x) = 0 \right).$$

Que peut-on dire si  $f$  est définie sur une réunion d'intervalles disjoints ?

2.10.2 Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivable sur  $I$ . Montrer que :

$$\begin{aligned} f' &\geq 0 &\iff f &\text{croissante} \\ f' &\leq 0 &\iff f &\text{décroissante} \\ f' &> 0 &\implies f &\text{strictement croissante} \\ f' &< 0 &\implies f &\text{strictement décroissante} \end{aligned}$$

Donner des contre-exemples aux réciproques des deux dernières implications.

2.10.3 Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|.$$

2.10.4 Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivable sur  $]a, +\infty[$  telle que, de plus

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(a).$$

Montrer que

$$\exists c \in ]a, +\infty[, f'(c) = 0.$$

2.10.5 Soit  $f$  dérivable sur  $]a, b[$  avec  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  et  $l \in [-\infty, +\infty]$ . Montrer que

$$\left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = l \right) \Rightarrow (\exists c \in ]a, b[) \quad f'(c) = 0$$

2.10.6 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction 1-périodique, dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  s'annule en au moins  $n$  points distincts de  $[0, 1[$ . Montrer qu'il en est de même pour  $f'$ .

2.10.7 Soit  $f$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $a < b$ ), dérivables, telles que  $g'$  ne s'annule pas sur  $]a, b[$ . Montrer que

$$g(b) \neq g(a) \text{ et } \exists c \in ]a, b[, \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2.10.8 Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $a < b$ ), dérivable telle que  $f(a) = f(b) = 0$  et  $f(x) > 0$  pour  $x \in ]a, b[$ . Montrer que  $f'(a) \geq 0$  et  $f'(b) \leq 0$ .

2.10.9 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

Étudier

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Généraliser.

2.10.10 En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer les inégalités suivantes :

$$(a) \text{ Si } 0 < a < b \text{ alors } a < \frac{b-a}{\ln(b) - \ln(a)} < b,$$

$$\text{en déduire que pour } 0 < x < 1 \text{ ou } x > 1 \text{ on a : } 1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1.$$

$$(b) \text{ Si } 0 < a < b \text{ alors } \sqrt[3]{1+b} - \sqrt[3]{1+a} \leq \frac{b-a}{3}.$$

$$(c) \text{ Si } 0 < x < 1 \text{ alors } \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(d) \text{ Si } x > 0 \text{ alors } \arctan x > \frac{x}{1+x^2}.$$

2.10.11 Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivable telle que  $f'(a) > 0$  et  $f'(b) < 0$ . Montrer que  $f'$  s'annule.

### 2.4.2.2 Dérivabilité des fonctions réciproques

#### Proposition 2.6

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$\forall a \in I, f'(a) \neq 0.$$

Alors  $f$  est strictement monotone et  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $f(I)$  avec

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

#### Démonstration

1. La dérivée garde un signe constant, sinon elle s'annulerait d'après le TVI. <sup>a</sup> Donc,  $f$  est bien strictement monotone ; sa réciproque est bien définie.
2. Pour voir si  $f^{-1}$  est dérivable, il suffit de regarder l'existence de limites des taux d'accroissement. Soit  $\alpha \in f(I)$ ,  $\alpha = f(a)$ , soit  $y \in f(I) \setminus \{\alpha\}$ ,  $y = f(x)$ , alors

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\alpha)}{y - \alpha} = \frac{x - a}{y - \alpha} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \xrightarrow{y \rightarrow \alpha} \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(\alpha)},$$

car, lorsque  $y \rightarrow \alpha$ ,  $x \rightarrow a$  par continuité de  $f^{-1}$ .

<sup>a</sup>. Même si la fonction n'était que dérivable, comme une dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, le résultat serait toujours valide. Le résultat cependant changerait, car  $f^{-1}$  serait seulement dérivable...

#### Remarque 2.34

Géométriquement, ce résultat est évident :  $f'(a) = \tan(\theta)$  est la pente de la tangente au graphe de  $f$  en  $a$ . Donc, comme le graphe de  $f^{-1}$  s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice, la pente en  $f(a)$  au graphe de  $f^{-1}$  sera  $\tan(\pi/2 - \theta) = 1/\tan(\theta)$ .

#### Remarque 2.35

Si  $f'(a) = 0$ , clairement le graphe de  $f^{-1}$  aura une tangente verticale en  $f(a)$  (en supposant que  $f^{-1}$  existe toujours). Regarder le graphe de  $x \mapsto \sqrt{x}$  au voisinage de  $0^+$ .

#### Propriété 2.12

On obtient donc les propriétés sur les fonctions usuelles suivantes <sup>a</sup> :

$f(x)$	Dom. déf.	Dom. dér.	$f'(x)$
$\arcsin(x)$	$[-1, 1]$	$] -1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$[-1, 1]$	$] -1, 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

<sup>a</sup>. Dom. déf. = Domaine de définition et Dom. dér. = Domaine de dérivabilité.

#### Exemple 2.16

On retrouve les propriétés respectives de l'exponentielle et du logarithme :

1. Si on sait que :

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x,$$

alors la proposition 2.6, page 54 nous permet d'obtenir immédiatement que :

$$\frac{d}{dx} (\ln(x)) = \frac{1}{x}.$$

2. Si, au contraire, on sait que :

$$\frac{d}{dx} (\ln(x)) = \frac{1}{x},$$

la proposition 2.6, page 54 nous permet d'obtenir immédiatement que :

$$\frac{d}{dx} (e^x) = e^x.$$

### Exercice(s) 2.11

#### 2.11.1 Dérivabilité et calculs des dérivées de

$$x \mapsto \arcsin \left( \sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}} \right) - \frac{x}{2}$$

$$x \mapsto \arcsin \left( \frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$x \mapsto \arcsin(2x \times \sqrt{1 - x^2})$$

$$x \mapsto 2 \arctan \left( \sqrt{1 + x^2} - x \right) + \arctan(x)$$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{1 - \arcsin(x)}{1 + \arcsin(x)}}$$

$$x \mapsto \arcsin \left( \sqrt{\frac{1}{2} + x} \right) + \arcsin \left( \sqrt{\frac{1}{2} - x} \right)$$

#### 2.11.2 Étudier le signe de la dérivée de $f(x)$ où

$$f : x \mapsto \arctan \left( \frac{x \times \sin(\theta)}{1 - x \times \cos(\theta)} \right),$$

$$\theta \in \mathbb{R}.$$

#### 2.11.3 Soit $f : x \mapsto \arcsin(x) - x \times \sqrt{1 - x^2}$ .

- Domaine de définition, continuité. Montrer que pour  $x \in [0, 1[$ ,  $f'(x)$  existe et calcul.
- Étudier la dérivabilité de  $f$  en 1.
- Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[0, 1]$  sur  $J$  à préciser.
- $g$  est l'application réciproque. Montrer que  $g$  est dérivable sur  $]0, \pi/2[$  au moins et préciser  $g'$  (en fonction de  $g$ ). Étude aux bords...

#### 2.11.4 Faire le graphe de $f(x) = \arccos \left( 2 \sin \left( \frac{x}{2} \right) \right)$ .

#### 2.11.5 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe $\mathcal{C}^1$ , telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \geq |x - y|.$$

- Montrer que  $f$  est monotone.
- Montrer que  $f$  est bijective.
- $f^{-1}$  est-elle continue ? dérivable ? de classe  $\mathcal{C}^1$  ?

### 2.4.2.3 Prolongement $\mathcal{C}^1$

#### Théorème 2.7 – Prolongement $\mathcal{C}^1$

Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b[$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que

$$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow b^-} \lambda,$$

alors

1.  $f$  admet une limite en  $b^-$ , notée  $l$  ;
2. la fonction  $\tilde{f}$  définie sur  $[a, b]$  par :

$$\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, b[ \\ l & \text{si } x = b \end{cases}$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  et  $\tilde{f}'(b) = \lambda$ .

#### Démonstration

1.  $f'$  étant continue sur  $[a, b[$  et admettant une limite en  $b^-$ , elle est bornée. Donc,

$$\exists(m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in [a, b[, m \leq f'(x) \leq M.$$

La fonction  $g$ , définie sur  $[a, b[$  par  $g(x) = f(x) - m \times x$ , est donc dérivable à dérivée positive, donc est croissante.

De plus, le TAF nous permet d'obtenir :

$$\forall x \in [a, b[, \exists c_x \in ]a, x[, g(x) - g(a) = (x - a) \times g'(c_x),$$

donc

$$g(x) \leq g(a) + (b - a) \times (M - m).$$

La fonction  $g$  est croissante, majorée sur  $[a, b[$ , elle admet donc une limite en  $b^-$  (voir l'exercice 2.4.4, page 34). Comme sur  $[a, b[$  on a  $f(x) = g(x) + m \times x$ , on en déduit que  $f$  admet une limite en  $b^-$ .

2.  $\tilde{f}$  est donc bien définie et est continue sur  $[a, b]$ . Par ailleurs,  $\tilde{f}$  est clairement de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b[$ . Il reste à montrer que  $\tilde{f}$  est dérivable en  $b$  puis que  $\tilde{f}'$  est continue en  $b$ .

*Dérivabilité en  $b$ .* Soit  $x \in [a, b]$ . Comme  $\tilde{f}$  est continue sur  $[x, b]$  et dérivable sur  $]x, b[$ , le TAF nous donne :

$$\exists d_x \in ]x, b[, \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(b)}{x - b} = f'(d_x).$$

De plus,  $x < d_x < b$ , donc lorsque  $x$  tend vers  $b^-$ ,  $d_x$  tend vers  $b^-$  ! Donc,  $f'(d_x)$  tend vers  $\lambda$ .

*Continuité de  $\tilde{f}'$  en  $b$ .* Tout simplement parce que l'on a prolongé  $f'$  par continuité en  $b$ .

#### Remarque 2.36

L'hypothèse dérivable serait suffisante, car  $f'$  ayant une limite en  $b^-$  resterait bornée au voisinage de  $b^-$ .

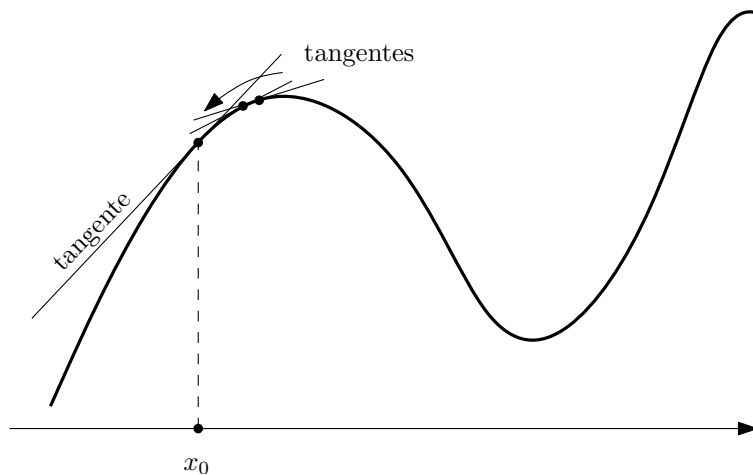
#### Remarque 2.37

Bien sûr, on a le même type de résultat sur  $]a, b]$ .

#### Remarque importante 2.38

Géométriquement, cela se traduit par une autre définition de la (pente de la) tangente, comme limite des (pentes des) tangentes avoisinantes. Voir la figure 2.13, page suivante.

Figure 2.13 – La tangente en un point vue comme limite des tangentes



#### Exercice(s) 2.12

2.12.1 Montrer que la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et que sa dérivée en 0 vaut 0. Voir la figure 2.14, page ci-contre.

2.12.2 Montrer que la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et que sa dérivée en 0 vaut 0. Voir la figure 2.15, page suivante.

2.12.3 Prolonger par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de

$$f(x) = \sqrt{x} \times \ln x \text{ et } g(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}.$$

2.12.4 Soit

$$f(x) = x + 2x^2 \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour } x \neq 0.$$

Prolonger  $f$  par continuité en 0, montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $f'(0) > 0$ , mais que  $f$  n'est croissante sur aucun voisinage de 0.

2.12.5 Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Déterminer

$$\lim_{\omega \rightarrow 1} \frac{\cos(\omega \times x) - \cos(x)}{1 - \omega^2}.$$

Figure 2.14 – Fonction radical

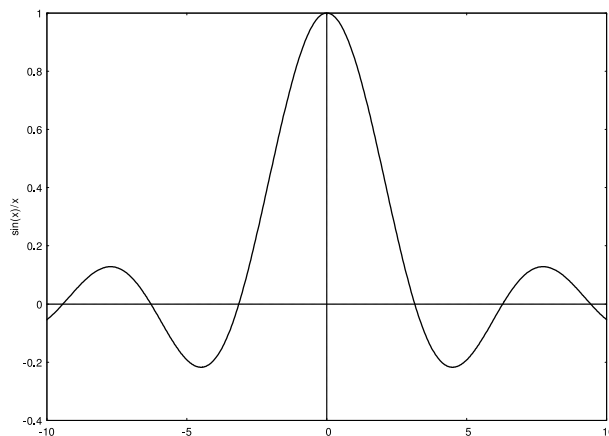
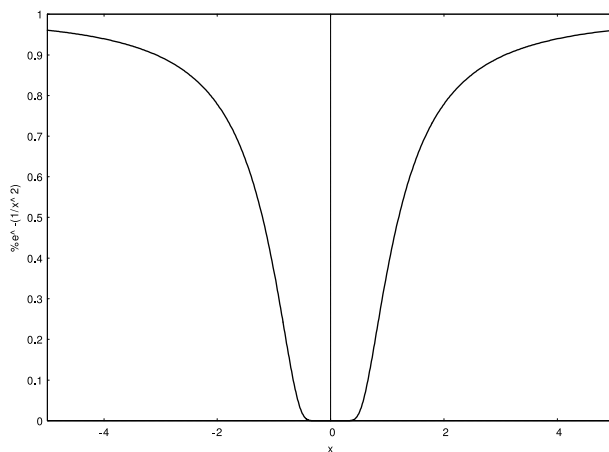


Figure 2.15 – Exemple de raccordement de classe  $\mathcal{C}^\infty$



#### 2.4.2.4 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 2.10 – Fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  et  $\mathcal{C}^\infty$

1. Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et si  $f'$  est dérivable, on dit que  $f$  est *deux fois dérivable*. On note  $f''$  la dérivée seconde de  $f$  (la dérivée de  $f'$ ). Si, de plus,  $f''$  est continue, on dit que  $f$  est *de classe  $\mathcal{C}^2$* .
2. De manière itérative, si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , on dit que  $f$  est  *$n$  fois dérivable* (resp. *de classe  $\mathcal{C}^n$* ) si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$  et si la dérivée  $(n-1)$ -ième, notée  $f^{(n-1)}$ , est dérivable (resp. de classe  $\mathcal{C}^1$ ). On note  $f^{(n)}$  sa dérivée  $n$ -ième.
3. On dit que  $f$  est *de classe  $\mathcal{C}^\infty$*  si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
4. Par extension, on dit que  $f$  est *de classe  $\mathcal{C}^0$*  lorsque  $f$  est continue.

Exemple 2.17

1. Les fonctions usuelles (données par leur expression en  $x$ ) suivantes sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur le domaine



de dérivation donné.

$\frac{1}{x}$	sur	$\mathbb{R}^*$
$e^x, \sin(x), \cos(x), \arctan(x)$	sur	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	sur	$\mathbb{R}_+^*$
$\tan(x)$	sur	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\arcsin(x), \arccos(x)$	sur	$] -1, 1[$

2. Si  $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ , la fonction  $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathcal{C}^{[\alpha]}$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Si  $n \leq [\alpha]$ , et  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha \times (\alpha - 1) \times \cdots \times (\alpha - n + 1) \times x^{\alpha-n}.$$

### Propriété 2.13

On a les propriétés immédiates suivantes, si  $f$  et  $g$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  ( $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , si  $k \in \mathbb{R}$  et si  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle  $J \supset f(I)$ , alors

1.  $f + g$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ .
2.  $k.f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ .
3.  $f \times g$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ .
4.  $h \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ .

### Théorème 2.8 – Formule de Leibniz

Soit  $f$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^n$ , alors

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)},$$

où  $f^{(0)}$  désigne  $f$ ,  $f^{(1)}$  désigne  $f'$  et  $f^{(2)}$  désigne  $f''$ .

#### Démonstration

Immédiat, par récurrence sur  $n$ .

### Exercice(s) 2.13

2.13.1 Montrer que la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  (on verra, dans le cours M222 qu'elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ).

2.13.2 Montrer que la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

2.13.3 Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $x \mapsto x \times e^x$ .

(a) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et strictement monotone.

(b) Montrer que  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

(c) Plus généralement, que peut-on dire de la réciproque d'une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  ?

2.13.4 Calculer les dérivées  $n$ -ième des fonctions suivantes (données par leur expression en  $x$ ) :

$$\begin{aligned} x &\mapsto \sin^3 x \\ x &\mapsto e^x \times \sin x \\ x &\mapsto \frac{1}{x^2 - 1} \\ x &\mapsto \ln(x^2 - x + 2) \\ x &\mapsto x^n \times e^{-x} \\ x &\mapsto x^{n-1} \times \ln(x) \end{aligned}$$

2.13.5 Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  montrer que

$$\left[ t > 0 \mapsto t^{n-1} \times f\left(\frac{1}{t}\right) \right]^{(n)} = t > 0 \mapsto (-1)^n \times t^{-n-1} \times f^{(n)}\left(\frac{1}{t}\right).$$

2.13.6 On pose :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Montrer que la dérivée  $n$ -ième est de la forme :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

où  $P_n$  est une fonction polynomiale de degré  $n$  ayant  $n$  racines réelles distinctes et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = (1+x^2) \times P'_n(x) - (2n+1) \times x \times P_n(x).$$

2.13.7 Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable, telle que  $f(a) = f(b) = 0$ . Montrer que

$$\forall x \in [a, b], \exists c_x \in ]a, b[, f(x) = \frac{1}{2} (x-a) \times (x-b) \times f''(c_x).$$

2.13.8 Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^n$ . On suppose de plus qu'il existe  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} = b$ , tels que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, f(x_k) = 0.$$

(a) Montrer que

$$\exists c \in ]a, b[, f^{(n-1)}(c) = 0.$$

(b) Montrer que

$$\forall x \in [a, b], \exists c_x \in ]a, b[, f(x) = \frac{1}{n!} \times \left( \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \right) \times f^{(n)}(c_x).$$

2.13.9 Soit  $f$  deux fois dérivable sur  $I$  à valeurs réelles,  $a, b, c$  sont trois points distincts de  $I$ . Montrer qu'il existe  $d \in I$  tel que

$$\frac{f(a)}{(a-b) \times (a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c) \times (b-a)} + \frac{f(c)}{(c-b) \times (c-a)} = \frac{1}{2} \times f''(d).$$

2.13.10 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f''$  s'annule exactement  $n$  fois. Quel est le nombre maximal de points d'intersections entre le graphe de  $f$  et une droite ?

2.13.11 Montrer qu'il existe une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , valant 1 sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  et 0 en dehors du segment  $[-1, 1]$ .

2.13.12 Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $f''$  est bornée et il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \alpha \times f(x) \leq f''(x).$$

- (a) Montrer que  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ .
- (b) Montrer que  $f$  et  $f'$  ont une limite nulle en  $+\infty$

2.13.13 Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ a \times x^2 + b \times x + c & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}.$$

Déterminer une CNS sur  $a, b, c$  pour que  $f$  soit  $\mathcal{C}^2$  (et  $\mathcal{C}^3$  ?).

2.13.14 Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable 3 fois sur  $[0, 1]$ , telle que

$$f(0) = -1, \quad f'(0) = 1 \text{ et } f''(0) = 1.$$

- (a) Montrer que

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad f''(x) > 0 \Rightarrow \exists! x_0 \in ]0, 1[, \quad f(x_0) = 0.$$

- (b) Si de plus on suppose

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad f''(x) < 2,$$

donner une minoration de  $x_0$ .

- (c) Si de plus on suppose

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad f^{(3)}(x) > 0,$$

donner une majoration de  $x_0$ .

2.13.15 Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ , telle que  $f'(0) = 0$ . Montrer qu'il existe  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) = g(x^2).$$

2.13.16 Démontrer que  $x \mapsto x^n + p \times x + q$ , ( $p$  et  $q$  réels) ne peut avoir plus de deux racines réelles si  $n$  est pair, et plus de trois racines réelles si  $n$  est impair.

#### 2.4.2.5 Extrémums

### Rappel 2.3

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $\alpha \in I$ , on dit que :

—  $f$  admet un maximum (local)  $\alpha$  si :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in ]\alpha - \eta, \alpha + \eta[ \cap I, f(x) \leq f(\alpha).$$

—  $f$  admet un maximum global  $\alpha$  si :

$$\forall x \in I, f(x) \leq f(\alpha).$$

—  $f$  admet un minimum (local)  $\alpha$  si :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in ]\alpha - \eta, \alpha + \eta[ \cap I, f(x) \geq f(\alpha).$$

—  $f$  admet un minimum global  $\alpha$  si :

$$\forall x \in I, f(x) \geq f(\alpha).$$

—  $f$  admet un extrémum (local ou global)  $\alpha$  si  $f$  admet un maximum ou un minimum (local ou global) en  $\alpha$ .

### Proposition 2.7

Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  ( $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et  $b \in ]a, +\infty]$ ), une fonction dérivable admettant un extrémum (local)  $\alpha \in ]a, b[$ , alors  $f'(\alpha) = 0$ . Si, de plus,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , on a :

$$\alpha \text{ est un minimum (local)} \Rightarrow f''(\alpha) \geq 0$$

$$\alpha \text{ est un maximum (local)} \Rightarrow f''(\alpha) \leq 0$$

$$f''(\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha \text{ est un minimum (local)}$$

$$f''(\alpha) < 0 \Rightarrow \alpha \text{ est un maximum (local)}$$

$$f''(\alpha) = 0 \quad \text{tout peut arriver (rien/maximum/minimum).}$$

### Démonstration

1.  $f'(\alpha) = 0$  a été vu lors de la démonstration du théorème de Rolle (théorème 2.5, page 51).

2. Si  $\alpha$  est un minimum, alors

$$\forall x \in ]a, b[, f(x) \geq f(\alpha).$$

Si  $f''(\alpha) < 0$ , alors, comme  $f''$  est continue,  $f''$  reste  $< 0$  au voisinage de  $\alpha$  (notons-le  $]\alpha - \eta, \alpha + \eta[ \subset ]a, b[$ , où  $\eta > 0$ ), donc  $f'$  est décroissante sur  $]\alpha - \eta, \alpha + \eta[$ , en particulier

$$\forall x \in ]\alpha - \eta, \alpha[, f'(x) \geq 0 \text{ et } \forall x \in ]\alpha, \alpha + \eta[, f'(x) \leq 0.$$

Mais, comme  $\alpha$  est un minimum :

$$\forall x \in ]\alpha - \eta, \alpha[, \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0 \text{ et } \forall x \in ]\alpha, \alpha + \eta[, \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 0.$$

En utilisant le théorème des accroissements finis (voir le théorème 2.6, page 52), on obtient :

$$\forall x \in ]\alpha - \eta, \alpha + \eta[, f(x) = f(\alpha), \text{ donc } f''(\alpha) = 0.$$

Ceci contredit l'hypothèse initiale.

3. Si  $\alpha$  est un maximum, la démonstration est identique.

4. Si  $f''(\alpha) > 0$ , alors  $f'$  est strictement croissante au voisinage de  $\alpha$ , donc  $f'$  est négative sur  $]\alpha - \eta, \alpha[$  et positive sur  $]\alpha, \alpha + \eta[$ , on a donc le graphe suivant au voisinage de  $\alpha$  de la figure 2.16, page suivante. Il est alors facile de conclure que c'est un minimum (local).

5. *Idem* pour le maximum (local).

6. La fonction  $f : x \mapsto x^4$  a un minimum en 0 et  $f'(0) = f''(0) = 0$ .

La fonction  $f : x \mapsto -x^4$  a un maximum en 0 et  $f'(0) = f''(0) = 0$ .

La fonction  $f : x \mapsto x^3$  n'a pas d'extrémum en 0 et  $f'(0) = f''(0) = 0$ .

Remarque importante 2.39

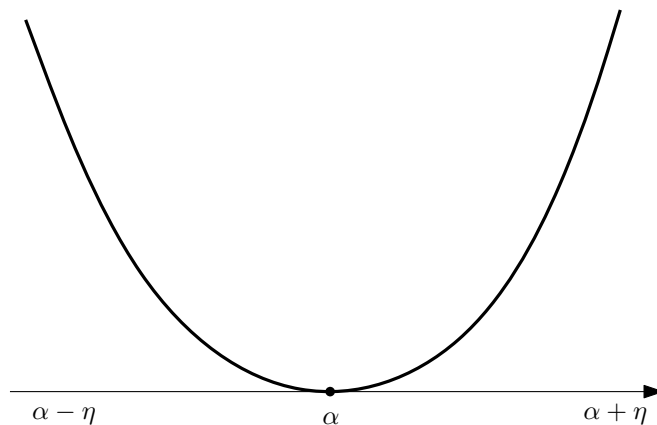
Si l'intervalle de définition de  $f$  n'est plus de la forme  $]a, b[$ , alors il peut y avoir des extrémums aux bornes ! Ainsi, la fonction

$$f : \begin{cases} [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

a un minimum (global) en 0 et deux maximums (globaux) en  $\pm 1$ .

Figure 2.16 – Minimum local

Allure de la courbe au voisinage de  $\alpha$



Dans la pratique, pour trouver un extrémum d'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  suffisamment dérivable, on suit les étapes suivantes :

1. On cherche les points d'annulation de  $f'$  dans  $\overset{\circ}{I}$ .
2. On regarde en ces points les valeurs de  $f''$  (on espère qu'aucun point n'est dans le cas  $f''(\alpha) = 0$ ).
3. Pour les points vérifiant  $f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0$ , on se débrouille comme on peut... (se reporter au cours M122).
4. On compare avec les valeurs aux bornes éventuelles (dans  $I \setminus \overset{\circ}{I}$ ).

Exercice(s) 2.14

2.14.1 Déterminer les extrémums sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $x \mapsto x^4 - x^3 + 1$ .

2.14.2 Montrer que la fonction :

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

admet une infinité dénombrable de maximums et une infinité dénombrable de minimums. Quels sont ses extrémums globaux ?

2.14.3 Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , définie sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , vérifiant

$$\forall x \in [0, 1], f''(x) \geq f(x) \text{ et } f(0) = f(1) = 0.$$

Montrer que  $f$  est négative.

2.14.4 Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , calculer

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{x + t \times y}{1 + t^2} \right|.$$

2.14.5 Soit  $\lambda \in [1, +\infty[$ , étudier le comportement lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$  de :

$$\begin{aligned} \sup_x \left( e^x - \left( 1 + \frac{x}{\lambda} \right)^\lambda \right) & \quad \text{pour } x \in [-1, 0] \\ \sup_x \left( e^x - \left( 1 + \frac{x}{\lambda} \right)^\lambda \right) & \quad \text{pour } x \in [-\lambda, 0] \end{aligned}$$



## Chapitre 3

# $\mathbb{R}^n$ euclidien ( $n \geq 2$ )

### 3.1 Quelques rappels

#### Rappel 3.1

$\mathbb{R}^n$  est l'ensemble des  $n$ -uplets de réels (lorsque  $n = 2$ , on parle de *couples*, lorsque  $n = 3$  de *triplets*, etc.),  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  signifie que chaque  $x_k$  est dans  $\mathbb{R}$ .

#### Notation 3.1

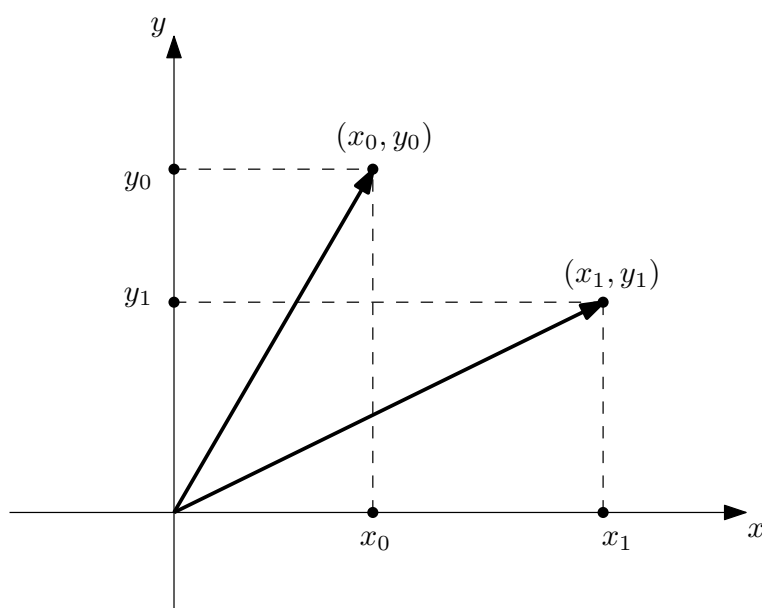
Nous noterons souvent :

$\underline{x}$  le  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

#### Remarque importante 3.1

Chaque élément  $\underline{x}$  de  $\mathbb{R}^n$  peut être vu comme un vecteur. Voir la figure 3.1, de la présente page.

Figure 3.1 – Un vecteur



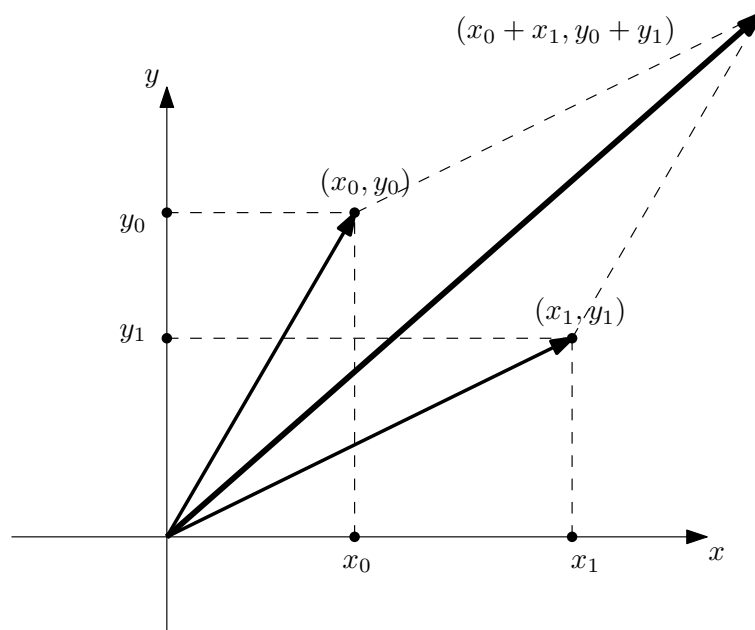


### Remarque importante 3.2

On peut additionner deux vecteurs et multiplier un vecteur par un réel, avec toutes les règles de calcul usuelles...<sup>a</sup> Voir les figures 3.2, de la présente page et 3.3, page ci-contre.

<sup>a</sup>. On dit que  $\mathbb{R}^n$  (ensemble de vecteurs) est un espace vectoriel. Voir l'exercice 3.1.1, page 70.

Figure 3.2 – Somme de deux vecteurs



### Remarque importante 3.3

Chaque élément de  $\underline{x}$  de  $\mathbb{R}^n$  peut être vu comme un point. Voir la figure 3.4, page 70.

### Remarque 3.4

Étant donné un point  $A \in \mathbb{R}^n$  et un vecteur  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ , on peut construire un unique point  $B = A + \vec{u}$ , comme sur le dessin (où  $A = (x_0, y_0)$ ,  $B = (x_1, y_1)$  et  $\vec{u} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ ), avec toutes les règles usuelles de calcul...<sup>a</sup> Le vecteur  $\vec{u}$  se note aussi  $\overrightarrow{AB}$ , et est en ce cas appelé *bipoint*.

<sup>a</sup>. On dit que  $\mathbb{R}^n$  (ensemble de points) est un espace affine de direction  $\mathbb{R}^n$  (ensemble de vecteurs). Voir l'exercice 3.1.2, page 71

### Notation 3.2

Pour différencier, lorsque ce sera indispensable les  $n$ -uplets, des vecteurs, et des points nous noterons :

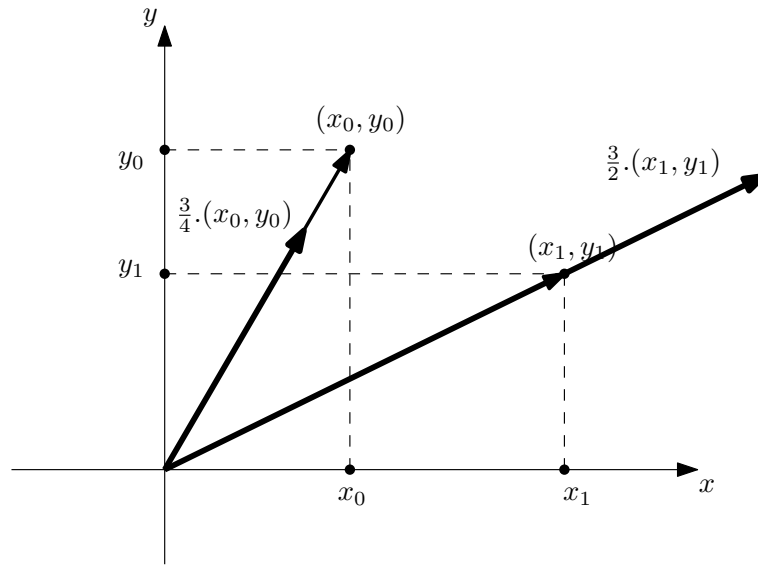
$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$  le  $n$ -uplet,

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  le vecteur correspondant,

$X = (x_1, \dots, x_n)$  le point correspondant.

Les opérations seront notées :

Figure 3.3 – Multiplication d'un vecteur par un réel



1. Addition de 2 vecteurs :

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) \stackrel{\text{Def}}{=} (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n).$$

2. Soustraction de 2 vecteurs :

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1, \dots, u_n) - (v_1, \dots, v_n) \stackrel{\text{Def}}{=} (u_1 - v_1, \dots, u_n - v_n).$$

3. Multiplication d'un vecteur par un scalaire  $\lambda$  :

$$\lambda \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (u_1, \dots, u_n) \stackrel{\text{Def}}{=} (\lambda \times u_1, \dots, \lambda \times u_n).$$

4. Addition d'un point et d'un vecteur :

$$A + \vec{u} = (a_1, \dots, a_n) + (u_1, \dots, u_n) \stackrel{\text{Def}}{=} (a_1 + u_1, \dots, a_n + u_n).$$

5. Addition/soustraction de 2  $n$ -uplets :

$$\underline{x} \pm \underline{y} = (x_1, \dots, x_n) \pm (y_1, \dots, y_n) \stackrel{\text{Def}}{=} (x_1 \pm y_1, \dots, x_n \pm y_n).$$

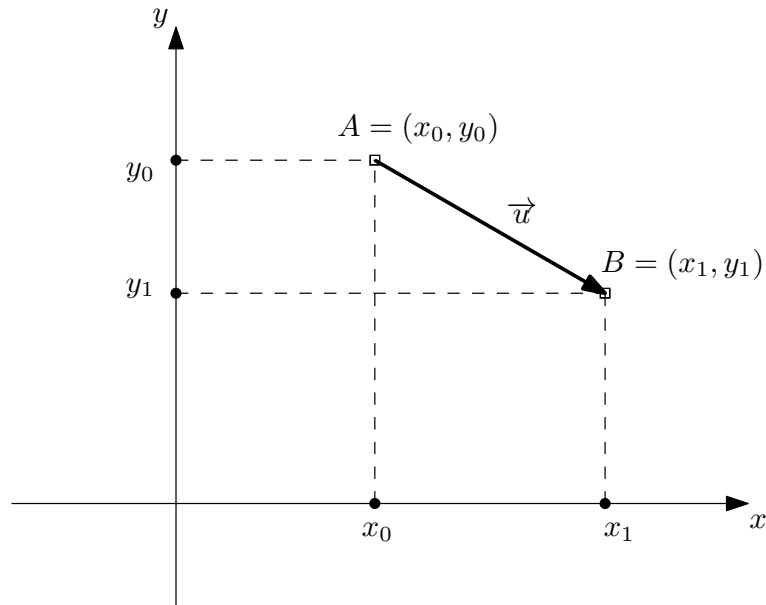
6. Multiplication d'un  $n$ -uplet par un scalaire  $\lambda$  :

$$\lambda \cdot \underline{x} = \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{Def}}{=} (\lambda \times x_1, \dots, \lambda \times x_n).$$

#### Remarque 3.5

On pourra remarquer que l'on fait toujours la même chose, c'est notre regard sur les objets qui change ! Nous verrons plus tard l'intérêt qu'il y a à changer de point de vue...

Figure 3.4 – Un point



Exercice(s) 3.1

3.1.1 Un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  est défini usuellement comme ceci :

$E$  est muni d'une opération interne (ie  $E \times E \rightarrow E$ ) notée  $+$  qui vérifie :

— *Associativité* :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z)$$

— *Existence d'un élément neutre* (noté  $0_E$  ou  $0$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) :

$$\forall x \in E, 0_E + x = x$$

— *Existence d'un opposé à  $x$*  (noté  $-x$ ) :

$$\forall x \in E, \exists (-x) \in E, x + (-x) = 0_E$$

— *Commutativité* :

$$\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$$

$E$  est muni d'une opération externe (i.e.  $\mathbb{R} \times E \rightarrow E$ ) notée  $\cdot$  qui vérifie :

— *Compatibilité avec l'addition de  $E$*  :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

— *Compatibilité avec l'addition des réels* :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

— *Compatibilité avec la multiplication des réels* :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$$

— *Respect de l'unité* :

$$\forall x \in E, 1 \cdot x = x$$

(a) Vérifier rapidement que  $\mathbb{R}^n$  muni des opérations décrites est bien un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

(b) Montrer que, si  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, on a alors les propriétés :

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot 0_E &= 0_E, \\ \forall x \in E, \quad 1 \cdot x &= x \text{ et } (-1) \cdot x = -x \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \quad \lambda \cdot x &= 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E.\end{aligned}$$

3.1.2 Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, un ensemble  $\mathcal{E}$  est dit *espace affine réel de direction  $E$*  si  $\mathcal{E}$  est muni d'une opération mixte  $\mathcal{E} \times E \rightarrow \mathcal{E}$  qui vérifie :

— *Unicité d'écriture* :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \exists! \vec{u} \in E, B = A + \vec{u}.$$

— *Compatibilité avec l'addition de  $E$*  :

$$\forall A \in \mathcal{E}, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, (A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v}).$$

(a) Vérifier rapidement que  $\mathbb{R}^n$  muni de l'opération décrite est bien un espace affine de direction  $\mathbb{R}^n$  (espace vectoriel).

(b) Si  $\mathcal{E}$  est un espace affine de direction  $E$ , montrer que :

$$\begin{aligned}\forall A \in \mathcal{E}, \forall \vec{u} \in E, \quad A + \vec{u} &= A \iff \vec{u} = 0_E \\ \forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \forall \vec{u} \in E, \quad A + \vec{u} &= B + \vec{u} \iff A = B\end{aligned}$$

(c) Montrer que tout  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel est un espace affine de direction lui-même, pour quelle opération ?

*Ainsi, tout espace vectoriel a une structure affine naturelle. Le danger est alors de confondre les deux structures, c'est pourquoi, dans  $\mathbb{R}^n$ , les points et les vecteurs sont notés différemment.*

3.1.3 Avec les opérations connues, quelle structure (espace vectoriel ou, à défaut, espace affine – et, dans ce cas, on précisera la direction) ont les ensembles suivants :

- (a) Les fonctions continues  $f$ , définies sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ?
- (b) Les fonctions continues  $f$ , définies sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , telles que  $f(0) = 0$  ?
- (c) Les fonctions continues  $f$ , définies sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , telles que  $f(0) = 1$  ?
- (d) Les fonctions continues  $f$ , définies sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , telles que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$  ?
- (e) Les fonctions continues  $f$ , définies sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , telles que  $f(0) = 0$  ?
- (f) Les fonctions continues  $f$ , définies sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , monotones ?

## 3.2 Propriétés euclidiennes

### 3.2.1 Norme et produit scalaire

Dans le plan et l'espace, on est habitué à calculer des longueurs de vecteurs ou des distances entre deux points, quelle définition donner dans  $\mathbb{R}^n$  ? Il suffit de généraliser la formule connue dans le plan et l'espace...

### Définition 3.1 – Norme euclidienne canonique d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$

Soit  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ , on appelle *norme euclidienne canonique* de  $\vec{u}$  sa longueur, elle vaut :

$$\|\vec{u}\| \stackrel{\text{Def}}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^n u_k^2} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}.$$

### Définition 3.2 – Distance euclidienne entre deux points de $\mathbb{R}^n$

Si  $A$  et  $B$  sont deux points de  $\mathbb{R}^n$ , on appelle *distance (pour la norme euclidienne canonique)* de  $A$  à  $B$  :

$$d(A, B) \stackrel{\text{Def}}{=} \|\vec{AB}\|.$$

### Remarque 3.6

Dans le plan, nous avons l'habitude de manipuler des angles, des projections, etc. Pour généraliser ces notions, nous allons utiliser la norme euclidienne canonique et ses propriétés.

### Définition 3.3 – Produit scalaire canonique

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , on appelle *produit scalaire canonique* de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  l'expression :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

Cette formule s'appelle *formule de polarisation*.

En termes de coordonnées, on a :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \times v_i = u_1 \times v_1 + \cdots + u_n \times v_n.$$

### Théorème 3.1 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

On a :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in (\mathbb{R}^n)^2, |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont alignés.

### Démonstration

1. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors :

$$0 \leq \|\vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}\|^2 = \lambda^2 \times \|\vec{v}\|^2 + 2\lambda \times \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{u}\|^2.$$

On a donc une fonction polynomiale de degré 2 qui reste toujours positive, ceci n'est possible que si :

$$\Delta' = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 - \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 \leq 0.$$

2. Supposons  $\vec{v} \neq 0$  (sinon, il n'y a rien à démontrer). Alors, il y a égalité si, et seulement si, il existe un  $\lambda_0$  qui annule la fonction polynomiale, soit, d'après le caractère défini de la norme euclidienne canonique :

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}, \vec{u} + \lambda_0 \cdot \vec{v} = 0.$$

### Définition 3.4 – Orthogonalité de deux vecteurs

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^n$  sont dits *orthogonaux* s'ils vérifient :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.$$

### Remarque 3.7

On retrouve la notion usuelle d'orthogonalité de deux vecteurs du plan. Ainsi, si  $\vec{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$  et  $\vec{v} = (\cos \phi, \sin \phi)$ , on a

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \cos(\theta - \phi).$$

Donc, ces vecteurs seront orthogonaux si, et seulement si,

$$\theta - \phi = \frac{\pi}{2} \bmod \pi.$$

### Théorème 3.2 – Théorème de Pythagore

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , alors

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

### Démonstration

Il suffit d'utiliser la formule de polarisation.

### Remarque 3.8

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points de  $\mathbb{R}^2$ , formant un triangle rectangle, on obtient la figure 3.5, page suivante.

### Exercice(s) 3.2

3.2.1 Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, on dit que  $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une *norme* sur  $E$  si elle vérifie :

— *Homogénéité* :

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda.x) = |\lambda| \times N(x).$$

— *Inégalité triangulaire* :

$$\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

— *Caractère défini* :

$$\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0_E.$$

(a) Vérifier que la norme euclidienne canonique sur  $\mathbb{R}^n$  est une norme.

(b) Montrer qu'elle vérifie de plus l'*identité du parallélogramme* :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

3.2.2 Soit  $E$  un ensemble, on dit que  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une *distance* sur  $E$  si elle vérifie :

— *Symétrie* :

$$\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x).$$

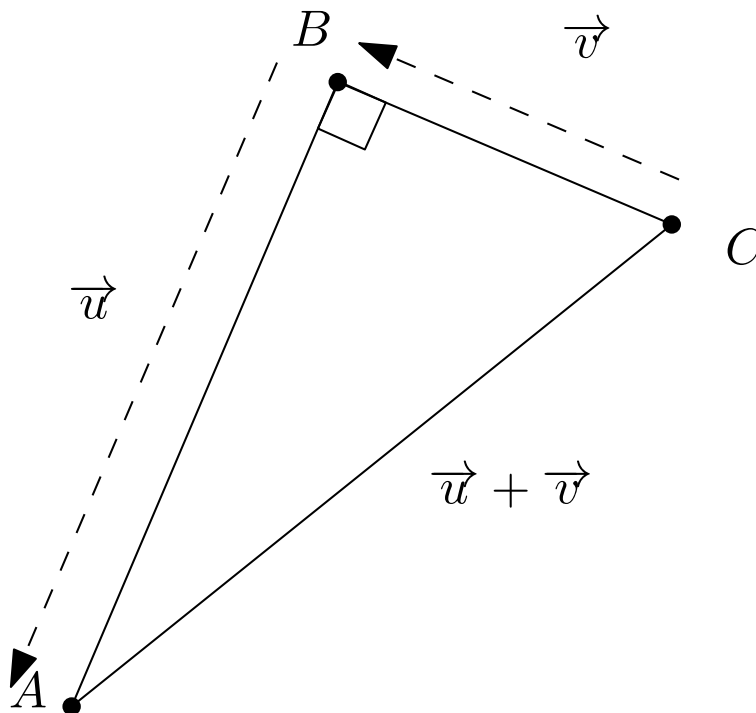
— *Caractère défini* :

$$\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

— *Inégalité triangulaire* :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Figure 3.5 – Théorème de Pythagore



- (a) Vérifier que la distance pour la norme euclidienne est bien une distance.  
 (b) Montrer que si  $\mathcal{E}$  est un espace affine réel de direction  $E$ , si  $N$  est une norme sur  $E$ , alors la fonction définie sur  $\mathcal{E}$  par

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, d(A, B) = N(\overrightarrow{AB}),$$

est bien une distance sur  $\mathcal{E}$ .

3.2.3 Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, on dit que  $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  est un *produit scalaire* sur  $E$  s'il vérifie :

— *Linéarité à droite* :

$$\forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \phi(x, y_1 + \lambda y_2) = \phi(x, y_1) + \lambda \times \phi(x, y_2).$$

— *Symétrie* :

$$\forall (x, y) \in E^2, \phi(x, y) = \phi(y, x).$$

— *Positivité* :

$$\forall x \in E, \phi(x, x) \geq 0.$$

— *Caractère défini* :

$$\forall x \in E, \phi(x, x) = 0 \iff x = 0_E.$$

- (a) Vérifier que le produit scalaire canonique est bien un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ .  
 (b) Montrer qu'un produit scalaire sur  $E$  vérifie l'inégalité :

$$\forall (x, y) \in E, \phi(x, y)^2 \leq \phi(x, x) \times \phi(y, y).$$

- (c) Montrer que si  $\phi$  est un produit scalaire sur  $E$ , alors

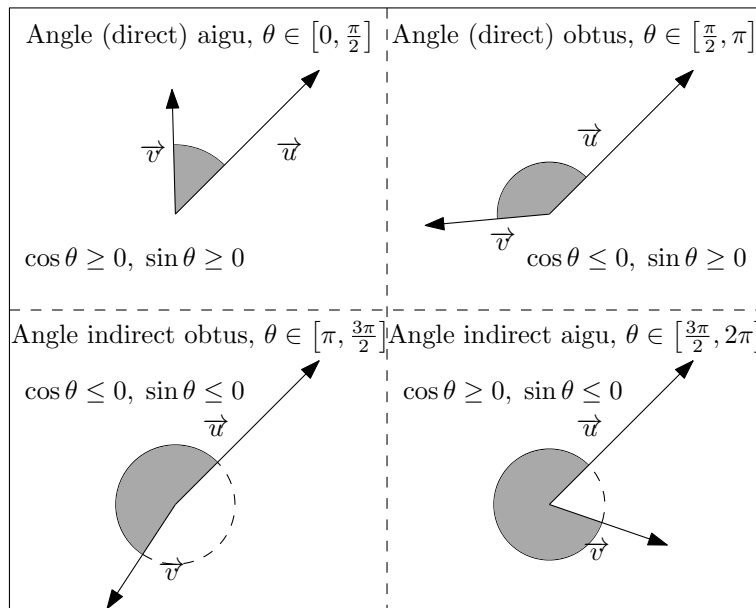
$$N : x \mapsto \sqrt{\phi(x, x)} \text{ est une norme sur } E.$$

- (d) Montrer que  $N$  vérifie l'identité du parallélogramme.

### 3.2.2 Angles

Essayons maintenant de généraliser la notion d'angle entre deux vecteurs. Dans le plan ( $\mathbb{R}^2$ ) la situation est particulière, car nous sommes habitués à *orienter* le plan. Ainsi, pouvons-nous distinguer plusieurs situations (voir la figure 3.6, de la présente page).

Figure 3.6 – Angles orientés dans le plan



#### Remarque importante 3.9

Dans l'espace ( $\mathbb{R}^3$ ) ou plus généralement dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ), il n'est plus possible d'orienter le plan contenant les deux vecteurs (en supposant qu'ils ne sont pas alignés), car le plan peut être observé « par dessus » ou « par dessous ». Le cosinus de  $\theta$  semble conservé, c'est pourquoi, nous imposerons dans ce cas,  $\sin \theta \geq 0$ . (Voir la figure 3.7, page suivante).

#### Définition 3.5 – Angle et mesure d'angle

Soit deux vecteurs non nuls,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), nous appellerons *mesure de l'angle*  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ , tout réel  $\theta$  tel que :

$$\sin \theta \geq 0 \text{ et } \cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

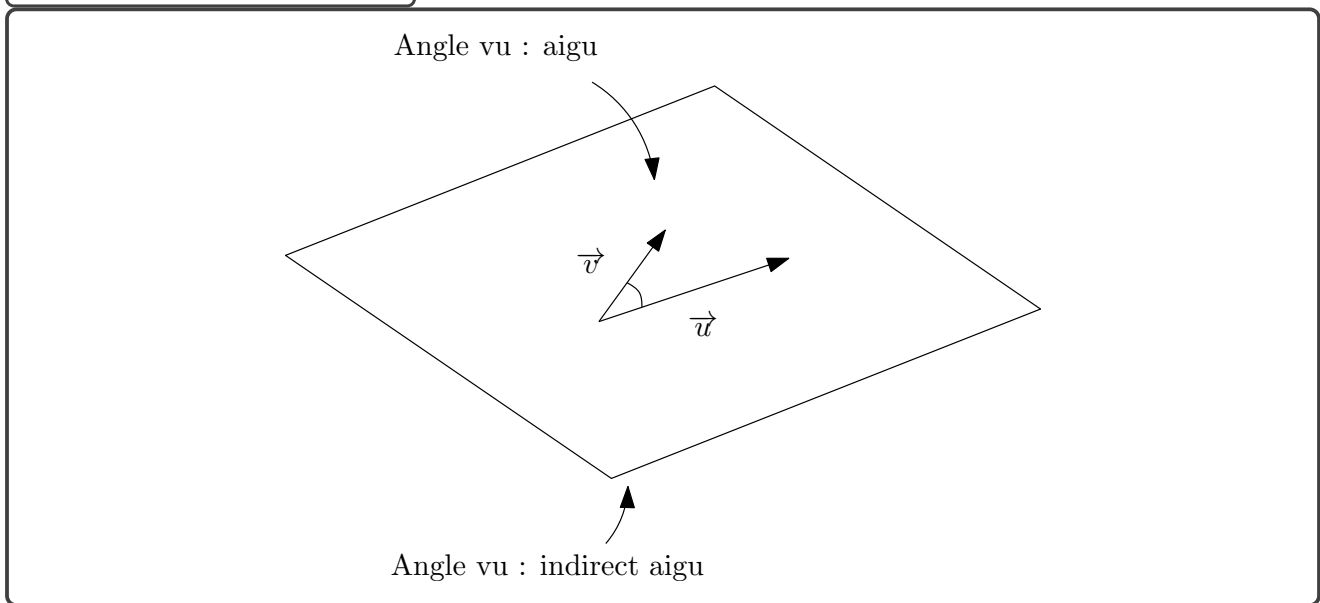
#### Démonstration

Un tel  $\theta$  existe, car, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\left| \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \right| \leq 1.$$



Figure 3.7 – Angles de l'espace



Remarque 3.10

Une mesure de l'angle est donc déterminé à  $2\pi$ -près. Une valeur particulière intéressante de  $\theta$  est

$$\theta = \arccos \left( \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \right) \in [0, \pi].$$

Remarque importante 3.11

Dans le plan, nous allons essayer de tenir compte de l'orientation <sup>a</sup>, pour cela, nous pouvons remarquer qu'une valeur particulière discrimine les deux situations, la valeur :

$$\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 \times v_2 - u_2 \times v_1,$$

qui est positive dans le cas des angles *directs*, et négative pour les angles *indirects*. Le calcul est explicité à la figure 3.8, page ci-contre.

<sup>a</sup>. Nous verrons l'année prochaine une définition propre de cette notion.

Remarque 3.12

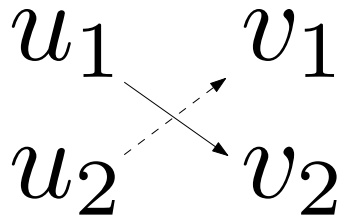
On a de plus la *formule de Lagrange* :

$$(u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2)^2 + (u_1 \times v_2 - u_2 \times v_1)^2 = (u_1^2 + u_2^2) \times (v_1^2 + v_2^2).$$

Vérifions la avec **Wxmaxima** (code 3.1, page suivante).

Figure 3.8 – Déterminant  $2 \times 2$

Il est possible de mémoriser la formule, par le petit dessin suivant :



Session Wxmaxima 3.1 – Formule de Lagrange

```
(%i1) (u[1]*v[1]+u[2]*v[2])^2+
      (u[1]*v[2]-u[2]*v[1])^2=
      factor((u[1]*v[1]+u[2]*v[2])^2+
      (u[1]*v[2]-u[2]*v[1])^2);
```

```
(%o1) (u2 v2 + u1 v1)^2 + (u1 v2 - v1 u2)^2 = (u2^2 + u1^2) (v2^2 + v1^2)
```

Définition 3.6 – Angle orienté du plan

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  non nuls, on appelle *mesure de l'angle orienté*  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  tout réel  $\theta$  vérifiant :

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \text{ et } \sin \theta = \frac{\text{Det}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

Remarque importante 3.13

Dans le plan, nous avons donc deux notions différentes : les mesures d'angle et les mesures d'angle orienté. Il est souvent inutile de s'occuper de l'orientation des angles.

Exercice(s) 3.3

3.3.1 Soit  $ABC$  un vrai triangle du plan (ie les points sont distincts et non alignés), soit  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  des mesures des angles  $\widehat{BAC}$ ,  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{ACB}$ .<sup>a</sup> Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  les longueurs des côtés  $BC$ ,  $AC$  et  $AB$ . Montrer que :

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

Voir la figure 3.9, page suivante.

3.3.2 Soit  $A$  et  $C$  deux points distincts du plan. Calculer les coordonnées de  $B$  et  $D$  en fonction de celles de  $A$  et  $C$  de manière à obtenir un carré  $ABCD$ .

3.3.3 Montrer, en utilisant la formule de la mesure d'un angle donné, que la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à  $\pi$ .

3.3.4 Montrer que les bissectrices d'un triangle se coupent. Voir la figure 3.10, page suivante.

3.3.5 Démontrer le théorème de Morley : soit un triangle quelconque  $ABC$ , alors les trisectrices (droites coupant en trois les angles) définissent un triangle équilatéral.

3.3.6 Soit  $ABC$  un vrai triangle du plan, montrer que l'aire du triangle est :

$$\left| \frac{\text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{2} \right|.$$

*a.* Clairement, nous pouvons définir une mesure de l'angle  $\widehat{ABC}$ , comme une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ .

Figure 3.9 – Relations angles/côtés

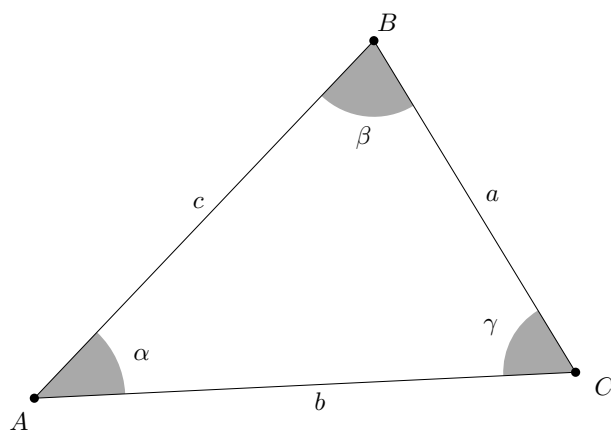


Figure 3.10 – Croisement des bissectrices

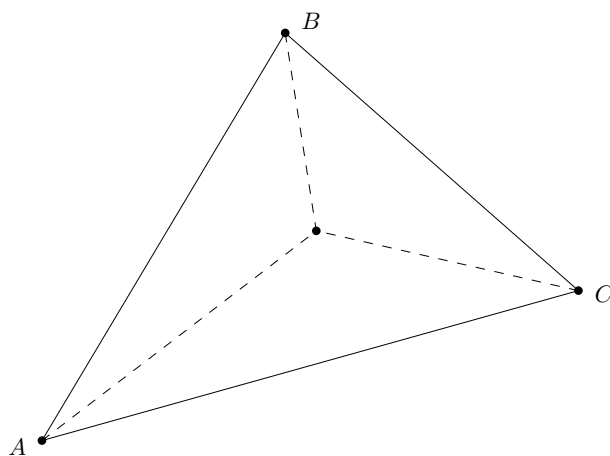
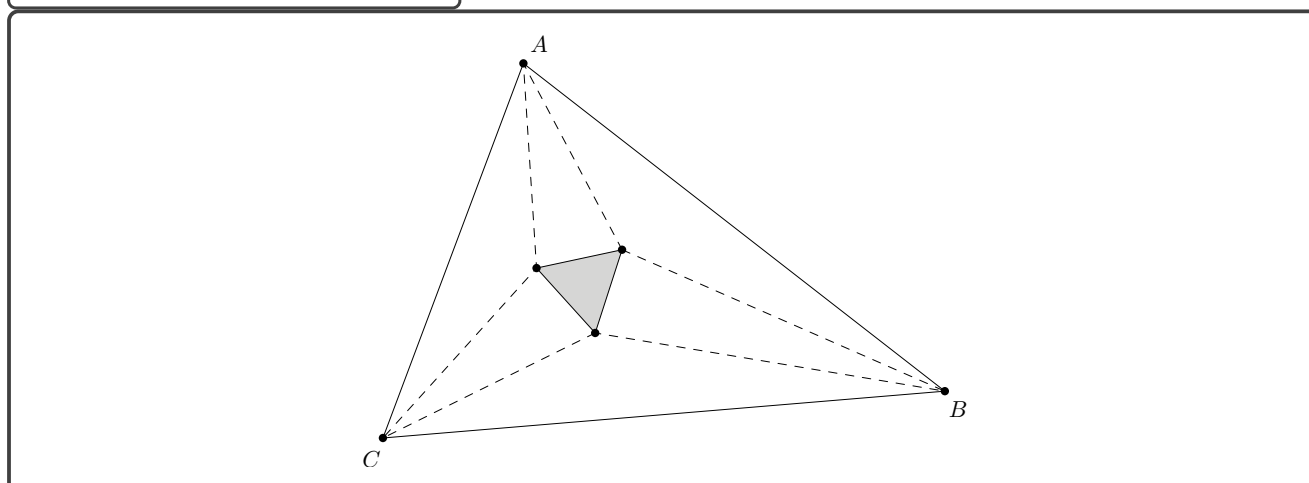


Figure 3.11 – Théorème de Morley



### 3.3 Droites, plans, etc.

#### 3.3.1 Définitions

Définition 3.7 – Droite de  $\mathbb{R}^n$

On appelle *droite vectorielle* de  $\mathbb{R}^n$  dirigée par un vecteur  $\vec{u}$  non nul :

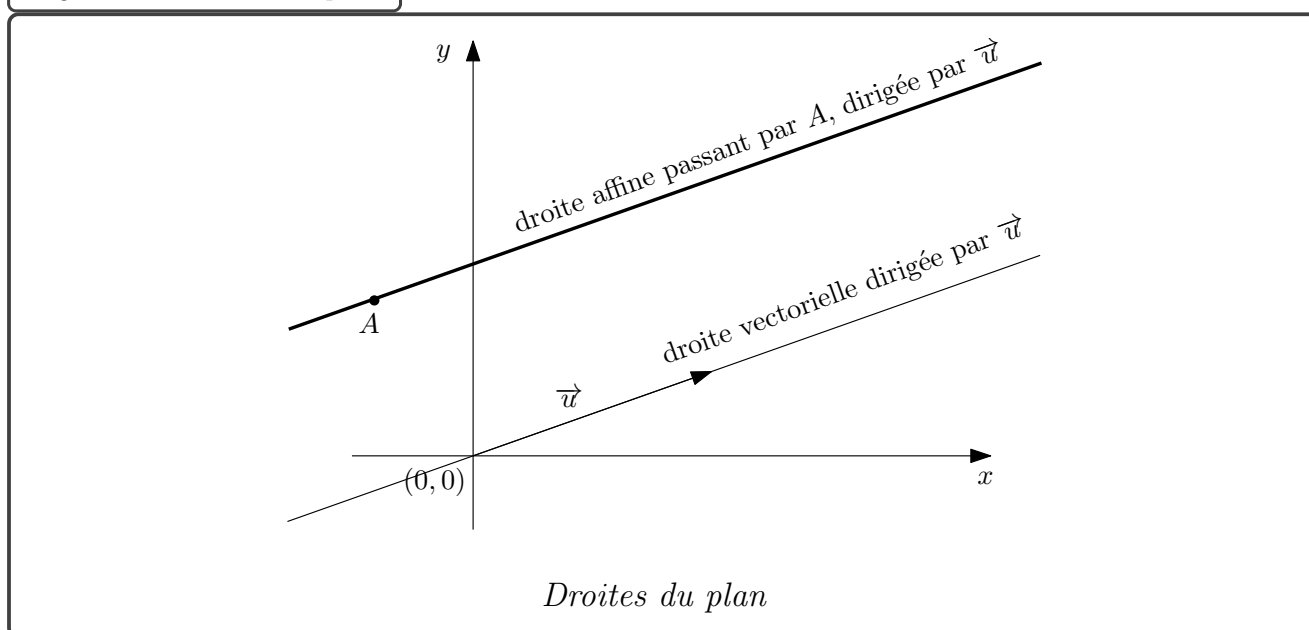
$$\{\lambda \cdot \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

On appelle *droite affine* de  $\mathbb{R}^n$ , passant par un point  $A$  et dirigée par un vecteur  $\vec{u}$  non nul :

$$\{A + \lambda \cdot \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Voir la figure 3.12, de la présente page.

Figure 3.12 – Droites du plan



### Définition 3.8 – Plan de $\mathbb{R}^n$

On appelle *plan vectoriel* de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) dirigé par deux vecteurs non alignés  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

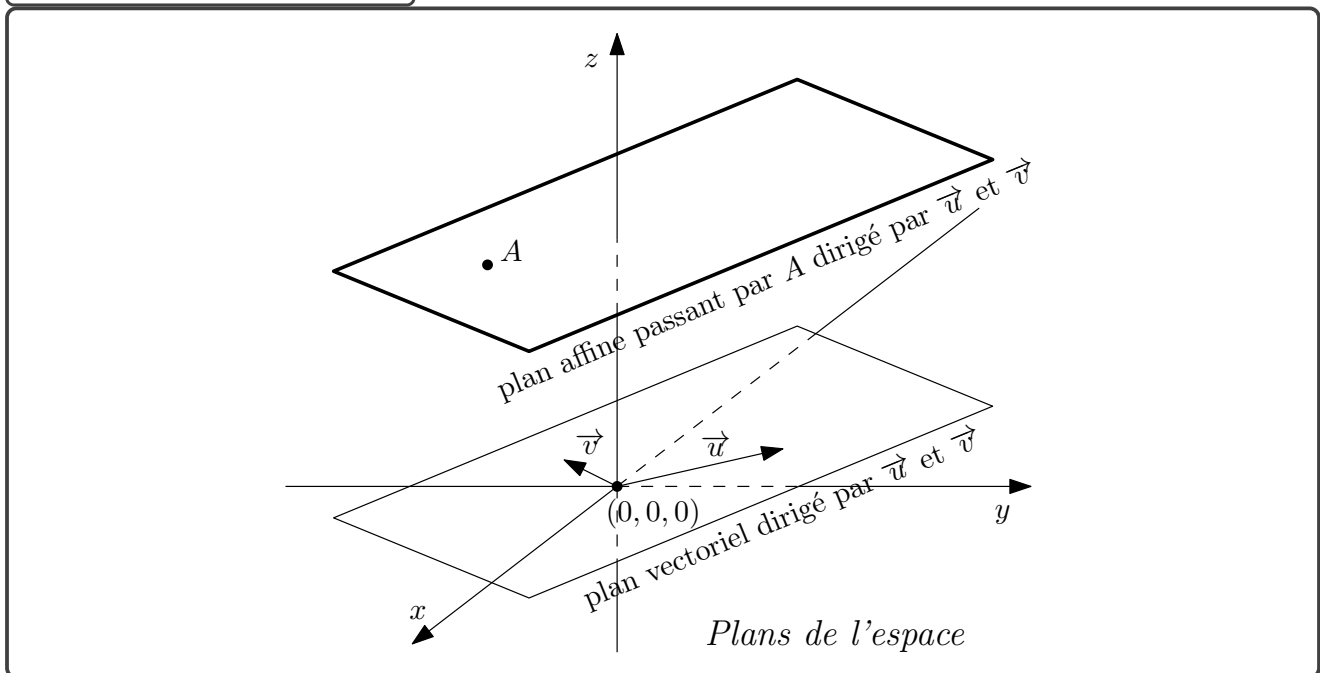
$$\{\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On appelle *plan affine* de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) passant par un point  $A$  et dirigé par deux vecteurs non alignés  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

$$\{A + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Voir la figure 3.13, de la présente page.

Figure 3.13 – Plans de l'espace



### Exercice(s) 3.4

- 3.4.1 (a) Soit  $\Delta$  une droite affine de  $\mathbb{R}^n$ , définie par un point  $A$  et un vecteur non nul  $\vec{u}$ . Soit  $B$  un point quelconque de  $\Delta$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , alors  $\Delta$  peut être définie par le point  $B$  et le vecteur  $\lambda \cdot \vec{u}$ .  
 (b) Soit  $\Pi$  un plan affine de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), défini par un point  $A$  et deux vecteurs non alignés  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Soit  $B$  un point quelconque de  $\Pi$  et  $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ , tels que  $\lambda_1 \times \mu_2 \neq \lambda_2 \times \mu_1$ , alors  $\Pi$  peut être défini par le point  $B$  et les vecteurs  $\lambda_1 \cdot \vec{u} + \mu_1 \cdot \vec{v}$  et  $\lambda_2 \cdot \vec{u} + \mu_2 \cdot \vec{v}$  (qui sont donc non alignés).

3.4.2 Dans le plan ( $\mathbb{R}^2$ ), étant donnés un point  $A$ , un vecteur non nul  $\vec{u}$  et un réel  $\alpha$ , déterminer :

$$\left\{ M \in \mathbb{R}^2, \langle \overrightarrow{AM}, \vec{u} \rangle = \alpha \right\}$$

$$\left\{ M \in \mathbb{R}^2, \text{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = \alpha \right\}.$$

3.4.3 Dans  $\mathbb{R}^n$ , soit  $\Delta_1$  la droite définie par le point  $A_1$  et le vecteur non nul  $\vec{u}_1$  et  $\Delta_2$  la droite définie par le point  $A_2$  et le vecteur non nul  $\vec{u}_2$ , donner une CNS sur  $(A_1, A_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$  pour que les deux droites aient un point commun. Déterminer alors  $\Delta_1 \cap \Delta_2$ .

3.4.4 Dans  $\mathbb{R}^n$ , soit  $\Pi_1$  le plan défini par le point  $A_1$  et les vecteurs non alignés  $\vec{u}_1$  et  $\vec{v}_1$  et  $\Pi_2$  le plan défini par le point  $A_2$  et les vecteurs non alignés  $\vec{u}_2$  et  $\vec{v}_2$ , donner une CNS sur  $(A_1, A_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$  pour que les deux plans aient un point commun. Déterminer alors  $\Pi_1 \cap \Pi_2$ .

### 3.3.2 Mise en équation(s)

#### Généralités

Quand on regarde une droite ou un plan (ou toute autre sorte d'objet), il y a plusieurs points de vue :

1. La notion de *lieu géométrique*. L'objet est décrit par ses propriétés géométriques. Par exemple : lieu des points à une distance  $r$  d'un point  $A$  du plan (cercle de centre  $A$  de rayon  $r$ , noté  $\mathcal{C}$ ).
2. La forme *paramétrée*. Chaque point de l'objet est repéré par des valeurs de certains paramètres. Par exemple, si  $A = (a, b)$ , les points du cercle  $\mathcal{C}$  ont des coordonnées  $(x, y)$  paramétrées par un réel  $\theta$ , avec :

$$x = a + r \times \cos \theta, \quad y = b + r \times \sin \theta.$$

3. La forme *cartésienne*. Chaque point de l'objet vérifie une ou plusieurs équations reliant ses coordonnées. Par exemple : les points  $(x, y)$  du cercle  $\mathcal{C}$  vérifient :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

#### Remarque 3.14

Le jeu consistera souvent à passer d'une représentation à une autre :

- *Lieu*  $\rightarrow$  *paramétrage* Il faut choisir de bons paramètres ayant le plus de sens géométrique dans la situation présentée. Pour le cercle  $\mathcal{C}$ , on pourra introduire la mesure de l'angle entre le vecteur  $(1, 0)$  et le bipoint  $\overrightarrow{AM}$ , où  $M$  est le point  $(x, y)$  de  $\mathcal{C}$ .
- *Lieu*  $\rightarrow$  *cartésien* Passer par le cas précédent.
- *Paramétrage*  $\rightarrow$  *cartésien* Il faut *éliminer* le ou les paramètres. Par exemple pour le cercle  $\mathcal{C}$ , on a le paramétrage :

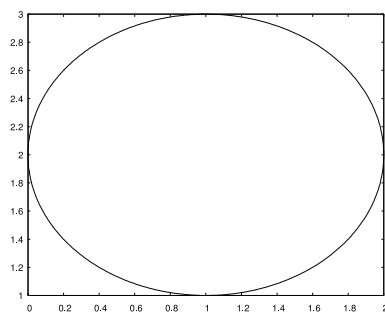
$$x = a + r \times \cos \theta, \quad y = b + r \times \sin \theta.$$

On va éliminer le paramètre  $\theta$  grâce à la relation  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ .

- *Paramétrage*  $\rightarrow$  *lieu* Il s'agit de tracer un objet paramétré, nous étudierons cela lors de l'étude des courbes paramétrées et des nappes paramétrées.
- *Cartésien*  $\rightarrow$  *paramétrage* Problème difficile, car il n'est pas évident que l'objet puisse se définir ainsi... On étudiera ce problème dans le cours sur les courbes et surfaces implicites. Pour  $\mathcal{C}$ , il suffit lorsque l'on a quelque chose de la forme  $X^2 + Y^2 = 1$ , d'introduire un paramètre  $\theta$  où  $X = \cos \theta$  et  $Y = \sin \theta$ .
- *Cartésien*  $\rightarrow$  *lieu* On passe souvent par le problème précédent. Nous verrons aussi quelques techniques directes.

#### Session Wxmaxima 3.2 – Changements de points de vue

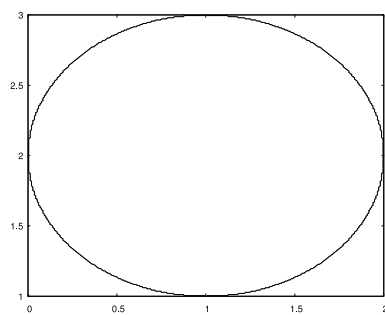
```
(%i1) a:1$
(%i2) b:2$
(%i3) r:1$
(%i4) load(draw)$
(%i5) draw2d(nticks=500,
    parametric(a+r*cos(t),b+r*sin(t),t,0,2*pi));
(%o5) [gr2d (parametric)]
```



Contrairement aux apparences, c'est un cercle!

```
(%i6) draw2d(implicit((x-a)^2+(y-b)^2=r^2,x,0,2,y,1,3));
```

```
(%o6) [gr2d(implicit)]
```



## Droites du plan

### Remarque 3.15

On obtient les formes suivantes :

1. *Lieu géométrique* : passant par un point  $A$ , et dirigée par un vecteur  $\vec{u}$  ; passant par deux points ; passant par un point et orthogonale à un vecteur ; bissectrice, médiatrice, médiane, hauteur...
2. *Paramétrique* : si  $\Delta$  est la droite passant par le point  $A$  et dirigée par  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , on obtient une équation paramétrique en écrivant :

$$M \in \Delta \iff \exists t \in \mathbb{R}, M = A + t \cdot \vec{u}.$$

3. *Cartésien* : si  $\Delta$  est la droite passant par le point  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , on obtient une équation cartésienne en écrivant :

$$M \in \Delta \iff \text{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0.$$

si  $\Delta$  est la droite passant par les points  $A$  et  $B$  distincts, on obtient une équation cartésienne en écrivant :

$$M \in \Delta \iff \text{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0.$$

si  $\Delta$  est la droite passant par le point  $A$  et de vecteur normal  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , on obtient une équation cartésienne en écrivant :

$$M \in \Delta \iff \langle \overrightarrow{AM}, \vec{v} \rangle = 0.$$

## Droites de l'espace

### Remarque 3.16

On obtient les formes suivantes :

1. *Lieu géométrique* : passant par un point  $A$ , et dirigée par un vecteur  $\vec{u}$  ; passant par deux points ; passant par un point et orthogonale à un plan ; intersection de deux plans...
2. *Paramétrique* : si  $\Delta$  est la droite passant par le point  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , on obtient une équation cartésienne en écrivant :

$$M \in \Delta \iff \exists t \in \mathbb{R}, M = A + t \cdot \vec{u}.$$

Plus précisément, si  $A = (a, b, c)$  et  $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ , alors on obtient :

$$x = a + \alpha \times t, y = b + \beta \times t \text{ et } z = c + \gamma \times t, t \in \mathbb{R}.$$

3. *Cartésien* : si  $\Delta$  est la droite passant par le point  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , on obtient une équation cartésienne en écrivant la condition d'alignement de la Propriété 3.2, page 85. Cela donne, si  $A = (a, b, c)$  et  $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$  avec  $\gamma \neq 0$  :

$$\begin{cases} \gamma \times (x - a) &= \alpha \times (z - c) \\ \gamma \times (y - b) &= \beta \times (z - c). \end{cases}$$



## Plans de l'espace

### Remarque 3.17

1. *Lieu géométrique* : passant par un point  $A$  et dirigé par deux vecteurs non alignés  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  ; passant par trois points non alignés ; passant par un point et contenant une droite ne passant pas par ce point ; passant par un point et orthogonal à une droite ; plan médiateur...
2. *Paramétrique* : si  $P$  est le plan passant par le point  $A$  et dirigé par les deux vecteurs non alignés  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ , on obtient une équation cartésienne en écrivant :

$$M \in \Delta \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, M = A + \lambda \cdot \vec{u}_1 + \mu \cdot \vec{u}_2.$$

Plus précisément, si  $A = (a, b, c)$ ,  $\vec{u}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  et  $\vec{u}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  (non alignés), alors on obtient :

$$\begin{cases} x = a + \alpha_1 \times \lambda + \alpha_2 \times \mu, \\ y = b + \beta_1 \times \lambda + \beta_2 \times \mu, \\ z = c + \gamma_1 \times \lambda + \gamma_2 \times \mu, \end{cases} (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

3. *Cartésien* : si  $P$  est le plan passant par le point  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n} \neq \vec{0}$ , on obtient une équation cartésienne en écrivant :

$$M \in \mathcal{P} \iff \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0.$$

Si  $\mathcal{P}$  est dirigé par  $\vec{u}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  et  $\vec{u}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  (non alignés) alors

$$\vec{n} = (\beta_1 \times \gamma_2 - \gamma_1 \times \beta_2, \gamma_1 \times \alpha_2 - \alpha_1 \times \gamma_2, \alpha_1 \times \beta_2 - \beta_1 \times \alpha_2)$$

est un vecteur normal à  $\mathcal{P}$ .

### Définition 3.9 – Produit vectoriel

Le vecteur de  $\mathbb{R}^3$  ci-dessus s'appelle *produit vectoriel* de  $\vec{u}_1$  et de  $\vec{u}_2$ , il s'écrit

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2.$$

La formule de la figure 3.14, page suivante nous donne ses coordonnées.

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \wedge (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (\beta_1 \times \gamma_2 - \gamma_1 \times \beta_2, \gamma_1 \times \alpha_2 - \alpha_1 \times \gamma_2, \alpha_1 \times \beta_2 - \beta_1 \times \alpha_2).$$

Remarquons (avec la définition ci-dessous) que le plan cherché a pour équation cartésienne :

$$\langle \overrightarrow{AM}, \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \rangle = 0.$$

### Remarque 3.18

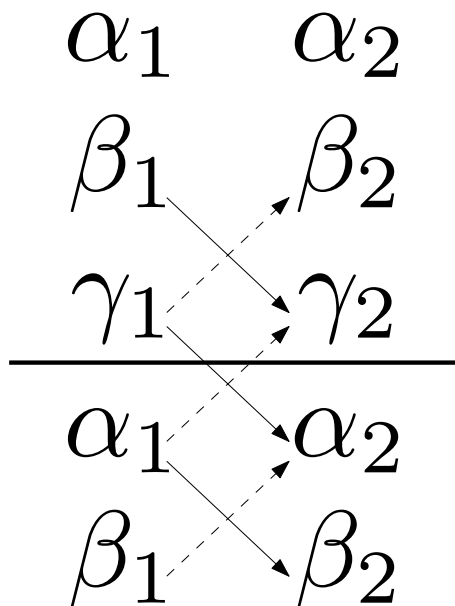
Nous pouvons aussi remarquer que l'équation d'une droite de l'espace obtenue précédemment peut s'écrire (la droite passe par le point  $A$  et est dirigée par un vecteur  $\vec{u}$ ) :

$$\langle \overrightarrow{AM}, \vec{v} \rangle = 0 \text{ et } \langle \overrightarrow{AM}, \vec{w} \rangle = 0,$$

où  $\vec{v}$  est un vecteur non nul orthogonal à  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  orthogonal à  $\vec{u}$  et non aligné avec  $\vec{v}$ , par exemple. Nous verrons que le choix de  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  n'intervient pas.

Figure 3.14 – Produit vectoriel

Il est possible de mémoriser la formule par le petit dessin suivant :



Remarque 3.19

On pourrait aussi écrire :

$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0},$$

mais cela donne *trois* équations au lieu de deux ! Nous montrerons que l'on ne peut en garder que deux... Voir le code `Wxmaxima 3.3`, de la présente page

Session Wxmaxima 3.3 – Droites de l'espace

```
(%i1) A : [a,b,c]$ U : [u,v,w]$ load(vect)$ M : [x,y,z]$
(%i5) express((M-A)~U);
(%o5) [w (y - b) - v (z - c), u (z - c) - w (x - a), v (x - a) - u (y - b)]
On peut vérifier que les équations sont redondantes.
(%i6) ratsimp(u*%[1]+v*%[2]+w*%[3]);
(%o6) 0
```

Propriété 3.1

Clairement  $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$  est orthogonal à la fois à  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ , car les points  $A + \vec{u}_1$  et  $A + \vec{u}_2$  sont dans le plan. On l'appelle *vecteur normal au plan*.

Propriété 3.2

On a de plus, d'après la formule :

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{0} \iff (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \text{ alignés.}$$

### Propriété 3.3

*Anti-symétrie.* Si  $(\vec{u}, \vec{v})$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , on a

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

### Propriété 3.4

1. Si  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  sont trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , on a

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}.$$

2. Si  $(\vec{u}, \vec{v})$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\vec{u} \wedge (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}).$$

### Propriété 3.5 – Formule de Lagrange

Si  $(\vec{u}, \vec{v})$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , alors

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 = \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2.$$

### Démonstration

On peut faire le calcul en **Wxmaxima** (voir la session 3.4, de la présente page).

### Session Wxmaxima 3.4 – Formule de Lagrange (dans l'espace)

```
(%i1) load(vect)$
(%i2) U : [u[1],u[2],u[3]]$
      V : [v[1],v[2],v[3]]$
(%i4) express(U~V);
(%o4) [u2 v3 - v2 u3, v1 u3 - u1 v3, u1 v2 - v1 u2]
(%i5) U.V;
(%o5) u3 v3 + u2 v2 + u1 v1
(%i6) factor((U.V)^2+express((U~V).(U~V)));
(%o6) (u3^2 + u2^2 + u1^2) (v3^2 + v2^2 + v1^2)
```

### Remarque 3.20

En conséquence : si  $\theta$  est une mesure de l'angle que font  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  supposés non nuls ( $\theta \in [0, \pi]$  par exemple), alors :

$$\sin \theta = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \geq 0.$$

### Proposition 3.1 – Formule du double produit vectoriel

Si  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  sont trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , alors

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \cdot \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \cdot \vec{w}.$$

Voir le code *Wxmaxima 3.5*, de la présente page.

### Session Wxmaxima 3.5 – Double produit vectoriel

```
(%i1) load(vect)$
      U : [u[1],u[2],u[3]]$
      V : [v[1],v[2],v[3]]$
      W : [w[1],w[2],w[3]]$

(%i5) ratsimp(express(U~(V~W)-(U.W)*V+(U.V)*W));

(%o5) [0, 0, 0]
```

### Démonstration de la proposition 3.1, de la présente page

Un peu plus sérieuse, le calcul brutal est toujours désagréable...

- L'égalité à démontrer est *linéaire* en  $\vec{w}$ .<sup>a</sup> On peut donc se ramener au cas où  $\vec{w} \in \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ .
- De même sur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Il reste donc 27 cas.
- Par symétrie du problème et anti-symétrie du produit vectoriel, tous ne sont pas à regarder.<sup>b</sup> Les relations évidentes :

$$\begin{cases} (1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) &= (0, 0, 1), \\ (0, 1, 0) \wedge (0, 0, 1) &= (1, 0, 0), \\ (0, 0, 1) \wedge (1, 0, 0) &= (0, 1, 0), \end{cases}$$

permettent de conclure.

a.  $\phi$  définie sur un espace vectoriel  $E$  à valeurs dans  $F$ , sera dite *linéaire*, si elle vérifie :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, \phi(\lambda.x + y) = \lambda.\phi(x) + \phi(y).$$

Nous étudierons plus précisément cette notion dans le cours sur les espaces vectoriels.

b. Ce serait amusant de faire le dénombrement... À titre d'indication, cela fait 10 cas.

## Cercles du plan

### Remarque 3.21

On obtient les formes suivantes :

1. *Lieu géométrique* :  $\{M, d(M, A) = r\}$  (ensemble des points à une distance  $r$  d'un point  $A$ ), cercle circonscrit à un triangle, cercle inscrit dans un triangle...
2. *Paramétrique* : si  $A = (a, b)$  et  $r \in \mathbb{R}_+$ , le point  $M = (x, y)$ , sur le cercle, vérifie :

$$x = a + r \times \cos \theta, \quad y = b + r \times \sin \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Les paramètres sont visualisés sur la figure 3.15, page suivante.

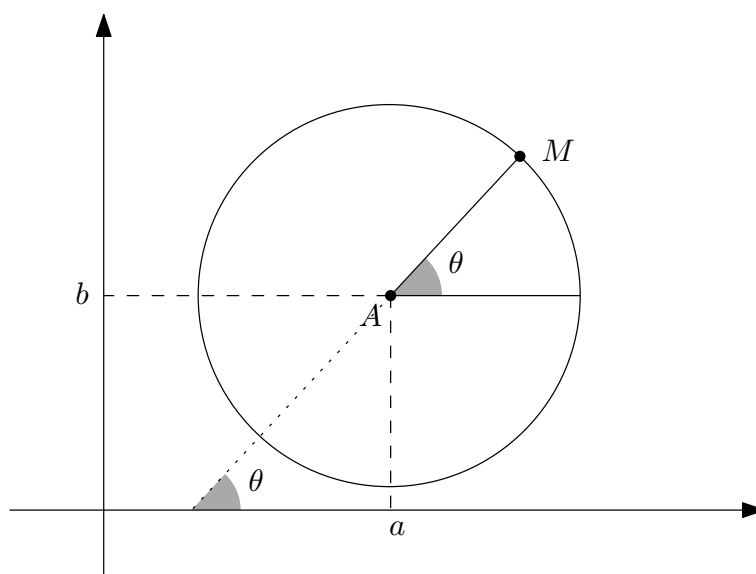
3. *Cartésien* : si  $A = (a, b)$  et  $r \in \mathbb{R}_+$ , le point  $M = (x, y)$ , sur le cercle, vérifie :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Remarquons que l'équation du cercle s'écrit :

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = r^2.$$

Figure 3.15 – Cercle du plan



## Sphère de l'espace

### Remarque 3.22

On obtient les formes suivantes :

1. *Lieu géométrique* :  $\{M, d(M, A) = r\}$  (ensemble des points à une distance  $r$  d'un point  $A$ ).
2. *Paramétrique* : si  $A = (a, b, c)$  et  $r \in \mathbb{R}_+$ , le point  $M = (x, y, z)$ , sur la sphère, vérifie  $((\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2)$  :<sup>a</sup>

$$x = a + r \times \sin \theta \times \cos \varphi, \quad y = b + r \times \sin \theta \times \sin \varphi, \quad z = c + r \times \cos \theta.$$

On peut visualiser les paramètres sur la figure 3.16, page suivante

3. *Cartésien* : si  $A = (a, b, c)$  et  $r \in \mathbb{R}_+$ , le point  $M = (x, y, z)$ , sur la sphère, vérifie :

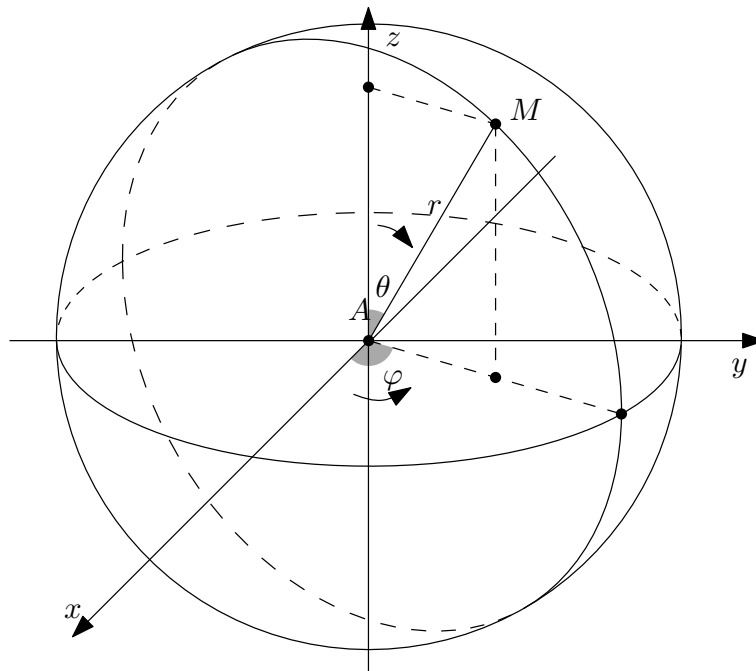
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Remarquons que l'équation de la sphère s'écrit :

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = r^2.$$

<sup>a</sup>. Plusieurs paramétrages sont courants. Celui-ci est utilisé par le physicien...

Figure 3.16 – Sphère



## Cercles de l'espace

### Remarque 3.23

On obtient les formes suivantes :

1. *Lieu géométrique* : intersection d'une sphère et d'un plan, intersection de deux sphères, etc.
2. *Paramétrique* : on passera souvent par la forme cartésienne. Cherchons le paramétrage de l'intersection de la sphère de centre  $A = (a, b, c)$ , de rayon  $r$  (donc d'équation  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ ) avec le plan d'équation  $u \times x + v \times y + w \times z = h$ , où, quitte à diviser par  $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ , on peut supposer  $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ , on peut donc poser  $w = \cos \theta$ ,  $u = \sin \theta \times \cos \varphi$  et  $v = \sin \theta \times \sin \varphi$ .
  - (a) La première question est de savoir si le plan et la sphère se coupent. Ce ne sera possible que si  $d$ , la distance de  $A$  au plan est  $\leq r$ . Voir la figure 3.17, page 91.
  - (b) *Cartésien* : le cercle s'écrit donc :

$$\|\overrightarrow{AM}\| = r \text{ et } \langle \overrightarrow{BM}, \vec{u} \rangle = 0,$$

où  $A$  est le centre de la sphère,  $r$  son rayon et où  $B$  est un point du plan,  $\vec{u}$  un vecteur normal au plan.

Les calculs sont résumés dans la session Wxmaxima 3.6, de la présente page.

### Session Wxmaxima 3.6 – Cercle dans l'espace

#### 1. Calcul de $H$

```
(%i1) subst([x=a+t*sin(theta)*cos(phi),
y=b+t*sin(theta)*sin(phi),
z=c+t*cos(theta)],
sin(theta)*cos(phi)*x+sin(theta)*sin(phi)*y+
cos(theta)*z-h);

(%o1)  $\frac{\sin(\phi) \sin(\theta) (\sin(\phi) t \sin(\theta) + b)}{\cos(\theta) (t \cos(\theta) + c) - h} + \frac{\cos(\phi) \sin(\theta) (\cos(\phi) t \sin(\theta) + a)}{\cos(\theta) (t \cos(\theta) + c) - h} +$ 

(%i2) solve(%,t);

(%o2)  $[t = -\frac{(b \sin(\phi) + a \cos(\phi)) \sin(\theta) + c \cos(\theta) - h}{(\sin(\phi)^2 + \cos(\phi)^2) \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2}]$ 

(%i3) H:subst(%, [a+t*sin(theta)*cos(phi),
b+t*sin(theta)*sin(phi), c+t*cos(theta)])$
```

2. Calcul de  $d$

```
(%i4) A:[a,b,c]$
(%i5) AH : H-A$
(%i6) sqrt(AH.AH)$
(%i7) abs(radcan(%));

(%o7)  $\frac{|(b \sin(\phi) + a \cos(\phi)) \sin(\theta) + c \cos(\theta) - h|}{\sqrt{(\sin(\phi)^2 + \cos(\phi)^2) \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2}}$ 

(%i8) d:trigsimp(%);

(%o8)  $| (b \sin(\phi) + a \cos(\phi)) \sin(\theta) + c \cos(\theta) - h |$ 
```

3. Paramétrage du cercle, nous noterons  $\alpha$  le paramètre, le cercle est de centre  $H$ , de rayon  $\sqrt{r^2 - d^2}$ .

```
(%i9) M:H+
sqrt(r^2-d^2)*cos(alpha)*[cos(theta)*cos(phi),
cos(theta)*sin(phi),-sin(theta)]+
sqrt(r^2-d^2)*sin(alpha)*[-sin(phi),cos(phi),0]$
```

Essayons de vérifier.

```
(%i10) trigsimp((M[1]-a)^2+(M[2]-b)^2+(M[3]-c)^2);

(%o10)  $r^2$ 

(%i11) trigsimp(sin(theta)*cos(phi)*M[1]+
sin(theta)*sin(phi)*M[2]+cos(theta)*M[3]);

(%o11)  $h$ 

Un petit tracé pour finir ?

(%i12) a:0$ b:0$ c:0$ r:1$ theta:%pi/3$ phi:%pi/4$ h:1/2$

(%i19) load(draw)$

(%i20) draw3d(parametric(M[1],M[2],M[3],alpha,0,2*pi));

(%o20) [gr3d(parametric)]
```

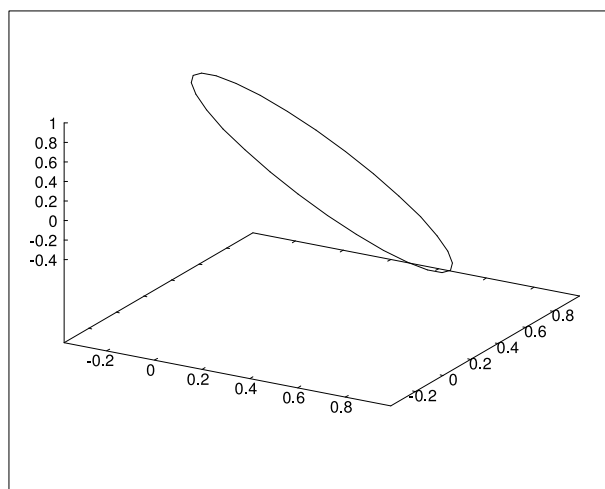
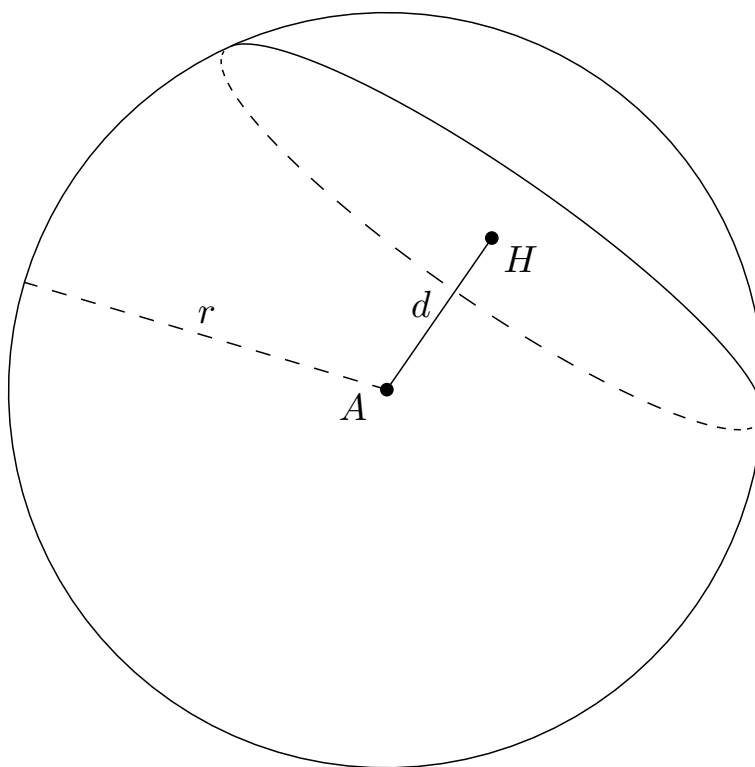


Figure 3.17 – Cercle de l'espace



#### Remarque importante 3.24

Cet exemple est remarquable à plus d'un point :

1. Comment calculer l'intersection de deux objets géométriques ?

La situation idéale est lorsque l'un est donné sous forme paramétrique, l'autre sous forme cartésienne !

C'est ainsi que nous avons calculé les coordonnées du point  $H$ .

2. La formule de  $d$  est aussi remarquablement simple. Nous généraliserons dans le cours sur les distances.



3. Le paramétrage de la sphère nous permet d'avoir des formules assez simples (refaire le calcul avec des  $(u, v, w)$  quelconques). Il sert ici à prendre un vecteur de norme 1.
4. Nous voyons apparaître une famille de trois vecteurs :

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= (\sin \theta \times \cos \varphi, \sin \theta \times \sin \varphi, \cos \theta), \\ \vec{e}_\theta &= (\cos \theta \times \cos \varphi, \cos \theta \times \sin \varphi, -\sin \theta), \\ \vec{e}_\varphi &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0).\end{aligned}$$

Nous étudierons plus avant cette famille dans le paragraphe approprié.

### Exercice(s) 3.5

Dans le plan affine  $\mathbb{R}^2$

- 3.5.1 Soit  $\mathcal{C}$  un cercle du plan et  $A, B$  deux points de ce cercle diamétralement opposés. Montrer que

$$M \in \mathcal{C} \iff \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \rangle = 0.$$

Voir la figure 3.18, page 94.

- 3.5.2 Soit  $\mathcal{C}$  un cercle du plan de centre  $O$ ,  $A$  et  $B$  deux points distincts de ce cercle,  $M$  un point du plan, on pose  $\vartheta$  une mesure de l'angle orienté  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$  et  $\varphi$  une mesure de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  montrer que (*théorème de l'angle au centre*) :

$$M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\} \iff 2 \times \vartheta = \varphi \pmod{2\pi}.$$

Voir la figure 3.19, page 95.

- 3.5.3 Soit  $A, B$  et  $C$  trois points distincts du plan,  $M$  un point du plan  $\notin \{A, B\}$ ,  $\vartheta$  une mesure de l'angle orienté  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$  et  $\varphi$  une mesure de l'angle orienté  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ , montrer que

$$\vartheta = \varphi \iff A, B, C \text{ et } M \text{ alignés ou cocycliques.}$$

- 3.5.4 Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , trouver

$$\left\{ M, \text{ la mesure de l'angle } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \alpha \pmod{\pi} \right\}.$$

Que se passe-t-il si l'on remplace  $\pi$  par  $2\pi$  ?

- 3.5.5 Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan et  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , trouver

$$\left\{ M, \frac{\|\overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{BM}\|} = \alpha \right\}.$$

- 3.5.6 Soit  $A, B$  et  $C$  trois points distincts du plan et non alignés.

- (a) Donner l'équation cartésienne de la droite passant par  $A$  et  $B$ . Elle sera notée  $eq_{AB} = 0$ .
- (b) Montrer que, si  $D$  est une droite passant par  $A$ , alors son équation est de la forme :

$$\lambda \times eq_{AB} + \mu \times eq_{AC} = 0, \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

- (c) Montrer qu'il existe un unique cercle passant par  $A, B$  et  $C$ .

- (d) Calculer à l'aide de **Wxmaxima** le centre et le rayon du cercle passant par  $A, B$  et  $C$ .

- 3.5.7 En utilisant l'exercice précédent, montrer que les bissectrices d'un triangle se coupent.

3.5.8 Montrer que les hauteurs d'un triangle se coupent.

Dans l'espace affine  $\mathbb{R}^3$

3.5.9 Soit  $A, B, C$  et  $D$  quatre points distincts et non coplanaires<sup>a</sup> de l'espace.

- (a) Montrer qu'il existe un unique plan, noté  $ABC$ , passant par  $A, B$  et  $C$  et en donner son équation cartésienne. Elle sera notée  $eq_{ABC} = 0$ .
- (b) Montrer que les plans  $ABC$  et  $ACD$  se coupent suivant une droite  $\Delta$ . Laquelle ?
- (c) Montrer que si  $\Pi$  est un plan contenant la droite  $\Delta$ , alors son équation est de la forme :

$$\lambda \times eq_{ABC} + \mu \times eq_{ACD} = 0, \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

- (d) Montrer que tout plan contenant le point  $A$  a pour équation :

$$\lambda \times eq_{ABC} + \mu \times eq_{ABD} + \nu \times eq_{ACD} = 0,$$

où  $(\lambda, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0)$ .

3.5.10 Dans  $\mathbb{R}^3$ , on donne deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ , et on s'intéresse à la recherche des solutions de l'équation :

$$\vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{b}.$$

- (a) Donner une CNS pour que cette équation ait au moins une solution.
- (b) Cette CNS étant vérifiée, trouver une solution particulière  $\vec{u}_0$ .
- (c) En cherchant les solutions sous la forme  $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{v}$ , trouver toutes les solutions.

3.5.11 Soit  $A, B, C$  et  $D$  quatre points non coplanaires de  $\mathbb{R}^3$ , montrer que le volume du parallélépipède construits sur les vecteurs  $\vec{AB}, \vec{AC}$  et  $\vec{AD}$  a un volume égal à

$$\left| \langle \vec{AB}, \vec{AC} \wedge \vec{AD} \rangle \right|.$$

Voir la figure 3.20, page 96.

Puis, que le volume du tétraèdre  $ABCD$  est :

$$\left| \frac{\langle \vec{AB}, \vec{AC} \wedge \vec{AD} \rangle}{6} \right|.$$

<sup>a</sup>. Cela signifie qu'ils ne sont pas dans un même plan.

### 3.3.3 Distances

#### 3.3.3.1 Distance à une partie

Définition 3.10 – Distance à une partie

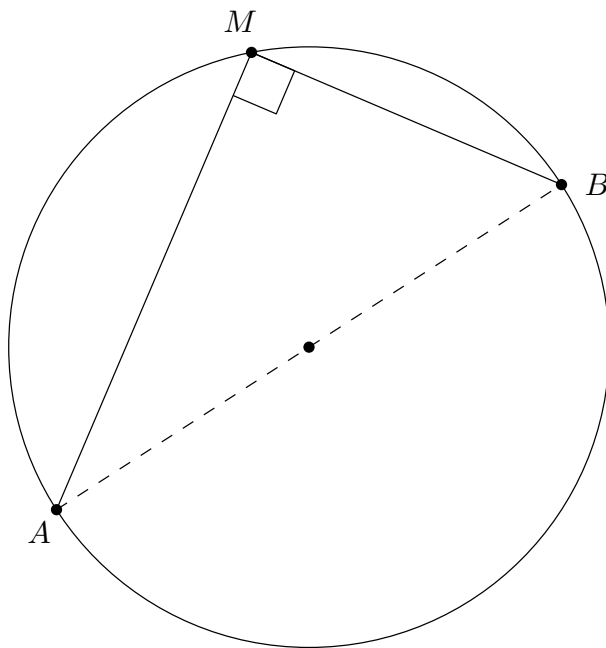
Soit  $E$  un ensemble muni d'une distance, soit  $F$  une partie non vide de  $E$  et  $x \in E$ , on appelle *distance de  $x$  à  $F$* , et on note :

$$d(x, F) \stackrel{\text{Def}}{=} \inf_{y \in F} d(x, y).$$

Remarque 3.25

$\{d(x, y), y \in F\}$  est non vide (car  $F$  est non vide) et minoré (par 0, car  $d$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ ), la borne inférieure existe bien.

Figure 3.18 – Angle inscrit



Propriété 3.6 – Distance d'un point  $A$  à une droite  $\Delta$  du plan

Si la droite est donnée par un point  $B$  et un vecteur  $\vec{u}$  orthogonal à  $\Delta$ , alors on a

$$d(A, \Delta) = \frac{|\langle \vec{AB}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{u}\|}.$$

Si la droite est donnée par un point  $B$  et un vecteur directeur  $\vec{v}$ , alors on a

$$d(A, \Delta) = \frac{|\text{Det}(\vec{AB}, \vec{v})|}{\|\vec{v}\|}.$$

Démonstration de la propriété 3.6, de la présente page

Plusieurs types de démonstrations sont possibles (voir la figure 3.21, page 97 pour les notations).

1. *Géométrie* : on introduit le point  $H$  tel que

$$\vec{AH} \text{ orthogonal à } \vec{v}, H \in \Delta.$$

La mesure de l'angle entre ces deux vecteurs sera donc  $\pi/2 \pmod{\pi}$ , on a alors :

$$\vec{AB} = \vec{AH} + \vec{HB},$$

d'où

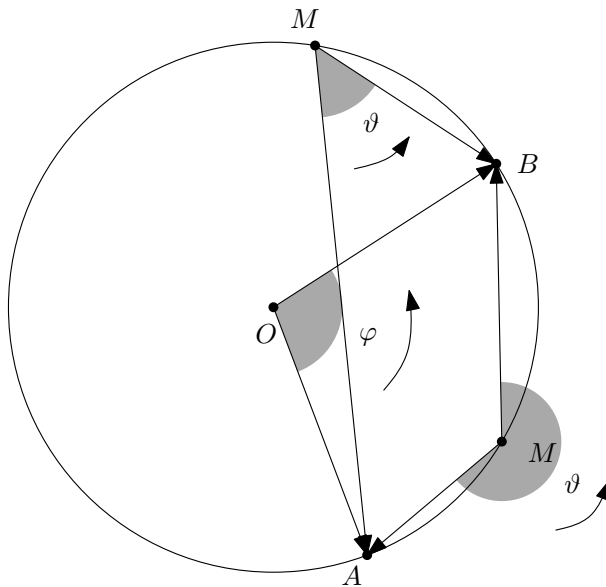
$$\langle \vec{AB}, \vec{u} \rangle = \underbrace{\langle \vec{AH}, \vec{u} \rangle}_{=\pm \|\vec{AH}\| \times \|\vec{u}\|} + \underbrace{\langle \vec{HB}, \vec{u} \rangle}_{=0},$$

et, de même,

$$\text{Det}(\vec{AB}, \vec{v}) = \underbrace{\text{Det}(\vec{AH}, \vec{v})}_{=\pm \|\vec{AH}\| \times \|\vec{v}\|} + \underbrace{\text{Det}(\vec{HB}, \vec{v})}_{=0}.$$

Cela suppose que l'on a démontré l'existence de  $H$ .

Figure 3.19 – Théorème de l'angle au centre



Pourquoi est-ce bien la distance ? Le théorème de Pythagore nous donne la réponse : si  $M$  est un autre point de  $\Delta$ , on a :

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{AH}\|^2 + \|\overrightarrow{HM}\|^2 \geq \|\overrightarrow{AH}\|^2.$$

2. *Analytique* : soit  $M = B + t \cdot \vec{v}$ , un point quelconque de la droite  $\Delta$  ( $t \in \mathbb{R}$ ), calculons, en écrivant  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$  :

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2t \times \langle \overrightarrow{AB}, \vec{v} \rangle + t^2 \times \|\vec{v}\|^2,$$

cette expression sera minimale lorsque la dérivée en  $t$  sera nulle, soit pour

$$t_0 = -\frac{\langle \overrightarrow{AB}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2},$$

en ce cas, la distance cherchée est :

$$d(A, \Delta) = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2 \times t_0 \times \langle \overrightarrow{AB}, \vec{v} \rangle + t_0^2 \times \|\vec{v}\|^2,$$

il reste à utiliser la formule de Lagrange reliant la valeur absolue du Det aux normes des vecteurs.

#### Remarque 3.26

Si la droite est donnée par son équation  $u \times x + v \times y + w = 0$ , et que  $A = (a_1, a_2)$ , alors

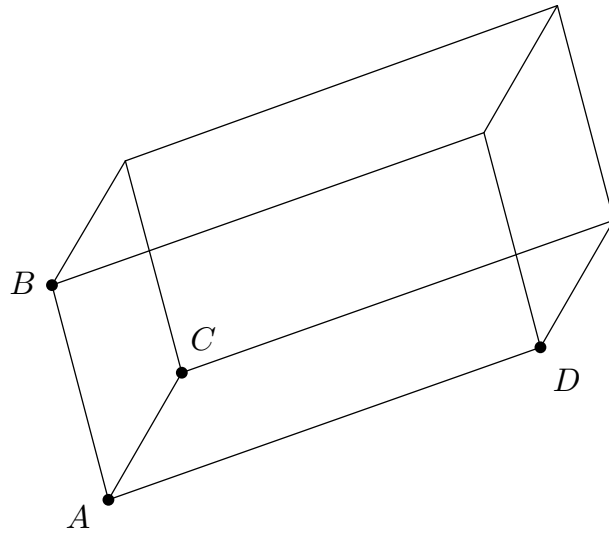
$$d(A, \Delta) = \frac{|u \times a_1 + v \times a_2 + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

#### Propriété 3.7 – Distance d'un point $A$ à un plan $\Pi$ de l'espace

Si le plan  $\Pi$  est défini par la donnée d'un point  $B$  et d'un vecteur normal  $\vec{u}$ , alors

$$d(A, \Pi) = \frac{|\langle \overrightarrow{AB}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{u}\|}.$$

Figure 3.20 – Un parallélépipède



Démonstration de la propriété 3.7, page précédente

Comme précédemment, on écrit  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$ , puis

$$\langle \overrightarrow{AB}, \vec{u} \rangle = \langle \overrightarrow{AH}, \vec{u} \rangle + \underbrace{\langle \overrightarrow{HB}, \vec{u} \rangle}_{=0},$$

d'où

$$|\langle \overrightarrow{AB}, \vec{u} \rangle| = \|\overrightarrow{AH}\| \times \|\vec{u}\|.$$

Pourquoi est-ce bien la distance ? Le théorème de Pythagore nous donne la réponse : si  $M$  est un autre point de  $\Pi$ , on a :

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{AH}\|^2 + \|\overrightarrow{HM}\|^2 \geq \|\overrightarrow{AH}\|^2.$$

Remarque 3.27

Si  $\Pi$  a pour équation  $u \times x + v \times y + w \times z + h = 0$  et si  $A = (a, b, c)$ , alors

$$d(A, \Pi) = \frac{|u \times a + v \times b + w \times c + h|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

Propriété 3.8 – Distance d'un point  $A$  à une droite  $\Delta$  de l'espace

Si la droite est définie par la donnée d'un point  $B$  et d'un vecteur directeur  $\vec{u}$ , alors

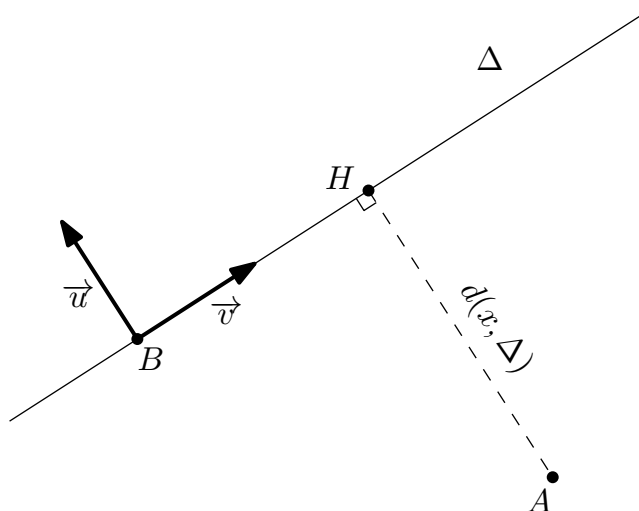
$$d(A, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Démonstration de la propriété 3.8, de la présente page

On construit le plan passant par  $A$  de vecteur normal  $\vec{u}$  (son équation est  $\langle \overrightarrow{AM}, \vec{u} \rangle = 0$ ), et soit  $H$  le point d'intersection entre  $\Delta$  et ce plan, on a alors  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$ , d'où

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} + \underbrace{\overrightarrow{HB} \wedge \vec{u}}_{=0},$$

Figure 3.21 – Distance d'un point à une droite



Distance d'un point à une droite du plan

soit, en prenant les normes :

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{AH}\| \times \|\vec{u}\|,$$

car les vecteurs  $\overrightarrow{AH}$  et  $\vec{u}$  sont orthogonaux par construction de  $H$ .

Pourquoi est-ce bien la distance ? Le théorème de Pythagore nous donne la réponse : si  $M$  est un autre point de  $\Delta$ , on a :

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{AH}\|^2 + \|\overrightarrow{HM}\|^2 \geq \|\overrightarrow{AH}\|^2.$$

### 3.3.3.2 Compléments : distance entre deux droites

On peut de manière générale définir la distance entre deux parties  $E_1$  et  $E_2$  non vides d'un espace affine (ou d'un espace muni d'une distance  $d$ ), par <sup>1</sup>

$$d(E_1, E_2) \stackrel{\text{Def}}{=} \inf_{x_1 \in E_1} d(x_1, E_2) = \inf_{x_2 \in E_2} d(x_2, E_1) = \inf_{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2} d(x_1, x_2).$$

#### Proposition 3.2

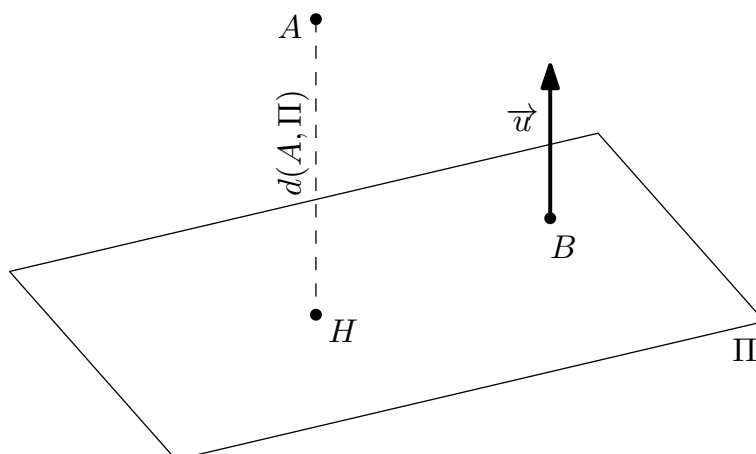
Soit une droite  $\Delta_1$  définie par la donnée d'un point  $A_1$  et d'un vecteur directeur  $\vec{u}_1$  et une droite  $\Delta_2$  définie par la donnée d'un point  $A_2$  et d'un vecteur  $\vec{u}_2$  où  $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \neq \vec{0}$ , alors

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\langle \overrightarrow{A_1 A_2}, (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \rangle|}{\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|}.$$

#### Démonstration

1. Comme la situation géométrique semble compliquée, nous allons prendre deux points quelconques  $A_1$  et  $A_2$  sur  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , calculer leur distance et minimiser celle-ci. Le calcul peut se faire en **Wxmaxima** (voir la session 3.7, page suivante).

Figure 3.22 – Distance d'un point à un plan



Distance d'un point à un plan

2. Cette démonstration n'est pas très convaincante. Regardons où se trouvent les points qui réalisent la distance entre les deux droites (appelons  $H_1$  et  $H_2$  ces points respectivement sur  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ ).

On obtient donc que :

- (a) La droite passant par  $H_1$  et  $H_2$  est dirigée par  $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ , donc elle se trouve à la fois dans plan  $\Pi_1$  défini par  $A_1$  et les vecteurs  $(\vec{u}_1, \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)$  et dans le plan  $\Pi_2$  défini par  $A_2$  et les vecteurs  $(\vec{u}_2, \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)$ .  
 (b) Finalement,

$$\{H_1\} = \Delta_1 \cap \Pi_2 \text{ et } \{H_2\} = \Delta_2 \cap \Pi_1.$$

Pour calculer la  $d(H_1, H_2)$  :

$$\overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{A_1 H_1} + \overrightarrow{H_1 H_2} + \overrightarrow{H_2 A_2},$$

en faisant le produit scalaire avec  $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ , on obtient :

$$\left| \langle \overrightarrow{A_1 A_2}, (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \rangle \right| = \underbrace{\left| \langle \overrightarrow{H_1 H_2}, (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \rangle \right|}_{= \|\overrightarrow{H_1 H_2}\| \times \|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|}.$$

Il reste à montrer que c'est bien le minimum de distance. Si  $B_1$  et  $B_2$  sont des points de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , alors

$$\overrightarrow{B_1 B_2} = \overrightarrow{B_1 H_1} + \overrightarrow{H_1 H_2} + \overrightarrow{H_2 B_2},$$

soit en calculant la norme au carré, et en tenant compte que  $\overrightarrow{H_1 H_2}$  est orthogonal à  $\overrightarrow{B_1 H_1}$  et  $\overrightarrow{H_2 B_2}$ , on obtient, grâce au théorème de Pythagore :

$$\|\overrightarrow{B_1 B_2}\|^2 = \|\overrightarrow{B_1 H_1} + \overrightarrow{H_2 B_2}\|^2 + \|\overrightarrow{H_1 H_2}\|^2 \geq \|\overrightarrow{H_1 H_2}\|^2.$$

Voir la figure 3.24, page 100.

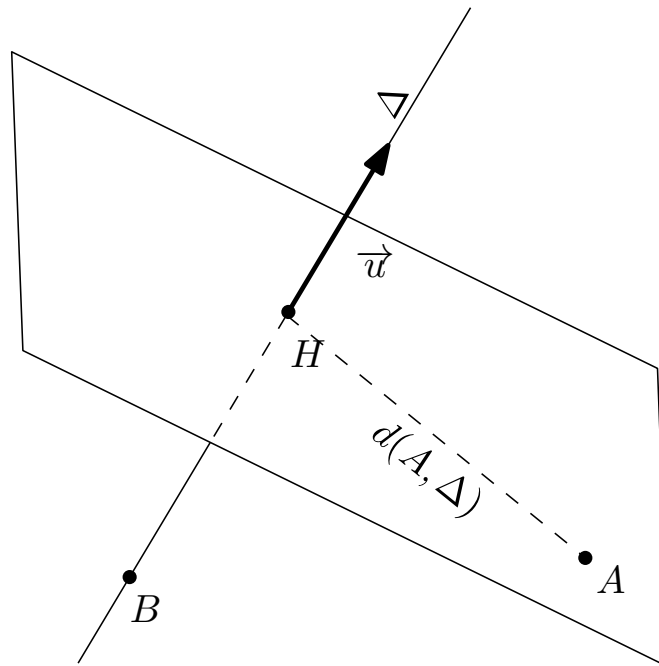
#### Session Wxmaxima 3.7 – Distance entre deux droites

Introduisons d'abord les deux droites.

```
(%i1) A[1] : [x[1],y[1],z[1]]$
      A[2] : [x[2],y[2],z[2]]$
      U[1] : [u[1],v[1],w[1]]$
      U[2] : [u[2],v[2],w[2]]$
```

Minimiser la distance ou la distance au carré, c'est la même chose !

Figure 3.23 – Distance d'un point à une droite de l'espace



*Distance d'un point à une droite de l'espace*

```
(%i5) d2 : (A[1]+t[1]*U[1]-A[2]-t[2]*U[2]).
        (A[1]+t[1]*U[1]-A[2]-t[2]*U[2])$
(%i6) diff(d2,t[1]);
(%o6) 2 w_1 (-z_2 - t_2 w_2 + z_1 + t_1 w_1) + 2 v_1 (-y_2 - t_2 v_2 + y_1 + t_1 v_1) + 2 u_1 (-x_2 - t_2 u_2 + x_1 + t_1 u_1)
(%i7) t1 : solve(%,t[1]);
(%o7) [t_1 = \frac{w_1 z_2 + v_1 y_2 + u_1 x_2 + w_1 t_2 w_2 + v_1 t_2 v_2 + u_1 t_2 u_2 - w_1 z_1 - v_1 y_1 - u_1 x_1}{w_1^2 + v_1^2 + u_1^2}]
(%i8) d2min : subst(t1,d2)$
(%i9) diff(d2min,t[2])$
(%i10) t2 : solve(%,t[2])$
(%i11) res : subst(t2,d2min)$
```

Je ne l'écris pas, car c'est trop horrible!

```
(%i12) load(vect)$
(%i13) ratsimp(res - ((A[2]-A[1]).express(U[1]~U[2]))^2/
        (express((U[1]~U[2]).(U[1]~U[2]))));
```

```
(%o13) 0
```

Cherchons à calculer les points  $H_1$  et  $H_2$ .



```
(%i14) H[1] : subst(t2,subst(t1,A[1]+t[1]*U[1]))$
      H[2] : subst(t2,A[2]+t[2]*U[2])$
```

Il reste à vérifier que  $\overrightarrow{H_1H_2}$  est orthogonal à  $\vec{u}_1$  et à  $\vec{u}_2$ .

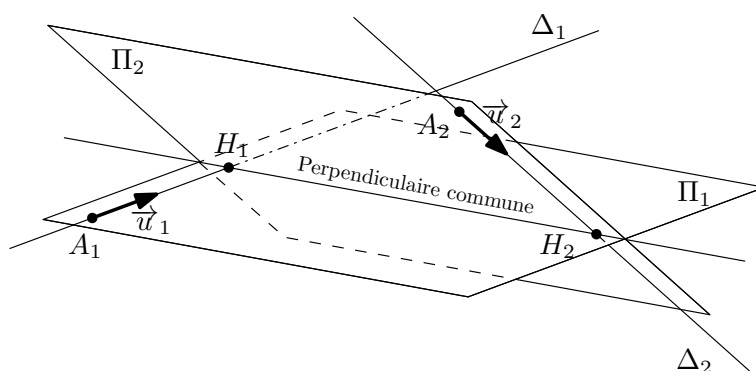
```
(%i16) ratsimp((H[2]-H[1]).U[1]);
```

```
(%o16) 0
```

```
(%i17) ratsimp((H[2]-H[1]).U[2]);
```

```
(%o17) 0
```

Figure 3.24 – Perpendiculaire commune



*Perpendiculaire commune à deux droites de l'espace*

#### Remarque 3.28

Plusieurs cas particuliers peuvent se produire entre deux droites de l'espace :

1. Si les deux droites se coupent, on dit qu'elles sont *concourantes*. En ce cas,  $\overrightarrow{A_1A_2}$ ,  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont dans un même plan. La distance est alors clairement nulle.
2. Si  $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = 0$  (chaque vecteur étant non nul), les droites ont même direction ; on dit qu'elles sont *parallèles*. La distance se calcule alors facilement à l'aide du schéma 3.25, page suivante.

#### Définition 3.11 – Perpendiculaire commune à deux droites

Soit  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux droites de l'espace non parallèles. On appelle *perpendiculaire commune* à ces deux droites, la droite passant par les points  $H_1$  et  $H_2$ , c'est l'unique droite coupant  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  et dirigée par  $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ .

On peut avoir son équation cartésienne avec les formules :

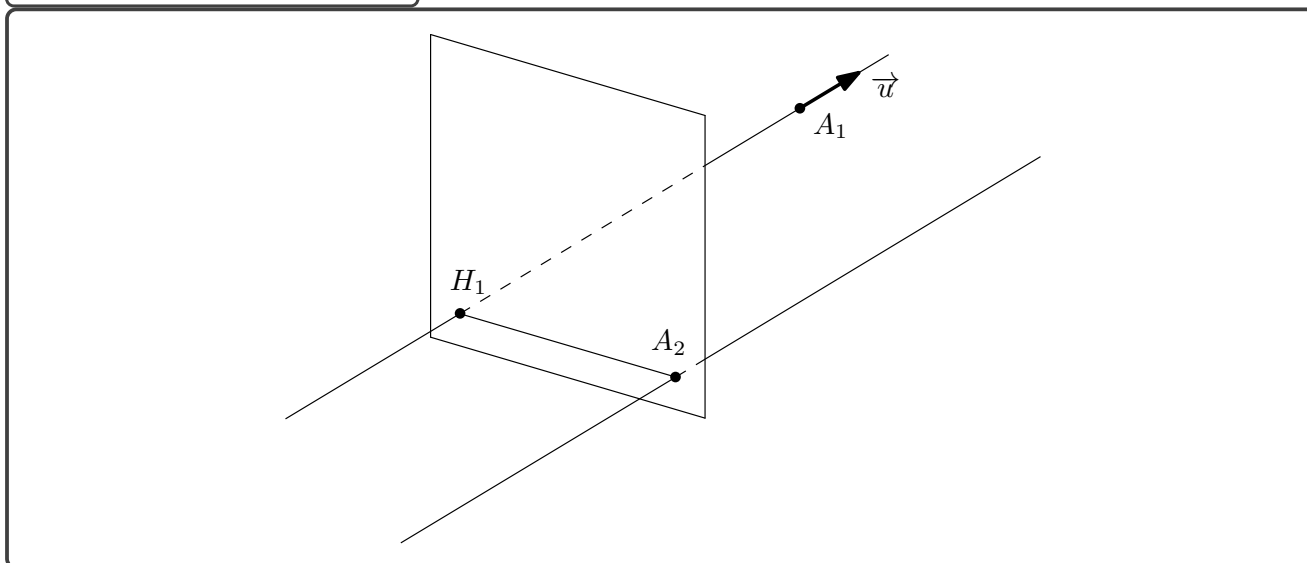
$$\langle \overrightarrow{A_1M}, \vec{u}_1 \wedge (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \rangle = 0 \text{ et } \langle \overrightarrow{A_2M}, \vec{u}_2 \wedge (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \rangle = 0.$$

#### Exercice(s) 3.6

Dans le plan affine  $\mathbb{R}^2$

3.6.1 Dans le plan, quel est le lieu des points à égale distance de deux points distincts (*médiatrice*) ?

Figure 3.25 – Droites parallèles



- 3.6.2 Montrer que les médiatrices d'un triangle du plan se coupent et que le point d'intersection obtenu est le centre d'un cercle passant par les trois sommets (*cercle circonscrit*). Voir la figure 3.26, page suivante.
- 3.6.3 Montrer que les hauteurs (droite passant par un sommet et orthogonale au côté opposé) d'un triangle se coupent en un point (*orthocentre*). Voir la figure 3.27, page 103.
- 3.6.4 Dans le plan, quel est le lieu des points à égale distance de deux droites non parallèles ?
- 3.6.5 Montrer que les bissectrices d'un triangle se coupent et que le point d'intersection obtenu est le centre d'un cercle tangent aux côtés (*cercle inscrit*). Voir la figure 3.28, page 104.
- 3.6.6 Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$ , et  $A, B$  deux points distincts de  $\mathcal{C}$ . Soit  $\Delta$  le diamètre parallèle à  $(AB)$ . Pour  $M \in \mathcal{C}$ , on note  $P, Q$  les intersections de  $(MA)$  et  $(MB)$  avec  $\Delta$ . Chercher le lieu du centre du cercle circonscrit à  $MPQ$ . Voir la figure 3.29, page 104.
- 3.6.7 Soit  $A, B, C$  trois points du plan tels que  $(AB) \perp (BC)$ . Déterminer le lieu des points  $M$  tels que les cercles circonscrits aux triangles  $ABM$  et  $BCM$  aient même rayon.
- 3.6.8 Soit  $ABC$  un triangle du plan et  $H$  son orthocentre. Montrer que le symétrique de  $H$  par rapport à l'un des côtés du triangle est sur le cercle circonscrit au triangle. Voir la figure 3.30, page 105.
- 3.6.9 Deux cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  de centre  $A$  et  $A'$  se coupent en  $B$  et  $B'$ . Une droite variable passant par  $B$  recoupe  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  en  $M$  et  $M'$ . Quel est le lieu du centre du cercle circonscrit à  $B'MM'$  ? Voir la figure 3.31, page 106.

Dans l'espace affine  $\mathbb{R}^3$

- 3.6.10 Montrer que deux cercles de l'espace non coplanaires ayant deux points communs sont contenus dans une unique sphère. Voir la figure 3.32, page 107.
- 3.6.11 Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux plans de l'espace non parallèles. Déterminer l'ensemble des points à égale distance de  $P_1$  et  $P_2$ .
- 3.6.12 Calculer la distance entre deux droites parallèles en utilisant le dessin de la remarque ci-dessus.
- 3.6.13 Soit  $S$  la sphère de centre  $A(1, 1, 1)$  de rayon 2 et  $S'$  la sphère de centre  $B(0, 1, 0)$  de rayon 3. Montrer que  $S \cap S'$  est un cercle, déterminer son plan, son centre et son rayon.
- 3.6.14 Déterminer la perpendiculaire commune à

$$D : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } D_2 : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

3.6.15 Soient  $A, B, C$  trois points de l'espace. Déterminer le lieu des points  $M$  vérifiant

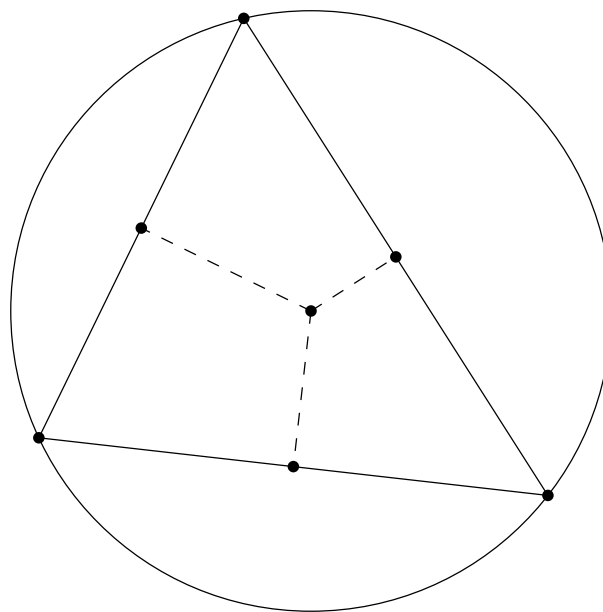
$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}.$$

3.6.16 Soit  $\mathcal{D}$  une droite de l'espace et  $A$  un point. Donner une CNS pour qu'il existe un plan  $\mathcal{P}$  contenant  $\mathcal{D}$  tel que  $d(A, \mathcal{P}) = 1$ .

3.6.17 Déterminer les sphères contenant les cercles

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases} \quad \mathcal{C}' : \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 2. \end{cases}$$

Figure 3.26 – Cercle circonscrit



Cercle circonscrit

### 3.3.4 Retour sur les angles

#### Définition 3.12

1. Dans le plan :

— Angle entre deux droites  $(A_1; \vec{u}_1)$  et  $(A_2; \vec{u}_2)$ , les vecteurs étant donnés à proportionnalité près, et donc au signe près. La mesure de l'angle sera :

$$\vartheta = \arccos \left( \frac{|\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle|}{\|\vec{u}_1\| \times \|\vec{u}_2\|} \right) \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right].$$

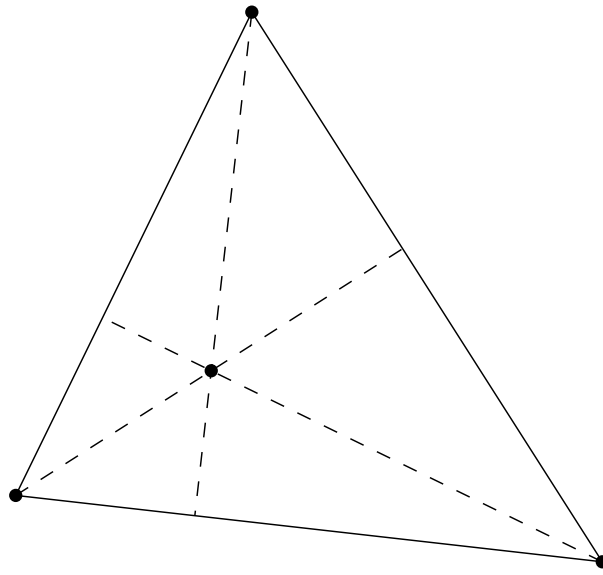
Voir la figure 3.33, page 108.

— Angle orienté entre deux droites orientées La mesure de l'angle sera celle de l'angle entre les deux vecteurs directeurs.

2. Dans l'espace :

— Angle entre deux plans  $\langle \overrightarrow{A_1M}, \vec{u}_1 \rangle = 0$  et  $\langle \overrightarrow{A_2M}, \vec{u}_2 \rangle = 0$ , les vecteurs étant donnés à propor-

Figure 3.27 – Orthocentre



*Orthocentre*

tionnalité près, et donc au signe près. La mesure de l'angle sera :

$$\vartheta = \arccos \left( \frac{|\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle|}{\|\vec{u}_1\| \times \|\vec{u}_2\|} \right) \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right].$$

Voir la figure 3.34, page 109.

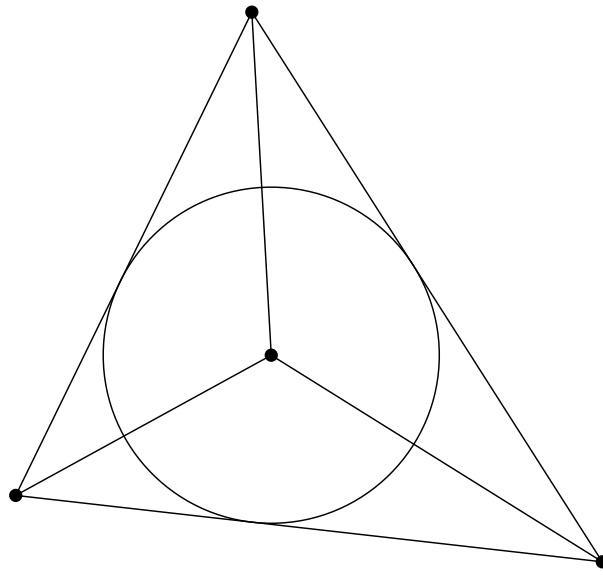
- *Angle entre un plan et une droite qui se coupent* Le plan est donné par son équation  $\langle \overrightarrow{A_1 M}, \vec{u}_1 \rangle = 0$  et la droite par  $(A_2; \vec{u}_2)$ , les vecteurs étant donnés à proportionnalité près, et donc au signe près. La mesure de l'angle sera :

$$\vartheta = \arcsin \left( \frac{|\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle|}{\|\vec{u}_1\| \times \|\vec{u}_2\|} \right) \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right].$$

Voir la figure 3.35, page 109.

## 3.4 Barycentres

Figure 3.28 – Cercle inscrit



*Cercle inscrit*

### Définition 3.13 – Barycentre

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine réel,  $A_1, \dots, A_n$  des points de  $\mathcal{E}$ ,  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ , tels que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 0$ . Alors il existe un unique point  $G$  de  $\mathcal{E}$ , tel que :

$$\forall M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{GM} = \frac{1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \left( \lambda_1 \cdot \overrightarrow{A_1 M} + \dots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{A_n M} \right).$$

Ce point s'appelle *barycentre (du système pondéré/de)*  $((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n))$ .

Nous le noterons  $\text{Bar}((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n))$ .

Lorsque tous les  $\lambda_k$  ( $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ) sont égaux, on dit que  $G$  est un *isobarycentre du système*.

Figure 3.29 – Lieu des centres d'un cercle circonscrit

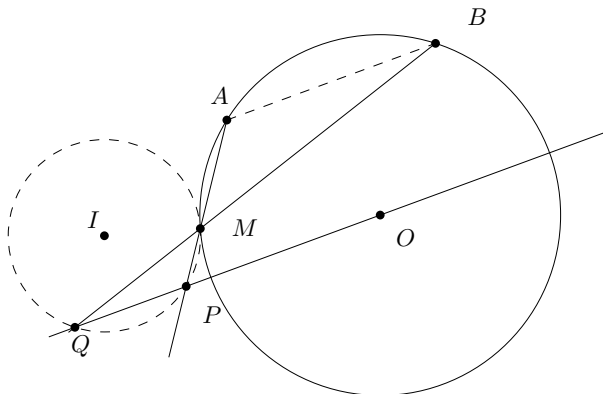
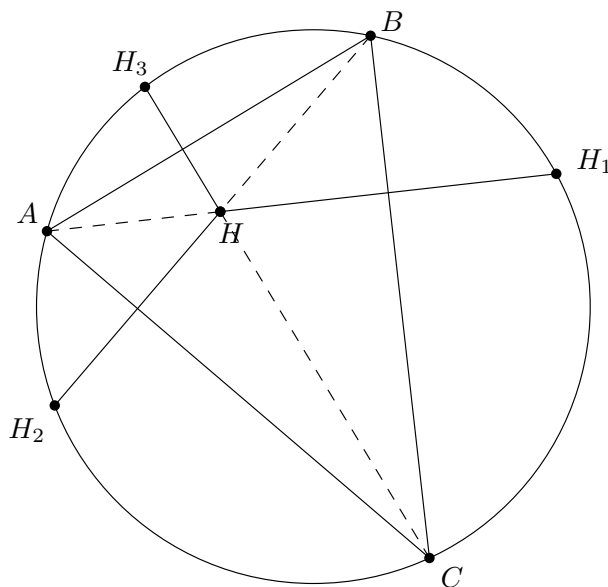


Figure 3.30 – Orthocentres alignés



#### Démonstration

Pour que cette définition soit valide, il faut montrer que  $G$  ne dépend pas du choix de  $M$ . Si  $P$  est un autre point de  $\mathcal{E}$ , on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GP} &= \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MP} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \overrightarrow{A_k M} \right) + \overrightarrow{MP} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} \left( \sum_{k=1}^n \left( \lambda_k \cdot \overrightarrow{A_k M} + \lambda_k \cdot \overrightarrow{MP} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \overrightarrow{A_k P} \right).\end{aligned}$$

#### Remarque 3.29

On a déjà vu cette notion :

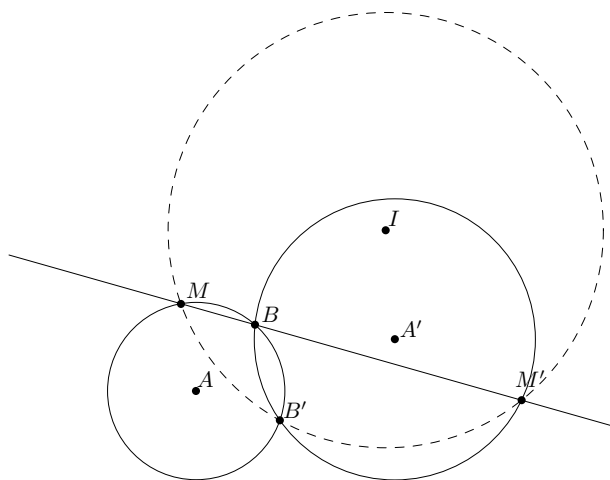
1. Milieu de deux points = isobarycentre de ces deux points.
2. Centre de gravité d'un triangle = isobarycentre des sommets.
3. En physique, si un système est constitué de masses pesantes  $(m_k)$  situées en des points  $A_k$ , alors le barycentre de  $((A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n))$  est le centre de gravité du système.

#### Propriété 3.9

1. *Commutativité* : l'ordre des points pondérés  $(A_k, \lambda_k)$  n'intervient pas dans la définition de  $G$ .
2. *Homogénéité* : on peut changer  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  en  $(\mu \times \lambda_1, \dots, \mu \times \lambda_n)$ , quel que soit  $\mu \neq 0$ , cela ne change pas le barycentre.
3. *Associativité* : Si  $((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n))$  est un système pondéré où  $\sum_{k=1}^n \lambda_k \neq 0$ , et si  $p \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$  tel que  $\sum_{k=1}^p \lambda_k \neq 0$  et  $\sum_{k=p+1}^n \lambda_k \neq 0$ , alors

$$\text{Bar}((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n)) =$$

Figure 3.31 – Deux cercles



$$\text{Bar} \left( \left( \text{Bar}((A_1, \lambda_1), \dots, (A_p, \lambda_p)), \sum_{k=1}^p \lambda_k \right), \left( \text{Bar}((A_{p+1}, \lambda_{p+1}), \dots, (A_n, \lambda_n)), \sum_{k=p+1}^n \lambda_k \right) \right).$$

Plus clairement, à condition de ne pas faire apparaître des sommes de coefficients nulles, on peut, tout en conservant le barycentre global, faire des barycentres de sous-systèmes pondérés disjoints, puis faire le barycentre des barycentres des sous-systèmes, en les affectant du poids de chacun.

### Exemple 3.1

Soit  $((A_1, 3), (A_2, 5), (A_3, -2))$  un système pondéré, son barycentre  $G$  vérifie :

$$\forall M, \overrightarrow{GM} = \frac{1}{6} \left( 3 \cdot \overrightarrow{A_1M} + 5 \cdot \overrightarrow{A_2M} - 2 \cdot \overrightarrow{A_3M} \right).$$

Regroupons les deux premiers points pondérés, ils ont un barycentre  $G_1$  défini par

$$\forall M, \overrightarrow{G_1M} = \frac{1}{8} \left( 3 \cdot \overrightarrow{A_1M} + 5 \cdot \overrightarrow{A_2M} \right),$$

alors, affectons  $G_1$  du poids  $8(=3+5)$ , on obtient :

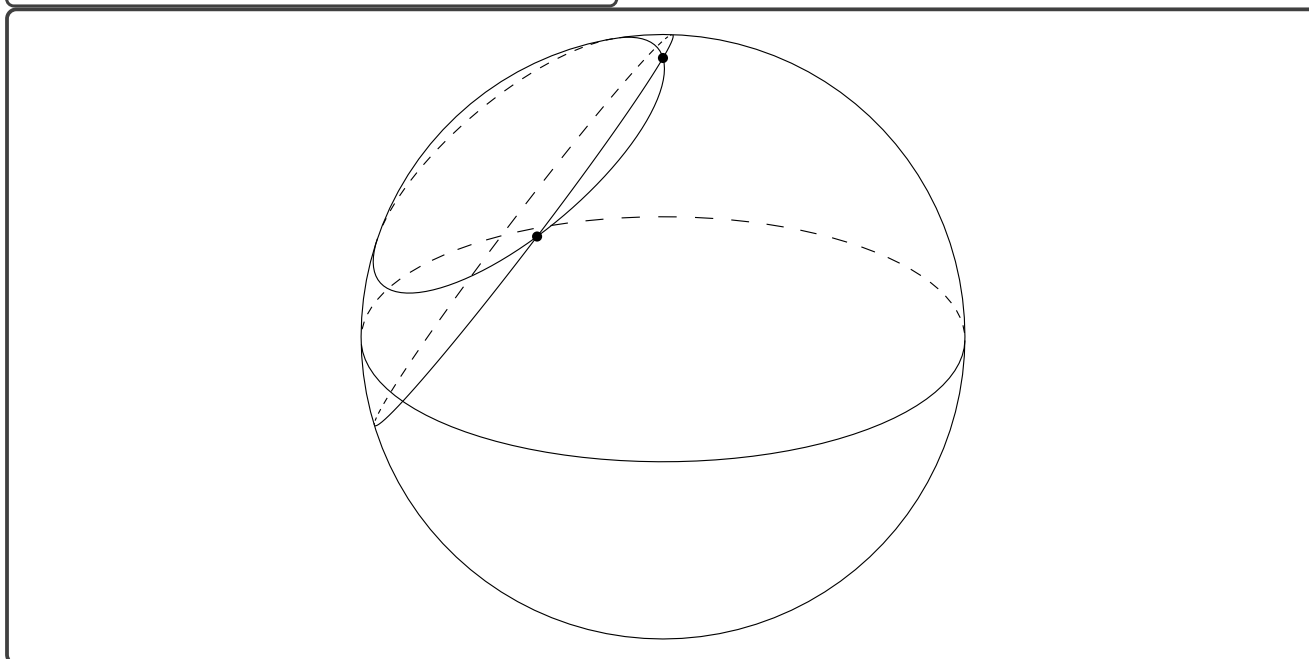
$$\forall M, \overrightarrow{GM} = \frac{1}{6} \left( 8 \cdot \overrightarrow{G_1M} - 2 \cdot \overrightarrow{A_3M} \right).$$

### Exercice(s) 3.7

Dans le plan affine  $\mathbb{R}^2$

- 3.7.1 Montrer que les médianes (droite reliant un sommet d'un triangle au milieu du côté opposé) d'un triangle se coupent un point  $G$  (*centre de gravité*) et que celui-ci se trouve au tiers de la longueur de la médiane. Voir la figure 3.36, page 110.
- 3.7.2 Montrer que si le triangle  $ABC$  a son centre de gravité et le centre de son cercle circonscrit confondus alors il est équilatéral (ses trois côtés ont même longueur).
- 3.7.3 Soit  $ABC$  un triangle non plat du plan affine. Une droite coupe  $(AB)$ ,  $(BC)$  et  $(CA)$  en  $R, P, Q$

Figure 3.32 – Deux cercles sur une même sphère



respectivement. On définit  $I, J, K$  par

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR} \quad \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{BP} \quad \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}$$

- (a) Exprimer  $R, P, Q$  comme barycentres de  $A, B, C$ .
- (b) Montrer que  $I, J, K$  sont alignés.

Voir la figure 3.37, page 111.

3.7.4 Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan. Déterminer le lieu des points  $M$  tels que les médianes du triangle  $ABM$  issues de  $A$  et  $B$  soient orthogonales.

3.7.5 Soit  $\mathcal{P}$  la parabole d'équation  $x = y^2$  (son axe est donc  $Ox$ ) et  $A, B, C, D$  quatre points distincts sur  $\mathcal{P}$ . Montrer que  $A, B, C, D$  sont cocycliques si, et seulement si, leur isobarycentre est sur l'axe de  $\mathcal{P}$ . Voir la figure 3.38, page 112.

3.7.6 *Coordonnées barycentriques* : soit trois points  $A, B$  et  $C$  du plan, non alignés :

- (a) Montrer que tout point du plan peut s'exprimer comme un barycentre des points  $A, B$  et  $C$ .
- (b) Soit  $M$  un point du plan, montrer que :

$$\exists!(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ et } M = \text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)).$$

Le triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  s'appelle les *coordonnées barycentriques de  $M$*  (dans le repère affine  $ABC$ ).

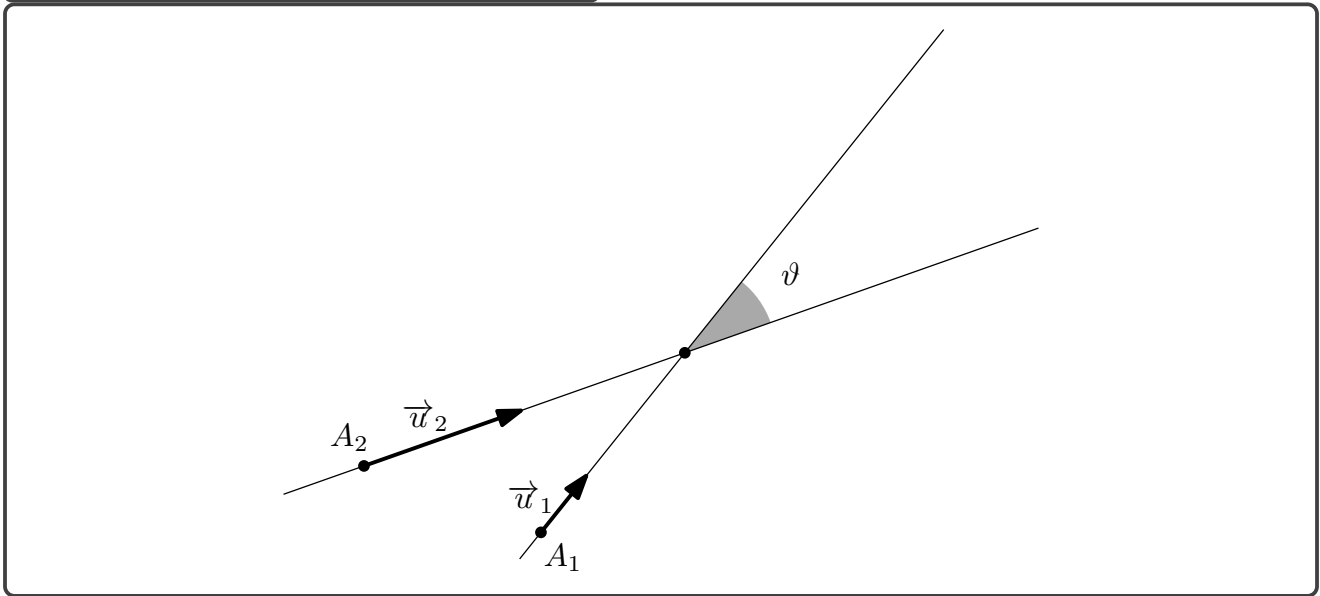
- (c) Soit  $M$  un point du plan, de coordonnées barycentriques  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Comparer ces coordonnées aux aires (mesures des surfaces) des triangles  $MBC$ ,  $MAC$  et  $MAB$ .
- (d) Calculer les coordonnées barycentriques de
  - $G$  isobarycentre de  $ABC$  ;
  - $I$  centre du cercle circonscrit de  $ABC$  ;
  - $H$  orthocentre de  $ABC$ .
- (e) En déduire que  $G, H$  et  $I$  sont alignés.

Dans l'espace affine  $\mathbb{R}^3$

3.7.7 Une bimédiane d'un tétraèdre est une droite qui passe par les milieux de deux arêtes opposées. Montrer que les trois bimédianes sont concourantes. Voir la figure 3.39, page 113.



Figure 3.33 – Angle entre deux droites du plan



## 3.5 Quelques applications particulières

### 3.5.1 Translation

#### Définition 3.14 – Translation

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine de direction  $E$  (un espace vectoriel), soit  $\vec{u} \in E$ , on appelle *translation de vecteur*  $\vec{u}$ , l'application

$$\tau_{\vec{u}} : \begin{cases} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \\ M \mapsto M + \vec{u}. \end{cases}$$

Voir la figure 3.40, page 114.

### 3.5.2 Homothétie

#### Définition 3.15 – Homothétie

1. Soit  $E$  un espace vectoriel réel,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , on appelle *homothétie de rapport*  $\lambda$  l'application :

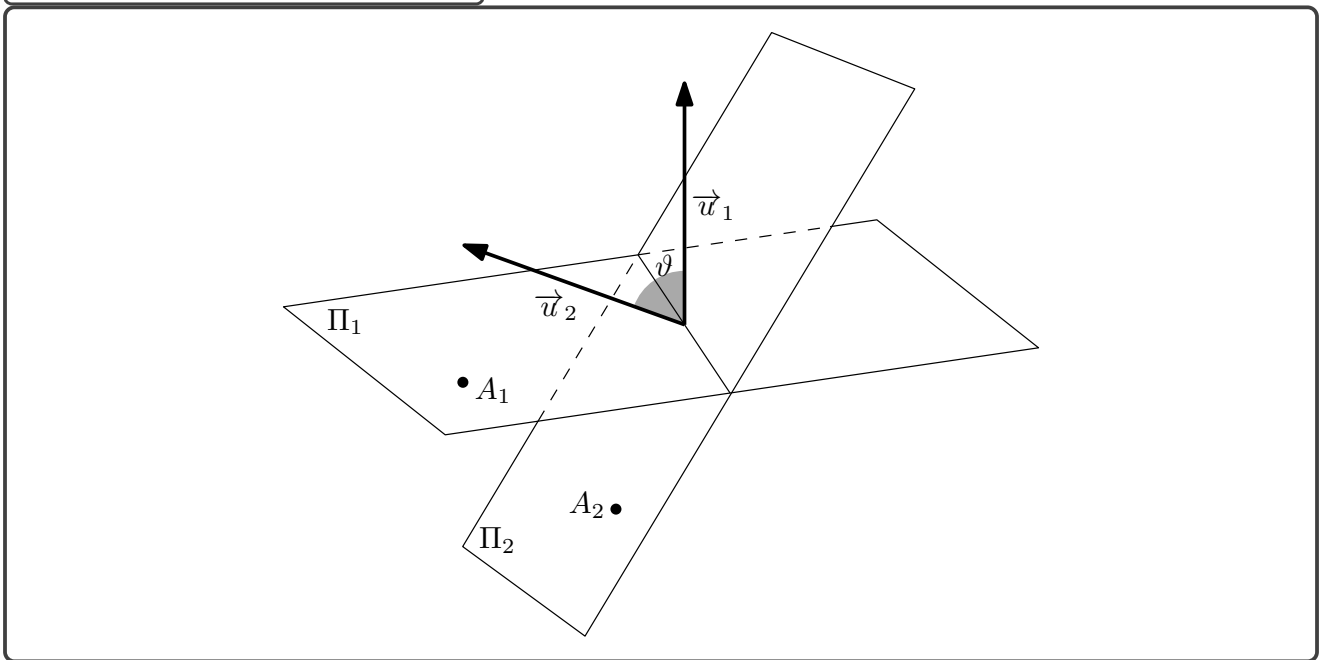
$$h_{\lambda} : \begin{cases} E \rightarrow E \\ \vec{x} \mapsto \lambda. \vec{x} \end{cases}$$

2. Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine réel de direction  $E$ , soit  $\Omega \in \mathcal{E}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , on appelle *homothétie de centre*  $\Omega$  et de rapport  $\lambda$  l'application :

$$h_{\Omega, \lambda} : \begin{cases} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \\ M \mapsto \Omega + \lambda. \overrightarrow{\Omega M} \end{cases}$$

Voir la figure 3.41, page 114.

Figure 3.34 – Angle entre deux plans



### 3.5.3 Projection orthogonale

Définition 3.16 – Projection orthogonale

1. Dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) muni de son produit scalaire canonique, soit  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ , on appelle *projection orthogonale sur la droite  $\vec{\Delta}$  engendrée par  $\vec{u}$*  l'application

$$p_{\vec{\Delta}} : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{x} \mapsto \frac{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} \end{cases}$$

2. Dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) espace affine de direction  $\mathbb{R}^n$  muni de son produit scalaire canonique, soit  $\Delta$  une droite définie par un point  $A$  et un vecteur directeur  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , on appelle *projection orthogonale sur*

Figure 3.35 – Angle entre une droite et un plan de l'espace

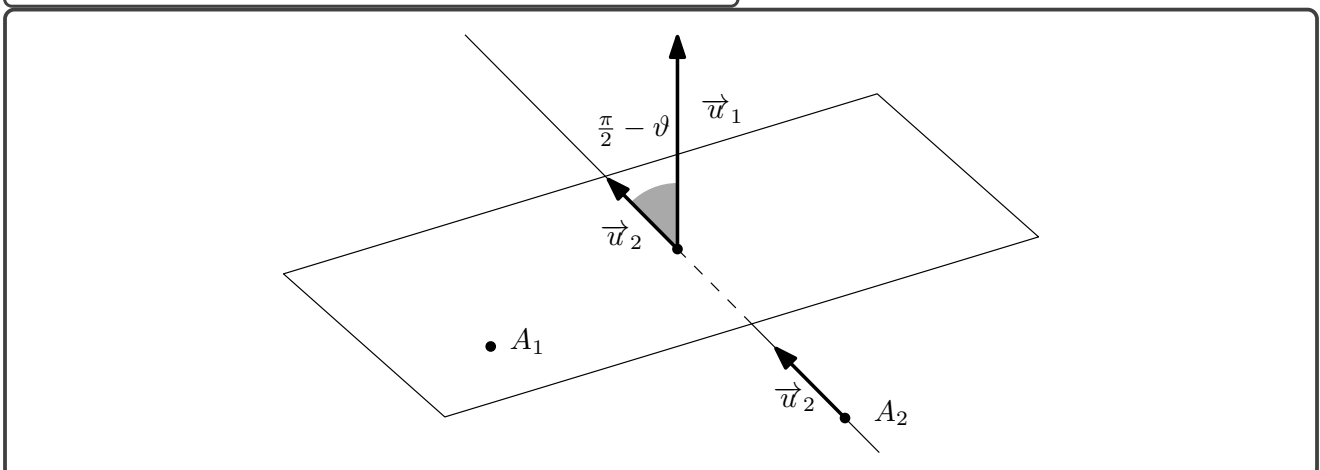
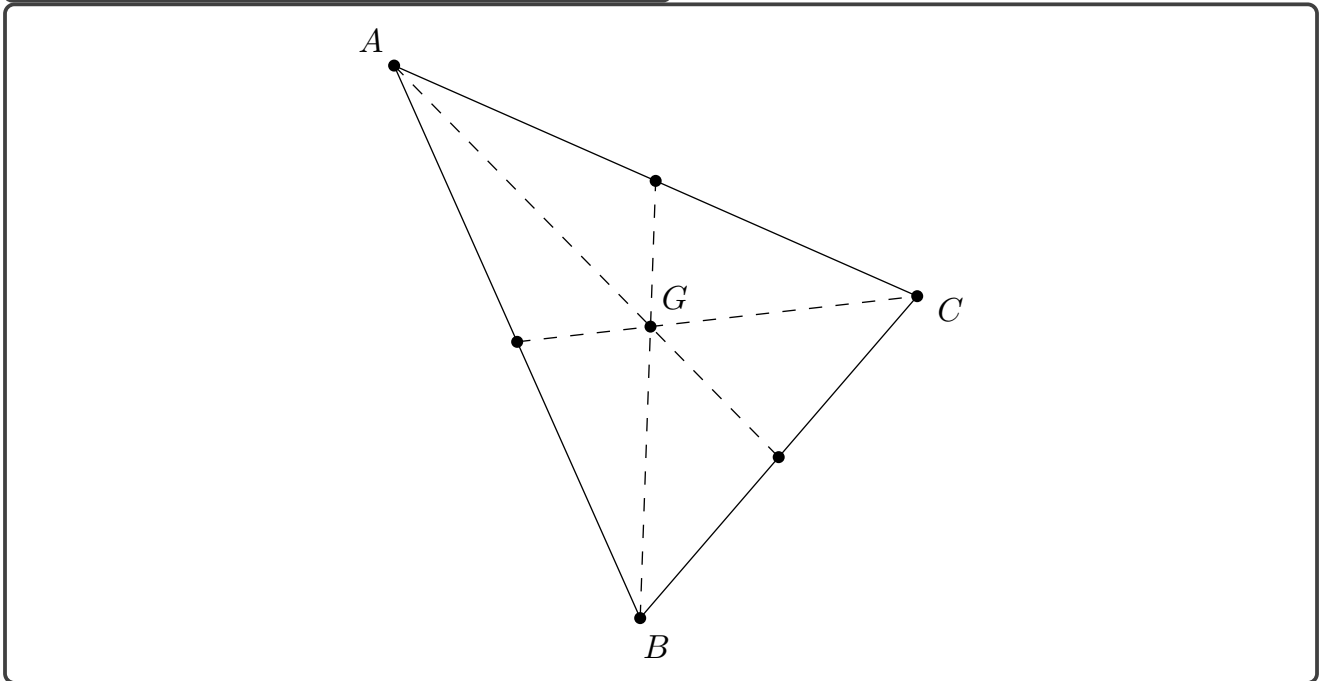


Figure 3.36 – Intersection des médianes d'un triangle



la droite  $\Delta$  l'application

$$p_{\Delta} : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ M \mapsto A + \frac{\langle \vec{u}, \overrightarrow{AM} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} \end{cases}$$

Voir la figure 3.42, page 115.

3. Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire canonique, soit  $\vec{u} \neq \vec{0}$  un vecteur définissant un plan  $\vec{\Pi}$  d'équation  $\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle = 0$ , on appelle *projection orthogonale sur le plan  $\vec{\Pi}$*  l'application

$$p_{\vec{\Pi}} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} \mapsto \vec{x} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} \end{cases}$$

4. Dans  $\mathbb{R}^3$  espace affine de direction  $\mathbb{R}^3$ , soit un plan  $\Pi$  défini par un point  $A$  et un vecteur normal (non nul)  $\vec{u}$ , on appelle *projection orthogonale sur le plan  $\Pi$*  l'application

$$p_{\Pi} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ M \mapsto M - \frac{\langle \vec{u}, \overrightarrow{AM} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} \end{cases}$$

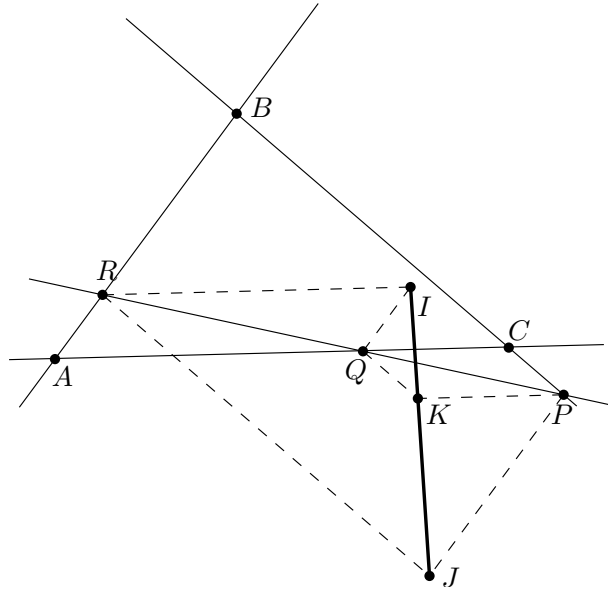
Voir la figure 3.43, page 115.

### 3.5.4 Symétrie orthogonale

À chaque fois que l'on a une projection  $p$  dans un espace vectoriel, on a en même temps une symétrie orthogonale  $s$ , avec la relation :

$$s = 2.p - Id$$

Figure 3.37 – Droite d'Euler



Définition 3.17 – Symétrie orthogonale

1. Dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) muni de son produit scalaire canonique, soit  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ , on appelle *symétrie orthogonale par rapport à la droite  $\vec{\Delta}$  engendrée par le vecteur  $\vec{u}$*  l'application

$$s_{\vec{\Delta}} : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{x} \mapsto 2 \times \frac{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} - \vec{x} \end{cases}$$

2. Dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) espace affine de direction  $\mathbb{R}^n$  muni de son produit scalaire canonique, soit  $\Delta$  une droite définie par un point  $A$  et un vecteur directeur  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , on appelle *symétrie orthogonale par rapport à la droite  $\Delta$*  l'application

$$s_{\Delta} : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ M \mapsto A + 2 \times \frac{\langle \vec{u}, \overrightarrow{AM} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} - \overrightarrow{AM} \end{cases}$$

Voir la figure 3.44, page 116.

3. Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire canonique, soit  $\vec{u} \neq \vec{0}$  un vecteur définissant un plan  $\vec{\Pi}$  d'équation  $\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle = 0$ , on appelle *symétrie orthogonale par rapport au plan  $\vec{\Pi}$*  l'application

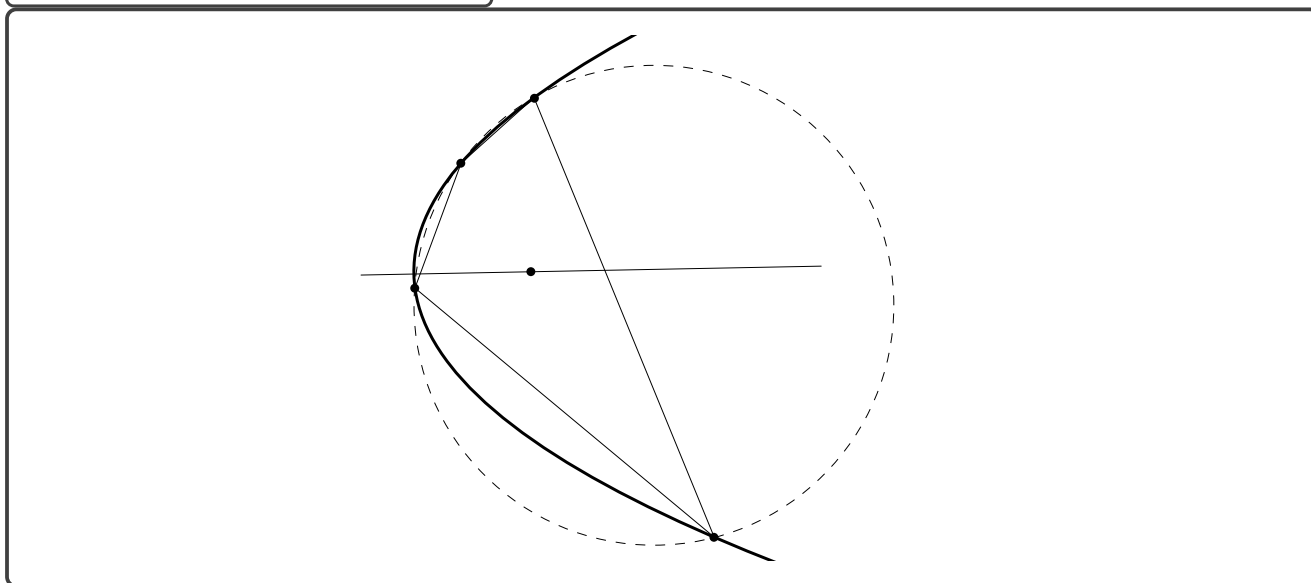
$$s_{\vec{\Pi}} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} \mapsto \vec{x} - 2 \times \frac{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} \end{cases}$$

4. Dans  $\mathbb{R}^3$  espace affine de direction  $\mathbb{R}^3$ , soit un plan  $\Pi$  défini par un point  $A$  et un vecteur normal (non nul)  $\vec{u}$ , on appelle *symétrie orthogonale par rapport au plan  $\Pi$*  l'application

$$s_{\Pi} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ M \mapsto M - 2 \times \frac{\langle \vec{u}, \overrightarrow{AM} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} \end{cases}$$

Voir la figure 3.45, page 117.

Figure 3.38 – Co-cyclicité et parabole



### 3.5.5 Rotation

#### Définition 3.18 – Rotation

1. Dans  $\mathbb{R}^2$  muni de son produit scalaire canonique, soit  $\theta \in \mathbb{R}$ , on appelle *rotation d'angle (de mesure)  $\theta$*  l'application

$$r_\theta : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} \mapsto \cos(\theta) \cdot \vec{x} + \sin(\theta) \cdot \vec{x}', \end{cases}$$

où  $\vec{x}'$  est l'unique vecteur du plan qui vérifie :

$$\|\vec{x}'\| = \|\vec{x}\|, \langle \vec{x}, \vec{x}' \rangle = 0 \text{ et } \text{Det}(\vec{x}, \vec{x}') \geq 0.$$

Voir la figure 3.46, page 118.

2. Dans  $\mathbb{R}^2$  espace affine de direction  $\mathbb{R}^2$ , soit  $A$  un point et  $\theta \in \mathbb{R}$ , on appelle *rotation de centre  $A$  et d'angle (de mesure)  $\theta$*  l'application

$$r_{A,\theta} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ M \mapsto A + \cos(\theta) \cdot \overrightarrow{AM} + \sin(\theta) \cdot \overrightarrow{AM'}, \end{cases}$$

où  $M'$  est l'unique point du plan tel que :

$$\|\overrightarrow{AM'}\| = \|\overrightarrow{AM}\|, \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'} \rangle = 0 \text{ et } \text{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \geq 0.$$

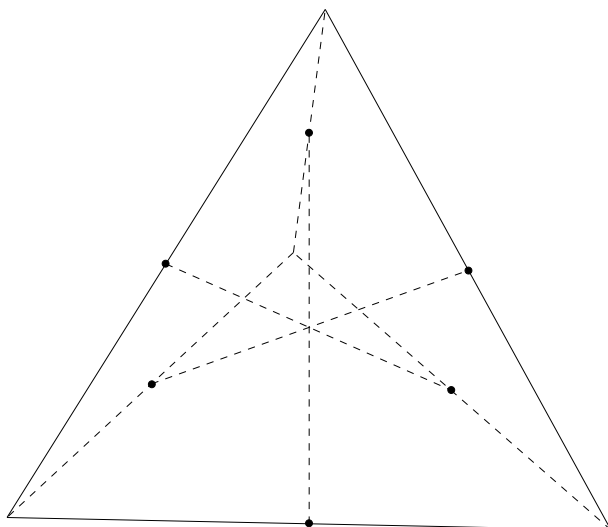
Voir la figure 3.47, page 118.

3. Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire canonique, soit  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\vec{u}$  un vecteur non nul, on appelle *rotation d'angle (de mesure)  $\theta$  et d'axe dirigé par  $\vec{u}$*  l'application

$$r_{\theta, \vec{u}} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} \mapsto \frac{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} + \cos(\theta) \cdot \left( \vec{x} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} \right) + \frac{\sin(\theta)}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} \wedge \vec{x} \end{cases}$$

Voir la figure 3.48, page 119.

Figure 3.39 – Bimédianes d'un tétraèdre



4. Dans  $\mathbb{R}^3$  espace affine de direction  $\mathbb{R}^3$ , soit  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $A$  un point de  $\mathbb{R}^3$  et  $\vec{u}$  un vecteur non nul, on appelle *rotation d'angle (de mesure)  $\theta$  et d'axe passant par  $A$  et dirigé par  $\vec{u}$*  l'application

$$r_{\theta, A, \vec{u}} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ M \mapsto A + \frac{\langle \vec{u}, \overrightarrow{AM} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} + \cos(\theta) \cdot \left( \overrightarrow{AM} - \frac{\langle \vec{u}, \overrightarrow{AM} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} \right) + \frac{\sin(\theta)}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} \end{cases}$$

Voir la figure 3.49, page 119.

#### Remarque 3.30

Donnons une interprétation de la définition d'une rotation vectorielle dans  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ . On considère  $\vec{y}$  le projeté orthogonal de  $\vec{x}$  sur le plan vectoriel  $\vec{\Pi}$  orthogonal à  $\vec{u}$ . Comme alors  $\vec{x} - \vec{y}$  est le projeté orthogonal de  $\vec{x}$  sur la droite vectorielle dirigée par  $\vec{u}$ , on a :  $\vec{x} - \vec{y} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u}$  donc  $\vec{y} = \vec{x} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u}$ . Notons  $r_\theta(\vec{y})$  l'image de  $\vec{y}$  par  $r_\theta$ , rotation vectorielle plane d'angle  $\theta$  dans le plan vectoriel  $\vec{\Pi}$  (orienté par  $\vec{u}$ ). Remarquons que  $\vec{y}' = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} \wedge \vec{y}$ . Alors  $r_\theta(\vec{y}) = \cos(\theta) \cdot \vec{y} + \sin(\theta) \cdot \vec{y}'$ . On définit  $r_{\theta, \vec{u}}(\vec{x})$  par :  $r_{\theta, \vec{u}}(\vec{x}) = (\vec{x} - \vec{y}) + r_\theta(\vec{y})$ . Après calculs, on retrouve la formule annoncée.

#### Exercice(s) 3.8

Dans le plan affine  $\mathbb{R}^2$

- 3.8.1 Soit  $h_{A, \lambda}$  et  $h_{B, \mu}$  deux homothéties, CNS pour que la composée  $h_{A, \lambda} \circ h_{B, \mu}$  soit une homothétie ? Quel est, en ce cas, son centre et son rapport ? Que se passe-t-il lorsque la CNS n'est pas vérifiée ? Lorsque c'est une homothétie, proposer une construction du centre.
- 3.8.2 Soit  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux droites du plan, soit  $s_{\Delta_1}$  et  $s_{\Delta_2}$  les symétries orthogonales par rapport à ces deux droites. Nature et caractéristiques de la composée  $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}$  ?
- 3.8.3 Soit  $r_{\Omega_1, \theta_1}$  et  $r_{\Omega_2, \theta_2}$  deux rotations. CNS pour que la composée  $r_{\Omega_1, \theta_1} \circ r_{\Omega_2, \theta_2}$  soit une rotation ? Préciser, en ce cas, ses caractéristiques (centre, angle). Que se passe-t-il lorsque la CNS n'est pas vérifiée ? Lorsque c'est une rotation, proposer une construction du centre.

Figure 3.40 – Translation

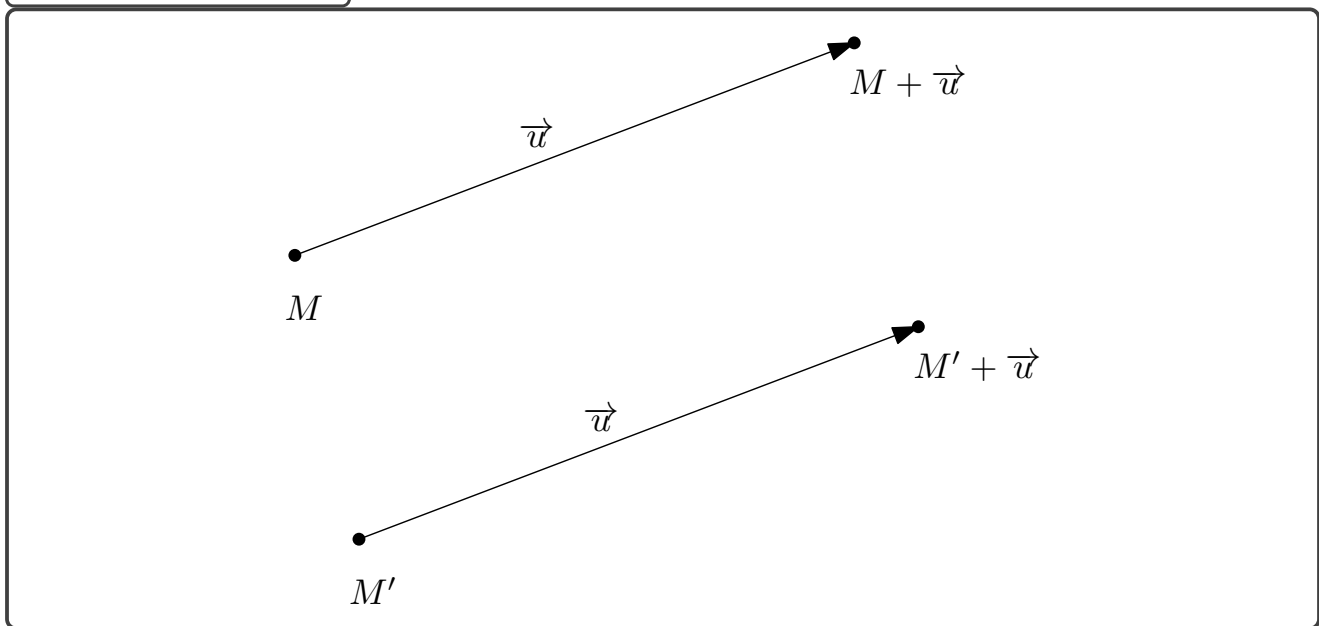
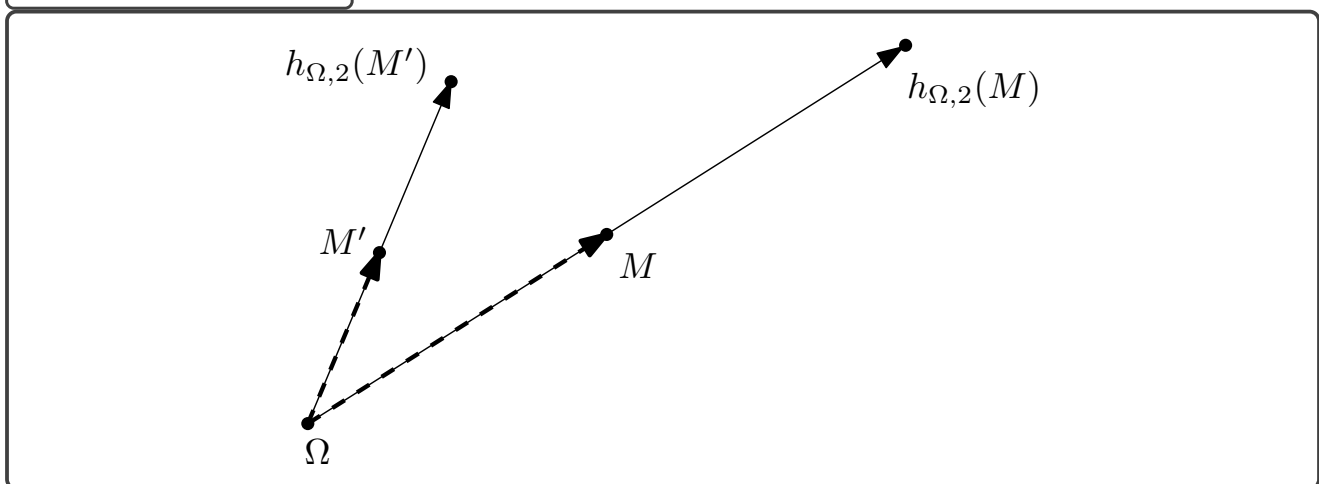


Figure 3.41 – Homothétie



- 3.8.4 Soit  $h_{A,\lambda}$  une homothétie et  $r_{\Omega,\theta}$  une rotation, on suppose de plus que  $\lambda \neq \pm 1$ . Montrer que  $h_{A,\lambda} \circ r_{\Omega,\theta}$  a un unique point fixe. En proposer une construction.
- 3.8.5 Montrer que les homothéties, les symétries orthogonales et les rotations conservent l'orthogonalité, les mesures d'angles. Quelles sont celles qui conservent les mesures d'angles orientés ?
- 3.8.6 Deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  perpendiculaires tournent autour d'un point fixe  $M$ . Soit  $P$  l'intersection de  $\mathcal{D}$  et  $(Ox)$  et  $Q$  l'intersection de  $\mathcal{D}'$  et  $(Oy)$ . On note  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(PQ)$ . Quel lieu décrit  $H$  ? Voir la figure 3.50, page 120.
- 3.8.7 Soit  $\mathcal{D}$  une droite du plan et  $A$  un point n'appartenant pas à  $\mathcal{D}$ . Soit  $B$  un point décrivant la droite  $\mathcal{D}$ . Déterminer le lieu des points  $M$  tels que  $ABM$  est un triangle rectangle et isocèle en  $B$ .
- 3.8.8 Soit  $A = (1, 0)$ ,  $B = (0, 1)$ .
- Donner une équation du cercle  $\mathcal{C}$  passant par  $O$ ,  $A$  et  $B$ .
  - Soit  $M = (x, y)$ . Déterminer les coordonnées  $(x', y')$  du projeté orthogonal  $H$  de  $M$  sur la droite  $(AB)$ .

Figure 3.42 – Projection orthogonale

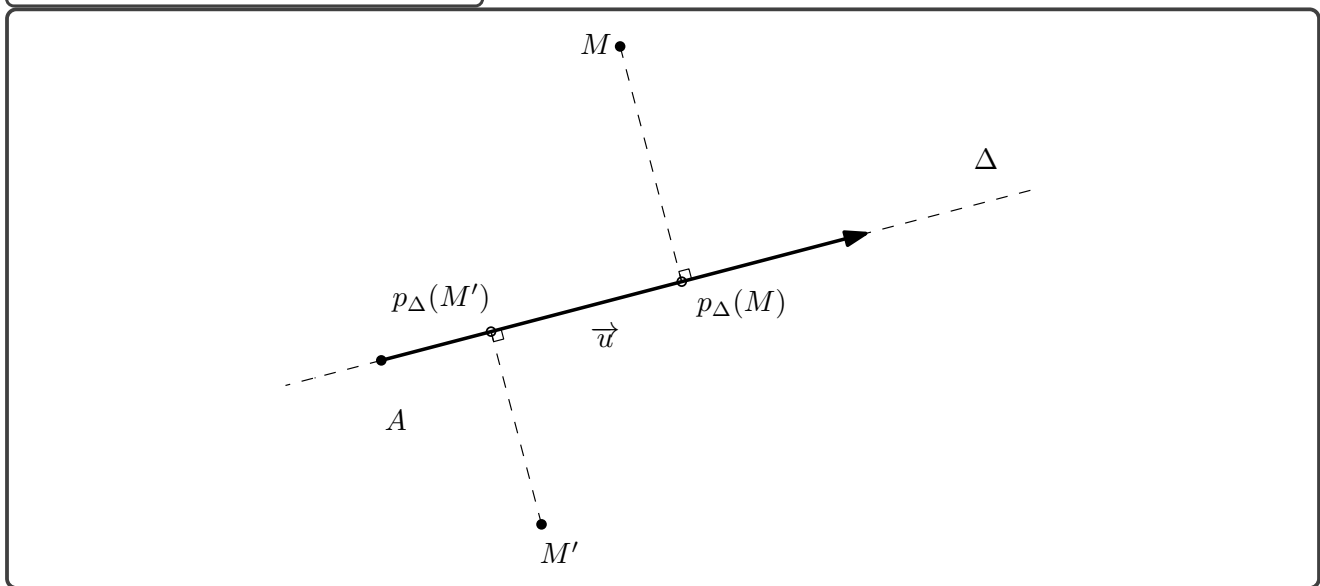
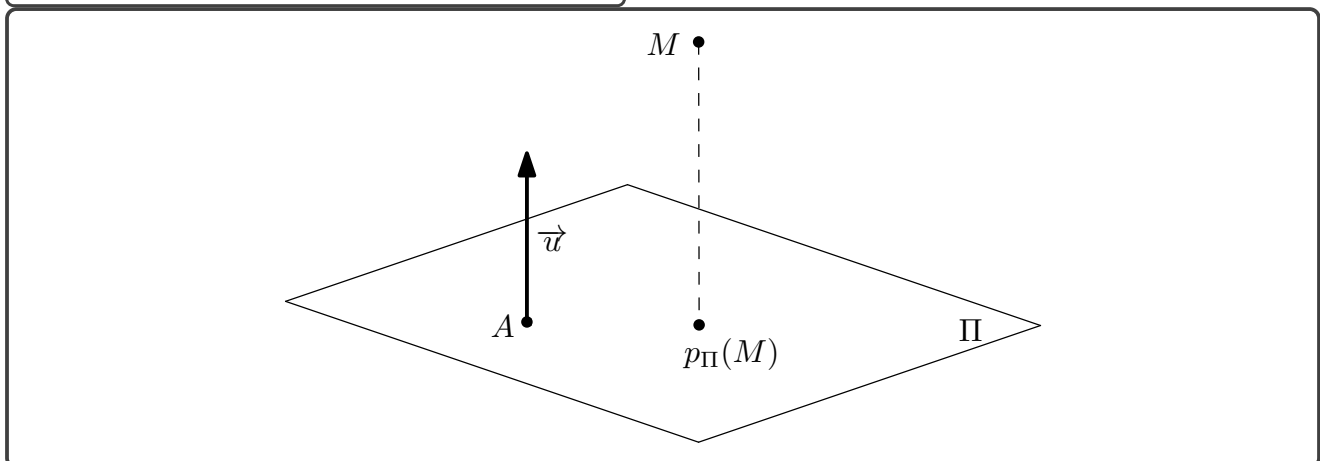


Figure 3.43 – Projection orthogonale sur un plan



(c) Montrer que les projetés orthogonaux de  $M$  sur  $(AB)$ ,  $(OA)$ ,  $(OB)$  sont alignés si, et seulement si  $M \in \mathcal{C}$ .

3.8.9 Soit  $ABC$  un triangle de cercle circonscrit  $\mathcal{C}$  et  $M$  un point de  $\mathcal{C}$ . Soit  $P$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(BC)$ ,  $Q$  sur  $(AC)$  et  $R$  sur  $(AB)$ . Montrer que  $P, Q$  et  $R$  sont alignés. Voir la figure 3.51, page 121.

3.8.10 Soit  $\mathcal{D}$  une droite du plan,  $A$  un point n'appartenant pas à  $\mathcal{D}$ ,  $r$  une rotation de centre  $A$  et d'angle  $\theta$  et  $s$  la symétrie orthogonale d'axe  $\mathcal{D}$ . Déterminer la nature de  $r \circ s \circ r^{-1}$ .

Avec Wxmaxima

3.8.11 Soit  $ABC$  un vrai triangle du plan, calculer, à l'aide des coordonnées de  $A, B$  et  $C$  les coordonnées de  $G$  (centre de gravité),  $H$  (orthocentre) et  $I$  (centre du cercle circonscrit). Que vaut

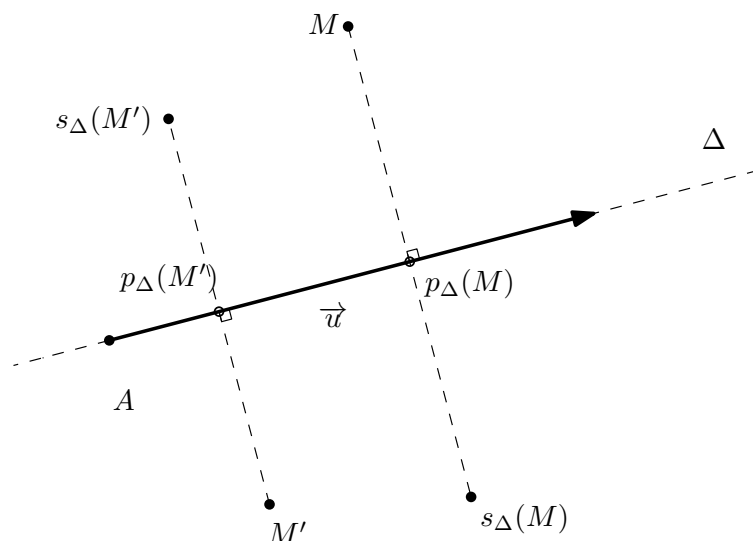
$$\frac{d(G, I)}{d(G, H)} ?$$

(a) En déduire, à l'aide d'une homothétie, que les points  $G, H$  et  $I$  sont alignés.

(b) On note  $P, Q$  et  $R$  les pieds des hauteurs du triangle,  $U, V$  et  $W$  les milieux des côtés et  $J, K$  et  $L$  les milieux des segments reliant les sommets à  $H$ . Voir la figure 3.52, page 121.



Figure 3.44 – Symétrie orthogonale par rapport à une droite



i. Tracer la figure avec **Wxmaxima**.

ii. Vérifier avec **Wxmaxima**, que les 9 points sont sur un même cercle.

iii. Le démontrer à l'aide de transformations géométriques bien choisies.

3.8.12 Soit  $ABC$  un vrai triangle du plan, une droite quelconque coupe les droites  $(AB)$  en  $F$ ,  $(AC)$  en  $D$  et  $(BC)$  en  $E$ . On note  $H_1$  l'orthocentre du triangle  $ADF$ ,  $H_2$  celui de  $DEC$  et  $H_3$  celui du triangle  $ABC$ . Voir la figure 3.53, page 122.

(a) Calculer, avec **Wxmaxima**, les coordonnées des point  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$ .

(b) Que constater sur le rapport (absence d'un paramètre)

$$\frac{d(H_3, H_1)}{d(H_3, H_2)} ?$$

(c) En déduire une démonstration géométrique du fait que :  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  sont alignés.

Dans l'espace affine  $\mathbb{R}^3$

3.8.13 Déterminer la projection orthogonale de la droite  $\mathcal{D} : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 1 \end{cases}$  sur le plan  $\mathcal{P} : 3x + y - z = 1$ .

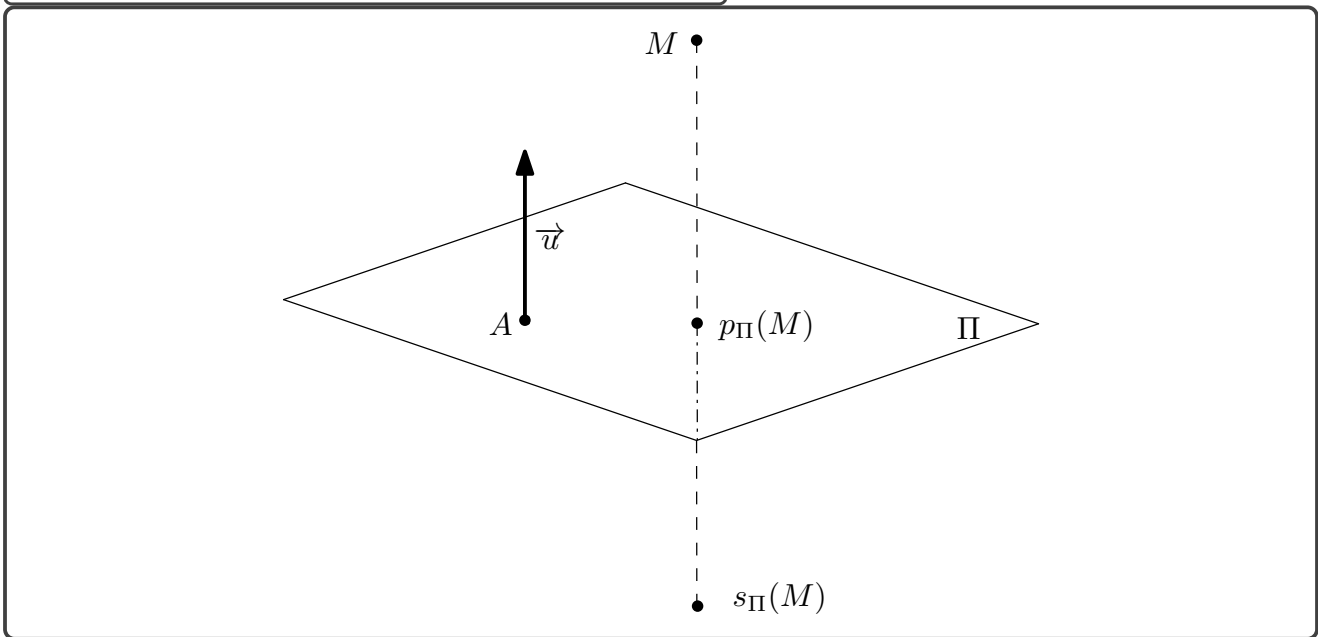
3.8.14 Soit  $D_1$  et  $D_2$  deux droites de l'espace, quelles sont les symétries orthogonales qui envoient tout point de  $D_1 \cup D_2$  sur un point de  $D_1 \cup D_2$ ? Même question avec les rotations.

3.8.15 On considère les plans  $P_1 : x + y - 1 = 0$ ,  $P_2 : y + z - 1 = 0$ ,  $P_3 : z + x - 1 = 0$ ,  $P_4 : x + 3y + z = 0$ . Déterminer  $\lambda$  pour que les quatre projetés orthogonaux de  $(1, 1, \lambda)$  sur les  $P_i$  soient coplanaires (dans un même plan).

3.8.16 Soit  $r_{\theta, \vec{u}}$  une rotation de  $\mathbb{R}^3$  (espace vectoriel), soit  $r$  une autre rotation de cet espace vectoriel, donner la nature et les caractéristiques de  $r \circ r_{\theta, \vec{u}} \circ r^{-1}$ , où  $r^{-1}$  désigne l'application réciproque de  $r$  (qui est clairement bijective). Reprendre la question avec  $s \circ r_{\theta, \vec{u}} \circ s^{-1}$ , où  $s$  est une symétrie orthogonale.

3.8.17 Soit  $r_1 = r_{\theta_1, A_1, \vec{u}_1}$  et  $r_2 = r_{\theta_2, A_2, \vec{u}_2}$  deux rotations de l'espace. Donner une CNS pour que  $r_1 \circ r_2$  soit une rotation. Que se passe-t-il lorsque cette CNS n'est pas vérifiée?

Figure 3.45 – Symétrie orthogonale par rapport à un plan



## 3.6 Bases et repères

### 3.6.1 Point de vue vectoriel

#### Définition 3.19 – Base orthonormée du plan

Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ , soit deux vecteurs  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  vérifiant :

$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1 \text{ et } \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0,$$

la famille  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est appelée *base orthonormée* de  $\mathbb{R}^2$ .

Si, de plus,

$$\text{Det}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1,$$

la base orthonormée est dite *directe*, sinon ( $\text{Det}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = -1$ ) la base orthonormée est dite *indirecte*.

#### Exemple 3.2

La base orthonormée  $((1, 0), (0, 1))$  est dite *base (orthonormée directe) canonique*.

#### Propriété 3.10

Si  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une base orthonormée, alors

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \vec{x} = \langle \vec{e}_1, \vec{x} \rangle \cdot \vec{e}_1 + \langle \vec{e}_2, \vec{x} \rangle \cdot \vec{e}_2.$$

Les valeurs  $(\langle \vec{e}_1, \vec{x} \rangle, \langle \vec{e}_2, \vec{x} \rangle)$  s'appellent les *coordonnées* du vecteur  $\vec{x}$  dans la base orthonormée  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

Figure 3.46 – Rotation du plan vectoriel

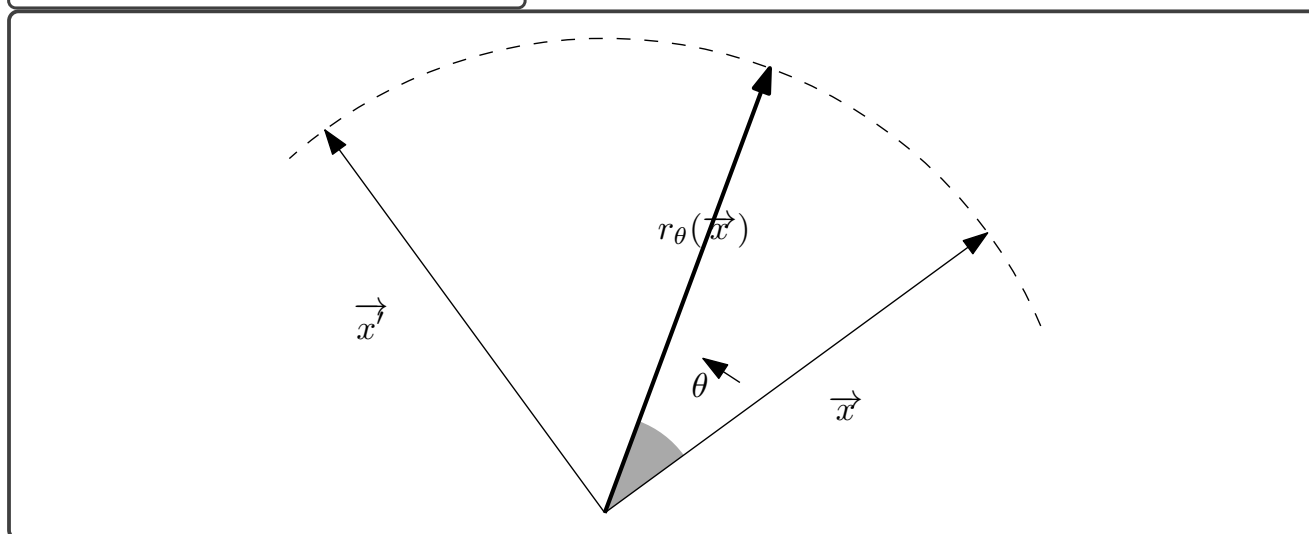
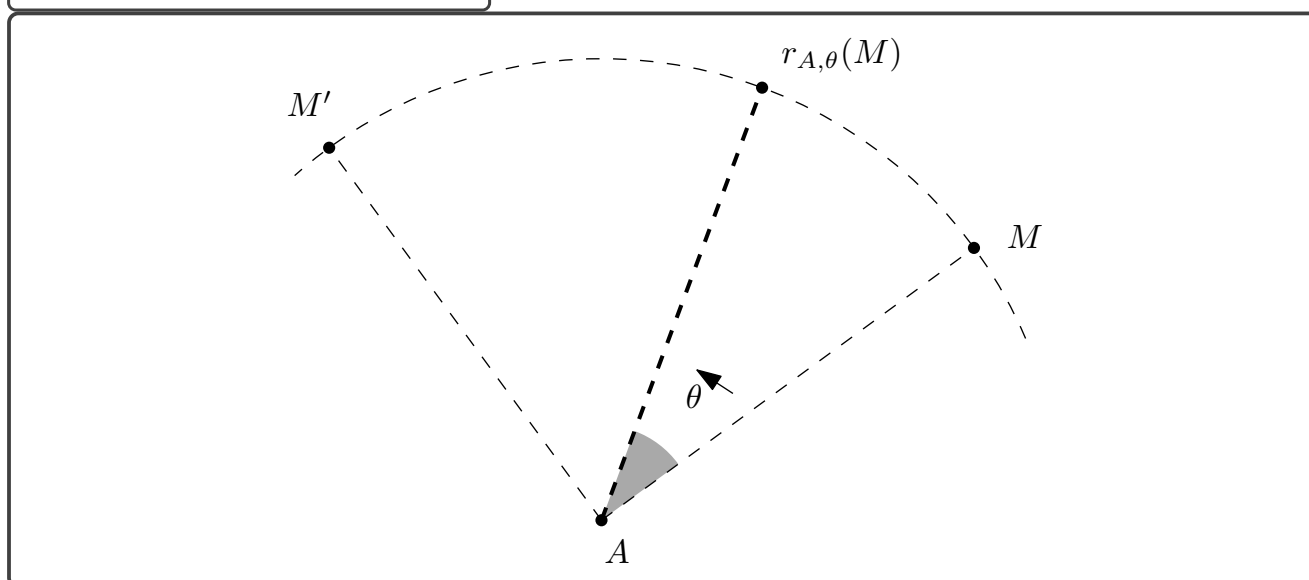


Figure 3.47 – Rotation du plan affine



### Propriété 3.11

Si  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une base orthonormée, alors

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{e}_1, \vec{x} \rangle^2 + \langle \vec{e}_2, \vec{x} \rangle^2.$$

Et

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^2)^2, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{x} \rangle \times \langle \vec{e}_1, \vec{y} \rangle + \langle \vec{e}_2, \vec{x} \rangle \times \langle \vec{e}_2, \vec{y} \rangle.$$

Figure 3.48 – Rotation de l'espace (vectoriel)

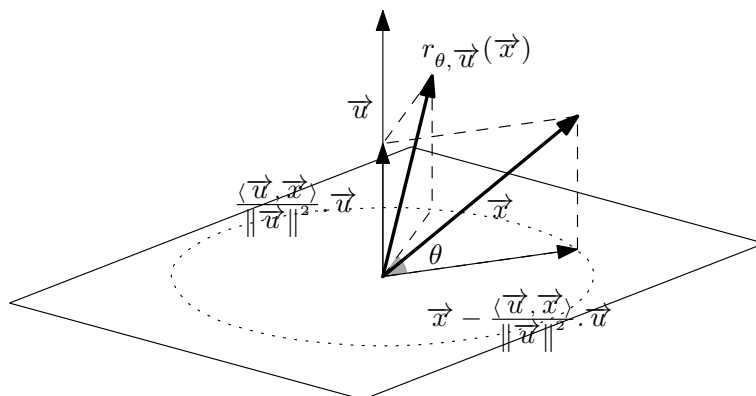
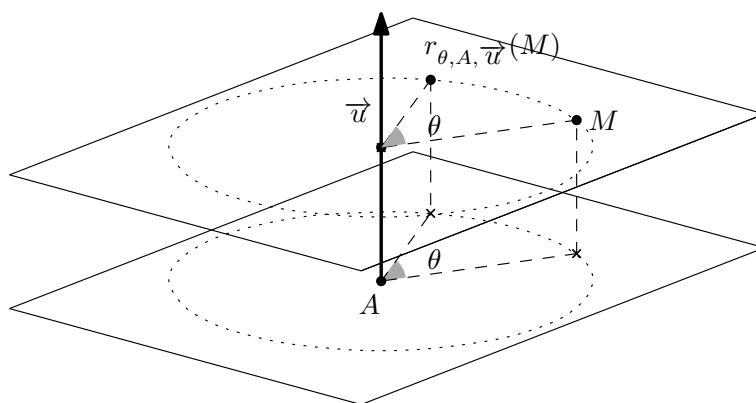


Figure 3.49 – Rotation de l'espace (affine)



### Remarque importante 3.31

Les calculs de normes et de produits scalaires se font donc comme dans la base orthonormée directe canonique.

### Notation 3.3 – Symbole de Kronecker

On appelle *symbole de Kronecker* sur un ensemble  $E$ , l'expression définie par :

$$\forall (i, j) \in E^2, \delta_{i,j} \stackrel{\text{Def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Définition 3.20 – Base orthonormée de l'espace

Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ , soit trois vecteurs  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  vérifiant :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2, \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{i,j},$$

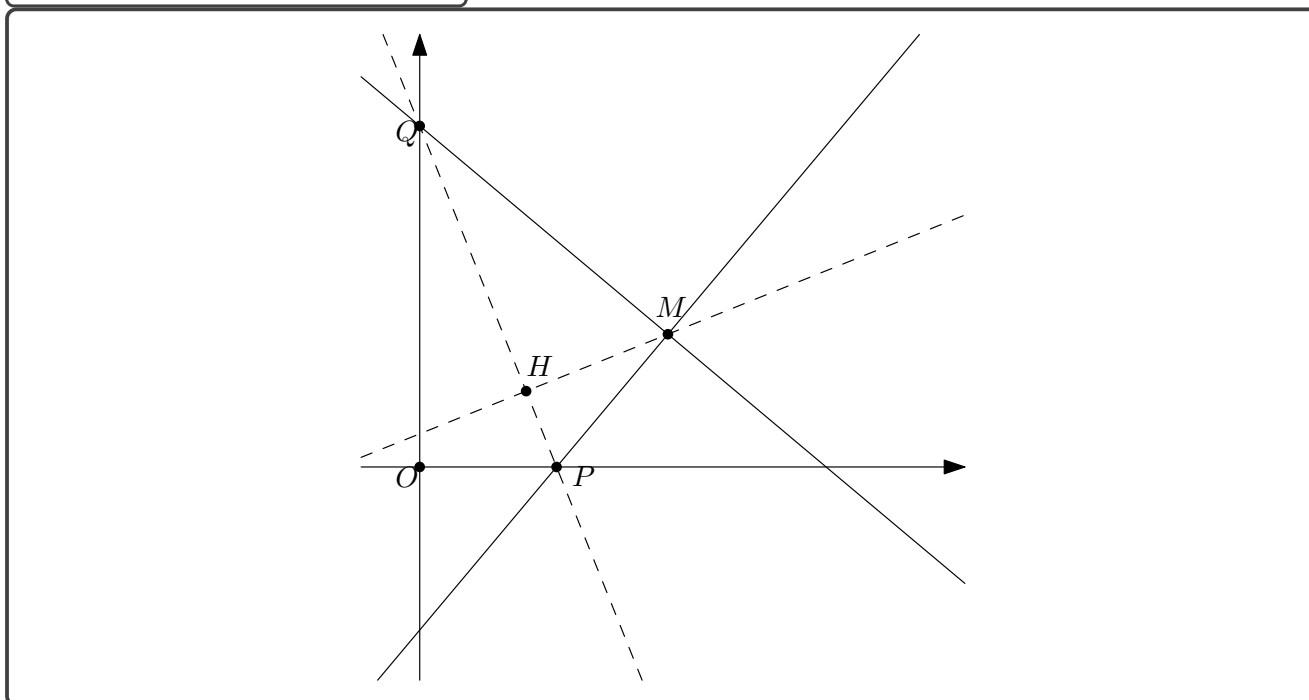
la famille  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est appelée *base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$* .

Si, de plus,

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2,$$

la base orthonormée est dite *directe*, sinon  $(\vec{e}_3 = -\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2)$  la base orthonormée est dite *indirecte*.

Figure 3.50 – Lieu d’une projection



### Exemple 3.3

La base orthonormée  $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  est dite *base (orthonormée directe) canonique*.

### Propriété 3.12

Si  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est une base orthonormée, alors

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} = \sum_{k=1}^3 \langle \vec{e}_k, \vec{x} \rangle \cdot \vec{e}_k.$$

Les valeurs  $(\langle \vec{e}_1, \vec{x} \rangle, \langle \vec{e}_2, \vec{x} \rangle, \langle \vec{e}_3, \vec{x} \rangle)$  s'appellent les *coordonnées du vecteur  $\vec{x}$  dans la base orthonormée  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$* .

### Propriété 3.13

Si  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est une base orthonormée, alors

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \|\vec{x}\|^2 = \sum_{k=1}^3 \langle \vec{e}_k, \vec{x} \rangle^2.$$

Et

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{k=1}^3 \langle \vec{e}_k, \vec{x} \rangle \times \langle \vec{e}_k, \vec{y} \rangle.$$

Figure 3.51 – Alignement de trois projections

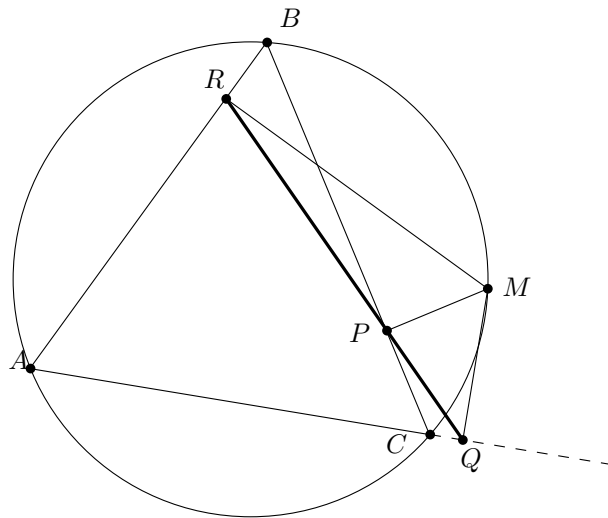
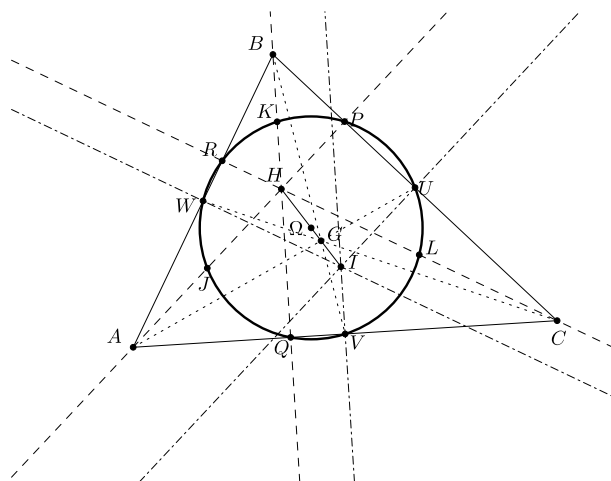


Figure 3.52 – Théorème de Feuerbach (9 points)



#### Remarque importante 3.32

Les calculs de normes et de produits scalaires se font donc comme dans la base orthonormée directe canonique.

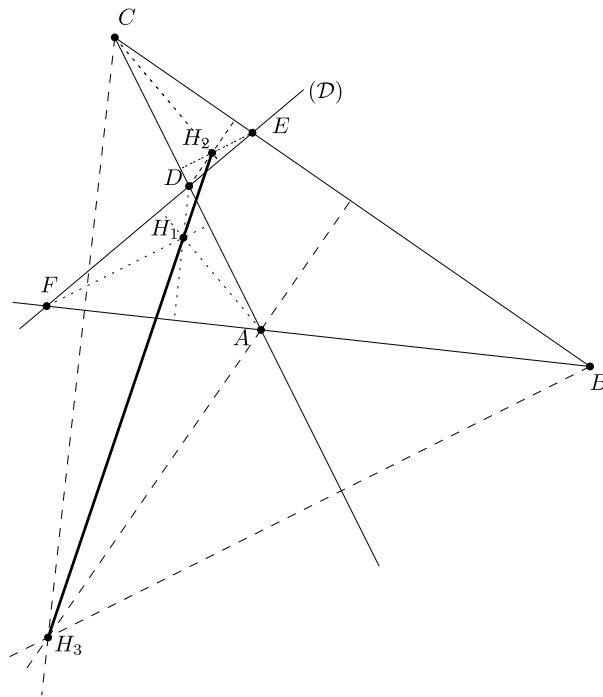
### 3.6.2 Point de vue affine

#### Définition 3.21 – Repère orthonormé du plan

La donnée d'un point  $A \in \mathbb{R}^2$ , et d'une base orthonormée (directe) de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  s'appelle *repère orthonormé (direct) du plan* et se note  $(A; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . On a alors :

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, M = A + \sum_{k=1}^2 \langle \vec{e}_k, \overrightarrow{AM} \rangle \cdot \vec{e}_k.$$

Figure 3.53 – Orthocentres alignés



Les valeurs  $(\langle \vec{e}_1, \overrightarrow{AM} \rangle, \langle \vec{e}_2, \overrightarrow{AM} \rangle)$  s'appelle les coordonnées du point  $M$  dans le repère orthonormé  $(A; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

#### Définition 3.22 – Repère orthonormé de l'espace

La donnée d'un point  $A \in \mathbb{R}^3$ , et d'une base orthonormée (directe) de  $\mathbb{R}^3$ ,  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  s'appelle *repère orthonormé (direct) de l'espace* et se note  $(A; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . On a alors :

$$\forall M \in \mathbb{R}^3, M = A + \sum_{k=1}^3 \langle \vec{e}_k, \overrightarrow{AM} \rangle \cdot \vec{e}_k.$$

Les valeurs  $(\langle \vec{e}_1, \overrightarrow{AM} \rangle, \langle \vec{e}_2, \overrightarrow{AM} \rangle, \langle \vec{e}_3, \overrightarrow{AM} \rangle)$  s'appelle les coordonnées du point  $M$  dans le repère orthonormé  $(A; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

#### Remarque 3.33

Lorsque les bases orthonormées sont les bases canoniques et que  $A = (0,0)$  dans le plan ou  $(0,0,0)$  dans l'espace, on parle de repère canonique...

Les vecteurs de la base orthonormée canonique seront notés alors :

$\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  dans le plan,

et

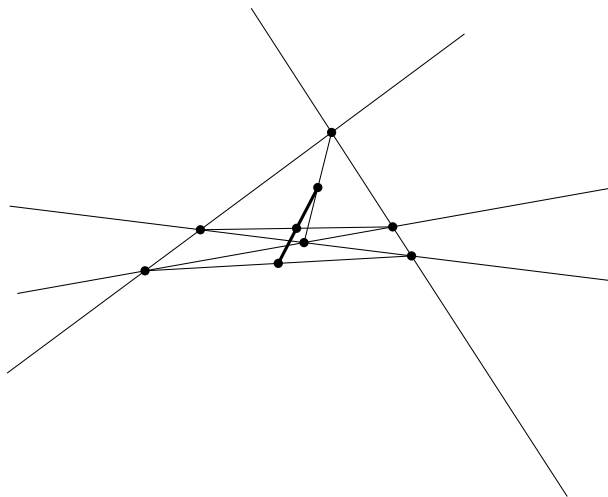
$\vec{e}_x, \vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$  dans l'espace.

### Exercice(s) 3.9

- 3.9.1 Montrer que les trois vecteurs donnés  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  dans la remarque importante 3.24, page 91, forment une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$ .
- 3.9.2 Soit  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux droites du plan non parallèles et non perpendiculaires. Soit  $A$  un point du plan,  $M$  son symétrique par rapport à  $\mathcal{D}$  et  $M'$  par rapport à  $\mathcal{D}'$ . Déterminer le lieu des points  $A$  pour lesquels la distance  $MM'$  est constante. *On fera les calculs dans le repère de centre  $O$ , point d'intersection des deux droites et des vecteurs de norme 1 qui dirigent les deux bissectrices des deux droites.*
- 3.9.3 Soient  $A, B, C$  trois points non alignés d'un plan affine. Décrire géométriquement l'ensemble des points ayant mêmes coordonnées dans les repères  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  et  $(B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ .<sup>a</sup>
- 3.9.4 Soit  $(D_i)_{i=1,\dots,4}$  quatre droites du plan affine sécantes deux à deux en six points distincts. Si deux d'entre elles se coupent en  $A$  et les deux autres en  $B$ , on dit que  $[A, B] = \{\text{Bar}((A, \lambda), (B, 1 - \lambda)), \lambda \in [0, 1]\}$  est une diagonale. Montrer que les milieux des trois diagonales sont alignés. Voir la figure 3.54, de la présente page.
- 3.9.5 Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points  $(x, y)$  vérifiant  $x^2 + x \times y + y^2 = 1$ . Déterminer l'équation de  $\mathcal{E}$  dans le repère qui se déduit du repère canonique par une rotation d'angle  $\theta$ . Choisir judicieusement  $\theta$  pour tracer  $\mathcal{E}$ .
- 3.9.6 Soit  $ABC$  un triangle non plat,  $A'$  le pied de la hauteur issue de  $A$ . On définit de même  $B'$  et  $C'$ . On travaille dans un repère orthonormé centré en  $A'$  et d'axes  $(BC)$  et  $(A'A)$ .
- Déterminer les coordonnées de  $B'$ .
  - Donner une équation cartésienne de la droite  $(A'B')$  et calculer la distance de  $A$  à cette droite.
  - Faire de même avec  $C'$ . Que peut-on en déduire ?

a. Les repères ici ne sont pas orthonormés !

Figure 3.54 – Intersections de diagonales







## Chapitre 4

# Fonctions de plusieurs variables et systèmes de coordonnées

L'objectif de ce chapitre est de comprendre comment choisir des coordonnées adaptées à une situation géométrique particulière, et de voir comment cela permet de faire des calculs plus simplement.

### 4.1 Dérivation d'une fonction de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^p$

#### Définition 4.1

Si  $\vec{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^p$  ( $p \geq 2$ ), est une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , on dit que :

1.  $\vec{F}$  est continue sur  $I$ , si

$$\forall t \in I, \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \vec{F}(t+h) - \vec{F}(t) \right\| = 0.$$

2.  $\vec{F}$  est dérivable sur  $I$  de dérivée  $\vec{F}'$ , si

$$\forall t \in I, \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \left\| \frac{\vec{F}(t+h) - \vec{F}(t)}{h} - \vec{F}'(t) \right\| = 0.$$

#### Remarque 4.1

Si l'on appelle *applications composantes de  $\vec{F}$* , les applications  $(f_1, \dots, f_p)$  définies sur  $I$ , à valeurs réelles, telles que

$$\forall t \in I, \vec{F}(t) = (f_1(t), \dots, f_p(t)).$$

Clairement,  $\vec{F}$  est continue (resp. dérivable,  $\mathcal{C}^k, \dots$ ), si toutes les fonctions  $f_k$  sont continues (resp. dérivables,  $\mathcal{C}^k, \dots$ ). Et l'on a lorsque  $\vec{F}$  est dérivable :

$$\forall t \in I, \vec{F}'(t) = (f'_1(t), \dots, f'_p(t)).$$

#### Propriété 4.1

On a alors immédiatement les calculs suivants ( $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vec{F}$  et  $\vec{G} : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ , toutes dérivables) :

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot \vec{F})' &= \lambda' \cdot \vec{F} + \lambda \cdot \vec{F}' \\ (\vec{F} + \vec{G})' &= \vec{F}' + \vec{G}' \\ \langle \vec{F}, \vec{G} \rangle' &= \langle \vec{F}', \vec{G} \rangle + \langle \vec{F}, \vec{G}' \rangle \\ (n=3) \quad (\vec{F} \wedge \vec{G})' &= \vec{F}' \wedge \vec{G} + \vec{F} \wedge \vec{G}' \end{aligned}$$

où les fonctions utilisées sont définies par :

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \vec{F} &: t \mapsto \lambda(t) \cdot \vec{F}(t) \\ \langle \vec{F}, \vec{G} \rangle &: t \mapsto \langle \vec{F}(t), \vec{G}(t) \rangle \\ \vec{F} \wedge \vec{G} &: t \mapsto \vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t). \end{aligned}$$

#### Remarque 4.2

*Interprétation géométrique de la dérivée* : lorsqu'on regarde le graphe  $\Gamma_f$  d'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , soit

$$\Gamma_f = \{(t, f(t)), t \in I\}.$$

On voit apparaître naturellement la fonction :

$$\vec{F} : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (t, f(t)) \end{cases}$$

qui est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$ . Sa dérivée vaut :

$$\forall t \in I, \vec{F}'(t) = (1, f'(t)),$$

*c'est donc un vecteur directeur de la tangente !*

Si maintenant, on considère le lieu géométrique défini par :

$$\forall t \in I, M(t) = O + \vec{F}(t),$$

où  $O = (0, \dots, 0)$  et  $\vec{F}$  définie, de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ , on peut encore parler de *graphe* :

$$\Gamma = \{M(t), t \in I\},$$

et, en ce cas, le vecteur  $\vec{F}'(t)$ , s'il est non nul, dirige la tangente au graphe au point  $M(t)$ , car :

$$\vec{F}(t+h) = \vec{F}(t) + h \cdot \vec{F}'(t) + \underline{o(h)},$$

où  $\underline{o(h)}$  désigne un vecteur de  $\mathbb{R}^p$  dont toutes les coordonnées sont des  $o(h)$ . Voir la session [Wxmaxima 4.1](#), de la présente page.

#### Session Wxmaxima 4.1 – Exemple de dérivées partielles

```
(%i1) load(draw)$
```

Définissons le vecteur  $\vec{F}(t)$  :

```
(%i2) F(t) := [cos(3*t), sin(2*t)]$
```

Et sa dérivée :

```
(%i3) dF(t) := diff(F(t),t)$
```

```
(%i4) dF(0);
```

diff: second argument must be a variable; found 0#0:

dF(t=0) -- an error.

To debug this try: debugmode(true);

Cela ne marche pas! Pourquoi? Parce que Wxmaxima remplace  $t$  avant de faire le calcul, il génère donc la commande `diff(F(0),0)` qui n'a aucun sens. Il suffit de retarder le remplacement :

```
(%i5) dF(u) := subst([t=u],diff(F(t),t))$
```

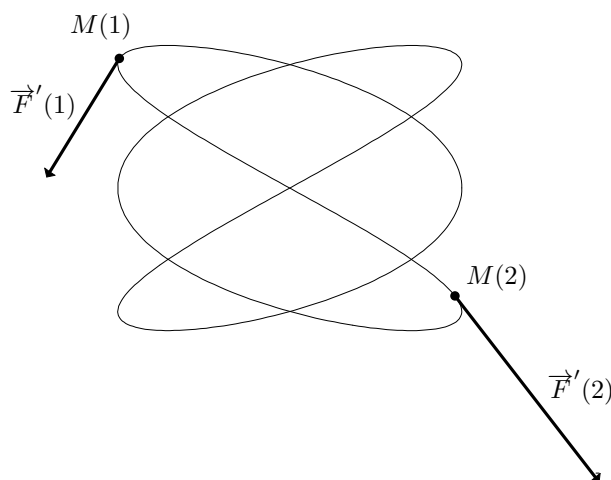
```
(%i6) dF(0);
```

```
(%o6) [0,2]
```

Traçons.

```
(%i7) draw2d(nticks=500,
parametric(cos(3*t),sin(2*t),t,0,2*%pi),
color=black,
head_length=0.05,
vector(F(1),dF(1)),
vector(F(2),dF(2)))$
```

Ce qui donne, après annotations :



#### Remarque 4.3

Pour le physicien, lorsque l'on a un mouvement défini dans  $\mathbb{R}^p$  ( $p = 2$  ou  $3$ ) par ( $t$  s'appelle *le temps*) :

$$\forall t \in I, M(t) = O + \vec{F}(t),$$

il est important de différencier *la trajectoire* (le graphe)

$$\{M(t), t \in I\},$$

de la manière dont cette trajectoire est parcouru (*la loi horaire*, relation entre le temps et le paramètre « naturel » de la trajectoire). Si  $\vec{F}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\vec{F}'(t)$  est appelée *vitesse instantanée à l'instant*

$t$ , et sera souvent notée (par le physicien) :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \stackrel{\text{Not}}{=} \overrightarrow{F}'(t).$$

#### Exemple 4.1

Prenons le cercle de centre  $O$  de rayon 1 (dans le repère orthonormé canonique du plan), on peut avoir un mouvement uniforme :

$$x(t) = \cos(t) \text{ et } y(t) = \sin(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

ou un mouvement de plus en plus rapide :

$$x(t) = \cos(\exp(t)) \text{ et } y(t) = \sin(\exp(t)).$$

#### Exercice(s) 4.1

4.1.1 Soit  $\overrightarrow{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ , une fonction définie, dérivable sur  $I$ . On pose :

$$\varphi : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \|\overrightarrow{F}(t)\| \end{cases}$$

(a) Montrer que  $\varphi$  est minorée.

(b) On suppose que  $\varphi$  a un minimum en  $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ , que peut-on dire de

$$\overrightarrow{F}(t_0) \text{ et } \overrightarrow{F}'(t_0) ?$$

Dans le plan  $\mathbb{R}^2$

4.1.2 Soit  $\phi$ , l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\forall (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2, \phi(\rho, \theta) = (\rho \times \cos(\theta), \rho \times \sin(\theta)).$$

On pose, si  $\rho_0 \in \mathbb{R}$  et  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  sont donnés :

$$\phi(\rho_0, \bullet) : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta \mapsto \phi(\rho_0, \theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \phi(\bullet, \theta_0) : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \rho \mapsto \phi(\rho, \theta_0) \end{cases}.$$

(a) Calculer

$$(\phi(\rho_0, \bullet))' \text{ et } (\phi(\bullet, \theta_0))'.$$

On suppose dorénavant que  $\rho_0 \neq 0$  et on pose :

$$\overrightarrow{e}_{\rho_0}(\rho_0, \theta_0) = (\phi(\bullet, \theta_0))'(\rho_0) \text{ et } \overrightarrow{e}_{\theta_0}(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{\rho_0} \cdot (\phi(\rho_0, \bullet))'(\theta_0).$$

On peut constater que ces deux vecteurs ne dépendent en fait que de  $\theta_0$ . Nous les noterons donc, plus simplement,  $\overrightarrow{e}_{\rho_0}(\theta_0)$  et  $\overrightarrow{e}_{\theta_0}(\theta_0)$ .

(b) Montrer que  $(\overrightarrow{e}_{\rho_0}(\theta_0), \overrightarrow{e}_{\theta_0}(\theta_0))$  forment une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $r$ , une application de classe  $\mathcal{C}^2$  définie sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^*$ . On pose alors :

$$\overrightarrow{u} : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta \mapsto r(\theta) \cdot \overrightarrow{e}_{\rho}(\theta) \end{cases}.$$

(c) Calculer, dans la base orthonormée  $(\overrightarrow{e}_{\rho}(\theta), \overrightarrow{e}_{\theta}(\theta))$ , les dérivées première et seconde de  $\overrightarrow{u}$ .

4.1.3 Soit le point défini dans le repère orthonormé canonique de  $\mathbb{R}^2$  par

$$x(t) = \frac{2}{1+t^2} \text{ et } y(t) = \frac{2t}{1+t^2},$$

- (a) Montrer que sa trajectoire est incluse dans un cercle dont on précisera le centre  $\Omega$  et le rayon  $r$ .
- (b) Tout le cercle est-il parcouru ?
- (c) En prenant comme paramètre « naturel », la mesure  $\theta$  de l'angle orienté entre  $\vec{e}_x$  et  $\overrightarrow{\Omega M}$ , préciser la loi horaire (ie  $\theta$  en fonction de  $t$ ).

Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$

4.1.4 Soit  $\vec{F}$ ,  $\vec{G}$  et  $\vec{H}$ , trois applications définies, dérivables de  $I$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que l'application

$$f : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}, \\ t \mapsto \langle \vec{F}(t), \vec{G}(t) \wedge \vec{H}(t) \rangle \end{cases}$$

est dérivable sur  $I$  et en calculer sa dérivée.

## 4.2 Fonctions de plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}^p$

### 4.2.1 Ouverts de $\mathbb{R}^n$

#### Rappel 4.1

Dans  $\mathbb{R}^n$ , on note :

— les vecteurs sous la forme :

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n),$$

— la norme euclidienne de  $\vec{x}$  :

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

— le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{x}'$  :

$$\langle \vec{x}, \vec{x}' \rangle = x_1 \times x'_1 + \dots + x_n \times x'_n.$$

#### Définition 4.2 – Ouverts de $\mathbb{R}^n$

Une partie  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  sera dite *ouverte* (on dira souvent *ouvert* pour désigner une *partie ouverte*), si

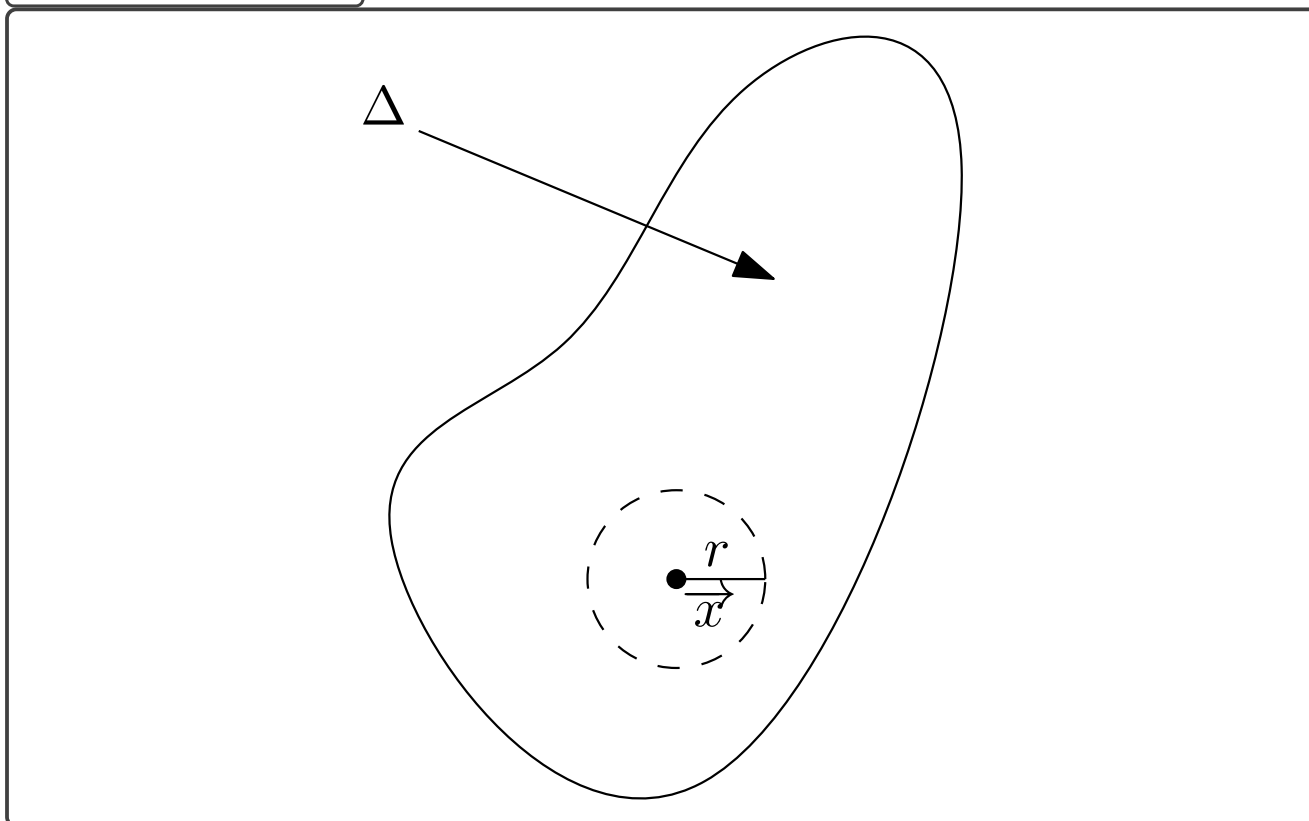
$$\forall \vec{x} \in \Delta, \exists r > 0, \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq r \Rightarrow \vec{y} \in \Delta.$$

Voir la figure 4.1, page suivante.

#### Remarque 4.4

Cela signifie essentiellement que la partie n'a pas de bord ! Comparer aux intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ .

Figure 4.1 – Ouvert de  $\mathbb{R}^n$



#### Définition 4.3 – Connexes par arcs de $\mathbb{R}^n$

Une partie  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  est dite *connexe par arcs* si elle vérifie :

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \Delta^2, \exists \varphi \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^n), \begin{cases} \forall t \in [0, 1], \varphi(t) \in \Delta \\ \varphi(0) = \vec{x} \\ \varphi(1) = \vec{y}. \end{cases}$$

#### Remarque 4.5

Cela signifie qu'entre deux vecteurs quelconques de  $\Delta$ , on peut tracer un arc continu, inclus dans  $\Delta$  et reliant ces deux vecteurs.

#### Exemple 4.2

##### Connexe par arcs

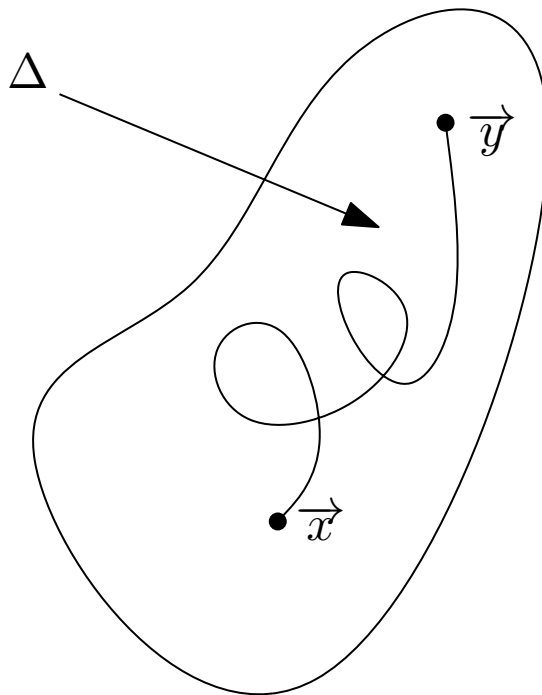
Ainsi, une partie en un seul morceau <sup>a</sup> est connexe par arcs. Voir la figure 4.2, page ci-contre.

##### Non connexe par arcs

Une partie en deux morceaux ne sera pas connexe par arcs. Voir la figure 4.3, page 132.

<sup>a</sup>. C'est pour définir proprement ce genre d'expression intuitive que l'on a introduit la notion de connexe par arcs...

Figure 4.2 – Connexe par arcs



L'arc continu entre  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$

#### Exercice(s) 4.2

4.2.1 Dans  $\mathbb{R}^2$  les parties suivantes sont-elles ouvertes ? Connexes par arcs ? (Le montrer)

Notons

$$\Delta_1 = \{\vec{x}, \|\vec{x}\| \leq 1\} \text{ et } \Delta_2 = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}.$$

- (a)  $\Delta_1 ? \mathbb{R}^2 \setminus \Delta_1 ? \Delta_1 \setminus \{\vec{0}\} ?$
- (b)  $\Delta_2 ? \mathbb{R}^2 \setminus \Delta_2 ? \Delta_2 \setminus \{\vec{0}\} ?$
- (c)  $\Delta_1 \setminus \Delta_2 ? \Delta_1 \cup \Delta_2 ? \Delta_1 \cap \Delta_2 ?$
- (d)  $(\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_1) \setminus (\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_2) ? (\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_1) \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_2) ? (\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_1) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_2) ?$

4.2.2 Montrer que les connexes par arcs de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.

4.2.3 Soit  $n \geq 1$ , on appelle *sphère unité* de  $\mathbb{R}^n$ , l'ensemble :

$$S_n = \{\vec{x}, \|\vec{x}\| = 1\}.$$

Pour quelles valeurs de  $n$ ,  $S_n$  est-elle connexe par arcs ?

4.2.4 (Très important) Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , montrer que  $\mathcal{O}$  est connexe par arcs si, et seulement si :

$$\left[ \forall (\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) \text{ ouverts de } \mathbb{R}^n, \begin{array}{l} \mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \\ \emptyset = \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \end{array} \right] \Rightarrow \mathcal{O}_1 = \mathcal{O} \text{ ou } \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}.$$

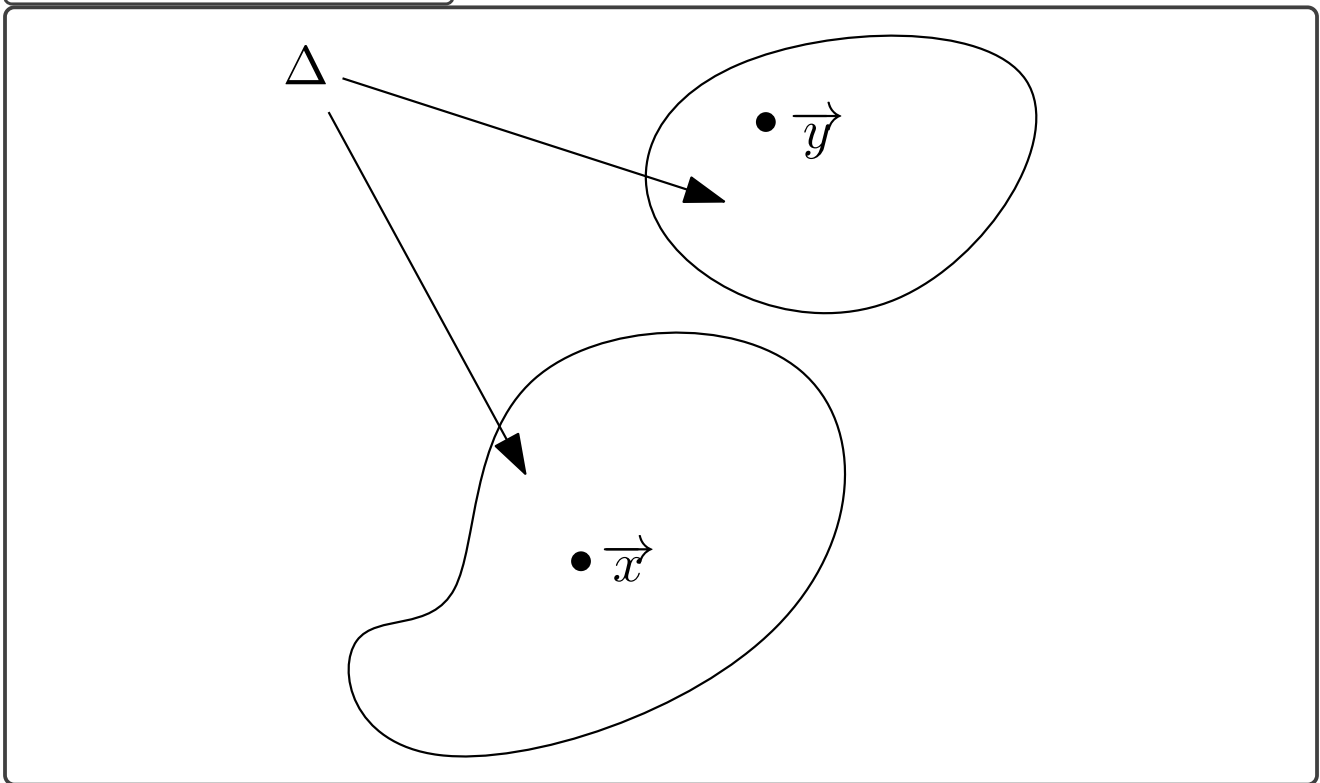
4.2.5 Soit  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{R}^n$ ,  $a \in A$ .

(a) On suppose que  $B$  est ouverte, montrer que :

$$a + B = \{a + b, b \in B\} \text{ et } A + B = \{a + b, (a, b) \in A \times B\} \text{ sont ouvertes.}$$



Figure 4.3 – Non connexe par arcs



(b) On suppose que  $B$  est connexe par arcs, peut-on en dire autant de  $a + B$ ? de  $A + B$ ?

(c) On suppose que  $A$  et  $B$  sont connexes par arcs, montrer que  $A + B$  est aussi connexe par arcs.

4.2.6 Soit  $n \geq 2$ , on considère :

$$\Gamma_n = \left\{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n^2 \geq \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 \right\}.$$

(a) Montrer que  $\Gamma_2$  est connexe par arcs.

(b) Montrer que  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_2$  n'est pas connexe par arcs.

(c) Montrer que, si  $n \geq 3$ , alors  $\Gamma_n$  et  $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_n$  sont connexes par arcs.

## 4.2.2 Continuité des fonctions de plusieurs variables

Dans tout ce paragraphe,  $\Delta$  désigne une partie ouverte non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

### Définition 4.4

Soit  $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $\vec{x}_0$  un élément de  $\Delta$ , on dit que  $f$  est *continue en  $\vec{x}_0$*  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall \vec{x} \in \Delta, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \eta \Rightarrow |f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| \leq \varepsilon.$$

#### Définition 4.5

On dit que  $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est *continue sur*  $\Delta$  si pour tout  $\vec{x}_0 \in \Delta$ ,  $f$  est continue en  $\vec{x}_0$ .

#### Notation 4.1

Lorsque  $f$  est une fonction et  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  un vecteur, on note

$$f(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{Not}}{=} f(\vec{x}) = f((x_1, \dots, x_n)).$$

#### Définition 4.6

Soit  $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est dite *continue sur*  $\Delta$  si :

$$\forall \vec{x}_0 \in \Delta, \underbrace{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall \vec{x} \in \Delta, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \eta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\| \leq \varepsilon}_{\text{exprime la continuité de } f \text{ en } \vec{x}_0}.$$

On a alors les *applications composantes de*  $f$  définies par :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_k : \Delta \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \forall \vec{x} \in \Delta, f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_p(\vec{x})) \in \mathbb{R}^p.$$

On obtient alors :

$$f \text{ continue sur } \Delta \iff \left[ \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_k \text{ continue sur } \Delta \right].$$

#### Remarque 4.6

Lorsque  $n = 2$  et  $p = 1$ , il est facile de *voir* si une fonction est continue ou non, en regardant (comme sur une carte de montagne) les lignes de niveaux (courbes  $f(x, y) = C \text{ste}$ ).

Une fonction continue

Voir la figure 4.4, page suivante.

Une fonction discontinue (en 0)

Voir la figure 4.5, page 135.

#### Propriété 4.2

L'ensemble des fonctions continues sur  $\Delta$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  est stable par addition, multiplication par un scalaire (c'est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel). Si, de plus,  $p = 1$  (fonctions à valeurs réelles), alors il est stable par multiplication et par division par une fonction ne s'annulant pas sur  $\Delta$ .<sup>a</sup> On le notera bien sûr  $\mathcal{C}^0(\Delta, \mathbb{R}^p)$ .

<sup>a</sup>. On peut énoncer les mêmes résultats pour la continuité en un point...

#### Propriété 4.3

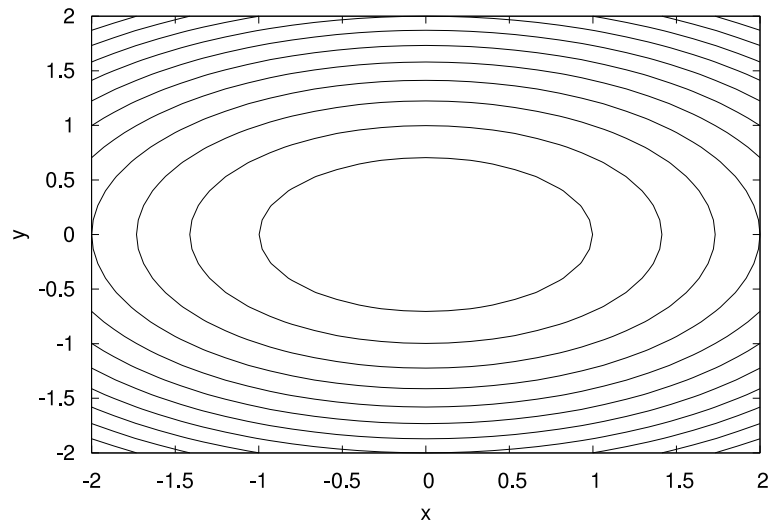
Si  $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $g : \Delta' \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  sont continues et  $\Delta' \supset f(\Delta)$ , alors  $g \circ f$  est continue sur  $\Delta$ .

#### Remarque 4.7

Les projections canoniques

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k, \quad (k \in \llbracket 1, n \rrbracket),$$

Figure 4.4 – Lignes de niveaux d’une fonction continue



sont continues sur  $\mathbb{R}^n$ .

#### Propriété 4.4

Les fonctions polynomiales (à plusieurs variables) sont continues. Elles sont polynomiales en chaque variable. Par exemple, pour  $n = 2$  :

$$(x, y) \mapsto x \times y^2 + 2x^3 - 4x^4 \times y^3$$

est continue.

Les fonctions rationnelles (à plusieurs variables) sont continues (quotients de fonctions polynomiales).

Comment montre-t-on qu’une fonction est continue ?

1. On utilise d’abord les règles de combinaison connues (addition, multiplication, composition...)
2. Pour les éventuels points particuliers, on cherche une majoration faisant intervenir la norme de  $\vec{x}$ .

#### Exemple 4.3 – Démonstration d’une continuité ( $\mathbb{R}^2$ )

Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \times y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Cette fonction est clairement continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , car c’est une fonction rationnelle.
- Pour étudier la continuité en  $(0, 0)$ , on écrit, pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  :

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x \times y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{N^3}{N^2} = N \xrightarrow{N \rightarrow 0} 0,$$

où on a posé :

$$N = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ et utilisé } |x| \leq N \text{ et } y^2 \leq N^2.$$

Voir la figure 4.6, page ci-contre.

Figure 4.5 – Lignes de niveaux d’une fonction discontinue en 0

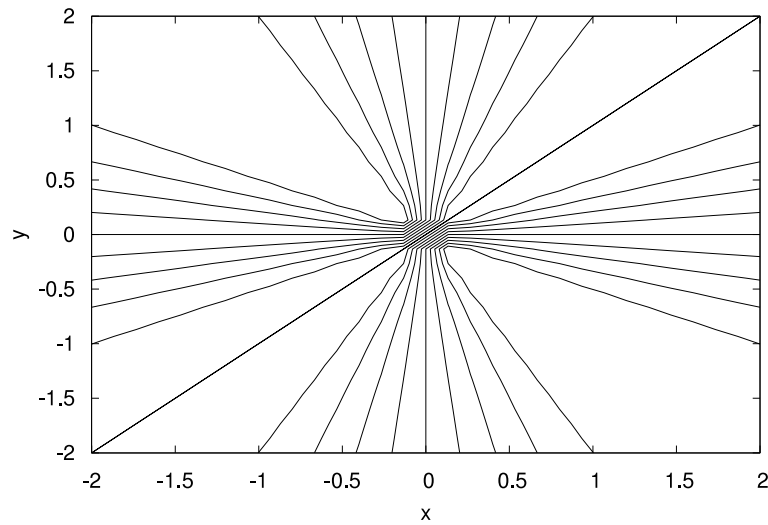
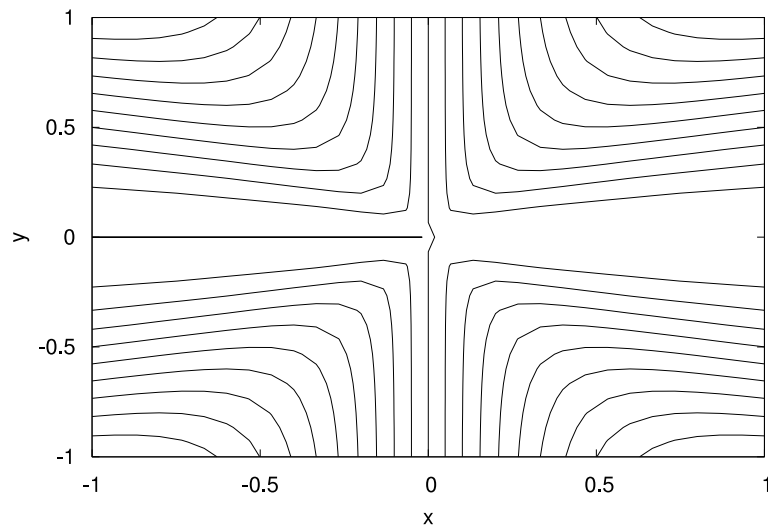


Figure 4.6 – Une autre fonction continue



Exemple 4.4 – Démonstration d’une continuité ( $\mathbb{R}^3$ )

Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}^3$  par :

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}}{x^2 + 2y^2 + x \times y + z^2}\right) & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

— La fonction est bien définie, car :

$$x^2 + 2y^2 + x \times y + z^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{7}{4}y^2 + z^2 = 0 \iff (x, y, z) = (0, 0, 0),$$

et

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 \geq 0.$$

- La fonction est continue sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ , car c'est la composée de fonctions continues.
- La fonction est continue en  $(0,0,0)$  car :

$$\frac{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}}{x^2 + 2y^2 + x \times y + z^2} \geq \frac{N}{\frac{5}{2}N^2} = \frac{2}{5} \frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow 0} +\infty,$$

et

$$\exp(-t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

On a posé :

$$N = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ et utilisé } x \times y \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2).$$

Comment montre-t-on qu'une fonction n'est pas continue en  $\vec{a}$  ? En construisant une fonction continue  $\varphi$  définie sur un voisinage  $I$  de 0, telle que <sup>1</sup> :

$$\forall t \in I, \varphi(t) \in \Delta, \varphi(0) = \vec{a} \text{ et } f \circ \varphi(t) \not\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f(\vec{a}).$$

#### Exemple 4.5 – Démonstration d'une discontinuité

##### Cas simple

La fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \times y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

n'est pas continue en  $(0, 0)$ , car :

$$\varphi(t) = (t, t) \text{ donne } \forall t \neq 0, f \circ \varphi(t) = \frac{1}{2} \not\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 = f(0, 0).$$

Voir la figure 4.7, page suivante.

##### Cas plus compliqué

La fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

n'est pas continue en  $(0, 0)$ , car :

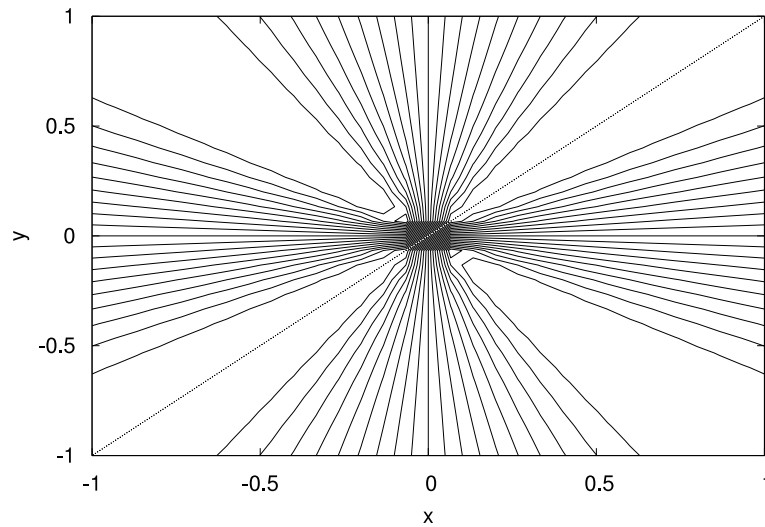
$$\varphi(t) = (t^3, t^2) \text{ donne } \forall t \neq 0, f \circ \varphi(t) = 1 \not\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 = f(0, 0).$$

#### Exercice(s) 4.3

4.3.1 Étudier la continuité de la fonction :

$$f(x, y) = \frac{1 - \cos(x \times y)}{y^2}, y \neq 0, \quad f(x, 0) = \frac{x^2}{2}$$

Figure 4.7 – Une autre fonction discontinue



4.3.2 Étudier la continuité de la fonction :

$$f(x, y) = \frac{e^{x \times y} - 1}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0$$

4.3.3 Étudier la continuité de la fonction :

$$f(x, y) = \frac{(1 + x + y^2) \times \sin(y)}{y}, \quad y \neq 0, \quad f(x, 0) = 1 + x$$

4.3.4 Étudier la continuité de la fonction :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \times y \times \ln(x^2 \times y)}{1 - (x \times y)^2} & \text{si } x \times y \notin \{0, 1\} \\ 0 & \text{si } x \times y = 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x \times y = 1 \end{cases}$$

4.3.5 Étudier la continuité de la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x^2 + y^2) \times \sin(\frac{1}{x^2 + y^2}) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{cases}$$

4.3.6 Étudier la continuité de la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x \times y \times \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{cases}$$

4.3.7 Étudier la continuité de la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x^p \times y^q}{x^2 + x \times y + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{cases}$$

avec  $(p, q) \in \mathbb{R}^*$ .

4.3.8 Étudier la continuité de la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \text{ si } x \neq y \\ (x, x) \mapsto g'(x) \end{cases}$$

où  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

### 4.2.3 Dérivées partielles

Dans tout ce paragraphe,  $\Delta$  désigne une partie ouverte non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

#### Rappel 4.2

La base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est notée (sans référence à  $n$ )

$$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n), \text{ où } \vec{e}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = (\delta_{i,k})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}.$$

#### Définition 4.7

Soit  $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\vec{x}_0 \in \Delta$ , on appelle *k-ième application partielle de f en  $\vec{x}_0$* , l'application définie par :

$$\varphi_k^{\vec{x}_0} : t \mapsto f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{e}_k).$$

On dit que  $f$  admet une *dérivée partielle par rapport à la k-ième variable en  $\vec{x}_0$*  si la fonction

$$\varphi_k^{\vec{x}_0} \text{ est dérivable en } 0.$$

#### Notation 4.2

On note :

$$\partial_k f(\vec{x}_0) \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) \text{ ou } df_{\vec{x}_0}(\vec{e}_k),$$

le nombre dérivé obtenu.

#### Exemple 4.6

Soit la fonction définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \times y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors on a :

$$\varphi_1^{(0,0)}(t) = 0 \text{ donc } \partial_1 f(0, 0) = 0.$$

De même, on a :

$$\varphi_2^{(1,1)}(t) = f(1, 1+t) = \frac{(1+t)^2}{1+(1+t)^2} \text{ donc } \partial_2 f(1, 1) = \frac{1}{2}.$$

### Notation 4.3

Soit  $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , tels que, en tout  $\vec{x}_0 \in \Delta$ , la dérivée partielle  $\partial_k f(\vec{x}_0)$  existe, on définit alors la  $k$ -ième fonction dérivée partielle de  $f$  par :

$$\partial_k f \stackrel{\text{Not}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \Delta \rightarrow \mathbb{R}^p \\ \vec{x} \mapsto \partial_k f(\vec{x}) \end{array} \right.$$

On la note aussi parfois :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

### Définition 4.8

Soit  $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  si :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \partial_k f \text{ existe et est continue sur } \Delta.$$

L'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Delta$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel qui sera noté  $\mathcal{C}^1(\Delta, \mathbb{R}^p)$ .

### Proposition 4.1

On a :

$$\mathcal{C}^1(\Delta, \mathbb{R}^p) \subset \mathcal{C}^0(\Delta, \mathbb{R}^p).$$

Toute fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  est continue.

### Démonstration

- En se ramenant aux fonctions composantes, on peut supposer  $p = 1$ .
- On le montre par récurrence sur  $n$ . Pour ne pas se perdre dans les notations, montrons-le pour  $n = 2$  (la démonstration se généralise facilement).  
Soit  $(x_0, y_0) \in \Delta$ . Soit  $(x, y) \in \Delta$ , supposons pour simplifier que le carré de diagonale  $(x_0, y_0)$  et  $(x, y)$  est inclus dans  $\Delta^a$ , alors :

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)|,$$

le théorème des accroissements finis nous dit alors, qu'il existe  $x_1 \in [x_0, x]$  et  $y_1 \in [y_0, y]$  tels que :

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |x - x_0| \times |\partial_1 f(x_1, y)| + |y - y_0| \times |\partial_2 f(x_0, y_1)|,$$

la continuité des dérivées partielles permet de conclure.

*a.* Ce qui est possible puisque  $\Delta$  est supposé ouvert.

### Remarque importante 4.8

Si les dérivées partielles ne sont plus continues, le résultat devient faux ! Ainsi la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = \frac{x \times y}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0,$$

admet des dérivées partielles en tout  $(x, y)$  et n'est pas continue en  $(0, 0)$  ! Voir la session Wxmaxima 4.2, de la présente page.

### Session Wxmaxima 4.2 – Dérivées partielles non continues

```
(%i1) f(x,y) := x*y/(x^2+y^2);
```

```
(%o1) f(x,y) := \frac{x y}{x^2 + y^2}
```



En dehors de  $(0,0)$  les calculs sont comme d'habitude.

(%i2) `diff(f(x,y),x);`

(%o2)  $\frac{y}{y^2 + x^2} - \frac{2x^2 y}{(y^2 + x^2)^2}$

(%i3) `diff(f(x,y),y);`

(%o3)  $\frac{x}{y^2 + x^2} - \frac{2x y^2}{(y^2 + x^2)^2}$

En  $(0,0)$ , il faut passer par les applications partielles :

(%i4) `f(0,t);f(t,0);`

(%o4) 0

(%o5) 0

Mais la fonction n'est pas continue en  $(0,0)$ .

(%i6) `f(t,t);`

(%o6)  $\frac{1}{2}$

#### Proposition 4.2

Soit  $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\vec{x}_0 \in \Delta$ , alors

$$\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n, f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{k=1}^n h_k \cdot \partial_k f(\vec{x}_0) + o(\|\vec{h}\|),$$

où l'expression  $o(\|\vec{h}\|)$  désigne une fonction  $\psi$  définie dans un voisinage de 0, à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  qui vérifie :

$$\left\| \frac{\psi(t)}{t} \right\| \xrightarrow[t \rightarrow 0, t \neq 0]{} 0,$$

ou, de manière équivalente, toutes les applications composantes sont des  $o(t)$ . On dit alors que  $f$  possède un développement limité à l'ordre 1 en  $\vec{x}_0$ .

#### Démonstration

- Comme précédemment, nous nous ramenons au cas  $p = 1$ .
- La démonstration se fait par récurrence sur  $n$ , nous allons l'expliciter pour  $n = 2$ , la généralisation ne pose pas de problème particulier (sauf des notations indigestes). Pour  $n = 2$ , soit  $(x_0, y_0) \in \Delta$  et  $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , sous les mêmes hypothèses que pour la démonstration précédente. Alors :

$$\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} \times \left| f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - h \times \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - k \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| = \delta(h, k)$$

vérifie

$$0 \leq \delta(h, k) \leq \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} \times \left( \left| f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - h \times \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| + \left| f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - k \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| \right).$$

Le théorème des accroissements finis et la continuité des dérivées partielles permettent de conclure à :

$$\delta(h, k) \xrightarrow[\|(h,k)\| \rightarrow 0]{} 0.$$

#### Remarque 4.9

Les dérivées partielles se comportent essentiellement comme les dérivées usuelles (sommes, produits, quotients).

#### Remarque importante 4.10

Pour la composition, le plus simple est d'utiliser les développements limités.

#### Exemple 4.7

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\Delta, \mathbb{R}^p)$  et  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et où  $\varphi(I) \subset \Delta$ . Alors,  $f \circ \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et on peut en écrire son développement limité à l'ordre 1. Notons  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  les applications composantes de  $\varphi$ , on a alors, pour  $\vec{x}_0 = \varphi(t_0)$  (voir la session Wxmaxima 4.3, de la présente page).

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(t_0 + h) &= f(\varphi(t_0) + h \cdot \varphi'(t_0) + o(h)) \\ &= f(\varphi(t_0)) + \sum_{k=1}^n (h \times \varphi'_k(t_0)) \cdot \partial_k f(\vec{x}_0) + o(h). \end{aligned}$$

Donc

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \sum_{k=1}^n \varphi'_k(t_0) \cdot \partial_k f(\vec{x}_0)$$

#### Session Wxmaxima 4.3 – Développements limités d'une fonction

```
(%i1) f(x,y) := x/(x^2+y^2+1);
```

```
(%o1) f(x,y) :=  $\frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$ 
```

La fonction  $f$  est une fonction rationnelle définie en tout point, on peut donc calculer facilement ses dérivées partielles.

```
(%i2) diff(f(x,y),x);
```

```
(%o2)  $\frac{1}{y^2 + x^2 + 1} - \frac{2x^2}{(y^2 + x^2 + 1)^2}$ 
```

```
(%i3) diff(f(x,y),y);
```

```
(%o3)  $-\frac{2xy}{(y^2 + x^2 + 1)^2}$ 
```

#### Exemple 4.8

On peut de même composer plusieurs fonctions de plusieurs variables. Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\Delta, \mathbb{R}^p)$  et  $g \in \mathcal{C}^1(\Delta', \mathbb{R}^n)$  (dont les fonctions composantes seront notées  $(g_1, \dots, g_n)$ ), où  $\Delta'$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^q$  et où  $g(\Delta') \subset \Delta$ , alors  $f \circ g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et on peut calculer ses  $q$  dérivées partielles à l'aide d'un développement limité. Soit  $\vec{x}_0 \in \Delta'$  et  $\vec{h} = (h_1, \dots, h_q)$  au voisinage de  $\vec{0}$  dans  $\mathbb{R}^q$ , on a :

$$\begin{aligned} f \circ g(\vec{x}_0 + \vec{h}) &= f(g(\vec{x}_0) + \sum_{k=1}^q h_k \cdot \partial_k g(\vec{x}_0) + o(\|\vec{h}\|)) \\ &= f(g(\vec{x}_0)) + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^q h_k \times \partial_k g_i(\vec{x}_0) \right) \cdot \partial_i f(g(\vec{x}_0)) + o(\|\vec{h}\|). \end{aligned}$$

Donc

$$\partial_k(f \circ g)(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^n \partial_k g_i(\vec{x}_0) \cdot \partial_i f(g(\vec{x}_0)).$$

#### Notation 4.4

On peut bien sûr étudier les éventuelles dérivées partielles des dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables. Cela donne les espaces :

$$\mathcal{C}^k(\Delta, \mathbb{R}^p), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

qui sont clairement des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. On a de plus quelques notations :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k, \partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_k} f \stackrel{\text{Not}}{=} \partial_{i_1, \dots, i_k}^k f \stackrel{\text{Not}}{=} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}.$$

Par exemple, on notera :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ la fonction } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \partial_1 \partial_2 f = \partial_{1,2}^2 f.$$

On trouve aussi la notation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ pour la fonction } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \partial_1 \partial_1 f = \partial_{1,1}^2 f \dots$$

Voir les calculs de la session **Wxmaxima 4.4**, de la présente page.

#### Session Wxmaxima 4.4 – Dérivées partielles d'ordre > 1

```
(%i1) f(x,y) := (x+5*y)/(x^2+y^2+1);
```

```
(%o1) f(x,y) := \frac{x+5y}{x^2+y^2+1}
```

Calculons :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y).$$

```
(%i2) diff(f(x,y),x,2);
```

```
(%o2) -\frac{2(5y+x)}{(y^2+x^2+1)^2} - \frac{4x}{(y^2+x^2+1)^2} + \frac{8x^2(5y+x)}{(y^2+x^2+1)^3}
```

Calculons :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

```
(%i3) diff(f(x,y),x,1,y,1);
```

```
(%o3) -\frac{2y}{(y^2+x^2+1)^2} - \frac{10x}{(y^2+x^2+1)^2} + \frac{8xy(5y+x)}{(y^2+x^2+1)^3}
```

Calculons :

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial x}(x,y).$$

```
(%i4) diff(f(x,y),x,2,y,1,x,1);
```

```
(%o4) \frac{24y}{(y^2+x^2+1)^3} + \frac{120x}{(y^2+x^2+1)^3} - \frac{144xy(5y+x)}{(y^2+x^2+1)^4} - \frac{144x^2y}{(y^2+x^2+1)^4} - \frac{240x^3}{(y^2+x^2+1)^4} + \frac{384x^3y(5y+x)}{(y^2+x^2+1)^5}
```

### Théorème 4.1 – Schwarz

Soit  $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^p$  telle que :

1. les fonctions :

$$\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_{1,2}^2 f \text{ et } \partial_{2,1}^2 f \text{ existent sur } \Delta ;$$

2. les fonctions :

$$\partial_{1,2}^2 f \text{ et } \partial_{2,1}^2 f \text{ sont continues sur } \Delta.$$

Alors :

$$\partial_{1,2}^2 f = \partial_{2,1}^2 f.$$

### Démonstration

On va utiliser les chemins décrits à la figure 4.8, page suivante. Soit  $(x_0, y_0) \in \Delta$ . On pose, pour tout réel  $h$  suffisamment petit,

$$F(h) = (f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0)) - (f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)).$$

Soit un réel  $h$  très petit. On pose, pour tout  $x$  suffisamment proche de  $x_0$ ,

$$u(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0).$$

Alors  $F(h) = u(x_0 + h) - u(x_0)$ . Comme  $\partial_1 f$  existe sur  $\Delta$ , on sait que  $u$  est dérivable sur le segment d'extrémités  $x_0$  et  $x_0 + h$ , donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe  $c_h$  compris entre  $x_0$  et  $x_0 + h$  tel que  $F(h) = h \times u'(c_h)$ . On a donc :

$$F(h) = h \times (\partial_1 f(c_h, y_0 + h) - \partial_1 f(c_h, y_0)).$$

Comme  $\partial_{2,1}^2 f$  existe sur  $\Delta$ , on sait que  $y \mapsto \partial_1 f(c_h, y)$  est dérivable sur le segment d'extrémités  $y_0$  et  $y_0 + h$ , donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe  $d_h$  compris entre  $y_0$  et  $y_0 + h$  tel que  $\partial_1 f(c_h, y_0 + h) - \partial_1 f(c_h, y_0) = h \times \partial_{2,1}^2 f(c_h, d_h)$ . On en déduit finalement que pour tout réel  $h \neq 0$  suffisamment petit, il existe  $(c_h, d_h)$  proche de  $(x_0, y_0)$  tel que

$$\frac{F(h)}{h^2} = \partial_{2,1}^2 f(c_h, d_h).$$

La continuité de  $\partial_{2,1}^2 f$  en  $(x_0, y_0)$  assure alors que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h)}{h^2} = \partial_{2,1}^2 f(x_0, y_0).$$

En écrivant maintenant que  $F(h) = (f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0 + h)) - (f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0))$ , on peut montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h)}{h^2} = \partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0).$$

D'où le résultat.

### Remarque 4.11

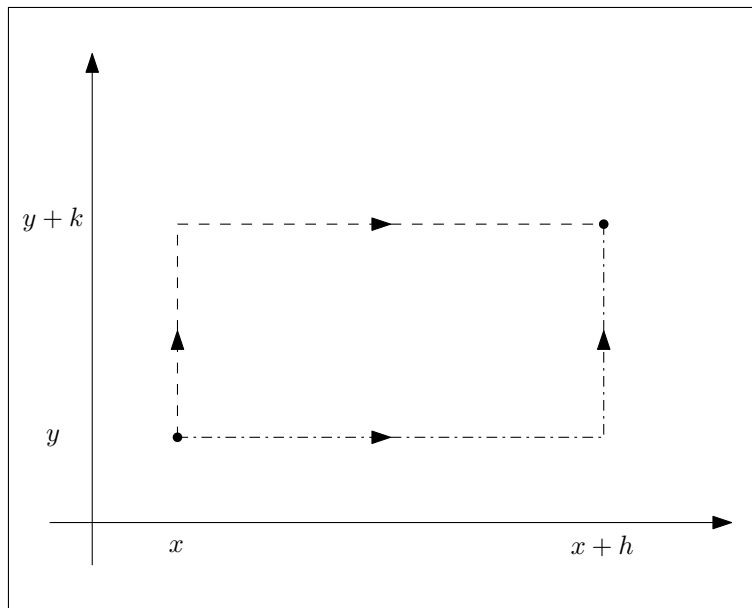
1. Les hypothèses sont en particulier satisfaites pour les fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$ .
2. Cela se généralise facilement aux changements d'ordre des dérivations partielles d'ordre  $k \geq 2$ .

### Exemple 4.9

On peut le vérifier par le calcul sur un exemple (voir la session `Wxmaxima 4.5`, page suivante) :

$$f(x, y) = \frac{x + 5y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Figure 4.8 – Démonstration du théorème de Schwarz



Session Wxmaxima 4.5 – Vérification du théorème de Schwarz

```
(%i1) f(x,y) := (x+5*y)/(x^2+y^2+1);
(%o1) f(x,y) := (x+5*y)/(x^2+y^2+1)
(%i2) diff(f(x,y),x,1,y,1);
(%o2) - (2*y)/(y^2+x^2+1)^2 - (10*x)/(y^2+x^2+1)^2 + (8*x*y*(5*y+x))/(y^2+x^2+1)^3
(%i3) diff(f(x,y),y,1,x,1);
(%o3) - (2*y)/(y^2+x^2+1)^2 - (10*x)/(y^2+x^2+1)^2 + (8*x*y*(5*y+x))/(y^2+x^2+1)^3
(%i4) ratsimp(%o2-%o3);
(%o4) 0
```

#### Exemple 4.10

La fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

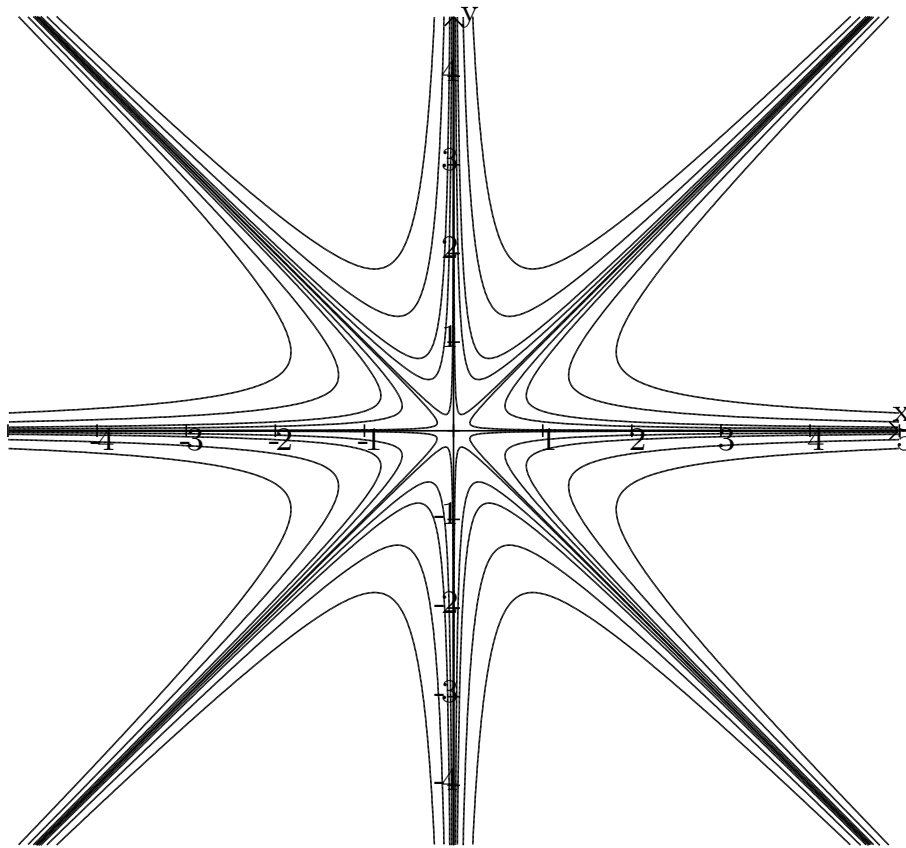
$$f(0,0) = 0 \text{ et } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(x,y) = x \times y \times \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  mais vérifie (voir la figure 4.9, page suivante) :

$$\partial_{1,2}^2 f(0,0) \neq \partial_{2,1}^2 f(0,0).$$

Voir la session Wxmaxima 4.6, page ci-contre.

Figure 4.9 – Intersion des dérivations illégales



Session Wxmaxima 4.6 – Intersion des dérivations illégales

```
(%i1) f(x,y) := x*y*(x^2-y^2)/(x^2+y^2);
```

```
(%o1) f(x,y) :=  $\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ 
```

On ajoute, bien sûr, la valeur en  $(0,0)$  :  $f(0,0) = 0$ . Puis, on calcule les dérivées partielles...

```
(%i2) d1f : diff(f(x,y),x);
```

```
(%o2)  $\frac{y(x^2 - y^2)}{y^2 + x^2} + \frac{2x^2y}{y^2 + x^2} - \frac{2x^2y(x^2 - y^2)}{(y^2 + x^2)^2}$ 
```

```
(%i3) d2f : diff(f(x,y),y);
```

```
(%o3)  $-\frac{2xy^2}{y^2 + x^2} + \frac{x(x^2 - y^2)}{y^2 + x^2} - \frac{2xy^2(x^2 - y^2)}{(y^2 + x^2)^2}$ 
```

Pour obtenir les valeurs des dérivées partielles en 0 (si elles existent), il faut revenir aux applications partielles.

```
(%i4) limit((f(t,0)-0)/t,t,0);
```

```
(%o4) 0
```

```
(%i5) limit((f(0,t)-0)/t,t,0);
```

```
(%o5) 0
```

Calculons les valeurs (si elles existent) de :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \text{ puis } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0),$$

en utilisant les applications partielles.

```
(%i6) ratsimp(subst([x=t,y=0],d2f/t));
```

```
(%o6) 1
```

```
(%i7) ratsimp(subst([x=0,y=t],d1f/t));
```

```
(%o7) - 1
```

#### Exercice(s) 4.4

4.4.1 Les fonctions suivantes sont-elles de classe  $\mathcal{C}^1$  ?

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \times \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \times \sin(x)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.3)$$

4.4.2 Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \varepsilon \times f(y, x), \text{ où } \varepsilon = \pm 1.$$

Quelles relations vérifient  $\partial_1 f$  et  $\partial_2 f$  ?

4.4.3 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable, calculer les dérivées partielles des fonctions :

$$g(x, y) = f(x + y), h(x, y) = f(x^2 + y^2) \text{ et } i(x, y) = f(x \times y).$$

4.4.4 Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , on pose :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ et } \forall (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2, g(\rho, \theta) = f(\rho \times \cos(\theta), \rho \times \sin(\theta)).$$

Calculer  $\Delta f$  à l'aide des dérivées partielles de  $g$ .

4.4.5 La fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^6}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0,$$

admet-elle un développement limité au voisinage de  $(0, 0)$  à l'ordre 1 ?

4.4.6 Soit la fonction définie sur  $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  par :

$$f(x, y) = \frac{x \times y}{(1 + x) \times (1 + y) \times (x + y)}.$$

(a) Calculer un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de  $(1, 1)$ .

(b) Montrer que la fonction se prolonge par continuité à  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ .

#### 4.2.4 Caractérisation des extremums locaux

Dans ce paragraphe  $\Delta$  désigne une partie ouverte non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

##### Rappel 4.3

1. Une fonction définie sur  $\Delta$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  possède un *maximum local* en  $\vec{x}_0$  si

$$\exists r > 0, \forall \vec{y} \in \Delta, \|\vec{y} - \vec{x}_0\| \leq r \Rightarrow f(\vec{y}) \leq f(\vec{x}_0).$$

2. De même, une fonction possède un *minimum local* en  $\vec{x}_0$  si

$$\exists r > 0, \forall \vec{y} \in \Delta, \|\vec{y} - \vec{x}_0\| \leq r \Rightarrow f(\vec{y}) \geq f(\vec{x}_0).$$

3. On dit que  $f$  possède un *extremum local* en  $\vec{x}_0$  si  $f$  possède un maximum local ou un minimum local en  $\vec{x}_0$ .

##### Théorème 4.2 – Caractérisation des extremums locaux

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\Delta, \mathbb{R})$ , soit  $\vec{x}_0 \in \Delta$ , alors

$$f \text{ possède un extremum local en } \vec{x}_0 \Rightarrow \left[ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \partial_k f(\vec{x}_0) = 0. \right]$$

##### Démonstration

Supposons que  $\vec{x}_0$  soit un maximum.

Considérons l'application partielle en  $\vec{x}_0$ . C'est-à-dire l'application :

$$\varphi_k^{\vec{x}_0} : t \mapsto f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{e}_k).$$

Elle est définie au voisinage de 0, dérivable en 0, puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , or :

$$\text{si } t > 0, \frac{\varphi_k^{\vec{x}_0}(t) - \varphi_k^{\vec{x}_0}(0)}{t} \leq 0,$$

donc

$$\partial_k f(\vec{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi_k^{\vec{x}_0}(t) - \varphi_k^{\vec{x}_0}(0)}{t} \leq 0.$$

De même,

$$\text{si } t < 0, \frac{\varphi_k^{\vec{x}_0}(t) - \varphi_k^{\vec{x}_0}(0)}{t} \geq 0,$$

donc

$$\partial_k f(\vec{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\varphi_k^{\vec{x}_0}(t) - \varphi_k^{\vec{x}_0}(0)}{t} \geq 0.$$

Finalement,  $\partial_k f(\vec{x}_0) = 0$ .

##### Remarque 4.12

La réciproque est fausse ! Elle l'est déjà dans le cas  $n = 1$ , en prenant par exemple la fonction :

$$x \mapsto x^3,$$

qui n'a pas d'extremum local en 0. Cet exemple se généralise dans le cas général avec :

$$\vec{x} \mapsto \sum_{k=1}^n x_k^3,$$



qui n'a pas d'extremum en  $\vec{0}$ .

#### Remarque importante 4.13

Pour étudier les extremums de  $f \in \mathcal{C}^1(\Delta, \mathbb{R})$  :

1. on détermine les *points critiques* de  $f$  (lorsque toutes les dérivées partielles de  $f$  s'annule) ;
2. si  $\vec{x}_0$  est un point critique de  $f$ , on étudie le signe de  $f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0)$  :
  - (a) si  $f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0)$  change de signe sur tout voisinage de  $\vec{0}$  alors  $\vec{x}_0$  n'est pas un extremum local ;
  - (b) si  $f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0)$  garde un signe constant pour tout  $\vec{h}$  au voisinage de  $\vec{0}$  alors  $\vec{x}_0$  est un extremum local ;
  - (c) si  $f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0)$  garde un signe constant pour tout  $\vec{h}$  alors  $\vec{x}_0$  est un extremum global.

#### Exemple 4.11

Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^{*2}$  par :

$$f(x, y) = \frac{x \times y}{(1+x) \times (1+y) \times (x+y)},$$

elle admet un maximum local en  $(1, 1)$ . Les calculs sont présentés dans le code **Wxmaxima 4.7**, de la présente page. On conclut en remarquant que

$$2h^2 - 2h \times k + 2k^2 + h \times k^2 + h^2 \times k = (h - k)^2 + h^2 \times (1 + k) + k^2 \times (1 + h) \geq 0,$$

si  $|h| \leq 1$  et  $|k| \leq 1$ .

#### Session Wxmaxima 4.7 – Étude d'un extremum

```
(%i1) f(x,y) := x*y/((1+x)*(1+y)*(x+y));
```

```
(%o1) f(x,y) := \frac{x y}{(1+x) (1+y) (x+y)}
```

```
(%i2) f(1+h,1+k)-f(1,1);
```

```
(%o2)/T/ - \frac{h k^2 + 2k^2 + h^2 k - 2hk + 2h^2}{8 (h+2) (k+2) (k+h+2)}
```

#### Exemple 4.12

La fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = \frac{x \times y}{1 + x^2 + y^2},$$

n'a pas d'extremum local sur  $\mathbb{R}^2$ . Les calculs sont présentés dans le code **Wxmaxima 4.8**, de la présente page et en remarquant que  $f(x, y)$  change de signe sur tout voisinage de  $(0, 0)$ .

#### Session Wxmaxima 4.8 – Non existence d'un extremum

```
(%i1) f(x,y) := x*y/(x^2+y^2+1);
```

```
(%o1) f(x,y) := \frac{x y}{x^2 + y^2 + 1}
```

```
(%i2) solve([diff(f(x,y),x),diff(f(x,y),y)],[x,y]);
```

```
(%o2) [[x = 0, y = 0], [x = 0, y = -i], [x = 0, y = i], [x = -i, y = 0], [x = i, y = 0]]
```

#### Exemple 4.13

La fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^2}{1 + x^2 + y^2},$$

n'a que  $(0, 0)$  comme point critique et change de signe au voisinage de  $(0, 0)$  au moins le long de la droite  $y = 0$ .

#### Exemple 4.14

La fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^2}{1 + x^2 + y^2},$$

a un minimum global en  $(0, 0)$  :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \geq 0 = f(0, 0).$$

Figure 4.10 – Étude d'un extremum

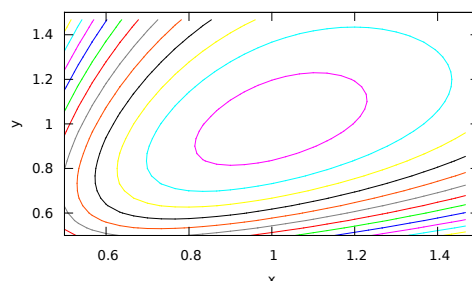


Figure 4.11 – Non existence d'un extremum

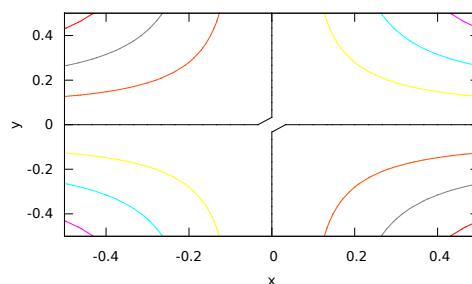


Figure 4.12 – Extremum

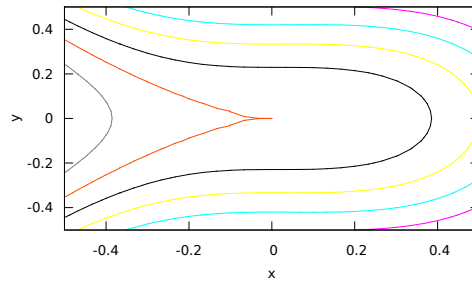
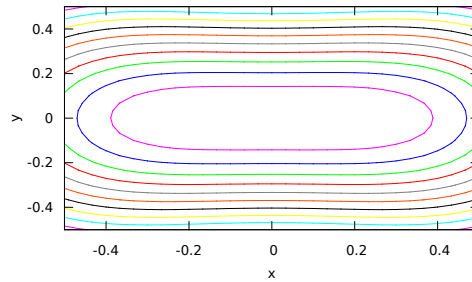


Figure 4.13 – Extremum



Remarque 4.14

On peut visualiser facilement certaines de ces situations en traçant les lignes de niveaux de  $f(x, y)$  (cela deviendra plus difficile lorsqu'il y aura plus de deux variables). Ainsi :

1. La fonction :

$$f(x, y) = \frac{x \times y}{(1 + x) \times (1 + y) \times (x + y)},$$

se visualise au voisinage de  $(1, 1)$  par la figure 4.10, page précédente.

2. La fonction :

$$f(x, y) = \frac{x \times y}{1 + x^2 + y^2},$$

se visualise au voisinage de  $(0, 0)$  par la figure 4.11, page précédente.

3. La fonction :

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^2}{1 + x^2 + y^2},$$

se visualise au voisinage de  $(0, 0)$  par la figure 4.12, de la présente page.

4. La fonction :

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^2}{1 + x^2 + y^2},$$

se visualise au voisinage de  $(0, 0)$  par la figure 4.13, de la présente page.

### Exercice(s) 4.5

4.5.1 Étudier les extremums locaux sur  $\mathbb{R}^2$  des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = (x - y)^3 - 6x \times y \quad (4.4)$$

$$f(x, y) = x^3 + x \times y^2 - x^2 \times y - y^3 \quad (4.5)$$

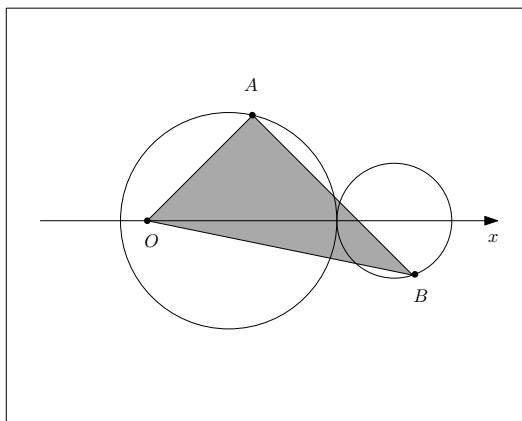
$$f(x, y) = x^2 \times y + \ln(1 + y^2) \quad (4.6)$$

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) \times \exp(x^2 - y^2) \quad (4.7)$$

$$f(x, y) = x \times e^y - y \times e^x. \quad (4.8)$$

4.5.2 On considère dans le plan deux cercles centrés sur l'axe  $Ox$  et tangents extérieurement entre eux. Trouver l'aire maximale du triangle  $AOB$  lorsque  $A$  parcourt le premier cercle et  $B$  le second. Voir la figure 4.14, de la présente page.

Figure 4.14 – Triangle d'aire maximale



## 4.3 Systèmes de coordonnées

L'objectif de ce paragraphe<sup>2</sup> est de changer le mode de représentation des points de  $\mathbb{R}^n$  (espace affine) de manière à :

1. Pouvoir représenter tous les points de  $\mathbb{R}^n$ .
2. Avoir le maximum de régularité de la représentation.
3. Utiliser les symétries de la situation en les traduisant dans le paramétrage (nous verrons, par exemple, les symétries circulaires, cylindriques et sphériques...)
4. Pouvoir calculer simplement.

### Définition 4.9

Nous appellerons *système de coordonnées (curvilignes orthogonales)*, toute fonction :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \underline{u} = (u_1, \dots, u_n) \mapsto \phi(\underline{u}) = \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

vérifiant, en notant  $\Delta$  le domaine de définition de  $\phi$  :

- $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur son domaine de définition (maximum de régularité).
- $\phi$  est surjective (représentation de tous les points).
- Et (calculs faciles) :

$$\forall \underline{u} \in \Delta, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow \langle \partial_i \phi(\underline{u}), \partial_j \phi(\underline{u}) \rangle = 0.$$

### Notation 4.5

Fondamentalement, on essaye d'exprimer les coordonnées dans le repère orthonormé canonique  $(x_1, \dots, x_n)$ , à l'aide des *nouvelles variables*  $(u_1, \dots, u_n)$ . Si les applications composantes de  $\phi$  sont  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , on notera parfois ce changement de variables sous la forme :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_n).$$

### Définition 4.10

Lorsque nous disposons d'un système de coordonnées, en posant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall \underline{u} \in \Delta, \mu_i(\underline{u}) = \varepsilon_i \times \|\partial_i \phi(\underline{u})\|,$$

où les  $\varepsilon_i$  sont choisis dans  $\{-1, +1\}$  de manière à avoir des fonctions de  $\underline{u}$  de régularité maximale. On appelle *base orthonormée mobile associée à  $\phi$* , la base orthonormée définie (lorsque c'est possible) par : <sup>a</sup>

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall \underline{u} \in \tilde{\Delta}, \vec{e}_i(\underline{u}) = \frac{1}{\mu_i(\underline{u})} \cdot \partial_i \phi(\underline{u}),$$

où

$$\tilde{\Delta} = \{\underline{u} \in \Delta, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mu_i(\underline{u}) \neq 0\}.$$

a. La notation  $\vec{e}_i$  pour élégante qu'elle soit, peut-être gênante lorsqu'il y a plusieurs systèmes de coordonnées. Nous noterons donc abusivement, mais de manière plus explicite :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \vec{e}_{u_i} \text{ au lieu de } \vec{e}_i.$$

Ici,  $u_i$  est une écriture et ne peut pas prendre de valeur !

### Exercice(s) 4.6

4.6.1 Calculer les bases mobiles et les coefficients  $\mu_i$  pour les changements de coordonnées suivants :

$$(\rho, \theta) \mapsto (\rho \times \cos(\theta), \rho \times \sin(\theta)) \quad (4.9)$$

$$(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \times \sin(\theta) \times \cos(\varphi), r \times \sin(\theta) \times \sin(\varphi), r \times \cos(\theta)) \quad (4.10)$$

$$(u, v) \mapsto \left( \frac{1}{2} \frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2}, \frac{u \times v}{(u^2 + v^2)^2} \right) \quad (4.11)$$

$$(u, v) \mapsto \left( \frac{u^2 - v^2}{2}, u \times v \right) \quad (4.12)$$

$$(u, v, w) \mapsto \left( u \times v \times \cos(w), u \times v \times \sin(w), \frac{u^2 - v^2}{2} \right). \quad (4.13)$$

### 4.3.1 Dans le plan

$\mathbb{R}^2$  est ici considéré comme un espace affine, et  $(x, y)$  désignent les coordonnées dans le repère orthonormé canonique  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ .

#### 4.3.1.1 La droite

Proposition 4.3

Soit  $\Delta$  une droite du plan, passant par un point  $A = (a, b)$  et ayant un vecteur directeur  $\vec{u} = (\alpha, \beta) \neq \vec{0}$  et un vecteur normal  $\vec{v}$  que l'on peut choisir  $= (-\beta, \alpha)$  de manière à ce que :

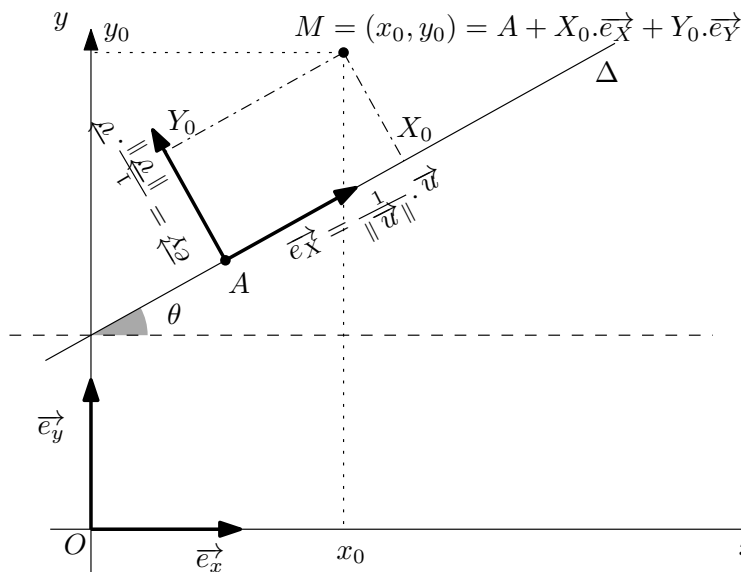
$$\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \text{ et } \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) > 0.$$

Si on appelle  $\theta$  une mesure de l'angle orienté  $(\vec{e}_x, \vec{u})$ , il est naturel alors de prendre comme repère privilégié la droite  $\Delta$ , le repère

$$\mathcal{R} = \left( A; \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}, \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} \right).$$

Voir la figure 4.15, de la présente page.

Figure 4.15 – Représentation d'une droite



Remarque 4.15

Notons  $(X, Y)$  les coordonnées d'un point quelconque dans ce nouveau repère  $\mathcal{R}$ .

1. La droite  $\Delta$  a pour équation dans  $\mathcal{R}$  :  $Y = 0$ .
2. Le système de coordonnées associé à ce changement de coordonnées est : <sup>a</sup>

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) \mapsto (a + X \times \cos(\theta) - Y \times \sin(\theta), b + X \times \sin(\theta) + Y \times \cos(\theta)) \end{cases}$$

3. Un calcul simple nous donne :

$$\partial_1 \phi(X, Y) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = \vec{e}_X = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

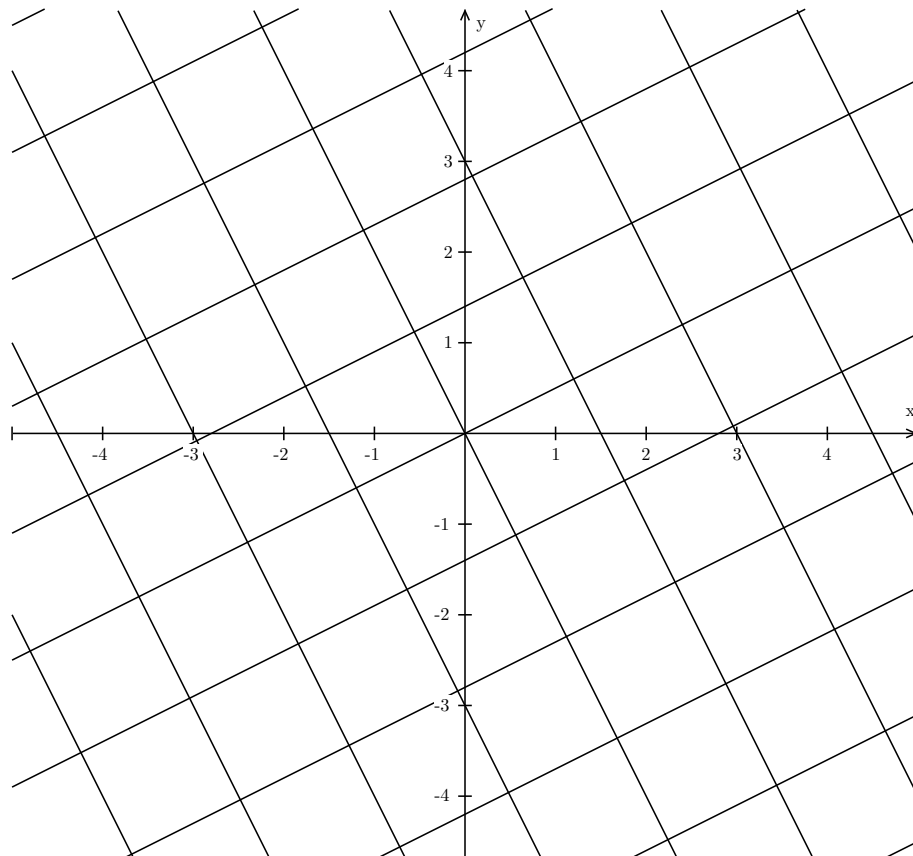
et

$$\partial_2 \phi(X, Y) = (-\sin(\theta), \cos(\theta)) = \vec{e}_Y = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

4. La transformation est *isométrique*, c'est-à-dire que un segment de longueur 1 (resp. un carré d'aire 1) est transformée en un segment de longueur 1 (resp. un carré d'aire 1).
5. Notons que les droites parallèles à  $\Delta$  ont pour équation  $Y = \lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) et les droites perpendiculaires à  $\Delta$  ont pour équation  $X = \nu$  ( $\nu \in \mathbb{R}$ ). Voir la figure 4.16, de la présente page.

a. On a ici une translation de vecteur  $\vec{OA}$ , suivi d'une rotation de centre  $A$  et d'angle orienté de mesure  $\theta$ .

Figure 4.16 – Système de coordonnées adapté à une droite du plan



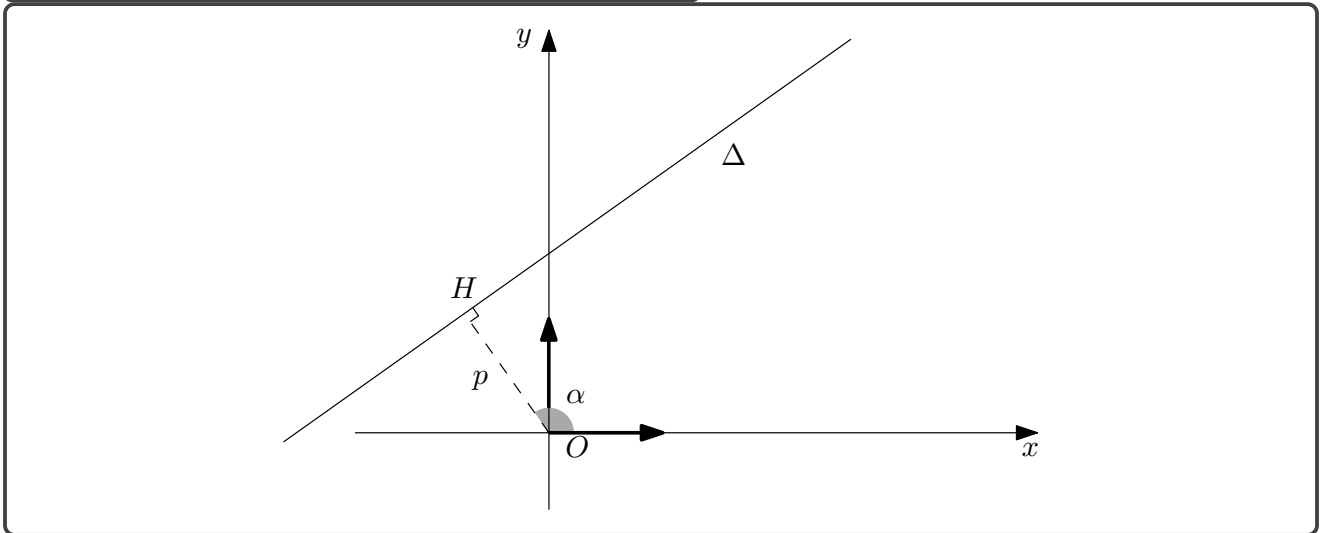
#### Remarque 4.16

On voit que l'on aurait eu intérêt à prendre  $\vec{u}$  de norme 1, en ce cas, en prenant, si  $H$  est la projection de  $O$  sur la droite  $\Delta$ , si  $p = d(O, H)$  et si  $\alpha$  est la mesure de l'angle  $(\vec{e}_x, \vec{OH})$  lorsque  $O \neq H$  (si  $O = H$ , on impose  $\alpha \in ]-\pi/2, \pi/2]$ ), alors la droite  $\Delta$  a une équation dite *normalisée* :

$$x \times \cos(\alpha) + y \times \sin(\alpha) = p.$$

Voir la figure 4.17, de la présente page.

Figure 4.17 – Équation normalisée d'une droite du plan



#### Exercice(s) 4.7

4.7.1 Soit la droite d'équation ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) :

$$\lambda \times x + 3y = \lambda^3 - 2\lambda^2,$$

la mettre sous forme normalisée.

4.7.2 Soit la droite d'équation :

$$2x - 3y = 1,$$

en notant  $(X, Y)$  les coordonnées dans le repère adapté à cette droite, écrire les relations  $X$  et  $Y$  en fonction de  $x$  et  $y$  (coordonnées dans le repère canonique).

#### 4.3.1.2 Le cercle

##### Proposition 4.4

Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $A = (a, b)$ , de rayon  $r > 0$ . Il est très classiquement paramétré par :

$$x = a + r \times \cos(\theta) \text{ et } y = b + r \times \sin(\theta).$$

Il correspond à  $\rho = r$  en coordonnées polaires, après une translation de vecteur  $\overrightarrow{OA}$  pour ramener le centre du cercle au centre du repère.

##### Définition 4.11 – Coordonnées polaires

Soit  $\phi$  le système de coordonnées (coordonnées polaires) défini par :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\rho, \theta) \mapsto (\rho \times \cos(\theta), \rho \times \sin(\theta)) \end{cases}$$



On obtient alors la base orthonormée directe mobile :

$$\vec{e}_\rho(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \text{ et } \vec{e}_\theta(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta)).$$

Remarque 4.17

1.  $\phi$  est bien de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
2.  $\phi$  est bien surjectif : si  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , on peut prendre, par exemple :

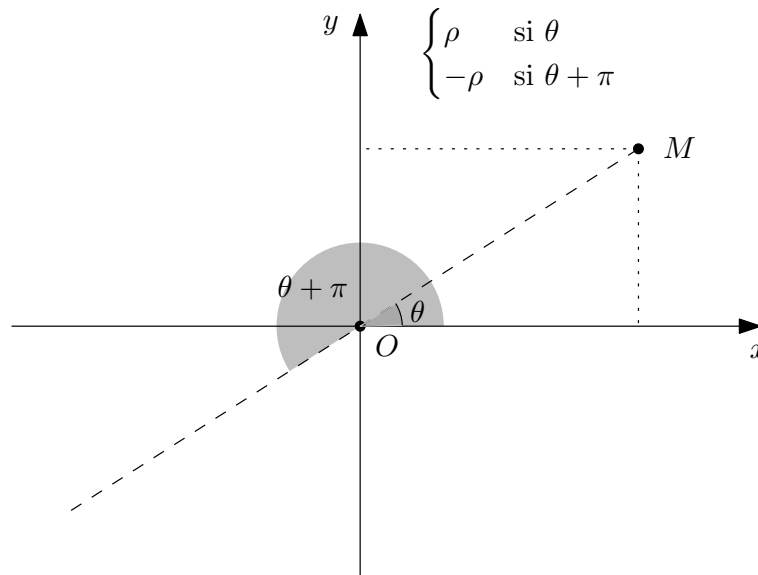
$$\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \text{ et } \theta_0 = \begin{cases} \text{quelconque} & \text{si } (x_0, y_0) = (0, 0) \\ \pi & \text{si } x_0 < 0 \text{ et } y_0 = 0 \\ 2 \arctan\left(\frac{y_0}{x_0 + \rho_0}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.  $\phi$  n'est pas injectif. En effet, chaque point du plan ( $\neq O$ ) peut être représenté par les coordonnées polaires

$$(\rho_0, \theta_0 + 2k \times \pi) \text{ ou } (-\rho_0, \theta_0 + \pi + 2k \times \pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Voir la figure 4.18, de la présente page.

Figure 4.18 – Coordonnées polaires



Démonstration de la surjectivité

Si nous sommes dans le dernier cas, alors  $(x_0, y_0) \notin ]-\infty, 0] \times \mathbb{R}$ , on peut donc prendre une mesure  $\theta$  de l'angle  $(\vec{e}_x, \widehat{OM})$  dans  $] -\pi, \pi[$ . Posons  $t = \tan(\theta_0/2)$ , alors :

$$x_0 = \rho_0 \times \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \text{ et } y_0 = \rho_0 \times \frac{2t}{1 + t^2}.$$

D'où :

$$t = \tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \frac{y_0}{x_0 + \rho_0} \text{ et } \frac{\theta_0}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[.$$

Le résultat est alors immédiat.

#### Remarque 4.18

Le physicien souhaitera souvent avoir  $\rho \geq 0$ , ce qui lui permet de voir  $\rho$  comme une distance de  $O$  à  $M$ . Cela lui posera des problèmes de régularité lorsque le mouvement représenté passera par  $O$ . Pour le mathématicien, seule la régularité des fonctions lui importe.

#### Remarque 4.19

1. Les cercles de centre  $O$ , sont de la forme  $\rho = \lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ), et les droites passant par  $O$  sont de la forme  $\theta = \nu$  ( $\nu \in \mathbb{R}$ ). Voir la figure 4.19, de la présente page.
2. La transformation n'est pas isométrique. Ainsi, lorsque l'on passe de  $\theta$  à  $\theta + 1$  en restant sur un cercle de rayon  $\rho > 0$  constant, la longueur initiale de l'arc est  $1 = (\theta + 1) - \theta$ , celle de l'arc obtenu est dépendant de  $\rho$  :  $(\rho \times (\theta + 1) - \rho \times \theta = \rho)$ .<sup>a</sup> De même, pour les aires : si on part du carré  $(\rho, \theta) \in [\rho_0, \rho_0 + 1] \times [\theta_0, \theta_0 + 1]$ , ( $\rho_0 \geq 0$ ), l'aire initiale est de 1, l'aire de  $\phi([\rho_0, \rho_0 + 1] \times [\theta_0, \theta_0 + 1])$  vaut :<sup>b</sup>

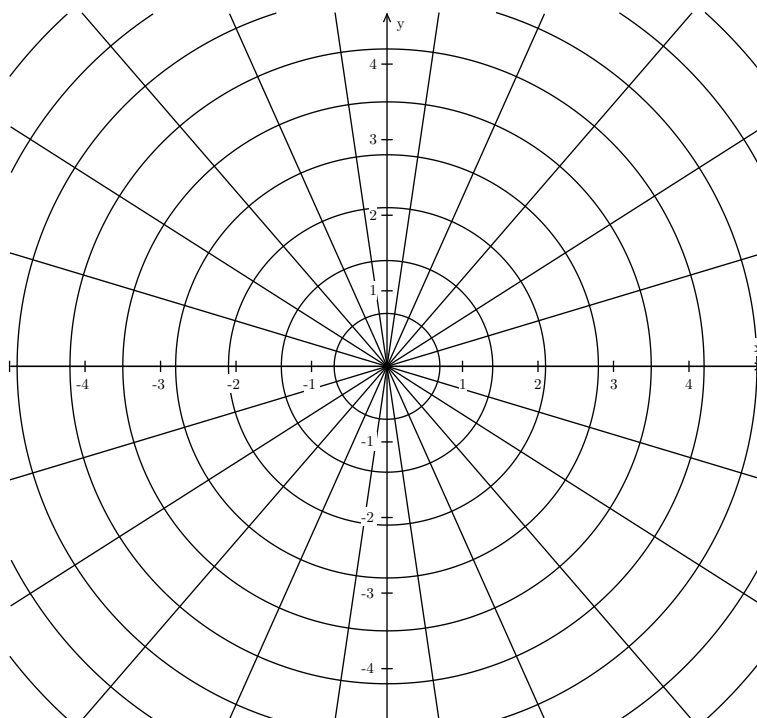
$$\frac{1}{2} ((\rho_0 + 1)^2 - \rho_0^2) \times ((\theta_0 + 1) - \theta_0) = \rho_0 + \frac{1}{2},$$

qui dépend à nouveau de  $\rho_0$ . *De plus, cela dépend de la taille du carré initial!*

<sup>a</sup>. Rappelons que la longueur d'un arc de cercle est  $R \times \delta\theta$ , où  $R$  est le rayon du cercle et  $\delta\theta$  la variation des mesures d'angles. Ainsi, si  $\delta\theta = 2\pi$ , on retrouve la longueur bien connue  $2\pi R$ , circonférence du cercle.

<sup>b</sup>. Rappelons que l'aire d'un secteur du disque de rayon  $R$  vaut  $\frac{1}{2} R^2 \times \delta\theta$ . Si on prend  $\delta\theta = 2\pi$ , on retrouve l'aire du disque  $\pi R^2$ .

Figure 4.19 – Système de coordonnées polaires



*Calculs* : le plus souvent, les coordonnées polaires sont utilisées pour exprimer une symétrie lors d'un mouvement. On a donc  $\rho$  et  $\theta$  qui dépendent du temps  $t$ , nous les supposons dans un premier temps de classe  $\mathcal{C}^1$ . Comment les calculs s'effectuent-ils ? Simplement, avec les règles usuelles de calculs. *Il ne faut pas*

oublier que  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\theta$  sont des fonctions de  $\theta$ .

$$M(t) = O + \rho(t) \cdot \vec{u}_\rho(\theta(t)), \text{ donc, la vitesse } V(t) = \rho'(t) \cdot \vec{u}_\rho(\theta(t)) + \rho(t) \times \theta'(t) \cdot \vec{u}_\theta(\theta(t)),$$

si  $\rho$  et  $\theta$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors l'accélération, s'écrit :

$$\vec{a}(t) = (\rho''(t) - \rho(t) \times \theta'^2(t)) \cdot \vec{u}_\rho(\theta(t)) + (2\rho'(t) \times \theta'(t) + \rho(t) \times \theta''(t)) \cdot \vec{u}_\theta(\theta(t)).$$

On a utilisé les formules simples :

$$\vec{u}_\rho'(\theta) = \vec{u}_\theta(\theta) \text{ et } \vec{u}_\theta'(\theta) = -\vec{u}_\rho(\theta).$$

#### Exercice(s) 4.8

4.8.1 On considère une courbe définie en coordonnées polaires par :

$$\rho = f(\theta), \text{ où } \theta \in \mathbb{R} \quad (\text{ie } M(\theta) = O + \rho(\theta) \cdot \vec{e}_\rho(\theta)).$$

Quelle propriété a la courbe obtenue lorsque

- (a)  $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(-\theta) = f(\theta)$  ?
- (b)  $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(-\theta) = -f(\theta)$  ?
- (c)  $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$  ?
- (d)  $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta + 2\pi) = -f(\theta)$  ?
- (e)  $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta + \pi) = f(\theta)$  ?
- (f)  $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta + \pi) = -f(\theta)$  ?
- (g)  $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(-\theta + \pi) = f(\theta)$  ?
- (h)  $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(-\theta + \pi) = -f(\theta)$  ?
- (i)  $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(-\theta + \pi/2) = f(\theta)$  ?
- (j)  $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(-\theta + \pi/2) = -f(\theta)$  ?

*Calculs en coordonnées polaires*

4.8.2 Soit  $ABC$  un triangle équilatéral,  $R$  le rayon du cercle circonscrit. Déterminer le lieu des points  $M$  du plan tels que

$$d(A, M) \times d(B, M) \times d(C, M) = R^3.$$

4.8.3 Un cercle roule extérieurement sur un cercle fixe de même rayon. Quelle courbe décrit un point du premier cercle ? Voir la figure 4.20, page suivante.

4.8.4 Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $A = (1, 0)$  et de rayon  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Déterminer le lieu des projetés orthogonaux de  $O$  sur les tangentes à ce cercle.

4.8.5 Trouver l'équation polaire de la courbe définie par :

$$x^2 + y^2 = 3\sqrt{x^2 + y^2} - 3x.$$

4.8.6 Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $O$  de rayon 1 et  $A = (1, 0)$ . Soit  $M \in \mathcal{C}$ . Soit  $I$  l'intersection de la droite  $x = 1$  et de la bissectrice intérieure de  $\widehat{AOM}$ . Soit enfin  $J$  le symétrique de  $I$  par rapport à  $M$ . Déterminer le lieu des points  $J$  lorsque  $M$  décrit  $\mathcal{C}$ . Voir la figure 4.21, page 160.

4.8.7 Soit  $\Omega = (2, 0)$ ,  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon 2 et  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $(y = 1)$ . A tout point  $P$  de  $\mathcal{C}$  différent de  $O$  on associe le point  $N$  intersection de  $(OP)$  et  $\mathcal{D}$ . On définit alors  $M$  par  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NP}$ . On note  $\mathcal{T}$  le lieu des points  $M$ .

- (a) Donner les équations polaires de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .
- (b) Montrer que  $\mathcal{T}$  a pour équation polaire

$$\rho(\theta) = \frac{2 \sin(2\theta) - 1}{\sin(\theta)}$$

(c) Montrer que  $(\widehat{\vec{e}_x, \vec{\Omega M}}) = 3(\widehat{\vec{e}_x, \vec{OM}})[2\pi]$ . Voir la figure 4.22, page suivante.

4.8.8 Soit la courbe définie en coordonnées polaires par (c'est une *cardioïde*) :

$$\rho(\theta) = a \times (1 + \cos(\theta)).$$

(a) Trouver le lieu des milieux des segments  $[M, M']$ , lorsque  $M$  et  $M'$  parcourent la courbe avec :

$$\vec{OM} \perp \vec{OM'}.$$

Voir la figure 4.23, page 161.

(b) Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , montrer que la courbe possède trois points en lesquels la tangente fait un angle de mesure  $\alpha$  par rapport à l'axe des  $x$ . Isobarycentre de ces trois points ?

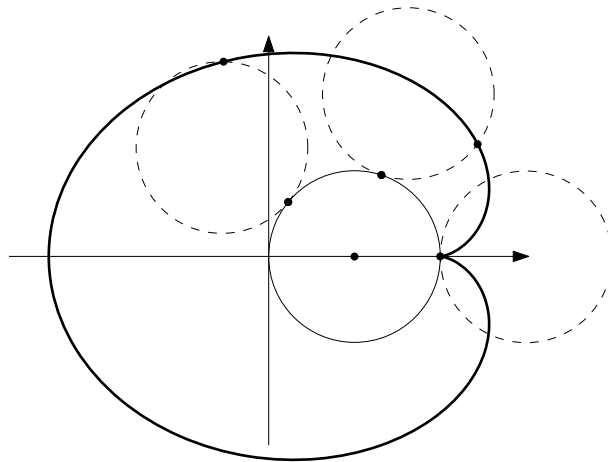
(c) Lieu des intersections des tangentes aux points de paramètres  $\theta$  et  $\theta + \pi$  lorsque  $\theta$  varie. Voir la figure 4.24, page 161.

4.8.9 Soit la courbe définie en coordonnées polaires par :

$$\rho(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\theta}.$$

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , montrer que la droite passant par  $O$  et faisant un angle de mesure  $\alpha$  avec  $Ox$  coupe la courbe en une infinité de points. Puis, montrer que les tangentes à la courbe en ces points passent par un point fixe.

Figure 4.20 – Épicicloïde



## 4.3.2 Dans l'espace

### 4.3.2.1 La droite

#### Proposition 4.5

— Une droite  $\Delta$  est définie par la donnée d'un point  $A$  et d'un vecteur directeur  $\vec{u}$  que l'on peut supposer de norme 1. Soit  $\vec{v}$  un autre vecteur de norme 1, orthogonal à  $\vec{u}$ , on effectuera alors le changement de repère (qui définit aussi la base mobile) :

$$(A; \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}).$$

Figure 4.21 – Stophoïde

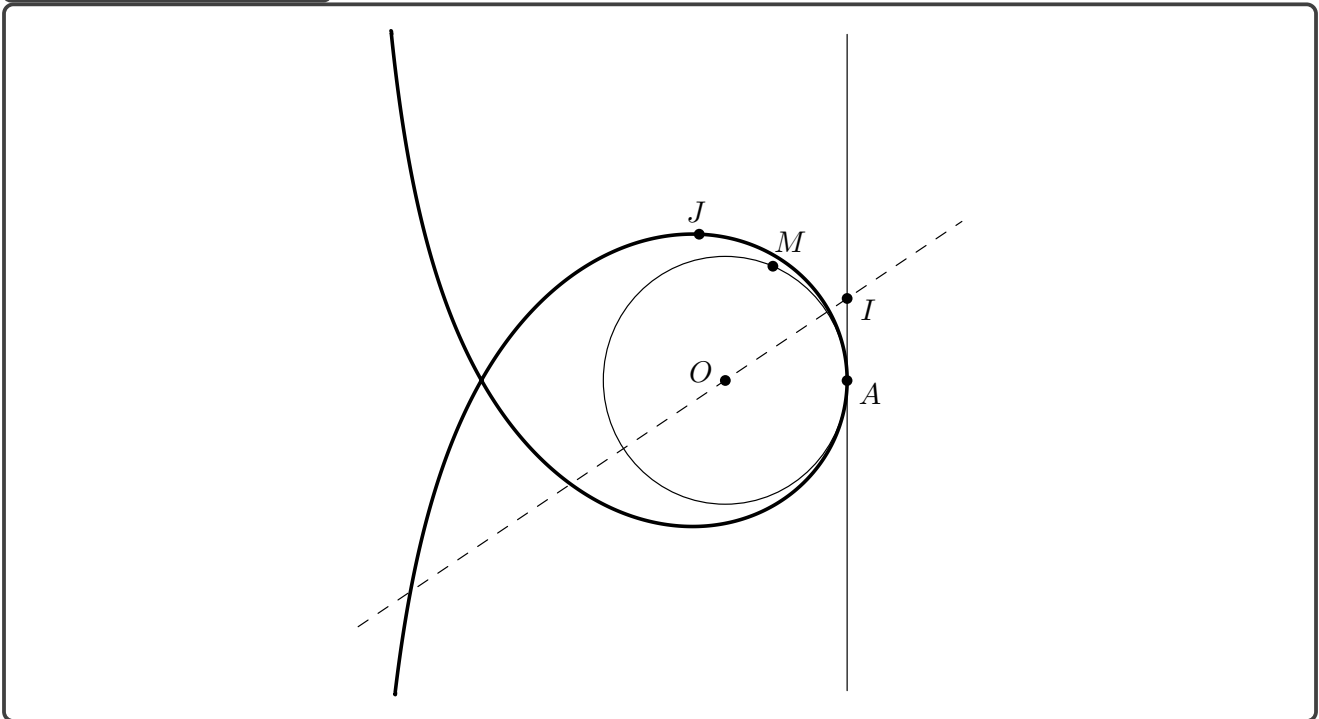
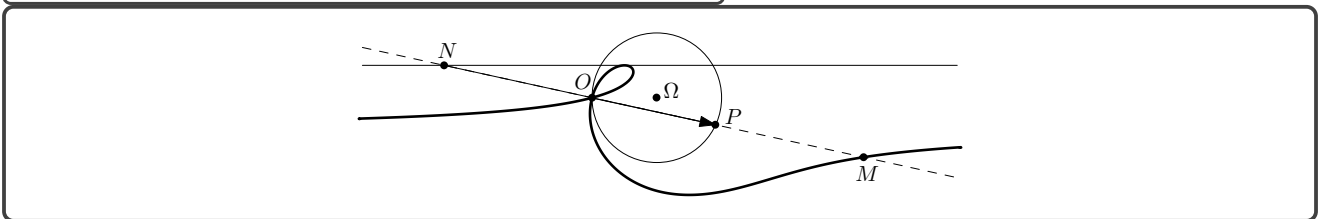


Figure 4.22 – Construction pour l'exercice 4.8.7, page 158



— Les nouvelles coordonnées  $(X, Y, Z)$  seront alors définies par rapport aux anciennes  $(x, y, z)$  en écrivant (voir la figure 4.25, page 162) :

$$M = A + X \cdot \vec{u} + Y \cdot \vec{v} + Z \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = (x, y, z).$$

— Le changement de coordonnées obtenu est alors :

$$(X, Y, Z) \mapsto (x, y, z).$$

— La transformation est isométrique (conservation des aires et des longueurs).

#### Exercice(s) 4.9

4.9.1 Soit la droite  $D$  définie par :

$$2x + y - z = 1 \text{ et } x - 2y + z = 2.$$

- Produire un système de coordonnées adapté à cette droite.
- Écrire dans ce nouveau système l'expression de la rotation d'axe  $D$  (orientée en prenant un vecteur directeur dont le premier coefficient est  $> 0$ ) et d'angle  $\pi/3$ .
- En déduire l'expression de cette même rotation dans le repère canonique.
- Comparer avec l'utilisation de la formule de la rotation donnée dans la définition 3.18, page 113.

Figure 4.23 – Cardioïde : première propriété

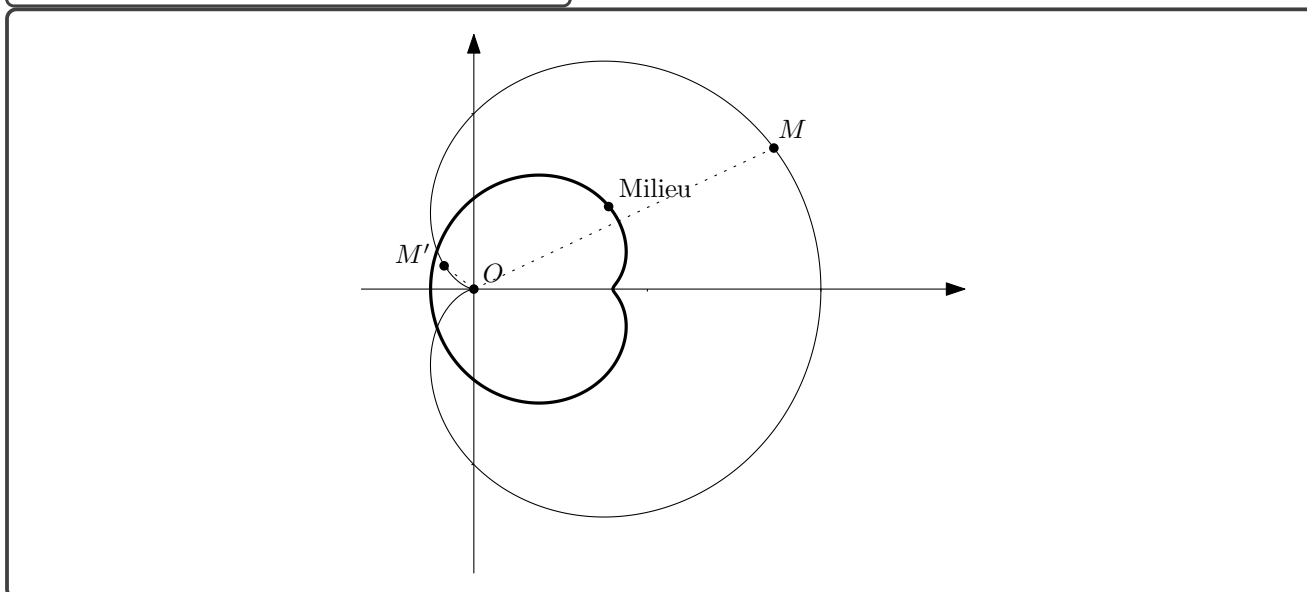
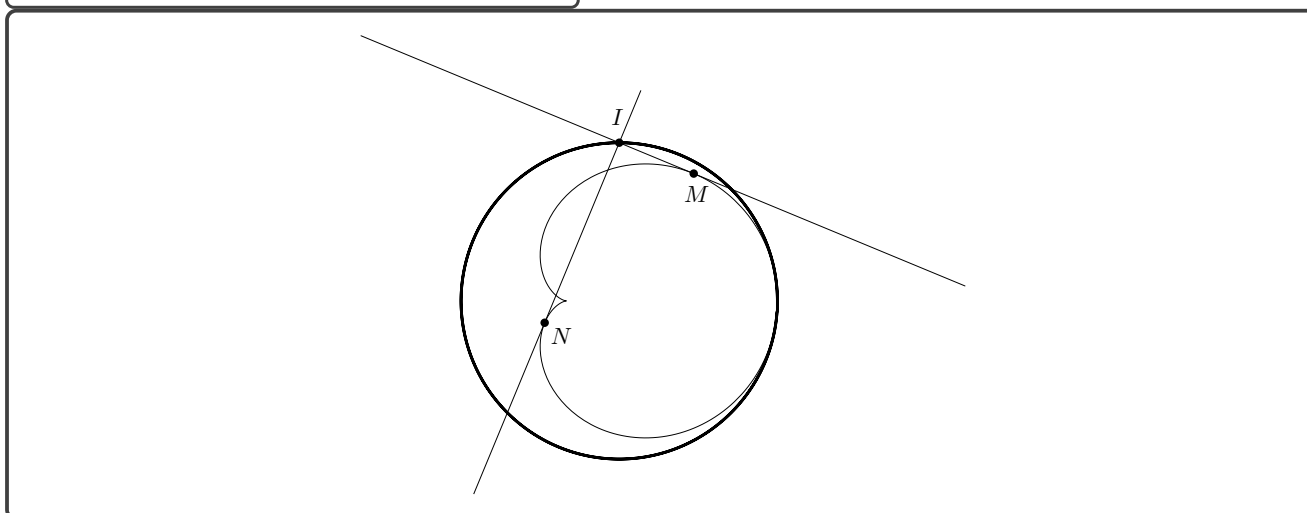


Figure 4.24 – Cardioïde : deuxième propriété



#### 4.3.2.2 Le plan

##### Proposition 4.6

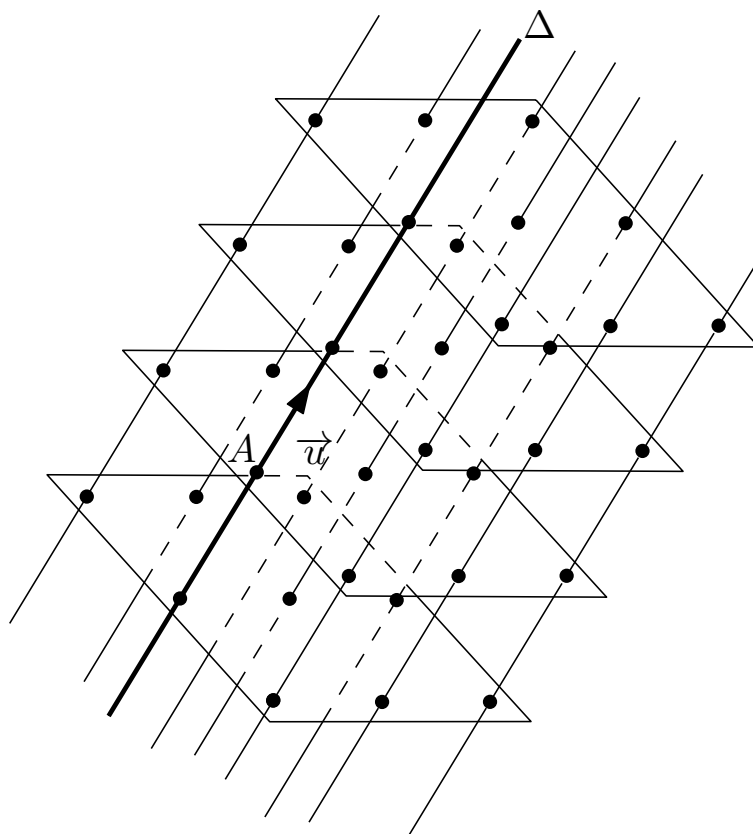
- Un plan de l'espace  $\Pi$  est défini par un point  $A$  et un vecteur normal  $\vec{w}$  que l'on supposera unitaire, soit  $\vec{u}$  un vecteur unitaire orthogonal à  $\vec{w}$ , alors on effectuera un changement de repère (qui définit aussi une base mobile) :

$$(A; \vec{u}, \vec{w} \wedge \vec{u}, \vec{w}).$$

- Les nouvelles coordonnées  $(X, Y, Z)$  seront alors définies par rapport aux anciennes  $(x, y, z)$  en écrivant (voir la figure 4.26, page 163) :

$$M = A + X.\vec{u} + Y.\vec{w} \wedge \vec{u} + Z.\vec{w} = (x, y, z).$$

Figure 4.25 – Système de coordonnées adapté à une droite de l'espace



— Le changement de coordonnées obtenu est alors :

$$(X, Y, Z) \mapsto (x, y, z).$$

— La transformation est isométrique (conservation des aires et des longueurs).

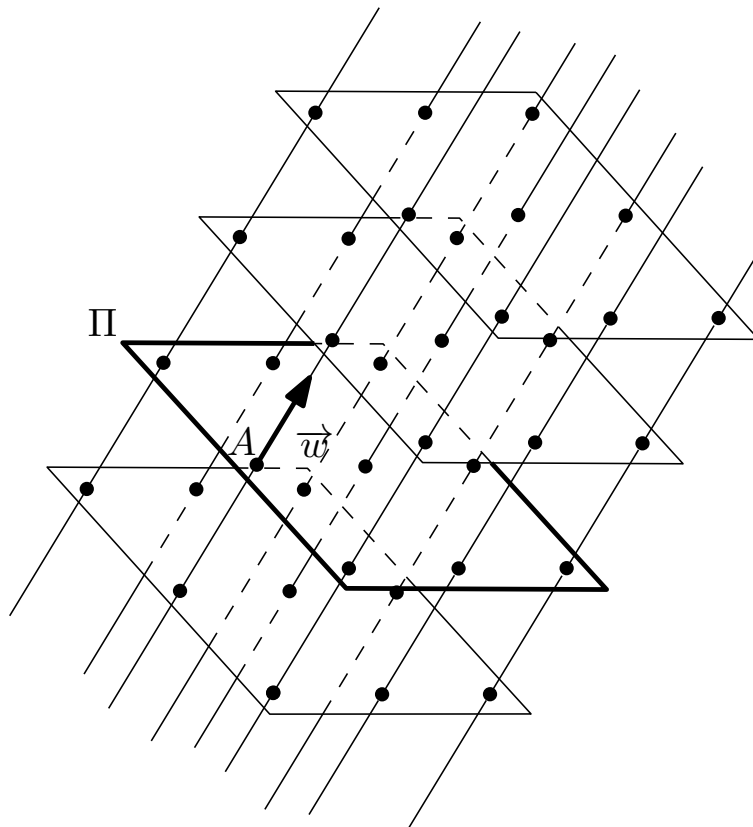
#### Exercice(s) 4.10

4.10.1 Soit le plan  $\Pi$  d'équation  $x + 2y - z = 3$ .

- Produire un système de coordonnées adapté à ce plan.
- Écrire dans ce nouveau système l'expression de la symétrie orthogonale par rapport à  $\Pi$ .
- En déduire l'expression de cette même symétrie dans le repère canonique.
- Comparer avec l'utilisation de la formule de la symétrie donnée dans la définition 3.17, page 111.

#### 4.3.2.3 Le cylindre

Figure 4.26 – Système de coordonnées adapté à un plan de l'espace



Proposition 4.7

— La changement de coordonnées (coordonnées cylindriques) est :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \theta, z) \mapsto (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z) \end{cases}$$

— La base mobile associée est :

$$\vec{e}_\rho(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0), \vec{e}_\theta(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) \text{ et } \vec{e}_z = (0, 0, 1).$$

— Les surfaces  $\rho = \lambda$  sont des cylindres, les surfaces  $\theta = \lambda$  sont des plans contenant l'axe  $Oz$ , les surfaces  $z = \lambda$  sont des plans orthogonaux à l'axe  $Oz$ . Voir la figure 4.27, page suivante.

— On a les formules immédiates :

$$\vec{e}_\rho'(\theta) = \frac{d}{d\theta} (\vec{e}_\rho(\theta)) = \vec{e}_\theta(\theta) \text{ et } \vec{e}_\theta'(\theta) = \frac{d}{d\theta} (\vec{e}_\theta(\theta)) = -\vec{e}_\rho(\theta).$$

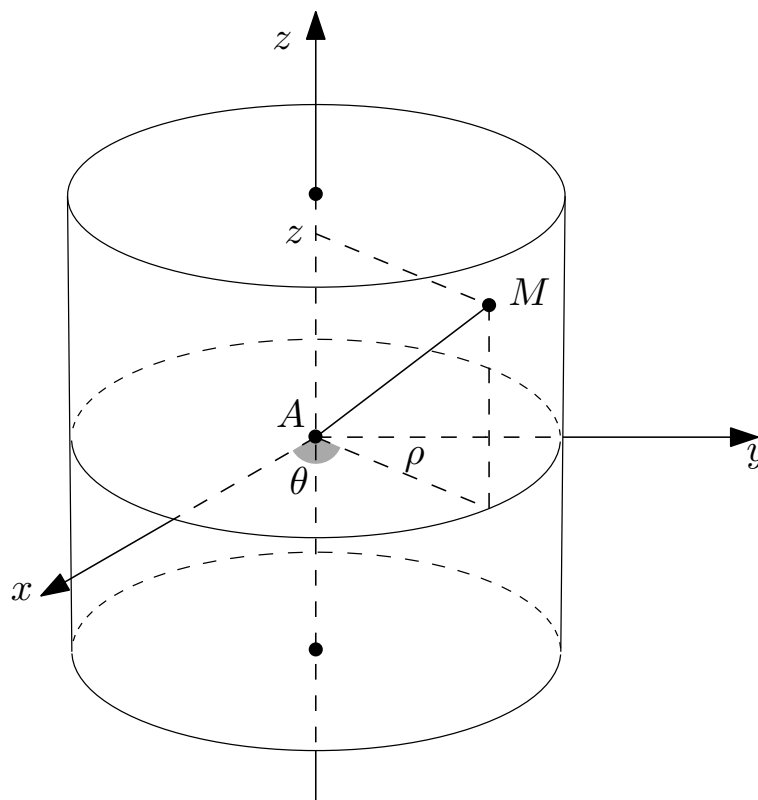
Exercice(s) 4.11

4.11.1 On suppose qu'un mouvement est décrit en coordonnées cylindriques par :

$$\rho(t), \theta(t) \text{ et } z(t).$$



Figure 4.27 – Système de coordonnées cylindriques



Calculer les vitesse et accélération en coordonnées cylindriques.

4.11.2 Soit le lieu des points  $(x, y, z)$  défini par l'équation :

$$z \times (x^2 + y^2) = 2xy.$$

- (a) En donner une équation en coordonnées cylindriques.
- (b) Montrer que l'intersection de ce lieu avec un plan d'équation  $\theta = \lambda$  est une réunion de droites, dépendant de  $\lambda$ .
- (c) Montrer que toutes les droites trouvées à la question précédente sont orthogonales à une droite fixe que l'on précisera.

#### 4.3.2.4 La sphère

##### Proposition 4.8

— Le changement de coordonnées (coordonnées sphériques) est :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \varphi) \mapsto (r \times \sin(\theta) \times \cos(\varphi), r \times \sin(\theta) \times \sin(\varphi), r \times \cos(\theta)) \end{cases}$$

— La base mobile associée est :

$$\begin{cases} \vec{e}_r(\theta, \varphi) &= (\sin(\theta) \times \cos(\varphi), \sin(\theta) \times \sin(\varphi), \cos(\theta)) \\ \vec{e}_\theta(\theta, \varphi) &= (\cos(\theta) \times \cos(\varphi), \cos(\theta) \times \sin(\varphi), -\sin(\theta)) \\ \vec{e}_\varphi(\theta, \varphi) &= (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0) \end{cases}$$

— Les surfaces  $r = \lambda$  sont des sphères concentriques, les surfaces  $\theta = \lambda$  sont des cylindres de révolution d'axe  $Oz$ , les surfaces  $\varphi = \lambda$  sont des plans contenant l'axe  $Oz$ . Voir la figure 4.28, de la présente page.

— On a les formules non immédiates :

$$\partial_1 \vec{e}_r(\theta, \varphi) = \frac{d}{d\theta} (\vec{e}_r(\theta, \varphi)) = \vec{e}_\theta(\theta, \varphi)$$

$$\partial_2 \vec{e}_r(\theta, \varphi) = \frac{d}{d\varphi} (\vec{e}_r(\theta, \varphi)) = \sin(\theta) \cdot \vec{e}_\varphi(\theta, \varphi)$$

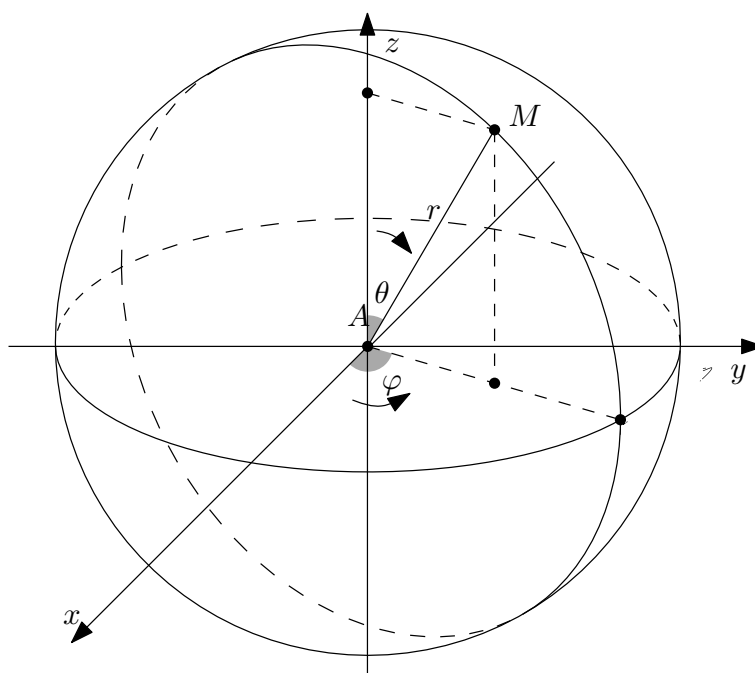
$$\partial_1 \vec{e}_\theta(\theta, \varphi) = \frac{d}{d\theta} (\vec{e}_\theta(\theta, \varphi)) = -\vec{e}_r(\theta, \varphi)$$

$$\partial_2 \vec{e}_\theta(\theta, \varphi) = \frac{d}{d\varphi} (\vec{e}_\theta(\theta, \varphi)) = \cos(\theta) \cdot \vec{e}_\varphi(\theta, \varphi)$$

$$\partial_1 \vec{e}_\varphi(\theta, \varphi) = \frac{d}{d\theta} (\vec{e}_\varphi(\theta, \varphi)) = \vec{0}$$

$$\partial_2 \vec{e}_\varphi(\theta, \varphi) = \frac{d}{d\varphi} (\vec{e}_\varphi(\theta, \varphi)) = -(\sin(\theta) \cdot \vec{e}_r(\theta, \varphi) + \cos(\theta) \cdot \vec{e}_\theta(\theta, \varphi)).$$

Figure 4.28 – Coordonnées sphériques



Exercice(s) 4.12

4.12.1 Un mouvement est défini en coordonnées sphériques par les relations :

$$r(t), \theta(t) \text{ et } \varphi(t).$$

Calculer les vitesse et accélération en coordonnées sphériques.

4.12.2 On appelle grand cercle d'une sphère, l'intersection de la sphère avec un plan passant par son centre. On considère un *triangle sphérique* dont les côtés sont des arcs de grands cercles. Calculer la somme des mesures des angles de ce triangle. Voir la figure 4.29, de la présente page.

Figure 4.29 – Triangle sphérique

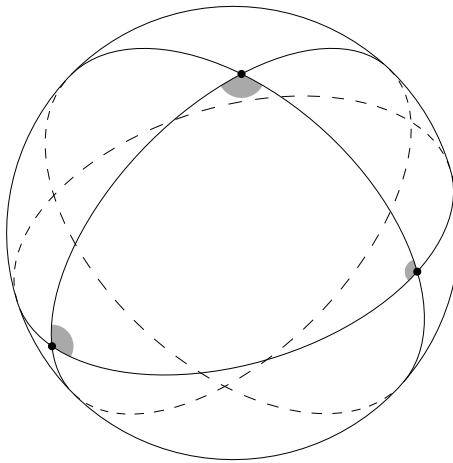
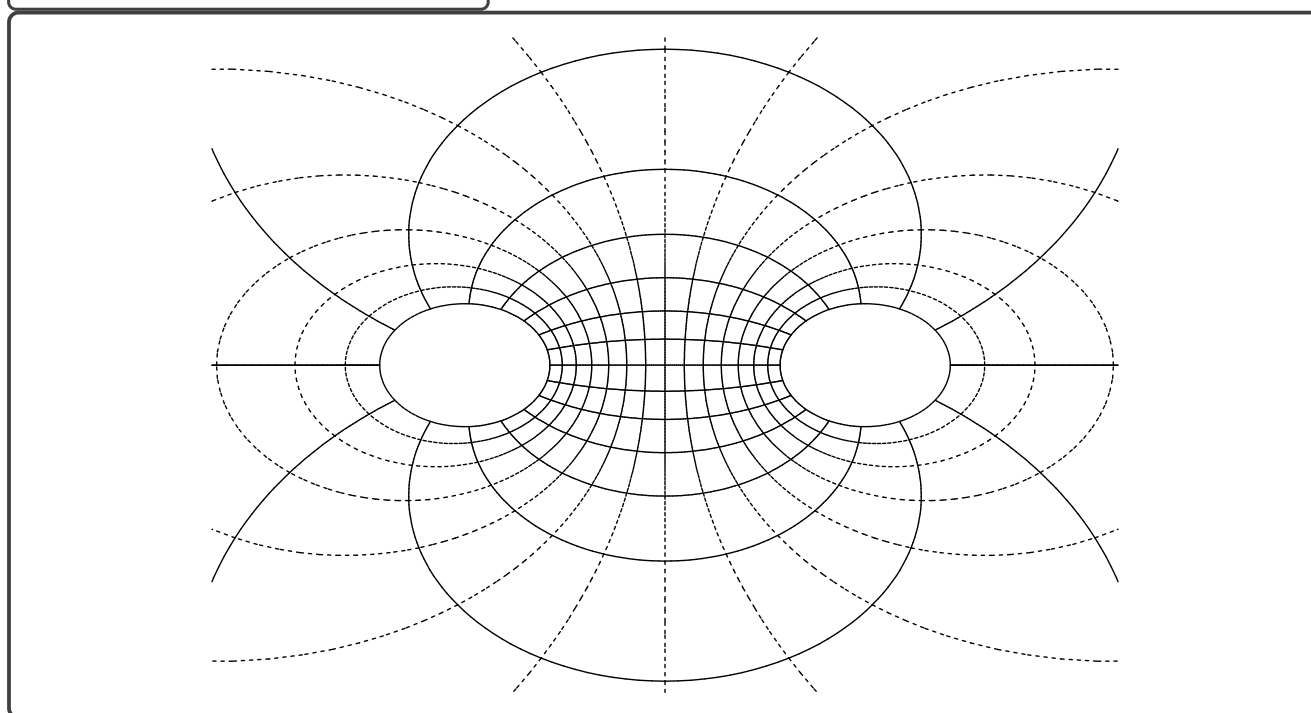


Figure 4.30 – Coordonnées bipolaires



Coordonnées bipolaires :

$$x = \frac{\sinh(v)}{\cosh(v) - \cos(u)} \text{ et } y = \frac{\sin(u)}{\cosh(v) - \cos(u)}.$$