Suites et séries

Alain Chillès (祁冲), 吉宏俊, 欧亚飞

Cours assuré par Benoît Duvocelle
2023 – 2024

Table des matières

1 Suites numériques **9**

1.1 Aspects théoriques . . . 11

1.1.1 Suites monotones . . . 11

1.1.2 Discrétisation . . . 16

1.1.3 Suites extraites . . . 19

1.2 Point fixe . . . 32

1.3 Suites usuelles . . . 42

1.3.1 Comparaison de suites . . . 42

1.3.2 Suites explicites . . . 43

1.3.3 Suites implicites . . . 50

1.3.4 Suites récurrentes linéaires . . . 52

1.3.5 Suites récurrentes . . . 73

1.4 Exemples de schémas numériques . . . 88

1.4.1 Méthodes de résolution numérique de $f(x) = 0$ . . . 88

1.4.2 Méthodes approchées de quadrature . . . 103

2 Séries numériques **113**

2.1 Toute série est une suite, et *réciproquement* . . . 113

2.2 Séries à termes positifs . . . 118

2.2.1 Principaux résultats . . . 118

2.2.2 Diverses techniques . . . 134

2.3 Séries à termes quelconques . . . 144

2.4 Applications des séries aux suites récurrentes . . . 165

2.5 Familles sommables . . . 171

2.5.1 Généralités . . . 171

2.5.2 Sommation par paquets . . . 176

3 Séries entières **183**

3.1 Généralités . . . 183

3.1.1 Définition . . . 183

3.1.2 Rayon de convergence . . . 185

3.1.3 Détermination pratique du rayon de convergence . . . 191

3.1.4 Combinaisons de séries entières . . . 195

3.2 Fonction somme d'une série entière . . . 200
3.2.1 Cas général . . . 200
3.2.2 Cas réel . . . 206
3.3 Développements en série entière . . . 212
3.3.1 Généralités . . . 212
3.3.2 Cas réel – série de Taylor . . . 216
3.3.3 Autres développements en séries entières . . . 222
3.4 Sommation de séries entières . . . 238
3.5 Applications aux probabilités . . . 250
3.5.1 Fonctions génératrices . . . 250
3.5.2 Dénombrements . . . 256

4 Probabilités discrètes **259**
4.1 Formalisation . . . 259
4.1.1 Définitions . . . 259
4.1.2 Propriétés diverses . . . 266
4.1.3 Conditionnement . . . 270
4.1.4 Indépendance . . . 277
4.2 Variables aléatoires . . . 282
4.2.1 Loi d'une variable aléatoire . . . 282
4.2.2 n-uplets de variables aléatoires . . . 285
4.2.3 Indépendance de variables aléatoires . . . 289
4.2.4 Espérance . . . 294
4.2.5 Lois usuelles . . . 300
4.2.6 Moments . . . 310
4.2.7 Fonctions génératrices . . . 315

Liste des codes Python

1.1 Évaluation de $\sqrt{2}$ . . . 37
1.2 Suite explicite . . . 43
1.3 Exponentielle complexe . . . 45
1.4 Suite récurrente linéaire . . . 55
1.5 Autre suite récurrente linéaire . . . 58
1.6 Équation récurrente linéaire d'ordre 1 . . . 64
1.7 Équation récurrente linéaire d'ordre 2 . . . 67
1.8 Méthode de dichotomie . . . 89
1.9 Méthode de Lagrange . . . 93
1.10 Méthode de Newton . . . 98
1.11 Méthode du point fixe . . . 101
1.12 Utilisation des sommes de Riemann . . . 106
1.13 Méthode des trapèzes . . . 110
2.1 Formule d'Euler . . . 127
2.2 Formule de Stirling, les calculs . . . 130
2.3 Évaluation numérique . . . 132
2.4 Équivalents d'un reste de série alternée . . . 148
2.5 Sommation par paquets de termes de même signe . . . 151
2.6 Comparaison quantitative avec une intégrale . . . 156
3.1 Exemple d'une décomposition en éléments simples . . . 228
3.2 Sommation de séries entières . . . 243

Liste des figures

1.1 Cas où la suite est presque monotone . . . 21
1.2 Cas plus compliqué . . . 21
1.3 Visualisation d'un équivalent . . . 47
1.4 Une limite possible et pas toujours de convergence . . . 75
1.5 Cas contractant . . . 77
1.6 f croissante, suite croissante . . . 78
1.7 f croissante, suite décroissante . . . 79
1.8 f décroissante . . . 80
1.9 Autre cas . . . 81
1.10 Fonction décroissante et non convergence . . . 82
1.11 Dichotomie . . . 90
1.12 Méthode de Lagrange – cas général . . . 93
1.13 Méthode de Lagrange – cas convexe . . . 94
1.14 Méthode de Newton . . . 97
1.15 Dysfonctionnement de la méthode de Newton . . . 98
1.16 Méthode de Newton – choix du point de départ . . . 99
1.17 Méthode des trapèzes . . . 110
2.1 Comparaison série/intégrale . . . 121
2.2 Produit de Cauchy . . . 143
2.3 $u_{n+1} = \sin(u_n)$ . . . 167
2.4 $u_{n+1} = \arctan(u_n)/2$ . . . 168
2.5 $u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$ . . . 169
2.6 Exercice 2.5.2.5.3, page 168 . . . 170
3.1 Conséquences du lemme d'Abel . . . 187
4.1 Probabilités composées . . . 272
4.2 Une fougère synthétique . . . 323

Chapitre 1

Suites numériques

L'objet de ce cours est d'étudier les suites réelles ou complexes, c'est-à-dire d'étudier, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

Un élément u de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une famille indexée par les entiers naturels, on le note souvent

$$u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

u_n s'appelle alors le *terme général de la suite* u et n s'appelle alors l'*indice de* u_n.

Nous allons essentiellement nous intéresser au *comportement asymptotique* des suites, c'est-à-dire au comportement du terme général de u lorsque n tend vers $+\infty$. Parfois, ce comportement sera plus facile à décrire si l'indice $n \in \mathbb{N}$ est « assez grand », ce qui signifie qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$, à partir duquel u_n a la propriété voulue. On dit alors « pour n assez grand » ou « à partir d'un certain rang ».

注释 1.1

数列是一种特殊的函数，它的定义域为自然数集或者自然数集的子集。全体实数列组成的集合是实线性空间，数列之间运算满足线性空间中元素的运算法则《线性代数 法文版》。

Exemple 1.1 – Quelques suites simples

On a déjà rencontré quelques suites simples.

1. Les *suites arithmétiques* définies par la donnée d'une *valeur initiale*

$u_0 \in \mathbb{K}$ et d'une *raison* $r \in \mathbb{K}$, qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

ou, de manière équivalente

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + n\, r$$

2. Les *suites géométriques* définies par la donnée d'une *valeur initiale* $u_0 \in \mathbb{K}$ et d'une *raison* $q \in \mathbb{K}$, qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q\, u_n$$

ou, de manière équivalente

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n\, u_0$$

Remarque 1.1 – À partir d'un certain rang

Soit la suite u définie par la donnée de la valeur initiale $u_0 \in \mathbb{K}$ et de la raison $q \in \mathbb{K}$, où $|q| < 1$, alors *pour* n *assez grand*, on a $|u_n| \leqslant 1$. Il est souvent inutile de préciser le N à partir duquel la propriété est vérifiée. Mais, c'est facile à faire si on en a besoin.

— Si $q = 0$ ou $u_0 = 0$, le rang à partir duquel la propriété est vérifiée est 0 ou 1.

— Si $q \neq 0$ et $u_0 \neq 0$, soit $n \in \mathbb{N}$, pour avoir $|u_n| = |q^n\, u_0| \leqslant 1$, il faut et il suffit que

$$n \geqslant -\frac{\ln\left(|u_0|\right)}{\ln\left(|q|\right)}$$

Donc, si on pose [a]

$$N = \max\left(0, \left\lceil -\frac{\ln\left(|u_0|\right)}{\ln\left(|q|\right)} \right\rceil\right)$$

on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N] \implies \left[|u_n| \leqslant 1\right]$$

a. On rappelle que $\lfloor x \rfloor$ désigne la *partie entière* du nombre réel x et que $\lceil x \rceil$ désigne sa *partie supérieure*. On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$$

1.1 Aspects théoriques

1.1.1 Suites monotones

Rappel 1.1

Les ensembles suivants sont naturellement en bijection

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \text{ et } \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$$

Démonstration

La bijection naturelle est

$$\begin{cases} \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ f & \longmapsto & (f(n))_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

Remarque 1.2

Les suites semblent donc des objets mathématiques assez simples. Il n'en est rien ! Par exemple, si ψ est une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ (qui existe, puisque $\mathbb{Q}$ est infini dénombrable), alors

$$u_n = \psi(n) \text{ est un suite qui prend toutes valeurs dans } \mathbb{Q}$$

Rappel 1.2

Une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite *monotone (resp. croissante, resp. décroissante)*, si la fonction associée

$$\begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} \\ n \longmapsto u_n \end{cases} \quad \text{est monotone}$$

Exemple 1.2

1. La suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \frac{1}{1+n^2} \text{ est décroissante}$$
2. La suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = n^2 \text{ est croissante}$$
3. La suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = (-1)^n \text{ n'est ni croissante, ni décroissante}$$

Proposition 1.1

De manière plus générale, si $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante, alors

$$(f(n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante, et } \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}$$

Démonstration

Immédiat.

Rappel 1.3

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sera dite *convergente*, si

$$\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N] \implies [|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon]$$

On écrit

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$$

La limite est clairement unique (comme pour les fonctions).
Une suite qui ne converge pas est dite *divergente*.

数列收敛与函数收敛的定义非常近似，《高等数学I 法文版》 关于函数极限的性质可以类比到数列的极限。 如果数列极限不存在或者趋近于无穷，则数列发散。 研究复数数列极限时，通常转变为研究两个实数数列的极限。

Exemple 1.3

1. La suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{1+n^2}$$
converge vers 0.
2. La suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2$$
diverge vers $+\infty$.
3. La suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$$
diverge.

Rappel 1.4

L'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, stable par la multiplication. Et l'application qui, à une suite convergente, associe sa limite est une application linéaire.

收敛数列所组成的集合是线性空间的子集，且为无限维。

Rappel 1.5 – Lemme des « gendarmes »

Les propriétés sur les fonctions peuvent s'étendre aux suites. Par exemple, soit trois suites réelles u, v et w, telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

où u et w convergent vers une même limite λ, alors v converge aussi vers λ.

Définition 1.1 – Suite bornée

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est *majorée* si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$$

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est *minorée* si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n$$

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est *bornée* si elle est majorée et minorée.

Proposition 1.2

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante. Alors

$$[u \text{ converge}] \iff [\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \text{ est majorée}]$$

De même, une suite décroissante converge si et seulement si elle est minorée.

Démonstration

— $(\Rightarrow)$ Si u converge vers λ, alors, elle sera toujours bornée dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$), sans avoir besoin de la monotonie de la suite. En effet, soit λ la limite, soit $\varepsilon > 0$ donné et N associé, alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant \max\left(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, |u_N| + \varepsilon\right)$$

— ($\Leftarrow$) On pose
$$\lambda = \sup\Big(\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}\Big)$$
qui existe, d'après la propriété de la borne supérieure. Soit $\varepsilon > 0$, on sait alors qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\lambda - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant \lambda$$
mais, comme la suite est croissante, on obtient, pour $n \geqslant N$
$$\lambda - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant u_n \leqslant \lambda$$
On a montré
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N] \implies \Big[|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon\Big]$$
c'est la définition de
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda$$

— Pour montrer qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante et minorée converge, il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite $-u$, qui est croissante et majorée.

Définition 1.2 – Suites adjacentes

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites *réelles*. On dit que ces suites sont *adjacentes* si elles vérifient

1. a est croissante et b décroissante.
2. $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers 0.

证明过程中运用了数列单调有界原理，以及数列极限的运算。

Proposition 1.3 – Suites adjacentes

Si a et b sont deux suites adjacentes, alors elles convergent vers une même limite.

Démonstration

— On a
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant b_n$$
En effet, si pour un $n_0 \in \mathbb{N}$, on a $a_{n_0} > b_{n_0}$, alors, pour $n \geqslant n_0$
$$b_n - a_n \leqslant b_{n_0} - a_{n_0} < 0$$
ce qui contredit l'hypothèse
$$b_n - a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

— La suite a est croissante et majorée par b_0, elle converge donc vers une limite α, d'après la proposition 1.2, page précédente.

— De même, la suite b est décroissante minorée par a_0, elle converge donc vers une limite β.

— En passant à la limite, on a

$$b_n - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta - \alpha = 0$$

Théorème 1.1 – Segments emboîtés

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un segment $I_n = [a_n, b_n]$ (où $a_n < b_n$), tels que

$$\left[\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \supset I_{n+1}\right] \text{ et } \left[b_n - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right]$$

Alors

$$\exists! \alpha \in \mathbb{R},\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\alpha\}$$

此定理称为闭区间套定理，请注意定理成立条件为闭区间，若开区间则不成立。此定理在后续拓扑学课程中有更深入的介绍。

Démonstration

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une limite commune α. α vérifie la propriété annoncée.

Exercice(s) 1.1

1.1.1 Montrer que les deux suites suivantes sont adjacentes

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \text{ et } b_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \qquad (n \geqslant 1)$$

En comparant à une intégrale, montrer que la limite commune est $\ln(2)$.

1.1.2 Soit a_0 et b_0 deux réels fixés. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \frac{a_n + 2\,b_n}{3} \text{ et } a_{n+1} = \frac{2\,a_n + b_n}{3}$$

Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

1.1.3 Soit les suites définies par

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } b_n = a_n + \frac{1}{n\,n!}$$

(a) Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

(b) Montrer que la limite commune est $e = \exp(1)$.

(c) Montrer que e est irrationnel.

1.1.4 Montrer que $\cos(1)$ est irrationnel en s'inspirant de l'exercice précédent.

1.1.5 Soit la suite définie par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$$

Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(u_{2n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

1.1.6 Soit $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}\, b_n}$$

Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En calculer la limite commune en fonction de a_0 et b_0.

1.1.7 Étudier les suites définies par

$$a_0 > 0,\ b_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ \frac{2}{b_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}$$

En calculer les limites.

1.1.8 Soit u_0, v_0 et w_0 trois nombres réels strictement positifs. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3},\ \frac{3}{v_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n} \text{ et } w_{n+1} = \sqrt[3]{u_n\, v_n\, w_n}$$

Montrer que ces trois suites convergent vers une même limite.

1.1.2 Discrétisation

Remarque 1.3

Les suites sont des objets intéressants à manipuler, car elles prennent un nombre *dénombrable* de valeurs. On va donc traduire les propriétés (dites *continues*) des fonctions en termes de suites. Cette traduction s'appelle la *discrétisation*.

Propriété 1.1

Passage à la limite d'une fonction [a] $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\left[f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda\right] \iff$$
$$\left[\forall \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}},\ \left[x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a\right] \Longrightarrow \left[f\left(x_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\right]\right]$$

a. Ici, la notation $\overline{I}$ désigne $[a,b]$ si

$$a = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \text{ et } b = \sup I \in]a,+\infty]$$

Démonstration

Toujours aller du continu vers le discret !

— ($\Rightarrow$) Directement. On a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ \left[|x-a| \leqslant \eta\right] \Longrightarrow \left[|f(x)-\lambda| \leqslant \varepsilon\right]$$

et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de I qui converge vers a, on a donc aussi

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N] \Longrightarrow \left[|x_n - a| \leqslant \varepsilon'\right]$$

Prenons $\varepsilon > 0$ quelconque, η associé, puis, $\varepsilon' = \eta$ et N associé, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N] \Longrightarrow \left[\left|f\left(x_n\right)-\lambda\right| \leqslant \varepsilon\right]$$

Ce qui exprime la convergence de la suite $\left(f\left(x_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers λ.

— ($\Leftarrow$) Pour aller du continu vers le discret, nous allons montrer la contraposée.

$$\left[f(x) \not\xrightarrow[x\to a]{} \lambda\right] \Longrightarrow \left[\exists \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \left[x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \text{ et } f\left(x_n\right) \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\right]\right]$$

Si f ne tend pas vers λ, on a

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in I,\ \left[|x-a| \leqslant \eta \text{ et } |f(x)-\lambda| > \varepsilon\right]$$

Cet $\varepsilon > 0$ étant trouvé, posons, pour $\eta = 1/(n+1)$, le x associé noté x_n. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left[|x_n - a| \leqslant \frac{1}{n+1} \text{ et } \left|f\left(x_n\right)-\lambda\right| > \varepsilon\right]$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite vérifie

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \text{ et } f\left(x_n\right) \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$$

Propriété 1.2

Continuité en un point $a \in I$.

$$[f \text{ continue en } a] \iff \left[\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}},\ \left[x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a\right] \implies \left[f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)\right]\right]$$

Démonstration

Laissé en exercice.

Propriété 1.3

Uniforme continuité sur I de la fonction f.[a]

$$[f \text{ u-continue sur } I] \iff \left[\forall \left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in \left(I^{\mathbb{N}}\right)^2,\ \left[x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right] \implies \left[f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right]\right]$$

a. f est u-continue sur I si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in I^2,\ \left[|x - y| \leqslant \eta\right] \implies \left[|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\right]$$

注意区别连续与一致连续的定义，若函数一致连续则连续，反之则不然。

Démonstration

Laissé en exercice.

Exercice(s) 1.2

1.2.1 Démontrer la discrétisation proposée pour la continuité en a.

1.2.2 Démontrer la discrétisation proposée pour l'uniforme continuité de f (u-continuité).

1.2.3 Discrétiser les propriétés continues suivantes (qui ne sont pas forcément vraies !)

$$\int_a^b f(x,t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[x\to\alpha]{} \int_a^b f(\alpha,t)\ \mathrm{d}t$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} \left|f_n(x) - f(x)\right| = 0$$

1.1.3 Suites extraites

Définition 1.3

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, une suite à valeurs réelles ou complexes. On appelle *suite extraite de* u (on parle aussi de sous-suite de u), toute suite de la forme

$$\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \text{où } \varphi\ :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ est strictement croissante}$$

φ s'appelle une *extraction*.

注释 1.2

数列的子数列是从最初序列通过去除某些元素但不破坏余下元素的相对位置而形成的新的数列。

Exemple 1.4

1. Les suites extraites fréquentes sont les suites $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_{2\,n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On construit souvent l'extraction en fonction des propriétés attendues. Ainsi, pour montrer que

$$\left\{\sin\left(\ln(n)\right),\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \text{ est dense dans } [-1,1]$$

on peut considérer la suite $u_n = \sin\left(\ln(n)\right)$, $n \geqslant 1$ et extraire une sous-suite de u, en posant, pour $\alpha \in [-1,1]$

$$\varphi(n) = \left\lfloor \exp\left(\arcsin(\alpha) + 2\,n\,\pi\right)\right\rfloor \text{ et montrer que } u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$$

3. La construction de la fonction φ se fait souvent par récurrence (où l'on exprime la *capacité* à produire $\varphi(n+1)$ connaissant les valeurs précédentes).

Proposition 1.4

De toute suite de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$, on peut extraire une sous-suite monotone.

Démonstration de la proposition 1.4, de la présente page (dichotomie)

On peut voir qu'il y a deux situations

1. La suite est déjà monotone (ou presque) (figure 1.1, page suivante).
2. La suite est un peu plus compliquée (figure 1.2, page ci-contre).

La démonstration se découpe alors en deux cas

1. La suite vérifie
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \left\{n \in \mathbb{N},\ x_n \in \left[x_p, x_q\right]\right\} \text{ est fini}$$
x_0 étant pris comme référence, on peut construire les deux ensembles
$$\begin{aligned} \delta^+(x_0) &= \{n \in \mathbb{N},\ x_n \in \left[x_0, +\infty\right[\} \\ \delta^-(x_0) &= \{n \in \mathbb{N},\ x_n \in \left]-\infty, x_0\right]\} \end{aligned}$$
L'un au moins de ces deux ensembles est infini (la réunion des deux faisant $\mathbb{N}$), supposons que $\delta^+(x_0)$ le soit. On construit l'extraction de la manière suivante
$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = \min\left(\left\{n > \varphi(0),\ n \in \delta^+(x_0)\right\}\right)$$
et $x_{\varphi(1)} \geqslant x_{\varphi(0)}$. Supposons construits $\varphi(0) < \cdots < \varphi(k)$, tels que $x_{\varphi(0)} \leqslant x_{\varphi(1)} \leqslant \cdots \leqslant x_{\varphi(k)}$, alors,
$$\begin{aligned} \delta^+\left(x_{\varphi(k)}\right) &= \left\{n,\ x_n \in \left[x_{\varphi(k)}, +\infty\right[\right\} \\ &= \delta^+(x_0) \setminus \left\{n,\ x_n \in \left[x_{\varphi(0)}, x_{\varphi(k)}\right[\right\} \end{aligned}$$
est infini d'après l'hypothèse initiale faite. Donc $\delta^+\left(x_{\varphi(k)}\right)$ est infini, on pose
$$\varphi(k+1) = \min\left\{n,\ n > \varphi(k),\ x_n \in \delta^+\left(x_{\varphi(k)}\right)\right\}$$
La suite trouvée (et construite par itération) convient.
2. Si au contraire la suite vérifie
$$\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \left\{n \in \mathbb{N},\ x_n \in \left[x_p, x_q\right]\right\} \text{ est infini}$$
En ce cas, il est difficile de prévoir la monotonie de la suite. Qu'à cela ne tienne, nous allons essayer d'en construire une croissante et une décroissante de la manière suivante (une sorte de dichotomie) posons $\varphi(0) = p$ et $\psi(0) = q$, et supposons construits $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(k)$ et $\psi(0) < \psi(1) < \cdots < \psi(k')$ tels que
$$x_{\varphi(0)} \leqslant x_{\varphi(1)} \leqslant \cdots \leqslant x_{\varphi(k)}$$
$$x_{\psi(0)} \geqslant x_{\psi(1)} \geqslant \cdots \geqslant x_{\psi(k')}$$
$$\text{et } \left\{n \in \mathbb{N},\ x_n \in \left[x_{\varphi(k)}, x_{\psi(k')}\right]\right\} \text{ est infini}$$

On va couper l'intervalle $\left[x_{\varphi(k)}, x_{\psi(k')}\right]$ en deux. Soit

$$r = \min\left(\left\{n > \max\left(\varphi(k), \psi(k')\right),\ x_n \in \left[x_{\varphi(k)}, x_{\psi(k')}\right]\right\}\right)$$

Si $\left\{n \in \mathbb{N},\ x_n \in \left[x_{\varphi(k)}, x_r\right]\right\}$ est infini, on pose $\psi(k'+1) = r$, sinon, on pose $\varphi(k+1) = r$. Dans les deux cas, on peut poursuivre l'itération.

Remarque 1.4

Si φ est construite sur tout $\mathbb{N}$, on a extrait une sous-suite croissante, sinon ψ est construite sur tout $\mathbb{N}$ et on a extrait une sous-suite décroissante.

Figure 1.1 – Cas où la suite est presque monotone

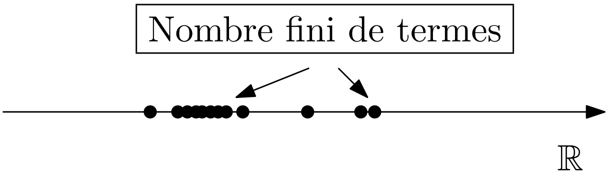
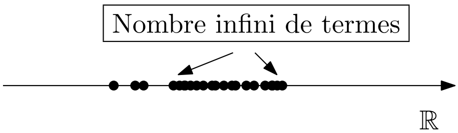


Figure 1.2 – Cas plus compliqué



Démonstration de la proposition 1.4, page précédente (méthode dite des pics)

On dit qu'un indice $N \in \mathbb{N}$ est un *pic* pour la suite si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N] \implies \left[u_n < u_N\right]$$

On considère alors l'ensemble des pics de la suite

$$\Delta = \{N \in \mathbb{N},\ N \text{ est un pic pour la suite}\}$$

On a alors deux cas

1. Δ est infini, on peut alors le numéroter par une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\Delta = \varphi(\mathbb{N})$. La suite

$\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite strictement décroissante extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Δ est fini (éventuellement vide), posons [a]

$$n_0 = \min\left(\left\{n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ [k \geqslant n] \implies [u_k \notin \Delta]\right\}\right)$$

Posons $\varphi(0) = n_0$ et construisons par itération l'extraction φ de la manière suivante

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi(k+1) = \min\left(\left\{n > \varphi(k),\ u_n \geqslant u_{\varphi(k)}\right\}\right)$$

Comme $\varphi(k)$ n'est pas un pic (car il est plus grand que n_0), l'ensemble dont on prend le minimum est toujours non vide. Ce qui nous permet d'obtenir une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante.

a. $n_0 = 1 + \max(\Delta)$ si $\Delta \neq \varnothing$, 0 sinon.

Propriété 1.4

Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers λ et si $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de u, alors

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$$

本性质中条件为充分非必要，通常使用此性质的逆否命题来验证数列是否发散。

Démonstration

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on sait qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ |u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon$$

mais, comme φ est strictement croissante, on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$$

On a donc montré que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N] \implies \left[\left|u_{\varphi(n)} - \lambda\right| \leqslant \varepsilon\right]$$

Exemple 1.5

On se sert souvent de la propriété précédente pour montrer qu'une suite diverge !

La suite définie par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2+\arctan(n)} \text{ diverge}$$

Démonstration

Car les deux suites extraites $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites différentes.

Propriété 1.5

Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, $v = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de u et $\left(u_{\theta(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de v, alors

$$\theta(\mathbb{N}) \subset \varphi(\mathbb{N})$$

on peut donc écrire [a]

$$\boxed{\theta = \varphi \circ \psi, \text{ où } \psi \text{ est strictement croissante}}$$

---

a. Attention à l'ordre des fonctions ! En particulier, $\left(u_{\psi\circ\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est en général pas une suite extraite de $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration

Comme $\left(u_{\theta(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de v, elle s'écrit sous la forme $\left(v_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ or, pour $n \in \mathbb{N}$

$$v_{\psi(n)} = u_{\varphi(\psi(n))}$$

on a bien $\theta = \varphi \circ \psi$.

Propriété 1.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},\ u_{2\,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \text{ et } u_{2\,n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$$

alors

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$$

当研究数列极限比较困难时，有时候可以借助研究子数列极限的性质。

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N_1] \implies \left[\left|u_{2n} - \lambda\right| \leqslant \varepsilon\right]$$

de même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N_2] \implies \left[\left|u_{2n+1} - \lambda\right| \leqslant \varepsilon\right]$$

en conséquence, pour $n \geqslant \max\left(N_1, N_2\right)$ on obtient

$$\left|u_n - \lambda\right| \leqslant \varepsilon$$

Exemple 1.6

La suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \text{ est convergente}$$

car les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(u_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Démonstration

Il suffit de vérifier les propriétés. Soit $n \in \mathbb{N}$

1. On a
$$u_{2n+4} - u_{2n+2} = -\frac{1}{2n+4} + \frac{1}{2n+3} > 0$$
la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. De même
$$u_{2n+3} - u_{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0$$
la suite $\left(u_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Et enfin
$$u_{2n+2} - u_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Remarque 1.5

On peut généraliser aux suites $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(u_{3n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_{3n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}\cdots$

Propriété 1.7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut exprimer en termes de sous-suites la notion de « ne pas converger vers λ ».

$$\left[u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} \lambda\right] \iff$$
$$\left[\exists\varepsilon > 0,\ \exists \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ extraite de } u,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_{\varphi(n)} - \lambda\right| > \varepsilon\right]$$

Démonstration

1. ($\Leftarrow$) Évident.
2. ($\Rightarrow$) Comme la suite ne converge pas vers λ, elle vérifie

$$\text{non}\left(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N] \implies \left[|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon\right]\right)$$

et donc

$$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ \left[n \geqslant N \text{ et } |u_n - \lambda| > \varepsilon\right]$$

On construit alors φ, l'extraction cherchée, par itération suivant l'algorithme

$$\varphi(0) = \min\left(\left\{k \in \mathbb{N},\ |u_k - \lambda| > \varepsilon\right\}\right)$$

puis, si $\varphi(0), \ldots, \varphi(p)$ sont connus pour $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$\varphi(p+1) = \min\left(\left\{k \in \mathbb{N},\ k > \varphi(p) \text{ et } |u_k - \lambda| > \varepsilon\right\}\right)$$

ce qui est possible, car l'ensemble dont on prend le minimum est non vide.

Théorème 1.2 – de Bolzano-Weierstraß

De toute suite réelle ou complexe bornée, *on peut extraire une sous-suite convergente.*

注释 1.3

波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理可以视为刻画有限维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中序列紧致集合的定理，后续拓扑学课程中有更深入的介绍。

Démonstration

En considérant les parties réelles et les parties imaginaires d'une suite complexe, on peut se ramener au cas où la suite est réelle.
Deux démonstrations sont à notre portée.

1. (*Première démonstration*). On extrait de la suite réelle donnée une sous-suite monotone, celle-ci reste bornée, elle est donc convergente.
2. (*Deuxième démonstration*). On peut aussi procéder par dichotomie (on coupe en deux). La suite, notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc

$$\exists\,(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_0 \leqslant x_n \leqslant b_0$$

Le principe est de couper l'intervalle en deux, de manière à garder un nombre infini d'indices dont les x_n sont dans l'intervalle gardé. Ainsi, supposons $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ et $b_0 \geqslant b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_n$ construits tels que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$

$$\Delta_k = \Big\{p \in \mathbb{N},\ x_p \in \big[a_k, b_k\big]\Big\} \text{ est infini et } b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

Soit $\alpha_n = (a_n + b_n)/2$, on a deux cas

(a) L'ensemble

$$\Gamma = \Big\{p \in \mathbb{N},\ x_p \in \big[a_n, \alpha_n\big]\Big\} \text{ est infini}$$

on pose, en ce cas

$$a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \alpha_n$$

(b) Si Γ est fini, alors $\mathbb{N}\backslash\Gamma$ est infini, et on pose

$$a_{n+1} = \alpha_n \text{ et } b_{n+1} = b_n$$

Dans tous les cas, on a

$$\Delta_{n+1} \text{ infini}$$

Posons $I_n = \big[a_n, b_n\big]$, on a alors

$$\big[\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} \subset I_n\big] \text{ et } \left[b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right]$$

Le théorème des segments emboîtés nous permet alors de conclure que

$$\exists \beta \in \mathbb{R},\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\beta\}$$

Construisons maintenant la suite extraite qui converge vers β de la manière suivante

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ \varphi(k+1) = \min\Big(\big\{n \in \Delta_k,\ n > \varphi(k)\big\}\Big)$$

φ est strictement croissante et on a

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leqslant x_{\varphi(k)} \leqslant b_k,\ \text{donc } x_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \beta$$

Proposition 1.5

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, une suite bornée, et $\lambda \in \mathbb{R}$, tels que

$$\forall \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ extraite de } u \left[\left[\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\right] \implies \left[u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\right]\right]$$

alors, la suite converge vers λ.

Démonstration

Si u ne converge pas vers λ, on peut trouver $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $v = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_{\varphi(n)} - \lambda\right| > \varepsilon$$

Mais, la suite v est toujours bornée, en appliquant le théorème de Bolzano-Weierstraß, on peut trouver une suite w extraite de v qui converge vers un réel $\mu \in \mathbb{R}\backslash \left]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon\right[$. Ceci contredit l'hypothèse.

Définition 1.4 – Valeur d'adhérence

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe, soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que λ *est une valeur d'adhérence de* u, s'il existe une sous-suite de u qui converge vers λ, c'est-à-dire

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$$

L'ensemble des valeurs d'adhérence de u sera noté

$$\mathrm{Adh}(u)$$

这里定义了数列所有子数列极限的集合。

Remarque 1.6

Si u converge vers λ, alors

$$\mathrm{Adh}(u) = \{\lambda\}$$

Remarque importante 1.7 – Unicité de la valeur d'adhérence

La réciproque est fausse ! La suite définie par

$$u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ pair} \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

ne converge pas (la sous-suite des nombres entiers pairs tend vers $+\infty$), mais

$$\mathrm{Adh}(u) = \{0\}$$

Exemple 1.7

1. Si $u_n = (-1)^n$, alors
$$\mathrm{Adh}(u) = \{-1, +1\}$$
2. Si $u_n = \sin\big(\ln(n)\big)$, $n \geqslant 1$, alors [a]
$$\mathrm{Adh}(u) = [-1, +1]$$

a. Voir l'exemple 1.4.2, page 19.

Théorème 1.3 – Unicité de la valeur d'adhérence

Soit u une suite réelle ou complexe bornée. *u est convergente si, et seulement si, elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence (et $\mathrm{Adh}(u) = \{\lambda\}$ où λ est la limite de u).*

注意此定理成立的条件是有界数列。

Démonstration

1. ($\Rightarrow$) Si la suite est convergente, il n'y qu'une seule valeur d'adhérence. Voir la propriété 1.4, page 22.
2. ($\Leftarrow$) Soit u une suite *bornée* ne possédant qu'une valeur d'adhérence λ. Alors, elle vérifiera les hypothèses de la proposition 1.5, page précédente.

Proposition 1.6

Soit u une suite réelle bornée, *alors $\mathrm{Adh}(u)$ possède un maximum et un minimum.*

Démonstration

— Comme u est bornée, $\mathrm{Adh}(u)$ est non vide (Bolzano-Weierstraß) et il est aussi borné. Il possède donc une borne supérieure et une borne inférieure. Posons
$$\delta = \sup\big(\mathrm{Adh}(u)\big)$$

— *Montrons que $\delta \in \mathrm{Adh}(u)$.* C'est une application du procédé diagonal de Cantor ! En effet,

- La discrétisation de la propriété de la borne supérieure nous donne l'existence d'une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Adh}(u)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \delta$$

- Mais, chaque λ_n est dans $\mathrm{Adh}(u)$, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists \left(u_{\varphi_n(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}},\ u_{\varphi_n(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \lambda_n$$

- Soit $\varepsilon > 0$ fixé, N associé tel que

$$\forall n \geqslant N,\ \left|\lambda_n - \delta\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

  n fixé, P_n associé tel que

$$\forall p \geqslant P_n,\ \left|x_{\varphi_n(p)} - \lambda_n\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

  Construisons alors les entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N}$ tels que

$$p_N = P_N \text{ et } \forall n \geqslant N,\ p_n = \min\left(\{p \geqslant P_n,\ \varphi_n(p) > \varphi_{n-1}(p_{n-1})\}\right)$$

  On a alors

$$\forall n \geqslant N,\ \left|x_{\varphi_n(p_n)} - \delta\right| \leqslant \varepsilon$$

Rappel 1.6

Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et les bornes sont atteintes (il y a donc un maximum et un minimum).

Démonstration

Montrons qu'elle est bornée (la suite de la démonstration ne change pas vraiment).

Supposons, par exemple, que $f \in \mathscr{C}^0\left([a,b],\mathbb{R}\right)$, ne soit pas majorée. Cela signifie que l'on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ telle que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$. Mais, d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, on peut extraire une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge, il existe donc $\alpha \in [a,b]$ et une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$$

Or, la fonction f est continue ! Donc

$$f\left(x_{\varphi(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\alpha)$$

ce qui contredit l'hypothèse

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Exemple 1.8

On peut aussi utiliser cette notion dans des cas pratiques. Soit la suite définie par

$$u_0 > 0,\ u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \arctan\left(u_{n+1}\right) + \arctan\left(u_n\right)$$

Cette suite est convergente.

Démonstration

— On a introduit l'unique solution $\alpha > 0$, telle que $\alpha = 2\arctan(\alpha)$ (seule limite possible dans $\left]0, +\infty\right[$).

— *La suite est bornée.* En effet, on a immédiatement

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} \in \left]0, \pi\right[$$

On peut démontrer, par récurrence sur n, plus précisément que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \min\left(u_0, u_1, \alpha\right) \leqslant u_n \leqslant \max\left(u_0, u_1, \alpha\right)$$

— Posons $\beta_1 = \min\left(\mathrm{Adh}(u)\right) > 0$ et $\beta_2 = \max\left(\mathrm{Adh}(u)\right) > 0$. Soit $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de u qui converge vers β_2, on peut extraire une sous-suite de $\left(u_{-1+\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\left(u_{-1+\varphi\circ\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une valeur $\beta \in \left[\beta_1, \beta_2\right]$, et, en ce cas, la suite $\left(u_{-2+\varphi\circ\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une valeur $\beta' \in \left[\beta_1, \beta_2\right]$ qui vérifie

$$\beta_2 = \arctan\left(\beta\right) + \arctan\left(\beta'\right) \leqslant 2\arctan\left(\beta_2\right)$$

Donc $\beta_2 \leqslant \alpha$. On montre de même que $\beta_1 \geqslant \alpha$. Finalement

$$\beta_1 = \beta_2 = \alpha \text{ et } \mathrm{Adh}(u) = \{\alpha\}$$

La suite u converge vers α.

Exercice(s) 1.3

1.3.1 Montrer que la suite définie par

$$u_0 > 0,\ u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \ln\left(1 + u_{n+1}\right) + \ln\left(1 + u_n\right)$$

est convergente.

1.3.2 Montrer que la suite définie par

$$u_0 > 0,\ u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

converge vers 1.

1.3.3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, on définit la suite u par

$$u_n = n\,\alpha - \lfloor n\,\alpha \rfloor$$

Montrer que

$$\mathrm{Adh}(u) = [0, 1]$$

1.3.4 Soit u une suite réelle telle que

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(a) Montrer que $\mathrm{Adh}(u)$ est un intervalle.

(b) Donner des exemples où $\mathrm{Adh}(u)$ vaut $\varnothing$, $[0, 1]$, $\mathbb{R}$.

1.3.5 (a) Soit u et v deux suites *réelles* telles que

$$u_n^2 + u_n\,v_n + v_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Montrer que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(b) Soit u et v deux suites complexes telles que

$$u_n^3 - v_n^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Montrer que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

1.3.6 Soit u une suite réelle telle que $\big(|u_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers $+\infty$. Montrer que u possède une valeur d'adhérence (c'est-à-dire une sous-suite bornée).

1.3.7 Soit u une suite complexe, montrer que

$$[u \text{ converge}] \iff \Big[(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \big(u_{2\,n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{3\,n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent}\Big]$$

1.3.8 Soit u une suite bornée telle que

$$u_n + \frac{1}{2}\,u_{2\,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Montrer que u converge.

1.3.9 Soit $z_1, \ldots, z_p$ des complexes de module 1. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=1}^{p} z_k^n$$

Montrer que $p \in \mathrm{Adh}(u)$.

1.2 Point fixe

注释 1.4

本小节介绍了不动点原理及相关性质。

Proposition 1.7

Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$*, continue, alors*

$$\exists \alpha \in [a, b], \ f(\alpha) = \alpha$$

On dit que α *est* un point fixe de f.

Démonstration

On applique le théorème des valeurs intermédiaires (Réf. [?], théorème 1.3, page 28) à $x \longmapsto f(x) - x$.

Définition 1.5

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f *est k-lipschitzienne* (où $k \geqslant 0$), si

$$\forall (x, y) \in I^2, \ \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant k \ |x - y|$$

Si $k < 1$, on dit que f *est k-contractante.*

On dit que f est *lipschitzienne* s'il existe un $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit k-lipschitzienne, de même pour f *contractante.*

Propriété 1.8

Toute fonction lipschitzienne est continue, et même uniformément continue.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$, en prenant $\eta = \varepsilon / k$, on obtient

$$\forall (x, y) \in I^2, \ \Big[|x - y| \leqslant \eta\Big] \implies \Big[|f(x) - f(y)|\Big] \leqslant \varepsilon$$

ce qui nous permet de dire que f est uniformément continue.

Remarque. Par ailleurs, on sait déjà que toute fonction uniformément continue sur I est continue sur I.

Propriété 1.9

L'ensemble des fonctions lipschitziennes de I dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Démonstration

On a immédiatement.

1. La somme d'une fonction k_1-lipschitzienne et d'une fonction k_2-lipschitzienne est $k1 + k_2$-lipschitzienne.
2. Le produit d'une fonction k-lipschitzienne par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est $(|\lambda|\, k)$-lipschitzienne.

Propriété 1.10

La composée d'applications lipschitziennes est lipschitzienne.

Démonstration

Soit f, supposée k_1-lipschitzienne et g, supposée k_2-lipschitzienne, alors $g \circ f$ est clairement $(k_1\, k_2)$-lipschitzienne.

Propriété 1.11

Toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne.

Démonstration

On peut utiliser le théorème des accroissements finis (Réf. [?], théorème 1.7, page 48). On a donc, pour $(x, y) \in [a, b]^2$, l'existence d'un $c \in [a, b]$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)\,(y - x) \text{ et, donc } |f(y) - f(x)| \leqslant |f'(c)|\,|y - x|$$

Mais, par hypothèse, f' est continue sur $[a, b]$ donc bornée (Réf. [?], théorème 1.4, page 31), donc en posant

$$M = \sup_{t \in [a,b]} |f'(t)|$$

on obtient

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant M\,|y - x|$$

Exemple 1.9

1. La fonction $x \longmapsto |x|$ est 1-lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais n'est pas contractante.
2. La fonction

$$x \longmapsto \sqrt{x} \text{ n'est pas lipschitzienne sur } \mathbb{R}_+^*$$

Elle est cependant uniformément continue. On a donc, pour I intervalle de $\mathbb{R}$

$$\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R}) \supsetneq \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ u-continue}\} \supsetneq \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ lipschitzienne}\} \supsetneq \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ contractante}\}$$

Démonstration

1. La fonction $x \longmapsto |x|$ est 1-lipschitzienne. En effet, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a, d'après l'inégalité triangulaire

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$$

2. Étudions maintenant $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
   — *f est uniformément continue.* Soit $\varepsilon > 0$ et $(x, y) \in [0, +\infty[^2$, on peut supposer $y \geqslant x$. On a deux cas.
   (a) Si $y \in [0, \varepsilon^2]$, alors

   $$0 \leqslant \sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y} \leqslant \varepsilon$$

   (b) Si $y \geqslant \varepsilon^2$, alors

   $$0 \leqslant \sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}(y - x)$$

   donc, en prenant $\eta = \varepsilon^2$, on obtient

   $$\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, \left[|y - x| \leqslant \eta\right] \Longrightarrow \left[\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| \leqslant \varepsilon\right]$$

   c'est l'uniforme continuité de f sur $[0, +\infty[$.
   — *f n'est pas lipschitzienne.* Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$, en prenant $(x, y) \in \left[0, 1/4\,k^2\right]^2$, on obtient, en application du théorème des accroissements finis (voir [?], théorème 1.7, page 48), l'existence d'un $c \in \left]0, 1/4\,k^2\right[$ tel que

   $$\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| = \frac{1}{2\sqrt{c}}|y - x| \geqslant k\,|y - x|$$

   ce qui montre que f n'est pas k-lipschitzienne.

完全理解本证明过程，有助于理解不同类型的函数。

Théorème 1.4 – du point fixe

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow I$, vérifiant $f(I) \subset I$ et f contractante sur I, on suppose[a] *de plus qu'il existe un point fixe $\alpha \in I$ alors α est le seul point fixe et la suite définie par*

$$x_0 \in I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$$

converge vers α.

a. On verra en topologie que lorsque I est un intervalle *fermé* de $\mathbb{R}$ ($I = [a,b]$ ou $]-\infty, b]$ ou $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$), cette hypothèse est en fait inutile.

Démonstration

Soit $k \in [0,1[$ un coefficient de lipschitziennité de f.

1. Soit $x_0 \in I$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car $f(I) \subset I$.
2. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, on a, par une récurrence immédiate

$$|x_n - \alpha| \leqslant k^n\, |x_0 - \alpha| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ce qui exprime bien que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α (et on obtient aussi l'unicité de α).

注意不动点定理成立需要满足函数 f 为压缩映射。

Remarque 1.8

Lorsque $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$, l'existence du point fixe est automatique pour les fonctions contractantes, car elles sont continues. (Voir la proposition 1.7, page 32).

Proposition 1.8

Lorsque $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ est de classe $\mathscr{C}^1$, une condition nécessaire et suffisante pour être contractante est de vérifier

$$(*) \qquad \forall x \in [a,b],\ \left|f'(x)\right| < 1$$

Démonstration

1. ($(*) \implies f$ contractante) Dans la démonstration de la propriété 1.11, page 33, on a déjà vu qu'un coefficient de lipschitziennité naturel était la borne supérieure de la dérivée. Comme f vérifie $(*)$, on sait que $\left|f'\right|$ est continue sur le segment $\left[a,b\right]$, elle est donc bornée *et la borne supérieure est atteinte* (voir [?], théorème 1.4, page 31), donc
$$M = \sup_{t\in\left[a,b\right]} \left|f'(t)\right| < 1$$
La fonction f est bien contractante.
2. (f contractante $\implies (*)$) Montrons la contraposée. Soit $k \in [0,1[$. Supposons qu'il existe $x_0 \in \left[a,b\right]$ tel que $\left|f'(x_0)\right| \geqslant 1 > k$, alors comme f' est continue, il existe un $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in \left[a,b\right] \cup \left[x_0-\eta, x_0+\eta\right], \ \left|f'(x)\right| > k$$
Prenons $(x,y) \in \left[a,b\right]^2$, tels que $x \neq y$, $|x-x_0| \leqslant \eta$ et $\left|y-x_0\right| \leqslant \eta$. On a alors, grâce au théorème des accroissements finis (voir [?], théorème 1.7, page 48) l'existence d'un $c \in \left[x_0-\eta, x_0+\eta\right]$ tel que
$$\left|f(y)-f(x)\right| = \left|f'(c)\right| \left|y-x\right| > k \left|y-x\right|$$
donc f n'est pas k-contractante.

Remarque 1.9

Connaissant le coefficient k, il est facile d'évaluer le nombre d'itérations pour avoir une valeur approchée de α à une précision donnée $\varepsilon > 0$. Il suffit de choisir n tel que [a]
$$k^n \left|x_0-\alpha\right| \leqslant \varepsilon$$

a. C'est un peu plus compliqué que cela, car on ne connaît pas α. On majorera donc $|x_0-\alpha|$.

Exemple 1.10

Prenons la suite définie par
$$u_0 = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

— Il est facile de montrer qu'elle converge vers $\sqrt{2}$; combien faut-il de termes pour calculer $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près ?

— L'intervalle $[1,2]$ est stable par f (par exemple). Sur cet intervalle on a
$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$
donc $k = 1/4$ convient.

— En estimant que $\left|\sqrt{2}-1\right| \leqslant 1/2$, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

— Il nous faut donc calculer n termes, où

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-3}$$

ce qui nous donne 9 termes. *Ce n'est pas confirmé par* **Wxmaxima** *ou* **Python** *(sessions* **Wxmaxima** *1.1, de la présente page ou* **Python** *1.1, de la présente page), qui nous donne la bonne approximation pour $n = 3$.*

Session `Wxmaxima` 1.1 – Estimation numérique d'un point fixe

```
(%i1) f(x) := 1/2*(x+2/x)$
(%i2) u(n) := if n=0 then 1.0 else f(u(n-1))$
(%i3) makelist(delta[k]=ev(u(k)-sqrt(2),numer),k,0,3);
```

(%o3) $[\delta_0 = -0.4142135623731, \delta_1 = 0.085786437626905, \delta_2 = 0.0024531042935714, \delta_3 = 2.1239014145191248\,10^{-6}]$

Session `Python` 1.1 – Évaluation de $\sqrt{2}$

Pour faire du calcul numérique, il est intéressant d'utiliser la bibliothèque `numpy`.

`In[1]` – Initialisation

```python
import numpy as np
```

`In[2]`

```python
np.sqrt(2)
```

`Out[2]`

```
1.4142135623730951
```

In[3]

```python
def f(x):
    return(1/2*(x+2/x))
```

In[4]

```python
def u(n):
    if (n==0):
        return(1.0)
    else:
        return(f(u(n-1)))
```

In[5]

```python
[u(n)-np.sqrt(2) for n in range(4)]
```

Out[5]

```
[-0.41421356237309515,
 0.08578643762690485,
 0.002453104293571373,
 2.123901414519125e-06]
```

Remarque 1.10

Que se passe-t-il ? Plus on se rapproche de $\sqrt{2}$, plus la constante k diminue, et moins on a besoin de calculer de termes. Ainsi

$$u_0 = 1, \text{ puis } u_1 = \frac{3}{2} \text{ et } \forall n \geqslant 2, \; u_n \in \left[\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right]$$

On trouve alors un nouveau k (environ 0.06), il ne faut plus calculer que 2 termes supplémentaires.

Remarque 1.11

La *vitesse de convergence* (liée au nombre de termes à calculer), sera donnée sous la forme

$$O(k^n) \text{ où } k \text{ est le coefficient de contraction trouvé}$$

Plus précisément, la vitesse de convergence sera le comportement asymptotique de

$$|x_n - \lambda|$$

Exemple 1.11

Reprenons la suite définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

Très exceptionnellement, on peut calculer la vitesse de convergence de cette suite car

$$\frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_{n+1} + \sqrt{2}} = \left(\frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}\right)^2 = \cdots = \left(\frac{u_0 - \sqrt{2}}{u_0 + \sqrt{2}}\right)^{2^{n+1}}$$

Ce qui donne finalement

$$\left|u_n - \sqrt{2}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}}\right)^{2^n}$$

Cette suite converge extrêmement vite !

Rappel 1.7 – Comparaison de deux suites

On rappelle les relations de comparaison $\sim$, o et O entre deux suites de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme pour les fonctions de la variable réelle. En particulier, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ v_n \neq 0$$

alors

$$\left[u_n = O_{+\infty}(v_n)\right] \iff \left[\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N} \text{ est bornée}\right]$$

$$\left[u_n = o_{+\infty}(v_n)\right] \iff \left[\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right]$$

$$\left[u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n\right] \iff \left[u_n = v_n + o_{+\infty}(v_n)\right] \iff \left[\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\right]$$

$$\left[u_n \underset{+\infty}{\ll} v_n\right] \iff \left[u_n = o_{+\infty}(v_n)\right]$$

两数列之间的比较关系是在 n 趋近于正无穷时体现出来的，与《高等数学I法文版》函数比较关系的定义完全类似。

Les équivalents ne servent qu'à énoncer des résultats. Il est *très* dangereux de calculer avec des équivalents (additions, compositions par des fonctions, etc.)

Tous les calculs doivent se faire avec des o ou des O.

Notation 1.1

On écrira souvent [a]

$$u_n = o\left(v_n\right), \; u_n = O\left(v_n\right), \; u_n \ll v_n, \; u_n \sim v_n, \; \ldots$$

Les propriétés de ces relations de comparaison sont les mêmes que pour les fonctions.

a. Comme, pour les suites, le seul paramètre est $n \in \mathbb{N}$ et que nous étudierons la suite quand n tend vers $+\infty$, nous oublierons souvent de préciser le $+\infty$.

Remarque 1.12

La plupart du temps, nous n'obtenons pas une information aussi précise qu'à l'exemple 1.11, page précédente. La vitesse est alors de la forme $O(v_n)$ où v_n est une expression en n, mais où nous ne connaissons pas les constantes en jeu. La vitesse de convergence nous donne cependant un *ordre de grandeur* des calculs à effectuer. Ainsi si la vitesse de convergence est en

$$\begin{array}{rll} O(a^n),\ a \in \left]0,1\right[& \text{alors} & \text{la vitesse est dite } \textit{exponentielle} \\ O(n^p) & \text{alors} & \text{la vitesse est dite } \textit{polynomiale} \end{array}$$

il sera probablement plus agréable d'avoir une vitesse exponentielle.

Exercice(s) 1.4

1.4.1 Montrer que les suites suivantes sont convergentes et évaluer les vitesses de convergence

$$\begin{aligned}
u_0 \in \mathbb{R},\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}\sin(u_n) + 2\\
u_0 = 2,\ u_{n+1} &= \sqrt{1+u_n}\\
u_0 > 0,\ u_{n+1} &= 2\arctan(u_n)\\
u_0 = \pi/4,\ u_{n+1} &= \sin(2\,u_n)\\
u_0 = 1/2,\ u_{n+1} &= (1-u_n)^2
\end{aligned}$$

1.4.2 Soit les suites définies par

$$u_0 = v_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{7 - v_n},\ v_{n+1} = \sqrt{7 + u_n}$$

Montrer que

$$(u_n, v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (2,3)$$

1.4.3 Soit a et b deux réels tels que $0 < a \leqslant b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leqslant v_n$.

(b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et qu'elles convergent vers la même limite (appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b).

(c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{8\,a}\,(v_n - u_n)^2$$

(d) Que pensez-vous de la vitesse de convergence de ces suites ?

On suppose désormais que $a = 1$ et $b = 2$.

(e) Établir alors que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \frac{1}{8^{2^n - 1}}$$

(f) En déduire une valeur approchée de la limite commune à 10^{-10} près.

1.4.4 Soit les suites définies par

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n},\ v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}$$

où $0 < a < b$. Montrer qu'elles convergent et évaluer les vitesses de convergence.

1.4.5 Soit $k \in]0,1[$, soit u une suite de réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+2} - u_{n+1}\right| \leqslant k \left|u_{n+1} - u_n\right|$$

Montrer que la suite u converge.

1.4.6 Soit la suite définie par

$$u_0 = \frac{3}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{u_n}}$$

Montrer que la suite converge vers 1 et évaluer sa vitesse de convergence.

1.4.7 Soit la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\left(\ln(n)\right)^n}{n!}$$

(a) Étudier la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

(b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(c) Évaluer la vitesse de convergence de u.

1.3 Suites usuelles

Ce paragraphe explore quelques techniques d'études pratiques de certains types de suites.

1.3.1 Comparaison de suites

Les comparaisons des suites usuelles suivantes sont à connaître ($\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ et $a > 1$)

$$\begin{aligned}
(\ln n)^\beta &= o\left(n^\alpha\right) \\
n^\alpha &= o\left(a^n\right) \\
a^n &= o\left(n!\right) \\
n! &= o\left(n^n\right)
\end{aligned}$$

理解和熟记以上比较关系。

1.3.2 Suites explicites

On appelle ainsi toute suite où le terme général est donné par une formule ne dépendant pas des termes précédents.

Suites explicites

Suites de la forme

$$u_n = f(n), \text{ où } f \text{ est une fonction de } \mathbb{N} \text{ dans } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

Exemple 1.12

Étudier la suite définie par

$$u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$$

On trouve à l'aide d'un développement limité

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2\,n}$$

elle converge donc vers 0. Voir la session `Wxmaxima` 1.2, de la présente page ou la session `Python` 1.2, de la présente page.

Session `Wxmaxima` 1.2 – Suite explicite

(% i1) taylor((n^3+1)^(1/3)-sqrt(n^2+1),n,inf,2);

(%o1)/T $-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \ldots$

Session `Python` 1.2 – Suite explicite

Pour du calcul symbolique, on utilise `sympy`.

`In[1]` – Initialisation

```
import sympy as sp
```

In[2]

```python
n = sp.symbols('n', integer=True)
```

In[3]

```python
((n**3+1)**(sp.S(1)/3)-sp.sqrt(n**2+1)).series(n, sp.oo, 2)
```

Out[3]

$$-\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}; n \to \infty\right)$$

Exemple 1.13

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^z$$

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}$, pour n assez grand, on a [a]

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{z}{n}\right) > 0 \text{ et donc } \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\left(\frac{z}{n}\right)}{1 + \operatorname{Re}\left(\frac{z}{n}\right)}\right)$$

Posons, $z = x + i\,y$, où $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$. On a alors, pour n assez grand

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}} \exp\left(i \arctan\left(\frac{y}{x+n}\right)\right)$$

Finalement, pour n assez grand

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{n/2} \exp\left(n\, i \arctan\left(\frac{y}{x+n}\right)\right)$$

Il suffit alors de faire des développements asymptotiques pour trouver que

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{x + i\,y} = e^z$$

Voir les sessions `Wxmaxima` 1.3, page ci-contre et `Python` 1.3, page suivante.

a. La formule de l'argument sous la forme d'un arctangente de la partie imaginaire divisée par la partie réelle n'est valable que lorsque la partie réelle est strictement positive.

Session Wxmaxima 1.3 – Exponentielle complexe

(% i2) limit(((1+x/n)^2+y^2/n^2)^(n/2),n,inf) ;

(% o2) $\%e^{x}$

(% i3) limit(n*atan(y/(x+n)),n,inf) ;

(% o3) y

Session Python 1.3 – Exponentielle complexe

En sympy, il faut parfois aider le système...

In [4]

```
x, y = sp.symbols('x y', real=True)
```

In [5]

```
((1+x/n)**2+y**2/n**2)**(n/2).limit(n, sp.oo)
```

Out [5] – Un peu décevant

$$\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{2}+\frac{y^{2}}{n^{2}}\right)^{\infty}$$

In [6] – Avec de l'aide

```
(n/2*sp.ln((1+x/n)**2+y**2/n**2)).limit(n, sp.oo)
```

Out [6]

x

In [7]

```
(n*sp.atan(y/(x+n))).limit(n, sp.oo)
```

Out [7]

y

Séries

Suites de la forme

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} f(k), \text{ où } f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ce type de suite sera étudié à la fin de ce cours lors des méthodes approchées de quadrature et fera l'objet principal du cours sur les séries numériques (voir la chapitre 2, page 113). Pour le moment nous comparerons à une intégrale, en utilisant (si elle existe) une monotonie de f, ou nous utiliserons des suites adjacentes.

Propriété 1.12

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, continue (par morceaux sur tout segment), *monotone*, alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(0) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n) \quad \text{si} \quad f \text{ est croissante}$$

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(0) \geqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \geqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n) \quad \text{si} \quad f \text{ est décroissante}$$

Démonstration

Supposons, par exemple, que f est croissante. On a alors pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [k, k+1]$

$$f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k+1) \text{ et, donc } f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k+1)$$

En sommant les inégalités de 0 à $n-1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Finalement

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(0) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n)$$

Exemple 1.14

Soit la suite déterminée par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Cette suite est clairement croissante. Est-elle convergente ? divergente ? Quel est son comportement asymptotique ?

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$$

ce qui donne

$$u_n - 1 \leqslant \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant u_n - \frac{1}{n}$$

Soit, finalement

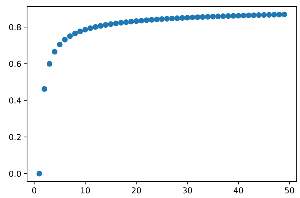
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Voir la figure 1.3, de la présente page qui représente l'évolution du rapport

$$\frac{\ln(n)}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$$

lorsque n grandit.

Figure 1.3 – Visualisation d'un équivalent



Exemple 1.15

Soit la suite déterminée par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(u_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes (voir l'exemple 1.6, page 24). Elles convergent donc vers la même limite. Il est possible de calculer cette limite $\big(\ln(2)\big)$, en utilisant le développement de Taylor avec reste intégral (voir [?], théorème 3.6, page 143) de la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ sur $[0,1]$.

Démonstration

On a en effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left]-1,+\infty\right[$, en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral comme indiqué

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\,x^k}{k} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

et, de plus

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(\ln(1+x)\big) = (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

En particulier, pour $x = 1$

$$\left|\ln(2) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\,1^k}{k}\right)\right| \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{n\,(1+t)^n}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n}$$

Suites de la forme

$$u_n = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Ce type de suite sera étudiée dans le cours sur les sommes de Riemann. Pour le moment, nous comparerons avec une intégrale, en utilisant (si elle existe) une monotonie de f.

Remarque 1.13

Si la fonction f est monotone, on peut appliquer la propriété 1.12, page 46 à l'application, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé

$$t \longmapsto f\left(\frac{t}{n}\right)$$

Exemple 1.16

Soit la suite déterminée par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2 + 4\,n^2}$$

On écrit d'abord

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k/n}{4 + (k/n)^2}\right)$$

En comparant avec l'intégrale sur $[0,1]$ de la fonction

$$x \longmapsto \frac{x}{4+x^2},\ \text{qui est croissante}$$

il vient

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{x}{4+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,\ln(4+x^2)\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

Exercice(s) 1.5

1.5.1 Étudier les suites suivantes

$$\begin{aligned}
u_n &= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots+\sqrt{1}}}}, \quad (n \text{ symboles } \sqrt{\ }) \\
u_n &= \left(2\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{4}\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n, \quad (n > 0) \\
u_n &= \prod_{k=1}^{n} \frac{a}{1+a^k}, \quad (a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}) \\
u_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}, \quad (\text{préciser la vitesse de convergence}) \\
u_n &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \cos(k)\right), \quad (\text{préciser la vitesse de convergence}) \\
u_n &= \frac{z^n}{(1+z)\,(1+z^2)\,\cdots\,(1+z^n)}, \quad (z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{U})
\end{aligned}$$

1.5.2 Donner un équivalent des termes u_n définis par

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n} e^k \\ u_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad (n>0) \\ u_n &= \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \\ u_n &= \sum_{k=0}^{n} k! \end{aligned}$$

1.5.3 Étudier les suites suivantes

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{5n}{3\,n^2+4k^2}, \quad (n>0) \\ u_n &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} (n+k)\,\sin\left(\frac{k}{n}\right), \quad (n>0) \\ u_n &= \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\,\sin\left(\frac{k}{n^2}\right), \quad (n>0) \end{aligned}$$

1.3.3 Suites implicites

Remarque 1.14

Nous avons déjà étudié les suites implicites et nous avons aussi réussi à en donner des développements limités dans le cours sur les développements asymptotiques (voir [?], exemple 2.16, page 89).

Exemple 1.17

Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 3}$ définie par

x_n est *la* racine de l'équation $x^n - n\,x + 1 = 0$ telle que $x_n \in [0,1]$, $\quad (n \geqslant 3)$

1. *Existence et unicité.* La fonction $f_n : x \longmapsto x^n - n\,x + 1$ est continue, strictement décroissante sur $[0,1]$. Comme $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = 2-n < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure l'existence de x_n, la stricte monotonie nous assure l'unicité.

2. *Comportement limite.* Soit $k \in]0,1[$, on a

$$f_n(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

donc, lorsque n tend vers $+\infty$, $k > x_n$. En prenant $k = \varepsilon > 0$, on trouve que

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

3. *Équivalent.* Lorsque n tend vers $+\infty$, x_n^n tend vers 0 (de manière évidente), donc

$$n\,x_n = 1 + o(1) \text{ donc } x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

4. *Développement asymptotique.* Si l'on écrit

$$x_n = \frac{1}{n}\,(1+\delta_n)\,,\ \text{où } \delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et que l'on reporte dans l'expression, il vient

$$\frac{1}{n^n}\,(1+\delta_n)^n = \delta_n$$

mais, alors, il n'est pas possible d'obtenir directement une information sur δ_n, car nous n'avons pas assez d'informations sur le comportement de $(1+\delta_n)^n$. Mais, cela nous donne que δ_n étant borné par un $a > 0$,

$$\delta_n \leqslant \frac{(1+a)^n}{n^n},\ \text{en particulier } n\,\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc, on peut développer $(1+\delta_n)^n = 1 + n\,\delta_n + o(n\,\delta_n)$, et finalement

$$\delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^n}$$

Exercice(s) 1.6

1.6.1 Donner les développements asymptotiques à 3 termes des solutions des équations suivantes

$$\begin{aligned}
e^x + \sin(x) &= n\\
1 + \ln(n+x) &= x\\
x - e^{-x} &= n\\
\tan(x) &= \frac{x^3}{x^2-1}, \quad \left(x \in \left[n\,\pi, n\,\pi + \frac{\pi}{2}\right[\right)\\
x \exp\left(\sqrt{x}\right) &= \sqrt{n}\\
x - \lfloor x \rfloor &= \frac{1}{x^2}, \quad (x \in [n, n+1[)\\
\frac{x\ln(x)}{x+1} &= n
\end{aligned}$$

1.6.2 On considère l'équation

$$1 + \frac{x}{x-1} + \cdots + \frac{x}{x-n+1} = \ln\left(\frac{x\,(x-1)\,\cdots\,(x-n+1)}{n!}\right)$$

(a) Montrer qu'elle admet une unique solution x_n dans $[n, +\infty[$.

(b) Donner un développement asymptotique de x_n à deux termes.

1.3.4 Suites récurrentes linéaires

Définition 1.6

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle *suite récurrente linéaire d'ordre* p toute suite définie par

1. La donnée des p premières valeurs (valeurs initiales) $u_0, \dots, u_{p-1}$.
2. La donnée d'une formule de récurrence de la forme

$$(S) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} + a_{1,n}\,u_{n+p-1} + \cdots + a_{p,n}\,u_n = b_n$$

où les suites

$$(a_{1,n})_{n\in\mathbb{N}},\ \dots,\ (a_{p,n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont connues.}$$

Propriété 1.13

Chercher les solutions de (S) revient à résoudre un système linéaire $\phi(u) = b$, où

$$\phi\ :\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+p} + a_{1,n}\, u_{n+p-1} + \cdots + a_{p,n}\, u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

On obtient donc

1. L'ensemble des solutions de (S) est ou bien vide (système incompatible), ou bien un espace de la forme

$$v + \mathrm{Ker}(\phi),\ \text{où } v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est } \textit{une} \text{ solution de } (S)$$

   Ici, il est évident qu'il y a des solutions, car une fois connues les valeurs initiales, on peut calculer tous les autres termes.

2. On obtient même que

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(\phi)\big) = p$$

   On connaît la dimension de $\mathrm{Ker}(\phi)$, ce n'est cependant pas toujours possible d'en calculer une base !

3. Pour trouver une solution de (S), on peut utiliser le principe de superposition des solutions et la méthode de variation des constantes.

求解线性递推数列等价于求解线性方程组，结合线性齐次方程与常数变易法求出解空间即仿射空间。

Démonstration du point 2

On a l'isomorphisme naturel entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathrm{Ker}(\phi)$

$$(u_0, \ldots, u_{p-1}) \longmapsto (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} + a_{1,n}\, u_{n+p-1} + \cdots + a_{p,n}\, u_n = 0$$

Exemple 1.18

Soit la suite récurrente linéaire définie par

$$u_0 \text{ donnée, et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2(n+1)\, u_n + (n+2)\,(2\,n+5) \qquad (S)$$

1. L'équation homogène se résout de la manière suivante

$$u_n = k\,(-2)^n\,n!$$

2. On essaye ensuite une méthode de variation de la constante, en cherchant u_n sous la forme $u_n = k_n\,(-2)^n\,n!$. En reportant, il vient

$$k_{n+1} - k_n = \frac{(n+2)\,(2\,n+5)}{(-2)^{n+1}\,(n+1)!}$$

Ce qui permet de trouver k_n, en le cherchant sous la forme

$$k_n = \frac{a\,n+b}{(-2)^n\,n!},\ \text{on trouve } a=1 \text{ et } b=3$$

Finalement, les solutions de (S) sont

$$(n+3+k\,(-2)^n\,n!)_{n\in\mathbb{N}},\ \text{où } k\in\mathbb{K}$$

Si on nous donne u_0, il est facile de trouver $k = u_0 - 3$.

Voir la session `Wxmaxima` 1.4, de la présente page et la session `Python` 1.4, page suivante.

Session `Wxmaxima` 1.4 – Suite récurrente linéaire

(%i1) `rec : u[n+1]+2*(n+1)*u[n];`

(%o1) $u_{n+1} + 2\,(n+1)\,u_n$

(%i2) `load(solve_rec)$`

(%i3) `solve_rec(rec=0,u[n]);`

(%o3) $u_n = \%k_1\,(-2)^n\,\Gamma\,(n+1)$

(%i4) `makefact(%);`

(%o4) $u_n = \%k_1\,(-2)^n\,n!$

(%i5) `solve_rec(rec=(n+2)*(2*n+5),u[n]);`

solve : dependent equations eliminated : (1)

(%o5) $u_n = \%k_1\,(-2)^n\,\Gamma\,(n+1) + 3\,(-1)^n\,2^n\,n! - n - 3$

(%i6) `makefact(%);`

(%o6) $u_n = 3\,(-1)^n\,2^n\,n! + \%k_1\,(-2)^n\,n! - n - 3$

Session Python 1.4 – Suite récurrente linéaire

En Sympy, les calculs sont plus délicats, car la fonction « boîte noire » rsolve ne trouve pas de solution. Il faut alors suivre la démarche comme à la main.

In[1] – Initialisation

```
import sympy as sp
sp.init_printing()
```

In[2]

```
n = sp.symbols('n', integer=True)
u = sp.Function('u')
```

In[3] – L'équation homogène se résout bien

```
sp.rsolve(sp.Eq(u(n+1)+2*(n+1)*u(n), 0), u(n))
```

Out[3]

$(-2)^n C_0 n!$

In[4] – Mauvaise surprise ! Sympy ne trouve pas de solution

```
sp.rsolve(sp.Eq(u(n+1)+2*(n+1)*u(n), (n+2)*(2*n+5)), u(n))
```

In[5] – Variation de la constante

```
k = sp.Function('k')
x = sp.symbols('x')
u = sp.Lambda(n, (-2)**n*k(n)*sp.factorial(n))
sp.Eq(u(n+1)+2*(n+1)*u(n), (n+2)*(2*n+5))
```

Out[5]

$(-2)^n (2n+2)\, k(n) n! + (-2)^{n+1} k(n+1)\, (n+1)! = (n+2)\,(2n+5)$

In[6]

```python
sp.solve(_, k(n+1))[0]
```

Out[6]

$$\frac{(-2)^{-n}\left(2\,(-2)^{n}\,nk(n)n!\,(n-1)!+2\,(-2)^{n}\,k(n)n!\,(n-1)!-2nn!-9n!-10\,(n-1)!\right)}{2\,(n-1)!\,(n+1)!}$$

In[7] – Calcul des coefficients

```python
res = (_.subs({k(n): x})).expand()
(res.coeff(x, 1).combsimp(), res.subs({x: 0}).combsimp())
```

Out[7]

$$\left(1,\ -\frac{(-2)^{-n}\,(n+2)\,(2n+5)}{2\,(n+1)!}\right)$$

In[8]

```python
sp.Eq(k(n+1), _[0]*k(n)+_[1])
```

Out[8]

$$k(n+1)=k(n)-\frac{(-2)^{-n}\,(n+2)\,(2n+5)}{2\,(n+1)!}$$

In[9] – Précision de la forme de k

```python
a, b = sp.symbols('a b', real=True)
_.subs({k: sp.Lambda(n, (a*n+b)/(-2)**n/sp.factorial(n))})
```

Out[9]

$$\frac{(-2)^{-n-1}\,(a\,(n+1)+b)}{(n+1)!}=-\frac{(-2)^{-n}\,(n+2)\,(2n+5)}{2\,(n+1)!}+\frac{(-2)^{-n}\,(an+b)}{n!}$$

In[10]

```
(_.lhs-_.rhs).simplify()
```

Out[10]

$$\frac{(-2)^{-n}\left(-2an^2 - 3an - a - 2bn - 3b + 2n^2 + 9n + 10\right)}{2\,(n+1)!}$$

In[11] – Trouver a et b

```
sp.solve([_.subs({n: 0}), _.subs({n: 1})], [a, b])
```

Out[11]

$\{a : 1,\ b : 3\}$

In[12] – Vérification pour tout n

```
__.subs(_).simplify()
```

Out[12]

0

In[13] – Expression de la solution particulière

```
(u(n)).subs({k: sp.Lambda(n,
↪   (a*n+b)/(-2)**n/sp.factorial(n))}).subs(__)
```

Out[13]

$n + 3$

Exemple 1.19

Soit la suite récurrente linéaire définie par

$$u_0,\ u_1 \text{ données, et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 4(n-1)\,u_{n+1} - (4\,n+5)\,u_n = n \qquad (S)$$

En général, il n'est pas possible de trouver facilement des solutions. Ici, « on remarque que $u_n = n^2$ est solution de l'équation homogène » [a]. Il ne semble pas possible de trouver simplement une deuxième solution... Pour trouver une solution particulière, faisons appel à `Wxmaxima` ou `Python` (session 1.5, de la présente page ou session 1.5, de la présente page).

a. Je le sais, parce que j'ai construit l'exercice pour avoir cette solution !

Session `Wxmaxima` 1.5 – Autre suite récurrente linéaire

(%i1) `rec : u[n+2]+4*(n-1)*u[n+1]-(4*n+5)*u[n];`

(%o1) $u_{n+2} + 4\,(n-1)\,u_{n+1} + (-4\,n-5)\,u_n$

(%i2) `load(solve_rec)$`

(%i3) `solve_rec(rec=0,u[n]);`

WARNING : found some hypergeometrical solutions !

(%o3) $u_n = \%k_1\,n^2$

(%i4) `solve_rec(rec=n,u[n]);`

WARNING : found some rational solutions !

(%o4) $u_n = \%k_3\,n^2 - \frac{n}{4} + \frac{1}{16}$

Session `Python` 1.5 – Autre suite récurrente linéaire

Catastrophe ! `Sympy` donne un résultat faux ! *Ne jamais faire confiance aux outils de calculs, toujours vérifier les résultats.*

`In[14]` – Réinitialisation de u

```
u = sp.Function('u')
sp.rsolve(u(n+2)+4*(n-1)*u(n+1)-(4*n+5)*u(n), u(n))
```

`Out[14]`

$C_0 n^2$

In[15]

```
sp.rsolve(sp.Eq(u(n+2)+4*(n-1)*u(n+1)-(4*n+5)*u(n), n),
↪  u(n))
```

Out[15] – C'est faux!!!

$$C_0 n^2 + n \left(C_0 + C_1 n\right)$$

In[16] – Vérifions!

```
(u(n+2)+4*(n-1)*u(n+1)-(4*n+5)*u(n)).subs({u: sp.Lambda(n,
↪  _)}).simplify()
```

Out[16]

$$-2C_0 \left(2n + 1\right)$$

In[17] – Variation de la constante ? Ne fonctionne pas!

```
sp.Eq(u(n+2)+4*(n-1)*u(n+1)-(4*n+5)*u(n), n).subs({u:
↪  sp.Lambda(n, n**2*k(n))})
```

Out[17]

$$-n^2 \left(4n + 5\right) k(n) + \left(n + 1\right)^2 \left(4n - 4\right) k(n + 1) + \left(n + 2\right)^2 k(n + 2) = n$$

In[18] – Rien...

```
sp.rsolve(_, k(n))
```

In[19] – Recherche d'une solution particulière

```
neweq = sp.Eq(u(n+2)+4*(n-1)*u(n+1)-(4*n+5)*u(n),
                n).subs({u: sp.Lambda(n, a*n+b)})
sp.solve([neweq.subs({n: 0}), neweq.subs({n: 1})], [a, b])
```

Out [19]

$$\left\{a : -\frac{1}{4},\ b : \frac{1}{16}\right\}$$

In [20]

```
neweq.subs(_)
```

Out [20]

$$-\frac{n}{4} - \left(\frac{1}{16} - \frac{n}{4}\right)(4n+5) + \left(-\frac{n}{4} - \frac{3}{16}\right)(4n-4) - \frac{7}{16} = n$$

In [21] – Vérifions

```
_.lhs.simplify()
```

Out [21]

n

Remarque 1.15

Cas important. Les suites récurrentes à coefficients constants. C'est le cas où les suites $(a_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites constantes. L'équation s'écrit donc

$$u_{n+p} + a_1\, u_{n+p-1} + \cdots + a_p\, u_n = b_n, \qquad (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{K}^p$$

Le principe est le suivant

On cherche des solutions de l'équation homogène sous la forme $u_n = \lambda^n$.

Exemple 1.20

Équations d'ordre 1

$$(S) \qquad u_{n+1} + a\, u_n = b_n, \qquad (u_0 \text{ donnée, } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ connue, } a \neq 0)$$

1. *Équation homogène.* Les solutions de l'équation homogène sont de la

forme

$$u_n = k\,(-a)^n$$

2. *Recherche d'une solution de* (S). Par méthode de variation de la constante, on cherche u_n sous la forme

$$u_n = k_n\,(-a)^n$$

alors

$$k_{n+1} - k_n = \frac{b_n}{(-a)^{n+1}},\ \text{donc}\ k_n = k_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{(-a)^{j+1}}$$

Cas particuliers où le second membre b_n est de la forme $P(n)\,\mu^n$, pour une fonction polynomiale P et un scalaire $\mu \in \mathbb{K}$. On cherche alors une solution de la forme $Q(n)\,\mu^n$, où Q est une fonction polynomiale. Voir la session `Wxmaxima` 1.6, page 63 ou la session `Python` 1.6, page 64.

Équations d'ordre 2

$$(S) \qquad u_{n+2} + a_1\,u_{n+1} + a_2\,u_n = b_n$$

1. *Équation homogène.* On cherche les solutions sous la forme λ^n, ainsi

$$\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_2 = 0$$

ce qui nous donne deux cas

— $a_1^2 \neq 4a_2$, on a deux solutions complexes distinctes λ_1 et λ_2, donc, en reprenant les notations de la propriété 1.13, page 53

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Vect}\left(\left\{\left(\lambda_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\lambda_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\}\right)$$

— $a_1^2 = 4a_2$, on a une solution double λ_0, donc

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Vect}\left(\left\{\left(\lambda_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(n\,\lambda_0^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\}\right)$$

2. Pour trouver une solution de (S), on peut

— Dans le cas général, faire varier *une* constante.

— Dans la cas où le second membre est de la forme $P(n)\,\mu^n$, la chercher sous la forme $Q(n)\,\mu^n$, où Q est une fonction polynomiale. Voir la session `Wxmaxima` 1.7, page 66 ou la session `Python` 1.7, page 67.

Exemple 1.21 – Un exemple d'une suite récurrente d'ordre 3

Soit la suite définie par

$$u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3\,u_{n+1} - 2\,u_n + 1 + n + n\,(-2)^n + 3^n$$

La solution est alors, pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{3^n}{20} + \frac{41\,(-2)^n}{405} - \frac{n^2\,(-2)^{n-2}}{9} + \frac{11\,n\,(-2)^{n-2}}{27} + \frac{n^3}{18} - \frac{n^2}{18} - \frac{35\,n}{54} + \frac{275}{324}$$

Démonstration

1. *Équation homogène* L'équation caractéristique de l'équation homogène est
$$\lambda^3 - 3\,\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2\,(\lambda + 2) = 0$$
dont les solutions sont 1, avec une multiplicité 2 et -2 avec une multiplicité 1. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est
$$\left\{\left((a\,n + b)\ 1^n + c\,(-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$$
2. *Prise en compte du second membre* On va utiliser le principe de superposition des solutions en remarquant que le second membre s'écrit
$$(1 + n)\,1^n + n\,(-2)^n + 3^n$$
   (a) *Second membre* $(1 + n)$ C'est une expression polynomiale en n de degré 1 et 1 est de multiplicité 2 dans l'équation caractéristique. On va donc chercher une solution de la forme (car $1 + 2 = 3$)
$$u_n = \alpha\,n^3 + \beta\,n^2 \qquad \underbrace{(+\gamma\,n + \delta)}_{\text{solution de l'équation homogène}}$$
   En reportant dans l'équation $u_{n+3} = 3\,u_{n+1} - 2\,u_n + n + 1$, on trouve une solution
$$u_n = \frac{n^3}{18} - \frac{n^2}{18}$$
   (b) *Second membre* $n\,(-2)^n$ La partie polynomiale est de degré 1 et 2 est solution de l'équation caractéristique avec une multiplicité 1. On va donc chercher une solution de la forme
$$u_n = \left(\alpha\,n^2 + \beta\,n(+\gamma)\right)\,(-2)^n$$
   En reportant dans l'équation $u_{n+3} = 3\,u_{n+1} - 2\,u_n + n\,(-2)^n$, on trouve une solution
$$u_n = \left(-\frac{n^2}{36} + \frac{11\,n}{108}\right)\,(-2)^n$$
   (c) *Second membre* 3^n La partie polynomiale est de degré 0 et 3 n'est pas solution de l'équation caractéristique. On va donc cherche une solution sous la forme
$$u_n = \alpha\,3^n$$

En reportant dans l'équation $u_{n+3} = 3\,u_{n+1} - 2\,u_n + 3^n$, on trouve une solution

$$u_n = \frac{3^n}{20}$$

L'ensemble des solutions de l'équation initiale est

$$\left\{ \left(a\,n + b + c\,(-2)^n + \frac{n^3}{18} - \frac{n^2}{18} + \left(-\frac{n^2}{36} + \frac{11\,n}{108} \right) (-2)^n + \frac{3^n}{20} \right)_{n\in\mathbb{N}} \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

3. *Prise en compte des conditions initiales* Les valeurs de paramètres a, b et c correspondant à la solution cherchée s'obtiennent en écrivant le système

$$u_0 = 1 = b + c + \frac{1}{20},\ u_1 = 0 = a + b - 2\,c + \frac{1}{540},$$
$$u_2 = 1 = 2\,a + b + 4\,c + \frac{563}{540}$$

il suffit alors de résoudre ce système linéaire de trois équations à trois inconnues pour trouver la solution annoncée.

Session Wxmaxima 1.6 – Équation récurrente linéaire d'ordre 1

```
(%i1) load(solve_rec)$
(%i2) rec : u[n+1]+a*u[n];
```

(%o2) $u_{n+1} + a\,u_n$

```
(%i3) solve_rec(rec=0,u[n]);
```

(%o3) $u_n = \%k_1\,(-a)^n$

```
(%i4) solve_rec(rec=n*b^n,u[n]);
```

(%o4) $u_n = \dfrac{b^n\,(b\,n + a\,n - b)}{(b+a)^2} + \dfrac{(-a)^n\,b}{(b+a)^2} + \%k_1\,(-a)^{n-1}$

```
(%i5) solve_rec(rec=n*(-a)^n,u[n]);
```

(%o5) $u_n = \%k_1\,(-a)^{n-1} - \dfrac{(-a)^n\,(n-1)\,n}{2\,a}$

```
(%i6) solve_rec(rec=sqrt(n),u[n]);
```

$-\dfrac{\sqrt{\%j+1}}{\sqrt{\%j}\,a}$ non-rational term ratio to nusum

(%o6) $u_n = \%k_1 \left(-a\right)^{n-1} + \sum_{\%j=1}^{n-1} \sqrt{\%j} \left(-a\right)^{n-\%j-1}$

Session `Python` 1.6 – Équation récurrente linéaire d'ordre 1

Là encore, `Sympy` se trompe ! *Ne pas utiliser `rsolve` pour les équations à second membre !*

`In[1]` – Initialisation

```
import sympy as sp
sp.init_printing()
```

`In[2]`

```
a, b = sp.symbols('a b')
u = sp.Function('u')
n = sp.symbols('n', integer=True)
```

`In[3]` – Équation homogène

```
sp.rsolve(sp.Eq(u(n+1)+a*u(n), 0), u(n))
```

`Out[3]`

$C_0 \left(-a\right)^n$

`In[4]` – Équation avec second membre : c'est faux !

```
sp.rsolve(sp.Eq(u(n+1)+a*u(n), n*b**n), u(n))
```

`Out[4]` – C'est faux !

$C_0 b^n n + C_0 \left(-a\right)^n$

In[5] – Utilisation du cours : $b \neq -a$

```python
alpha, beta = sp.symbols('\\alpha \\beta')
sp.Eq(u(n+1)+a*u(n), n*b**n).subs({u: sp.Lambda(n,
    (alpha*n+beta)*b**n)})
```

Out[5]

$$ab^{n}\left(\alpha n+\beta\right)+b^{n+1}\left(\alpha\left(n+1\right)+\beta\right)=b^{n}n$$

In[6]

```python
sp.solve([_.subs({n: 0}), _.subs({n: 1})], [alpha, beta])
```

Out[6]

$$\left\{\alpha:\frac{1}{a+b},\ \beta:-\frac{b}{a^{2}+2ab+b^{2}}\right\}$$

In[7]

```python
__.subs(_).lhs.simplify()
```

Out[7]

$$b^{n}n$$

In[8] – Utilisation du cours : $b = -a$

```python
sp.Eq(u(n+1)+a*u(n), n*(-a) **
      n).subs({u: sp.Lambda(n,
      (alpha*n**2+beta*n)*(-a)**n)})
```

Out[8]

$$a\left(-a\right)^{n}\left(\alpha n^{2}+\beta n\right)+\left(-a\right)^{n+1}\left(\alpha\left(n+1\right)^{2}+\beta\left(n+1\right)\right)=n\left(-a\right)^{n}$$

In[9]

```
sp.solve([_.subs({n: 0}), _.subs({n: 1})], [alpha, beta])
```

Out[9]

$$\left\{\alpha : -\frac{1}{2a},\ \beta : \frac{1}{2a}\right\}$$

In[10]

```
__.subs(_).lhs.simplify()
```

Out[10]

$$n\,(-a)^n$$

Session Wxmaxima 1.7 – Équation récurrente linéaire d'ordre 2

(%i1) `load(solve_rec)$`

Cas où il y a deux racines réelles.

(%i2) `rec : u[n+2]+3*u[n+1]+2*u[n];`

(%o2) $u_{n+2} + 3\,u_{n+1} + 2\,u_n$

(%i3) `solve_rec(rec=0,u[n]);`

(%o3) $u_n = \%k_2\,(-1)^n + \%k_1\,(-2)^n$

(%i4) `solve_rec(rec=n*3^n,u[n]);`

(%o4) $u_n = -\frac{3^{n+3}}{400} + \frac{n\,3^n}{20} + \%k_2\,(-1)^n + \%k_1\,(-2)^n$

(%i5) `solve_rec(rec=n*(-2)^n,u[n]);`

(%o5) $u_n = \%k_2\,(-1)^n + \%k_1\,(-2)^n + n^2\,(-2)^{n-2} - 5\,n\,(-2)^{n-2}$

Cas où il y a une racine double.

(%i6) `rec : u[n+2]-4*u[n+1]+4*u[n];`

(%o6) $u_{n+2} - 4\,u_{n+1} + 4\,u_n$

```
(%i7) solve_rec(rec=0,u[n]);
```

(%o7) $u_n = (\%k_2\, n + \%k_1)\; 2^n$

```
(%i8) solve_rec(rec=n*3^n,u[n]);
```

(%o8) $u_n = -2\, 3^{n+1} + n\, 3^n + (\%k_2\, n + \%k_1)\; 2^n$

```
(%i9) solve_rec(rec=n*2^n,u[n]);
```

(%o9) $u_n = (\%k_2\, n + \%k_1)\; 2^n + \frac{n^3\, 2^{n-3}}{3} - n^2\, 2^{n-3}$

Cas où il y a deux racines complexes.

```
(%i10) rec : u[n+2]+u[n+1]+u[n];
```

(%o10) $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n$

```
(%i11) solve_rec(rec=0,u[n]);
```

(%o11) $u_n = \frac{\left(\sqrt{3}\, i - 1\right)^n \%k_2}{2^n} + \frac{\left(-\sqrt{3}\, i - 1\right)^n \%k_1}{2^n}$

```
(%i12) solve_rec(rec=n*2^n,u[n]);
```

(%o12) $u_n = -\frac{5\, 2^{n+1}}{49} + \frac{n\, 2^n}{7} + \frac{\left(\sqrt{3}\, i - 1\right)^n \%k_2}{2^n} + \frac{\left(-\sqrt{3}\, i - 1\right)^n \%k_1}{2^n}$

Session Python 1.7 – Équation récurrente linéaire d'ordre 2

De même, on doit faire les calculs comme « à la main »...

In[11] – Équation homogène

```
sp.rsolve(sp.Eq(u(n+2)+3*u(n+1)+2*u(n), 0), u(n))
```

Out[11]

$(-1)^n\, C_0 + (-2)^n\, C_1$

In[12] – Forme particulière

```
sp.Eq(u(n+2)+3*u(n+1)+2*u(n), n*3**n).subs({u: sp.Lambda(n,
↪  (a*n+b)*3**n)})
```

Out[12]

$$2\,3^{n}\left(an+b\right)+3\,3^{n+1}\left(a\left(n+1\right)+b\right)+3^{n+2}\left(a\left(n+2\right)+b\right)=3^{n}n$$

In[13]

```
sp.solve([_.subs({n: 0}), _.subs({n: 1})], [a, b])
```

Out[13]

$$\left\{a:\frac{1}{20},\ b:-\frac{27}{400}\right\}$$

In[14] – Vérification

```
__.subs(_).lhs.simplify()
```

Out[14]

$$3^{n}n$$

Cas d'une racine simple

In[15] – Cas où la puissance est racine simple de l'équation homogène

```
sp.Eq(u(n+2)+3*u(n+1)+2*u(n), n*(-2) **
      n).subs({u: sp.Lambda(n, (a*n**2+b*n)*(-2)**n)})
```

Out[15]

$$2\left(-2\right)^{n}\left(an^{2}+bn\right)+3\left(-2\right)^{n+1}\left(a\left(n+1\right)^{2}+b\left(n+1\right)\right)+\left(-2\right)^{n+2}\left(a\left(n+2\right)^{2}+b\left(n+2\right)\right)=\left(-2\right)^{n}n$$

In[16]

```
sp.solve([_.subs({n: 0}), _.subs({n: 1})], [a, b])
```

Out[16]

$$\left\{a : \frac{1}{4},\ b : -\frac{5}{4}\right\}$$

In[17] – Vérification

```
__.subs(_).lhs.simplify()
```

Out[17]

$$(-2)^n\, n$$

Cas d'une racine double

In[18]

```
sp.rsolve(sp.Eq(u(n+2)-4*u(n+1)+4*u(n), 0), u(n))
```

Out[18]

$$2^n\,(C_0 + C_1 n)$$

In[19] – Forme particulière

```
sp.Eq(u(n+2)-4*u(n+1)+4*u(n), n*3**n).subs({u: sp.Lambda(n,
↪  (a*n+b)*3**n)})
```

Out[19]

$$4\,3^n\,(an+b) - 4\,3^{n+1}\,\big(a\,(n+1)+b\big) + 3^{n+2}\,\big(a\,(n+2)+b\big) = 3^n n$$

In[20]

```
sp.solve([_.subs({n: 0}), _.subs({n: 1})], [a, b])
```

Out[20]

$$\{a : 1,\ b : -6\}$$

In[21] – Vérification

```
__.subs(_).lhs.simplify()
```

Out[21]

$$3^n n$$

In[22] – Il faut ici augmenter le degré de 2

```
sp.Eq(u(n+2)-4*u(n+1)+4*u(n), n*2 **
      n).subs({u: sp.Lambda(n, (a*n**3+b*n**2)*2**n)})
```

Out[22]

$$4\,2^n\left(an^3+bn^2\right)-4\,2^{n+1}\left(a\left(n+1\right)^3+b\left(n+1\right)^2\right)+2^{n+2}\left(a\left(n+2\right)^3+b\left(n+2\right)^2\right)=2^n n$$

In[23]

```
sp.solve([_.subs({n: 0}), _.subs({n: 1})], [a, b])
```

Out[23]

$$\left\{a:\frac{1}{24},\ b:-\frac{1}{8}\right\}$$

In[24] – Vérification

```
__.subs(_).lhs.simplify()
```

Out[24]

$$2^n n$$

Cas de deux racines complexes

In[25]

```
sp.rsolve(sp.Eq(u(n+2)+u(n+1)+u(n), 0), u(n))
```

Out[25]

$$C_0\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^n + C_1\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^n$$

In[26] – Solution particulière

```
sp.Eq(u(n+2)+u(n+1)+u(n), n*2**n).subs({u: sp.Lambda(n,
↪   (a*n+b)*2**n)})
```

Out[26]

$$2^n(an+b) + 2^{n+1}\left(a(n+1)+b\right) + 2^{n+2}\left(a(n+2)+b\right) = 2^n n$$

In[27]

```
sp.solve([_.subs({n: 0}), _.subs({n: 1})], [a, b])
```

Out[27]

$$\left\{a : \frac{1}{7},\ b : -\frac{10}{49}\right\}$$

In[28] – Vérification

```
__.subs(_).lhs.simplify()
```

Out[28]

$$2^n n$$

Exercice(s) 1.7

1.7.1 Soit u la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad u_1 = -1 \qquad 6\,u_{n+2} + 5\,u_{n+1} - 6\,u_n = 0 \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

(a) Calculer u_n en fonction de n.
(b) Déterminer un équivalent simple de u_n.
(c) Montrer que u diverge.

1.7.2 Étudier les suites définies par

$$v_{n+1} = 3\,v_n + 1 + n^2$$

1.7.3 Calculer u_n définie par

$$u_{n+2} = \frac{7\,u_{n+1} - 2\,u_n}{6}, \quad u_0 = 3,\ u_1 = 2$$

1.7.4 Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par

$$u_0 > 0,\ u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{u_n\,u_{n+1}}{3\,u_n + 2\,u_{n+1}}$$

1.7.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et u_1 strictement positifs et

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \qquad (n \geqslant 1)$$

(a) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

existe et la déterminer.
Que remarquez-vous ?

(b) Soit

$$a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.

(c) Montrer que $(a_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(d) Déterminer un rationnel r tel que

$$\left| r - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| < 10^{-3}$$

1.7.6 Déterminer tous les entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que toutes les suites complexes u vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$$

soient périodiques. Quelles sont alors les périodes possibles ?

1.7.7 Montrer que pour une suite récurrente linéaire d'ordre 2, homogène, à coefficients constants on a l'alternative suivante

- soit elle s'annule périodiquement
- soit il y a un rang à partir duquel elle ne s'annule pas

1.7.8 Déterminer les suites vérifiant

$$u_{n+1} = -10\,u_n - 28\,v_n \qquad v_{n+1} = 6\,u_n + 16\,v_n$$

1.7.9 Soit x_n définie par

$$x_0 > 0,\ x_1 > 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_{n-1}}$$

(a) Étudier x_n.

(b) Donner un équivalent de x_n.

1.7.10 Soit a et $b > 0$. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telles que [a]

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f\big(f(x)\big) + a\,f(x) = b\,(a+b)\,x$$

1.7.11 Soit u_0, u_1, $k > 0$. Déterminer dans $[-\infty, +\infty]$ la limite de la suite définie par

$$u_{n+2} = k\,\frac{u_{n+1}^2}{u_n}$$

1.7.12 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f\big(f(x)\big) = 6\,x - f(x)$$

a. On pourra utiliser une suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$.

1.3.5 Suites récurrentes

1.3.5.1 Récurrences simples

Remarque 1.16

Plan d'étude d'une suite récurrente réelle définie par

$$u_0 \in I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

où $f : I \longrightarrow I$, I intervalle de $\mathbb{R}$.

1. *Recherche des limites possibles.* Si f est continue et I un segment ou de la forme $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ ou $\mathbb{R}$, les limites possibles vérifient $l = f(l)$. Si I n'est pas un segment, on peut « sortir de l'intervalle », c'est-à-dire, par exemple, si $I =]a, b]$, alors a est une limite possible si

$$f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} a$$

Ne pas oublier le cas très particulier des applications contractantes (voir le théorème 1.4, page 35) !

2. *Recherche de sous-intervalles stables J de I où la fonction est monotone.* [a] On a alors

> Si $u_0 \in J$ et f croissante, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. La monotonie peut se trouver en étudiant la position de u_1 par rapport à u_0, soit la position de $f(x)$ par rapport à x.

> Si $u_0 \in J$ et f décroissante sur J, alors les suites $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. On peut trouver leur monotonie en prenant en considération la fonction $f \circ f$. Notons que, lorsque f est continue, on a
>
> $$\left[u_{2\,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\right] \Longrightarrow \left[u_{2\,n+1} = f(u_{2\,n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\lambda)\right]$$
>
> Donc, si $f(\lambda) \neq \lambda$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge !

3. *Traitement des autres cas.*

> Dans les autres cas, on essaye « d'arriver » dans un intervalle stable. Le raisonnement est souvent basé sur l'absence d'une limite dans l'intervalle où l'on est.

a. *Stable* signifie que $f(J) \subset J$.

Exemple 1.22 – Pas de limite possible

Soit la suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{u_n}$$

La fonction exp étant continue, toute limite vérifiera $l = e^l$. Il n'y a pas de limite possible. La suite diverge. Comme la suite est clairement croissante, on a immédiatement

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Exemple 1.23 – Une limite possible... sans convergence

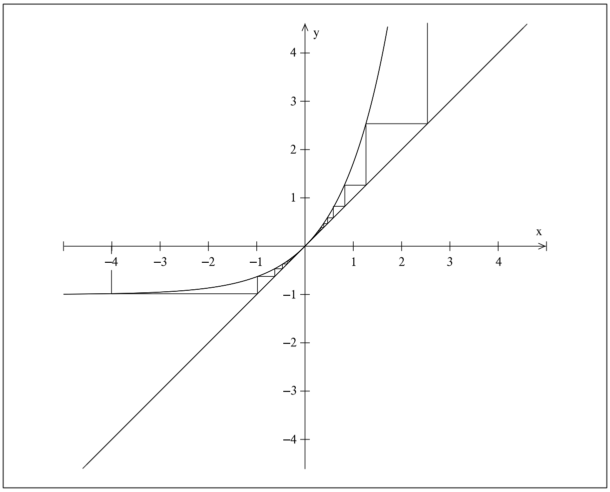
Soit la suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{u_n} - 1$$

La fonction $x \longmapsto e^x - 1$ étant continue, toute limite vérifiera $l = e^l - 1$. On a une seule limite possible.

⚠ Ce n'est pas suffisant pour dire qu'une suite converge ! Ainsi, la suite précédente converge si $u_0 \leqslant 0$ et diverge si $u_0 > 0$. Voir la figure 1.4, de la présente page.

Figure 1.4 – Une limite possible et pas toujours de convergence



Démonstration

On commence par démontrer, en étudiant la fonction, que la seule solution (seule limite possible) de

$$e^x - 1 = x \text{ est } x = 0$$

1. Si $u_0 \leqslant 0$, on montre successivement
   (a) $]-\infty, 0]$ est stable par $f : x \longmapsto e^x - 1$, donc, par récurrence sur n
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]-\infty, 0]$$
   (b) f est croissante sur $]-\infty, 0]$, donc la suite est monotone ;
   (c) $f - \mathrm{id}_{]-\infty,0]}$ est positive sur $]-\infty, 0]$, donc $u_1 \geqslant u_0$ et la suite est croissante ;

(d) la suite, croissante, majorée est convergente ; comme f est continue, la limite ℓ doit vérifier $f(\ell) = \ell$, seul 0 vérifie cette propriété, donc

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2. Si $u_0 > 0$, on montre successivement
   (a) $]0, +\infty[$ est stable par f ;
   (b) f est croissante sur $]0, +\infty[$, la suite est monotone ;
   (c) $f - \mathrm{id}_{]-\infty,0]}$ est positive sur $]0, +\infty[$, donc la suite est croissante ;
   (d) il n'y a pas de limite possible dans $[u_0, +\infty[$, donc la suite croissante tend vers $+\infty$.

Exemple 1.24 – Cas contractant

Soit la suite définie par

$$u_0 \in [-1, +1] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \frac{1}{3}\, u_n^2$$

Elle converge vers $\frac{\sqrt{21}-3}{2}$.

Démonstration

1. L'intervalle $[-1, +1]$ est stable par f. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [-1, +1]$$

2. La fonction est contractante sur $[-1, +1]$ car (voir la proposition 1.8, page 35)

$$\forall x \in [-1, +1],\ \left|f'(x)\right| \leqslant \frac{2}{3} < 1$$

3. La suite est donc convergente (voir le théorème 1.4, page 35) vers *la seule* limite possible qui vérifie $f(l) = l$, soit

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sqrt{21}-3}{2}$$

Voir la figure 1.5, page suivante.

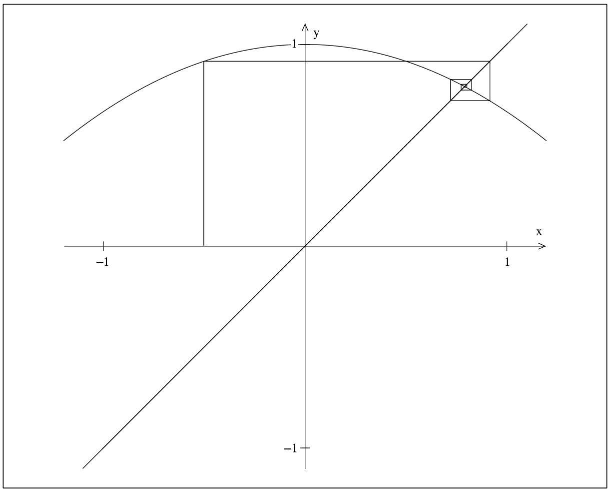
Exemple 1.25 – Cas croissant

Soit la suite définie par

$$u_0 \geqslant 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

Elle converge vers 2.

Figure 1.5 – Cas contractant



Démonstration

Comme la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{2+x}$ est définie, continue sur $]-2, +\infty[$, les limites possibles sont solutions de $f(x) = x$, il n'y en a qu'une $x = 2$, seule limite possible.

1. L'intervalle $[0, 2]$ est stable par f et f est croissante sur cet intervalle. La suite est donc *monotone*. Comme on a

$$\forall x \in [0, 2],\ f(x) \geqslant x$$

on en déduit que la suite est croissante. Elle est donc croissante, majorée par 2, elle converge vers la seule limite possible 2. Voir la figure 1.6, page suivante.

2. L'intervalle $[2, +\infty[$ est stable par f et f est croissante sur cet intervalle. La suite est donc *monotone*. Comme on a

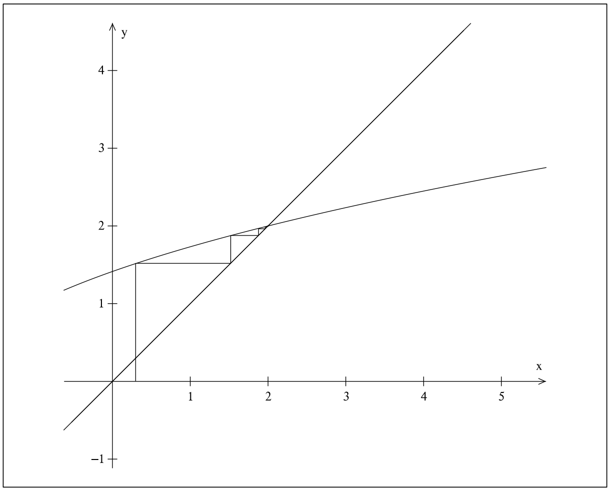
$$\forall x \in [2, +\infty[,\ f(x) \leqslant x$$

on en déduit que la suite est décroissante minorée par 2, elle converge vers 2. Dans tous les cas

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$$

Voir la figure 1.7, page 79.

Figure 1.6 – f croissante, suite croissante



Exemple 1.26 – Cas décroissant

Soit la suite définie par

$$u_0 \in [0,2] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$$

Elle converge vers 1.

Démonstration

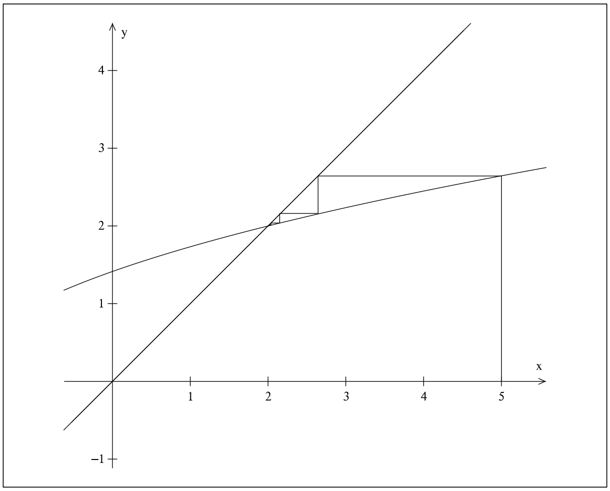
Comme $f : x \longmapsto \sqrt{2-x}$ est continue sur $]-\infty, 2]$, les seules limites possibles sont les solutions de $f(x) = x$, il n'y en a qu'une $x = 1$, seule limite possible.

1. L'intervalle $[0,2]$ est stable par f et la fonction est décroissante sur cet intervalle. Il faut donc étudier la fonction

$$g(x) = \sqrt{2 - \sqrt{2-x}},$$

qui est croissante sur $[0,2]$. La suite $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc *monotone*. De plus, le signe de $g(x) - x$ peut être déterminer de la manière suivante

Figure 1.7 – f croissante, suite décroissante



$$g(x) - x = \frac{2 - \sqrt{2-x} - x^2}{x + \sqrt{2 - \sqrt{2-x}}} =$$

$$\frac{(2-x^2)^2 - (2-x)}{\left(x + \sqrt{2-\sqrt{2-x}}\right)\left(2 - x^2 + \sqrt{2-x}\right)} =$$

$$\frac{(x-1)\,(x+2)\,\left(x^2 - x - 1\right)}{\left(x + \sqrt{2-\sqrt{2-x}}\right)\left(2 - x^2 + \sqrt{2-x}\right)}$$

2. Si $u_0 \in [0,1]$, la suite $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par l'unique limite possible 1, elle converge vers 1.
3. Si $u_0 \in [1,2]$, la suite $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par l'unique limite possible 1, elle converge vers 1. Voir la figure 1.8, page suivante.

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

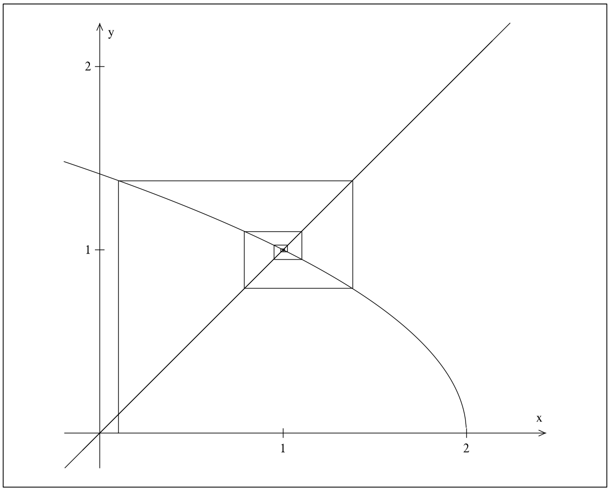
Exemple 1.27 – Autre cas

Soit la suite définie par

$$u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ et } u_{n+1} = \sin(2\,u_n)$$

Elle converge vers une limite $\alpha \in]\pi/4, 1[$.

Figure 1.8 – f décroissante



Démonstration

La fonction $f : x \longmapsto \sin(2\,x)$ est définie, continue sur $\mathbb{R}$, les limites possibles sont solutions de $f(x) = x$, on en trouve trois

$$\{-\alpha, 0, \alpha\} \text{ où } \alpha \in \left]-\frac{\pi}{4}, 1\right[$$

1. L'intervalle $[0, 1]$ est stable par f, montrons que la suite arrive un jour dans l'intervalle stable où f est décroissante $[\pi/4, 1]$. [a] *Par l'absurde* Pour cela supposons que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

alors la suite est croissante et elle reste dans l'intervalle $[u_0, \pi/4]$. Croissante, majorée, elle devrait converger, mais il n'y a pas de limite possible. L'hypothèse faite est fausse ! Donc, sa négation est vraie, soit

$$\exists p \in \mathbb{N},\ u_p \notin \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \text{ mais alors } \forall n \geqslant p,\ u_n \in \left[\frac{\pi}{4}, 1\right]$$

Voir la figure 1.9, page suivante.

2. Dans l'intervalle $[\pi/4, 1]$ la fonction f est décroissante, nous avons étudier ce cas précédemment (voir l'exemple 1.26, page 78). Ici, il est difficile de trouver les solutions de $f \circ f(x) = x$ (les limites possibles). Nous pouvons au contraire utiliser le cas contractant (voir l'exemple 1.24, page 76). En effet la dérivée de f est

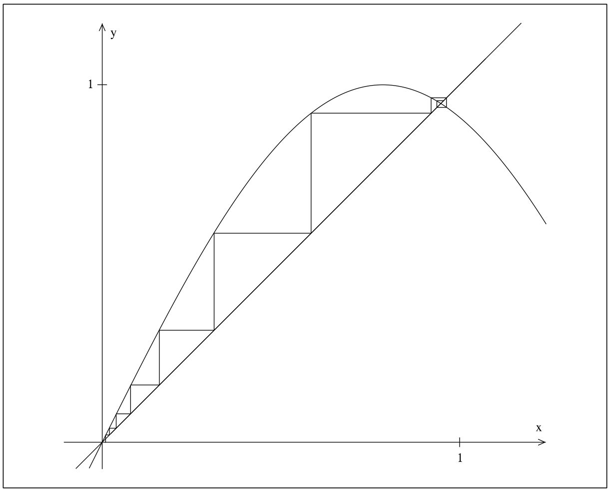
$$x \longmapsto 2\,\cos(2\,x)$$

il suffit alors de montrer que, pour n assez grand, u_n reste dans un intervalle autour de α sur lequel $|f'|$ reste majoré par un $k < 1$.

a. Cet intervalle est stable, car

$$\sin(1) \geqslant \frac{\pi}{4}$$

Figure 1.9 – Autre cas



Remarque importante 1.17 – Danger !

 Si $f : J \longrightarrow J$ est décroissante, il faut bien s'assurer, quand on étudie les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'il n'y a pas d'autres limites possibles. C'est-à-dire que, pour l'intervalle stable J où on étudie la suite

$$\left\{x \in J,\ f \circ f(x) = x\right\} = \left\{x \in J,\ f(x) = x\right\}$$

Considérer, par exemple la suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n}$$

Exemple 1.28 – Cas décroissant, sans convergence

Soit la suite définie par

$$u_0 \in [-1, 1] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - u_n^2$$

On a plusieurs cas

1. (cas rare)

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

2. (cas plus général)

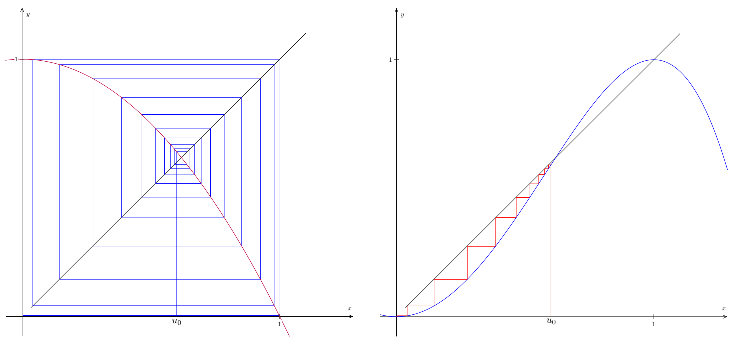
$$u_{2\,n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \text{ et } u_{2\,n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

ou, symétriquement

$$u_{2\,n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \text{ et } u_{2\,n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Voir la figure 1.10, de la présente page à gauche, on comprend mieux ce qui se passe en regardant $(u_{2\,n})_{n \in \mathbb{N}}$, voir la même figure, à droite.

Figure 1.10 – Fonction décroissante et non convergence



$u_n = f\,(u_n)$ $\qquad$ $u_{2\,n+2} = f \circ f\,(u_{2\,n})$

Exercice(s) 1.8

1.8.1 Étudier les suites récurrentes suivantes

$$\begin{array}{rcl}
u_0 \geqslant 0 & \text{et} & \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2\arctan(u_n) \\
u_0 \in \mathbb{R} & \text{et} & \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n) \\
u_0 \in [0,1] & \text{et} & \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(2\,u_n) \\
u_0 \in \mathbb{R} & \text{et} & \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \dfrac{3}{4}\,u_n^2 \\
u_0 \geqslant 0 & \text{et} & \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a\,\dfrac{1+a^2}{1+u_n^2}, \qquad (a>0) \\
u_0 \in]0,1[& \text{et} & \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2\,\ln(u_n) \\
u_0 > 0 & \text{et} & \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \begin{cases} u_n\,\ln(|u_n|) & \text{si } u_n \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{array}$$

1.8.2 Étudier la suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\int_0^{u_n} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)$$

1.8.3 Déterminer les $a \geqslant 0$ tels que la suite

$$u_0 = 0 \qquad u_{n+1} = u_n^2 + a \text{ converge.}$$

1.8.4 Soit la suite définie par

$$u_0 \in [-1,+1] \text{ et } u_{n+1} = 1 - \mu\,u_n^2,\ \text{ où } \mu \in]0,2]$$

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [-1,+1]$$

(b) Montrer que la suite converge pour tout $u_0 \in [-1,1]$ si, et seulement si,

$$\mu \in \left]0, \frac{3}{4}\right]$$

(c) Montrer que

$$\forall \mu \in \left]0, \frac{5}{4}\right],\ (u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent.}$$

1.3.5.2 Récurrences multiples

Remarque 1.18

Les récurrences multiples sont de la forme $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$, ou, plus généralement de la forme ($p \geqslant 2$)

$$u_{n+p} = f(u_{n+p-1}, \dots, u_n)$$

Nous avons vu plusieurs techniques lorsque nous avons étudié la suite

$$u_{n+2} = \arctan(u_{n+1}) + \arctan(u_n)$$

1. Avec les valeurs d'adhérence. Mais, en ce cas, nous n'avons aucune idée de la *vitesse de convergence.*
2. En utilisant le théorème des accroissements finis, mais cela ne fonctionne que lorsque u_0 et u_1 sont suffisamment proche de la limite possible λ.

Exemple 1.29

Soit la suite définie par

$$u_0 > 0,\ u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2 + u_{n+1}} + \sqrt{2 + u_n}\right)$$

Méthode des valeurs d'adhérence

- La suite est bien définie, car les valeurs de u_n restent > 0.
- Si la suite converge, alors la limite λ vérifie

$$\lambda = \sqrt{2 + \lambda}, \text{ soit } \lambda = 2$$

- Comme on a

$$\forall x \geqslant 2,\ \sqrt{2 + x} \leqslant x \text{ et } \forall x \in [0, 2],\ \sqrt{2 + x} \geqslant x$$

il est facile d'obtenir que la suite est bornée et, plus précisément

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \min(u_0, u_1, 2) \leqslant u_n \leqslant \max(u_0, u_1, 2)$$

On peut donc prendre en considération la plus petite valeur d'adhérence α et la plus grande valeur d'adhérence β. En prenant des suites extraites, il vient l'existence de deux valeurs d'adhérence γ et δ telles que

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2 + \gamma} + \sqrt{2 + \delta}\right) \leqslant \sqrt{2 + \beta}$$

On en déduit que $\beta \leqslant 2$. De même, on trouve que $\alpha \geqslant 2$. Donc $\alpha = \beta = 2$ et la suite converge.

Méthode utilisant le théorème des accroissements finis

- La limite possible est 2 et prenons $\lambda \in]1/8, 1/2[$, alors comme on a
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+2}-2| \leqslant \frac{1}{2}\left(\left|\sqrt{2+u_{n+1}}-2\right| + \left|\sqrt{2+u_n}-2\right|\right)$$
on peut trouver un $\varepsilon > 0$, tel que, si u_n et u_{n+1} sont dans $[2-\varepsilon, 2+\varepsilon]$, alors
$$|u_{n+2}-2| \leqslant \lambda\ \left(|u_{n+1}-2| + |u_n-2|\right)$$
par exemple,
$$\varepsilon = 4 - \frac{1}{16\lambda^2}$$
On a alors
  - Si u_0 et u_1 sont dans $[2-\varepsilon, 2+\varepsilon]$, alors
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [2-\varepsilon, 2+\varepsilon]$$
  - Et, de plus, en comparant à la suite récurrente définie par
$$v_{n+2} = \lambda\ \left(v_{n+1}+v_n\right)$$
on a, pour v_0 et v_1 convenablement choisis
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n-2| \leqslant v_n \text{ et, donc } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$
- La difficulté est alors de montrer qu'à partir d'un certain rang N, u_N et u_{N+1} sont dans $[2-\varepsilon, 2+\varepsilon]$.

Théorème des accroissements finis，详见《高等数学I 法文版》([?], théorème 1.7, page 48).

Exercice(s) 1.9

1.9.1 Utiliser les deux méthodes pour montrer que la suite définie par
$$u_0 > 0,\ u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \ln(1+u_{n+1}) + \ln(1+u_n)$$
converge.

1.9.2 Soit $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$, étudier la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_n\, u_{n+1}}$$

1.9.3 Soit la suite définie par

$$u_0 > 0,\ u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n}\right)$$

On dit qu'un intervalle I est *stable*, si

$$[u_0 \in I \text{ et } u_1 \in I] \implies [u_2 \in I]$$

(a) Montrer que les intervalles de la forme

$$\left[\alpha, \frac{1}{\alpha}\right],\ \text{où } \alpha \in]0,1[$$

sont stables.

On s'intéresse au plus grand $\alpha_n \in]0,1[$ tel que

$$(u_n, u_{n-1}) \in \left[\alpha_n, \frac{1}{\alpha_n}\right]^2$$

(b) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

(c) Trouver un minorant et un majorant de u_{n+1} qui s'exprime à l'aide de α_n.

(d) En déduire que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

1.3.5.3 Récurrences perturbées

Remarque 1.19

On appelle ainsi toute suite qui est « presque » récurrente.

Exemple 1.30

Soit la suite définie par

$$u_1 \in [0,1] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{n+1}{n}\sin(u_n)$$

Deux méthodes sont encore possibles.

Méthode des valeurs d'adhérence

- La suite est bornée (elle reste dans $[0,1]$), donc elle admet une plus petite valeur d'adhérence α et une plus grande β, on peut alors trouver une sous-suite qui converge vers une valeur d'adhérence λ vérifiant

$$\lambda = \sin(\alpha) \geqslant \alpha \geqslant 0,\ \text{donc } \alpha = 0$$

De même, on peut trouver une sous-suite qui converge vers une valeur d'adhérence μ vérifiant

$$\beta = \sin(\mu) \leqslant \sin(\beta),\ \text{donc } \beta = 0$$

Finalement

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Utilisation des perturbations.

- Pour $p \geqslant 1$, on définit la suite $(v_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$v_{1,p} = u_1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1,p} = \begin{cases} u_{n+1} & \text{si } n \leqslant p \\ \dfrac{p+1}{p} \sin(v_{n,p}) & \text{sinon} \end{cases}$$

On montre alors successivement que

— La suite $(v_{n,p})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite λ_p.

— La suite $(\lambda_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

— Par encadrement, on en déduit que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice(s) 1.10

1.10.1 Étudier la suite définie par

$$u_1 \in [0,1] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \sin\left(\frac{n+1}{n}\, u_n\right)$$

par les deux méthodes.

1.10.2 Étudier la suite définie par

$$u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + \frac{1}{n}}$$

1.10.3 Soit la suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{n\, u_n + 1}$$

Montrer que

$$u_n - n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2$$

1.10.4 Soit la suite définie par

$$u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$$

Montrer qu'il existe un unique $u_1 \in]0,1[$ tel que la suite soit bornée et strictement croissante.

1.10.5 On considère la suite définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$$

Montrer que

$$u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

1.4 Exemples de schémas numériques

1.4.1 Méthodes de résolution numérique de $f(x) = 0$

Le problème est le suivant. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ et telle que $f(a)\,f(b) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure qu'il existe un point d'annulation λ qu'il faut calculer à une précision $\varepsilon > 0$ donnée. Nous nous intéresserons essentiellement aux *erreurs de méthode*.

注释 1.5

数值分析涉及的问题非常广泛，包含的数值方法也多种多样。本小节介绍了四种经典的数值方法的基本思想和科学软件代码：二分法，拉格朗日法，牛顿法，不动点法。

1.4.1.1 Dichotomie

Principe

Même principe que le théorème des segments emboîtés. On coupe en deux de manière à essayer de construire deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(a_n)\,f(b_n) < 0 \text{ et } b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Algorithme

- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Supposons calculés a_n et b_n, on calcule $\alpha = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $f(\alpha)$.
- Si $f(\alpha) = 0$, l'algorithme s'arrête (en pratique cela n'arrive pas).
- Si $f(a_n)\,f(\alpha) < 0$, on pose

$$a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \alpha$$

- Si $f(a_n)\,f(\alpha) > 0$, on pose

$$a_{n+1} = \alpha \text{ et } b_{n+1} = b_n$$

Voir la figure 1.11, page suivante.

Erreur de méthode

Au bout de n itérations, on a une estimation de λ (ou du moins, d'un λ) qui est

$$\widehat{\lambda}_n = \frac{a_n+b_n}{2} \text{ et } \left|\widehat{\lambda}_n - \lambda\right| \leqslant \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Code

Voir la session `Python` 1.8, de la présente page.

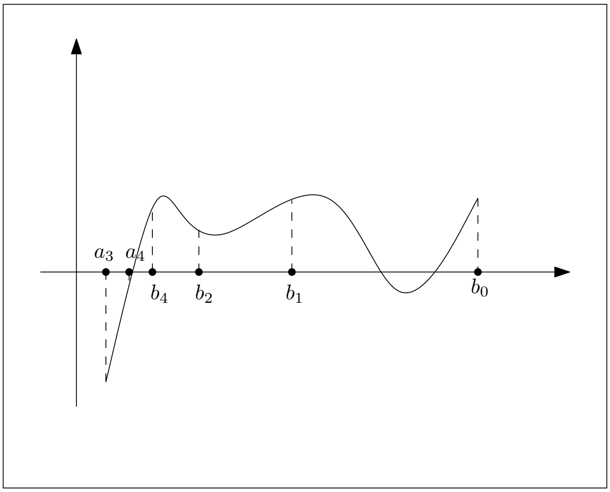
Session `Python` 1.8 – Méthode de dichotomie

Très simplement...

In[1]

```python
def dicho(f, a, b, epsilon):
    an, bn, cn = a, b, (a+b)/2
    while (bn-an)/2 > epsilon:
        if f(cn)*f(an) >= 0:
            an = cn
```

Figure 1.11 – Dichotomie




```python
        else:
            bn = cn
        cn = (an+bn)/2
        print(cn, (bn-an)/2)
    return cn
```

In[2]

```python
dicho(lambda t: t**2-2, 1, 2, 10**(-5))
```

```
1.25 0.25
1.375 0.125
1.4375 0.0625
1.40625 0.03125
1.421875 0.015625
1.4140625 0.0078125
1.41796875 0.00390625
1.416015625 0.001953125
1.4150390625 0.0009765625
1.41455078125 0.00048828125
1.414306640625 0.000244140625
1.4141845703125 0.0001220703125
1.41424560546875 6.103515625e-05
```

```
1.414215087890625 3.0517578125e-05
1.4141998291015625 1.52587890625e-05
1.4142074584960938 7.62939453125e-06 <- arrêt à la bonne valeur
```

Out[2]

```
1.4142074584960938
```

In[3]

```python
import numpy as np
_-np.sqrt(2)
```

Out[3] – Comparaison

```
-6.103877001395475e-06
```

1.4.1.2 Méthode de Lagrange

Principe

Le principe est d'estimer λ par l'abscisse de l'intersection de l'axe Ox avec la corde reliant $\big(a, f(a)\big)$ à $\big(b, f(b)\big)$. La corde a pour équation

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

elle coupe donc l'axe Ox au point

$$\left(a - (b - a)\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}, 0\right)$$

Algorithme

- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Supposons calculés a_n et b_n, on calcule

$$\alpha = a_n - (b_n - a_n)\frac{f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} \text{ et } f(\alpha)$$

- Si $f(\alpha) = 0$, l'algorithme s'arrête.

— Si $f(a_n)\,f(\alpha) < 0$, on pose

$$a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \alpha$$

— Si $f(a_n)\,f(\alpha) > 0$, on pose

$$a_{n+1} = \alpha \text{ et } b_{n+1} = b_n$$

Voir la figure 1.12, page suivante.

Erreur de méthode

Supposons que f est de classe $\mathscr{C}^1$. On a donc, dans le cas précédent (les autres cas donnant lieu au même type de calculs)

— La dérivée f' est bornée sur $[a, b]$, et comme elle ne s'annule pas,

$$\exists (m, M) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \forall x \in [a, b],\ m \leqslant \left|f'(x)\right| \leqslant M$$

En ce cas, on a

$$\underbrace{f(\lambda)}_{=0} - f(a_n) = \frac{f(b) - f(a_n)}{b - a_n}\,(a_{n+1} - a_n)$$

le théorème des accroissements finis (voir [?], théorème 1.7, page 47) nous donne alors

$$(\lambda - a_n)\,f'(c_n) = (a_{n+1} - a_n)\,f'(d_n),\ \text{ où } c_n \in]a_n, \lambda[,\ d_n \in]a_n, b[$$

Finalement, on obtient

$$\left|\lambda - a_{n+1}\right| \leqslant \frac{M - m}{m}\,\left|a_{n+1} - a_n\right|$$

Si l'intervalle $[a, b]$ est suffisamment petit [a], on aura $M \leqslant 2\,m$, et en ce cas

$$\left|\lambda - a_{n+1}\right| \leqslant \left|a_{n+1} - a_n\right|$$

Ce qui nous autorise à arrêter le calcul quand $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \varepsilon$.

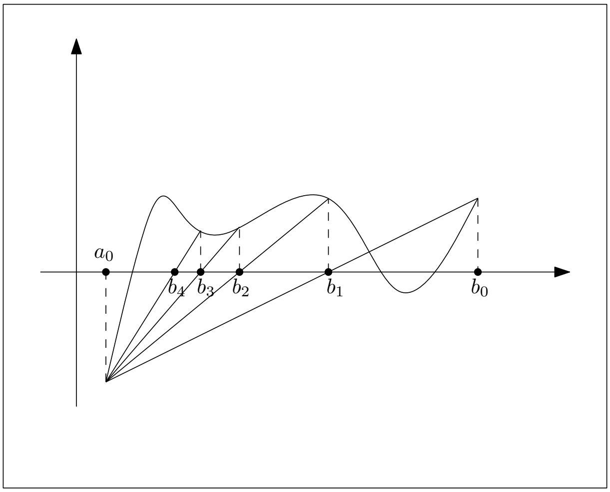
▸ L'avantage de ce type de critère d'arrêt est que l'on n'a pas besoin de calculer vraiment l'erreur de méthode.

Code

Voir la session Python1.9, page ci-contre.

a. Cela suppose que b n'est pas trop loin de λ.

Figure 1.12 – Méthode de Lagrange – cas général



Remarque 1.20

Dans le cas général, la convergence n'est pas assurée. Pour simplifier, nous supposerons que la fonction est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$, et que les dérivées f' et f'' ne s'annulent pas. En ce cas, l'une des deux suites est constante et l'autre monotone bornée. Supposons, comme sur le graphique ci-dessous, que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante, majorée par b_0, elle converge vers une valeur λ. Comme f est continue, on a, en passant à la limite dans la relation de récurrence

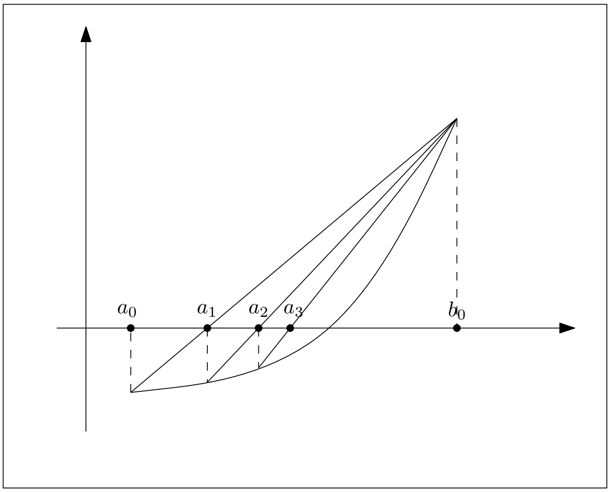
$$\lambda = \lambda - (b - \lambda)\,\frac{f(\lambda)}{f(b) - f(\lambda)}$$

comme $\lambda \neq b$, puisque f est continue, il vient $f(\lambda) = 0$. Voir la figure 1.13, page suivante.

Session `Python` 1.9 – Méthode de Lagrange

On constate que l'erreur de méthode est surestimée quand on la majore par la différence de deux termes consécutifs...

Figure 1.13 – Méthode de Lagrange – cas convexe



In[4]

```
def lagrange(g, a, b, epsilon):
    # uniquement si f est de classe C^2
    # et que f' et f'' ne s'annulent pas
    if g(a) < 0:
        an, b0 = a, b
    else:
        an, b0 = b, a
    cn = an-(b0-an)*g(an)/(g(b0)-g(an))
    while abs(cn-an) > epsilon:
        an = cn
        cn = an-(b0-an)*g(an)/(g(b0)-g(an))
        print(cn, abs(cn-an))
    return cn
```

In[5]

```
lagrange(lambda t: t**2-2, 1, 2, 10**(-5))
```

```
1.4 0.06666666666666665
1.411764705882353 0.011764705882353121
1.4137931034482758 0.002028397565922768
1.4141414141414141 0.00034831069313834284
```

```
1.4142011834319528 5.9769290538636e-05
1.41421143847487 1.0255042917295398e-05 <- arrêt à la bonne valeur
1.4142131979695431 1.7594946730703498e-06
```

Out[5]

```
1.4142131979695431
```

In[6] – Comparaison

```
_-np.sqrt(2)
```

Out[6]

```
-3.644035520000699e-07
```

1.4.1.3 Méthode de Newton

Principe

À nouveau, on supposera que f' et f'' ne s'annulent pas sur $[a, b]$. L'idée de l'algorithme est de remplacer la courbe par la tangente en b et de calculer le point d'intersection avec l'axe Ox. La tangente a pour équation

$$y = f(b) + f'(b)\,(x - b)$$

Elle coupe l'axe Ox au point

$$\left(b - \frac{f(b)}{f'(b)}, 0\right)$$

Algorithme

— On pose $b_0 = b$ (cas où $f' > 0$ et $f'' > 0$).

— Supposons calculé b_n, on a alors

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}$$

Voir la figure 1.14, page 97.

Erreur de méthode

On écrit

$$f(b_{n+1}) = f\left(b_n + (b_{n+1} - b_n)\right) = \underbrace{f(b_n) + (b_{n+1} - b_n)\, f'(b_n)}_{=0} + \int_{b_n}^{b_{n+1}} (b_{n+1} - t)\, f''(t)\, \mathrm{d}t$$

Donc, d'après le TAF

$$\left| f(b_{n+1}) - \underbrace{f(\lambda)}_{=0} \right| = \left| b_{n+1} - \lambda \right| \left| f'(c_n) \right|, \text{ où } c_n \in]\lambda, b_{n+1}[$$

Donc, si l'on pose

$$m_1 = \min_{x\in[a,b]} \left| f'(x) \right| > 0 \text{ et } M_2 = \max_{x\in[a,b]} \left| f''(x) \right| > 0$$

on obtient

$$\left| b_{n+1} - \lambda \right| \leqslant \frac{M_2}{2\, m_1}\, \left(b_n - b_{n+1}\right)^2 \leqslant \frac{M_2}{2\, m_1}\, (b_n - \lambda)^2 \tag{1.1}$$

Code

Voir la session `Python` 1.10, page 98.

Remarque 1.21 – Sur les inégalités de l'équation (1.1), de la présente page

— La première inégalité nous donne une condition d'arrêt pratique.

— La deuxième inégalité nous donne, lorsque a et b sont bien choisis et la fonction agréable, une convergence très rapide de la suite. Qu'est-ce qu'une fonction agréable ? Une fonction qui vérifie

$$\frac{M_2}{2m_1}\,(b-a) < 1$$

en ce cas

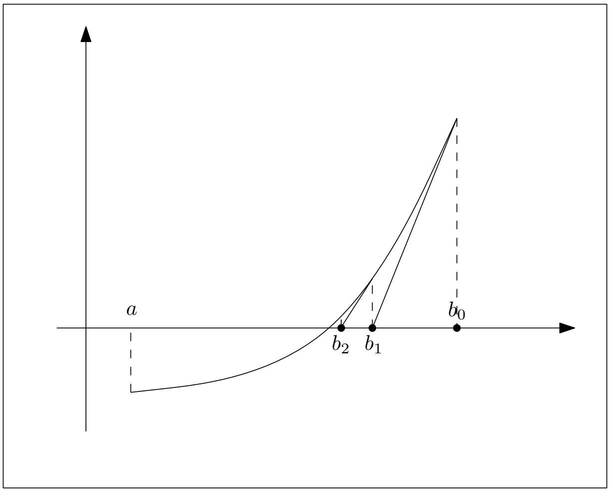
$$|b_n - \lambda| \leqslant \frac{2m_1}{M} \left(\frac{M_2}{2m_1}\,(b-a)\right)^{2^n}$$

⚠ Cela suppose que l'on soit capable d'évaluer m_1 et M_2 !

Remarque 1.22

Le défaut majeur de la méthode de Newton est qu'elle nécessite la connaissance de f' !

Figure 1.14 – Méthode de Newton



Remarque 1.23

Sous les hypothèses faites, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par a, elle converge donc vers une valeur β, qui vérifie, par continuité de f

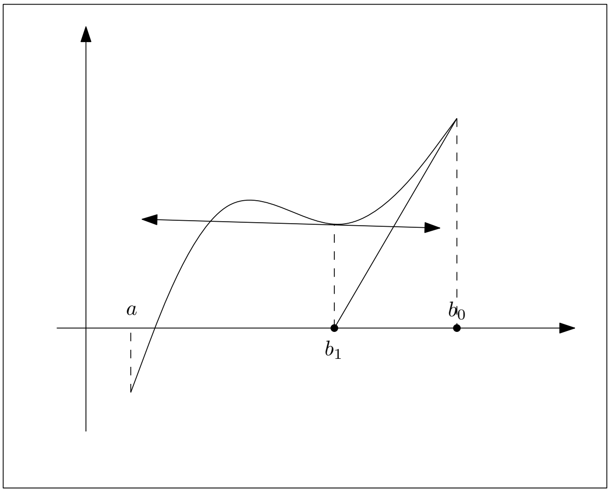
$$\beta = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}, \text{ donc } f(\beta) = 0$$

⚠ Si les hypothèses sur f ne sont pas satisfaites, il peut arriver que l'on sorte de l'intervalle $[a, b]$. Voir la figure 1.15, page suivante.

Remarque 1.24

Il faut faire attention aux signes de f' et f'' pour savoir quelle borne doit bouger. Ci-dessous, c'est a qui doit bouger. Si l'on prend b, on sort de l'intervalle $[a, b]$. Voir la figure 1.16, page 99.

Figure 1.15 – Dysfonctionnement de la méthode de Newton



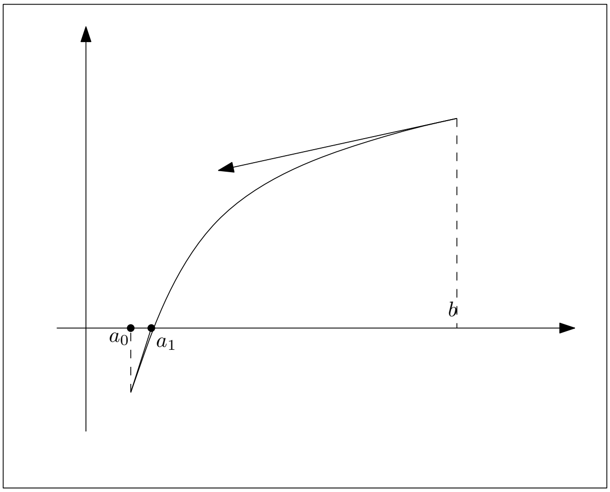
Session Python 1.10 – Méthode de Newton

En traduisant les formules énoncées... Cela converge très rapidement (on ne passe que deux fois dans la boucle).

In[7]

```
def newton(g, gp, b, m, M, epsilon):
    # uniquement si f est de classe C^2
    # et que f' et f'' sont strictement positives
    bnmu = b
    bn = bnmu-g(bnmu)/gp(bnmu)
    erreur = M/(2*m)*(bn-bnmu)**2
    while erreur > epsilon:
        bnmu = bn
        bn = bnmu-g(bnmu)/gp(bnmu)
        erreur = M/(2*m)*(bn-bnmu)**2
        print(bn, erreur)
    return bn
```

Figure 1.16 – Méthode de Newton – choix du point de départ



In[8]

```
newton(lambda t: t**2-2, lambda t: 2*t, 2, 2, 2, 10**(-5))
```

```
1.4166666666666667 0.003472222222222216
1.4142156862745099 3.003652441368683e-06 <- arrêt à la bonne valeur
```

Out[8]

```
1.4142156862745099
```

In[9]

```
_-np.sqrt(2)
```

Out[9]

```
2.1239014147411694e-06
```

1.4.1.4 Méthode du point fixe

Principe

On veut utiliser le théorème du point fixe. Pour cela on transforme la recherche du zéro de f en la recherche du point fixe pour l'application g, contractante de la forme

$$g(x) = x + \mu f(x), \text{ où } \mu \text{ est tel que } g \text{ soit contractante.}$$

Si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, alors [a]

$$\forall x \in [a, b],\ g'(x) = 1 + \mu f'(x) \in [1 + \mu m_1, 1 + \mu m_2]$$

où m_1 et m_2 sont les valeurs extrémales de f' sur $[a, b]$. Il faut donc choisir (si possible !) μ de telle sorte que

$$\max\left(|1 + \mu m_1|, |1 + \mu m_2|\right) = k < 1$$

▸ Si, par exemple, f est croissante sur $[a, b]$, alors m_1 et m_2 sont $\geqslant 0$ (supposons $m_1 < m_2$), il faut donc que μ soit < 0, on a alors intérêt à prendre

$$1 + \mu m_1 = -1 - \mu m_2 \text{ soit } \mu = -\frac{2}{m_1 + m_2}, \text{ alors } k = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} < 1$$

a. On convient ici que si $a > b$, alors $[a, b]$ désigne $[b, a]$.]

Algorithme

Nous nous limiterons aux fonctions croissantes (comme pour Lagrange et Newton).

— On calcule k et on pose $u_0 = \frac{a+b}{2}$ (par exemple).

— Si on suppose u_n calculé, on calcule

$$u_{n+1} = g(u_n)$$

Le théorème du point fixe nous assure alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une valeur λ, telle que

$$g(\lambda) = \lambda \text{ soit } f(\lambda) = 0 \text{ car } \mu \neq 0$$

Erreur de méthode

On a

$$\left|u_{n+1}-\lambda\right| \leqslant k\left|u_n-\lambda\right| \leqslant k^{n+1}\left|u_0-\lambda\right| \leqslant k^{n+1} \frac{b-a}{2}$$

Code

Voir la session `Python` 1.11, de la présente page.

Session `Python` 1.11 – Méthode du point fixe

Le résultat réel est très proche de la valeur donnée par `numpy`, cela vient du fait qu'on n'actualise pas la valeur de m_1 et m_2 et donc de k. Du coup, on passe trop souvent dans la boucle...

In[10]

```python
def pointfixe(g, a, b, m1, m2, epsilon):
    # uniquement si f est de classe C^1
    # et que f et f' sont (strictement) croissantes
    mu, k, u0 = -2/(m1+m2), (m2-m1)/(m2+m1), (a+b)/2
    un = u0+mu*g(u0)
    erreur = (b-a)/2
    while erreur > epsilon:
        un = un+mu*g(un)
        erreur = k*erreur
        print(un, erreur)
    return un
```

In[11]

```python
pointfixe(lambda t: t**2-2, 1, 2, 2, 4, 10**(-5))
```

```
1.4143518518518519 0.16666666666666666
1.4142214649062643 0.05555555555555555
1.4142140143057242 0.018518518518518517 <- arrêt à la bonne valeur
1.414213588219487 0.006172839506172839
1.4142135638512747 0.0020576131687242796
1.4142135624576335 0.0006858710562414265
1.41421356237793 0.00022862368541380883
1.4142135623733716 7.620789513793627e-05
1.414213562373111 2.540263171264542e-05
1.414213562373096 8.46754390421514e-06
```

Out[11]

```
1.414213562373096
```

In[12]

```python
_-np.sqrt(2)
```

Out[12]

```
8.881784197001252e-16
```

Exercice(s) 1.11

1.11.1 On considère la fonction

$$f(x) = \tan(x) - x$$

(a) Montrer qu'elle possède un unique point d'annulation α dans $]\pi/2, 3\pi/2[$.

(b) Calculer α à 10^{-3} près en utilisant les 4 méthodes du cours.

1.11.2 (a) Étudier la convergence de la méthode de Newton permettant de calculer une valeur approchée de $\sqrt{a}$ lorsque $a > 0$, avec l'équation $x^2 = a$.

(b) Soit f la fonction que l'on itère. Montrer que $f(x) - f(\sqrt{a})$ s'exprime simplement en fonction de $x - \sqrt{a}$.

(c) En déduire un encadrement de $\sqrt{3}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-10}.

1.11.3 Appliquer la méthode de Newton à la fonction sin autour de π et évaluer la rapidité de la convergence.

1.11.4 Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution et déterminer ses 10 premiers chiffres après la virgule par

(a) dichotomie ;

(b) la méthode du point fixe ;

(c) la méthode de Newton couplée avec la méthode des sécantes (Lagrange).

1.11.5 Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que f admet trois racines réelles distinctes.

(b) Déterminer les 8 premiers chiffres après la virgule de la plus grande racine.

1.4.2 Méthodes approchées de quadrature

Ce paragraphe traite de la situation suivante. Soit $f \in \mathscr{C}^0_{\text{p.m.}}([a,b],\mathbb{R})$, on veut calculer
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

注释 1.6

本小节介绍了两种经典的数值求解定积分方法：黎曼和法与梯形法。

1.4.2.1 Sommes de Riemann

Définition 1.7 – Somme de Riemann

On découpe l'intervalle en une *subdivision* (où $n \in \mathbb{N}^*$)
$$a = a_{0,n} < a_{1,n} < \cdots < a_{n,n} = b$$
telle que
$$\boxed{\max_{k\in[\![1,n]\!]} (a_{k,n} - a_{k-1,n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$
et, pour chaque $k \in [\![1,n]\!]$, on choisit une valeur $\xi_{k,n} \in [a_{k-1,n}, a_{k,n}]$, alors
$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (a_{k,n} - a_{k-1,n})\, f\left(\xi_{k,n}\right)}_{\text{est appelée } \textit{somme de Riemann de } f} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

请注意这里的函数f是在闭区间的有界函数，引出了了细分、黎曼和、定积分的定义，详见《高等数学II 法文版》([?], chapitre 3).

Démonstration

On calcule

$$\delta_n = \left| \sum_{k=1}^{n} (a_{k,n} - a_{k-1,n}) f\left(\xi_{k,n}\right) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| =$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1,n}}^{a_{k,n}} \left[f\left(\xi_{k,n}\right) - f(t) \right] \,\mathrm{d}t \right|$$

— La fonction s'approxime par une fonction en escalier (voir [?], théorème 3.1, page 107), commençons donc par regarder le résultat pour les fonctions en escalier.

— La propriété demandée est linéaire en f, on peut donc se ramener au cas où f est de la forme

$$f(x) = 1 \text{ sur }]\alpha, \beta[, \ f(x) = 0 \text{ sur }]a, b[\setminus [\alpha, \beta]$$

où $f(a)$, $f(b)$, $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont quelconques. Les valeurs $f\left(\xi_{k,n}\right) - f(t)$ sont toujours nulles sur $[a_{k-1,n}, a_{k,n}]$ sauf, éventuellement, pour les valeurs de k telles que a, b, α ou β sont dans $[a_{k-1,n}, a_{k,n}]$, soit, au plus 6 valeurs, notons Δ l'ensemble de ces valeurs. Il vient alors

$$\delta_n \leqslant \sum_{k \in \Delta} \int_{a_{k-1,n}}^{a_{k,n}} 2 \max_{x \in [a,b]} \left|f(x)\right| \,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

— On obtient donc (linéarité) la même propriété pour les fonctions en escalier.

— Si f est continue par morceaux, soit $\varepsilon > 0$ fixé, on sait alors qu'il existe une fonction φ en escalier sur $[a, b]$ telle que

$$\max_{x \in [a,b]} \left|f(x) - \varphi(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

En majorant δ_n par

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (a_{k,n} - a_{k-1,n}) \left(f\left(\xi_{k,n}\right) - \varphi\left(\xi_{k,n}\right) \right) \right| +$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1,n}}^{a_{k,n}} \left[\varphi\left(\xi_{k,n}\right) - \varphi(t) \right] \,\mathrm{d}t \right| + \left| \int_a^b \left(\varphi(t) - f(t)\right) \,\mathrm{d}t \right|$$

on généralise le résultat.

— Finalement

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (a_{k,n} - a_{k-1,n}) f\left(\xi_{k,n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Remarque 1.25

On prend souvent

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ a_{k,n} = a + k \, \frac{b-a}{n}$$

on parle alors de *subdivision régulière*. Pour cette subdivision régulière on prend souvent

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \xi_{k,n} = a_{k-1,n} \text{ ou } a_{k,n}$$

Le résultat devient

$$\forall f \in \mathscr{C}^0_{\text{p.m.}}([a,b],\mathbb{R}),\ \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

On effectue une moyenne des valeurs de f, c'est pourquoi on appelle *valeur moyenne de f sur l'intervalle* $[a,b]$ la valeur

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Principe

On prend une somme de Riemann.

Algorithme

Sans difficulté, on calcule les valeurs et on les somme...

Erreur de méthode

Supposons la fonction de classe $\mathscr{C}^1$, on a alors

$$\delta_n = \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}}^{a+k\,\frac{b-a}{n}}\left(f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)-f(t)\right)\,\mathrm{d}t\right|$$

or (intégration par parties)

$$\int_{a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}}^{a+k\,\frac{b-a}{n}}\left(f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)-f(t)\right)\,\mathrm{d}t =$$

$$\underbrace{\left[\left(t-\left(a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}\right)\right)\left(f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)-f(t)\right)\right]_{t=a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}}^{t=a+k\,\frac{b-a}{n}}}_{=0} +$$

$$\int_{a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}}^{a+k\,\frac{b-a}{n}}\left(t-\left(a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}\right)\right)\,f'(t)\,\mathrm{d}t$$

La valeur absolue de la dernière intégrale peut être majorée par

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \max_{x\in\left[a+(k-1)\,\frac{b-a}{n},a+k\,\frac{b-a}{n}\right]}\left(\left|f'(x)\right|\right)$$

Finalement

$$\delta_n \leqslant \frac{(b-a)^2}{2\,n}\,M_1,\ \text{où}\ M_1 = \max_{x\in[a,b]}\left(\left|f'(x)\right|\right)$$

Code

Voir la session `Python` 1.12, de la présente page.

Session `Python` 1.12 – Utilisation des sommes de Riemann

La programmation est très facile. Il faut cependant évaluer M_1. Voici deux calculs avec une majoration un peu brutale et une deuxième plus précise.

In[18]

```
def Riemann(g, a, b, M, epsilon):
    n = int(1+np.floor((b-a)**2*M/epsilon))
    print('n = '+str(n))
    return (b-a)/n*sum([g(a+(k+1)*(b-a)/n) for k in
     ↪  range(n)])
```

In[19] – $M_2 = 1$

```
Riemann(lambda t: 1/(1+t**2), 0, 1, 1, 10**(-5))
```

```
n = 100000
```

Out[19]

```
0.7853956633932881
```

In[20]

```
_-np.pi/4
```

Out[20]

```
-2.5000041601330736e-06
```

In[21] – $M_2 = 0.65$

```python
Riemann(lambda t: 1/(1+t**2), 0, 1, .65, 10**(-5))
```

```
n = 65001
```

Out[21]

```
0.7853943172929058
```

In[22]

```python
_-np.pi/4
```

Out[22]

```
-3.846104542515327e-06
```

Exercice(s) 1.12

1.12.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\,x)}{k}$$

Soit x_n le plus petit réel strictement positif en lequel f_n admet un maximum local. Calculer la limite de $f_n(x_n)$.

1.12.2 Déterminer la limite de

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{n\,k + n^2}}{2\,n^2 + k^2}$$

1.12.3 Soit $f \in \mathscr{C}^2([a,b],\mathbb{R})$, trouver un développement asymptotique à 3 termes de

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

1.12.4 On pose pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$u_{n,p} = \frac{1}{p^n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{p}} + \cdots + \sqrt[n]{1+\frac{p}{p}}\right)^n$$

Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{p\to+\infty} u_{n,p} \text{ et } \lim_{p\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} u_{n,p}$$

1.12.5 (a) Montrer que

$$\forall x \in [0,1],\ x^2 - \frac{1}{3}x^4 \leqslant \sin^2 x \leqslant x^2$$

(b) En déduire la limite de

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right)$$

1.4.2.2 Méthode des trapèzes

La fonction f est ici de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$.

Principe

On remplace la courbe par des trapèzes (voir la figure 1.17, page 110). On a donc

$$\hat{I}_n = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)}{2}\right)$$

$$\frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Algorithme

Sans difficultés, on calcule les valeurs et les sommes.

Erreur de méthode

Supposons la fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$. On calcule

$$\delta_n = \left|\widehat{I}_n - \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| = \left|\sum_{k=1}^n \int_{a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}}^{a+k\,\frac{b-a}{n}} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{b-a}{2\,n}\left(f\left(a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right)\right|$$

Les termes qui apparaissent sont de la forme

$$R(h) = \int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{h}{2}\ \big(f(x+h)+f(x)\big)$$

où

$$h = \frac{b-a}{n} \text{ et } x = a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}$$

On a alors

$$R'(h) = f(x+h) - \frac{1}{2}\ \big(f(x+h)+f(x)\big) - \frac{h}{2}\,f'(h),\ \text{donc } R(0) = R'(0) = 0$$

Puis

$$R''(h) = -\frac{h}{2}\,f''(h)$$

La formule de Taylor avec reste intégral nous donne alors

$$R(h) = \int_0^h (h-t)\,\left(-\frac{t}{2}\,f''(t)\right)\ \mathrm{d}t$$

donc

$$\big|R(h)\big| \leqslant \frac{h^3}{12}\,M_2,\ \text{où } M_2 = \max_{x\in[a,b]} \big|f''(t)\big|$$

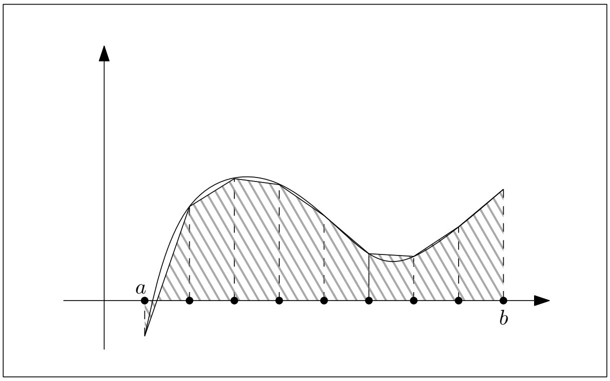
Finalement

$$\left|\widehat{I}_n - \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12\,n^2}\,M_2$$

Code

Voir la session `Python` 1.13, page suivante.

Figure 1.17 – Méthode des trapèzes



Session Python 1.13 – Méthode des trapèzes

Là encore, la majoration de l'erreur semble assez large. Remarquer aussi qu'on utilise beaucoup moins de valeurs à calculer qu'avec les sommes de Riemann.

In[23]

```
def trapeze(g, a, b, M, epsilon):
    n = int(1+np.floor((b-a)**3*M/(12*epsilon)))
    print('n = '+str(n))
    res = (g(a)+g(b))/2
    return (b-a)/n*(res+sum([g(a+k*(b-a)/n) for k in
     ↪  range(1, n)]))
```

In[24]

```
trapeze(lambda t: 1/(1+t**2), 0, 1, 0.5, 10**(-5))
```

```
n = 4167
```

Out[24]

```
0.7853981609978338
```

In[25]

```
_-np.pi/4
```

Out[25]

```
-2.3996145070981356e-09
```

Exercice(s) 1.13

1.13.1 Calculer
$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

1.13.2 *Méthode de Simpson.* On approxime, pour une fonction de classe $\mathscr{C}^4$ définie sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ par } \frac{b-a}{3}\left(f(a) + 4\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

(a) Interpréter géométriquement cette approximation.

(b) En reprenant la démonstration du calcul d'erreur de la formule des trapèzes, montrer que [a]
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880}\,M_4$$
où
$$M_4 = \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

(c) Soit $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ une subdivision régulière de $[a, b]$, avec $n \geqslant 2$, on définit $\widehat{I}_n$ par
$$\frac{b-a}{3\,n}\left(f(a) + f(b) + 2\left(\sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor-1} f\left(a + 2k\,\frac{b-a}{n}\right)\right) + 4\left(\sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor} f\left(a + (2k-1)\,\frac{b-a}{n}\right)\right)\right)$$

Évaluer, en fonction de n et de M_4, l'erreur de méthode
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \widehat{I}_n\right|$$

a. On pourra considérer le point milieu comme fixé.

Chapitre 2

Séries numériques

2.1 Toute série est une suite, et *réciproquement*

Dans tout ce cours, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Définition 2.1 – Série numérique

On appelle *série de terme général* u_n et on note $\sum u_n$, la suite définie par

$$S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} u_k, \text{ où } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

- Lorsque la suite $\left(S_n(u)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on dit que la série de terme général u_n converge, on écrit « $\sum u_n$ converge ».
- L'expression $S_n(u)$ s'appelle la *somme partielle d'ordre n de la série.*
- Si elle existe, la limite $S(u)$ de la suite $\left(S_n(u)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *somme de la série de terme général* u_n et est notée

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

- Lorsque la suite $\left(S_n(u)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série de terme général u_n diverge, on écrit « $\sum u_n$ diverge ».

常数项无穷级数通常也简称为级数，定义中 u_n通常叫做级数的一般项，$S_n(u)$ 叫做级数的部分和， $S(u)$ 叫做级数的和。

注释 2.1

级数是一种特殊的数列，数列与级数之间可以相互变化而得到。上一章节中我们介绍的关于数列的结论也同样适用与级数，另外级数的概念也理解成类似无上界区间的积分。特别需要注意的是级数这里使用的加和符号并不是通常意义上的加和符号，级数的加和符号通常不满足交换法则。

Remarque 2.1

Ici, nous commençons systématiquement à l'indice 0, il est bien évidemment possible de commencer à un indice quelconque dans $\mathbb{Z}$.

Exemple 2.1

La série $\sum q^n$, $q \in \mathbb{C}$ converge si, et seulement si $|q| < 1$.

Exemple 2.2 – Série harmonique

La série $\sum 1/n$ (bien sûr, ici $n \geqslant 1$) diverge, car

$$S_{2\,n} - S_n \text{ ne tend pas vers } 0$$

En conséquence $\sum 1/n^\alpha$ diverge lorsque $\alpha \leqslant 1$.

级数 $\sum 1/n$ 称之为调和级数。调和级数发散的性质是一个非常重要的结果，后续课程有多次应用。

Démonstration de l'exemple 2.1, de la présente page

- Si $q = 1$, alors $S_n = n + 1$, la suite diverge.
- Si $q \neq 1$, alors
$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de même nature que la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$, elle converge donc si, et seulement si $|q| < 1$.

Démonstration de l'exemple 2.2, de la présente page

- En effet,
$$S_{2\,n} - S_n \geqslant n\,\frac{1}{2\,n} = \frac{1}{2}$$

Or, si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite σ, alors

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma \text{ et } S_{2\,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma \text{ donc } S_{2\,n} - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

— Comme la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, divergente, son terme général tend vers $+\infty$.
— De plus, pour $\alpha \leqslant 1$, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Proposition 2.1 – Convergence absolue

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors

$$\left[\sum |u_n| \textit{ converge}\right] \Longrightarrow \left[\sum u_n \textit{ converge}\right]$$

La réciproque est en général fausse.

注意此性质为充分非必要条件，如交错调和级数 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ 。

Démonstration

— On pose comme pour les fonctions

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \text{ et } u_n^- = \max(-u_n, 0)$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_n^+ - u_n^- \text{ et } |u_n| = u_n^+ + u_n^-$$

Le résultat en découle, en utilisant le fait qu'une suite réelle, croissante majorée est convergente.

— Un contre-exemple à la réciproque est la série de terme général $(-1)^n/n$. Car les suites

$$(S_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (S_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes.}$$

Remarque importante 2.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On pose

$$\boxed{x_0 = u_0 \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ x_n = u_n - u_{n-1}}$$

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\sum x_n$ sont de même nature (i.e. l'une converge si, et seulement si, l'autre converge). De plus, lorsqu'elles convergent

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n$$

La série obtenue s'appelle la série dérivée *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriété 2.1

On a

$$\left[\sum u_n \text{ converge}\right] \implies \left[u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right]$$

⚠ La réciproque est *fausse.*

调和级数可以作为一个非常好的反例，通常我们应用此性质的逆否命题来判断级数是否发散。

Démonstration

— Le résultat vient du fait que $u_n = S_n(u) - S_{n-1}(u)$ et donc tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

— La série $\sum 1/n$ fournit un contre-exemple à la réciproque.

Propriété 2.2

On ne change pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de termes.

Démonstration

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que

$$\Delta = \{n \in \mathbb{N},\ u_n \neq v_n\} \text{ est de cardinal fini}$$

posons alors $N = \max \Delta$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$[n \geqslant N+1] \implies \left[S_n(v) - S_n(u) = \sum_{k\in\Delta} (v_k - u_k) \text{ (terme constant !)}\right]$$

Le résultat en découle immédiatement.

Propriété 2.3

Lorsque $\sum u_n$ est convergente, on définit son *reste d'ordre n* par

$$\boxed{R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

En ce cas, on a toujours

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S(u) = S_n(u) + R_n(u)$$

$R_n(u)$ 通常叫做级数的余项，请注意级数的部分和总是有定义，而级数的余项只有在级数收敛时才有定义。

Remarque importante 2.3

Lorsqu'une série $\sum u_n$ est convergente, on peut faire le lien avec les suites de la manière suivante

$$u_n = S_n(u) - S_{n-1}(u) = \boxed{R_{n-1}(u) - R_n(u)}$$

Lorsque la série est divergente, seule reste la première égalité. On utilisera alors

$$u_n = \boxed{S_n(u) - S_{n-1}(u)}$$

Exercice(s) 2.1

2.1.1 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum |a_n|$ converge. Que dire de cette suite si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| ?$$

2.1.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $v_n = 2\,u_{n+1} + u_n$, montrer que

$$\left[\sum u_n \text{ converge}\right] \iff \left[\sum v_n \text{ converge}\right]$$

2.1.3 (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle tendant vers $l \in [-\infty, +\infty]$, que dire de

i. la suite définie par

$$v_n = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$$

ii. la suite définie par

$$v_n = \frac{2}{n\,(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{n} k\,u_k\right)$$

iii. la suite définie par

$$v_n = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,u_k\right)$$

(b) On suppose maintenant que $l = 0$, étudier la nature de $\sum v_n$ lorsque $\sum u_n$ converge pour les cas i., ii. et iii.

2.1.4 En admettant que la série $\sum \ln(n)/n^2$ converge, montrer que la suite de terme général

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k)\right)^2\right] - n\,\left(\ln(n)\right)^2 + 2\,n\,\ln(n) - 2\,n - \frac{1}{2}\left(\ln(n)\right)^2 \text{ converge}$$

2.2 Séries à termes positifs

2.2.1 Principaux résultats

Définition 2.2 – Série à termes positifs

Soit $\sum u_n$ une série de terme général u_n, on dit qu'elle est *à termes positifs* si les u_n sont positifs ou nuls à partir d'un certain rang. [a]

a. Il existe donc un $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N] \implies [u_n \geqslant 0]$$

这里我们给出正项级数的一般定义，我们允许有限的项为负。比较常见的正项级数级数是各项都非负的情况。正项级数的收敛性质研究起来相对简单，通常一般的级数可以通过转化为正项级数来研究。

Propriété 2.4

Une série à termes positifs converge, si et seulement si, la suite $\big(S_n(u)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Démonstration

Car la suite $\big(S_n(u)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang...

Propriété 2.5

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ *à termes positifs* vérifiant, à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors

$$\Big[\sum v_n \text{ converge}\Big] \implies \Big[\sum u_n \text{ converge}\Big]$$

Et par contraposée,

$$\Big[\sum u_n \text{ diverge}\Big] \implies \Big[\sum v_n \text{ diverge}\Big]$$

Démonstration

Soit N un rang à partir duquel on a $u_n \leqslant v_n$. On obtient alors, pour $n \geqslant N$,

$$S_n(u) \leqslant S_n(v) - S_N(v) + S_N(u) \leqslant S(v) - S_N(v) + S_N(u)$$

Proposition 2.2 – Comparaison série/intégrale

Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$, décroissante, *intégrable sur tout segment de* $[a, +\infty[$ *(par exemple, continue par morceaux sur* $[a, +\infty[$*), alors*

$$\Big[\sum f(n) \textit{ converge}\Big] \iff \left[\left(x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) \textit{ est majorée}\right]$$

De plus, lorsque la série diverge, on a

$$S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \int_a^n f(t)\ \mathrm{d}t$$

此性质也叫做积分判别法。

Démonstration

Prenons $a = 0$. Tout s'explique alors avec le dessin 2.1, page suivante. Posons S_n la somme de rang n de la série $\sum f(n)$. L'intégrale de f sur le segment $[0, n]$ (qui est l'aire de la surface sous la courbe) est comprise entre les deux aires hachurées

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(k)}_{S_n - f(0)} \leqslant \int_0^n f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f(k)}_{S_n - f(n)} \tag{2.1}$$

On obtient

($\Rightarrow$) Si la série converge, sa somme partielle est majorée et alors, l'application

$$x \longmapsto \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

est croissante (positivité de f) et majorée par la somme S.

($\Leftarrow$) Si la fonction est majorée, alors la somme partielle S_n définit une suite croissante, majorée par

$$f(0) + \int_0^n f(t)\ \mathrm{d}t$$

elle est donc majorée...

- Lorsque la série diverge, on a alors

$$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \text{ et } \int_0^n f(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

L'encadrement

$$1 - \frac{f(0)}{S_n} \leqslant \frac{1}{S_n}\left(\int_0^n f(t)\ \mathrm{d}t\right) \leqslant 1 - \frac{f(n)}{S_n}$$

issue de l'inégalité ci-dessus, permet de conclure que :

$$\frac{1}{S_n}\left(\int_0^n f(t)\ \mathrm{d}t\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

Remarque 2.4

On peut retrouver l'inégalité 2.1, de la présente page par le calcul en procédant ainsi

— Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a alors

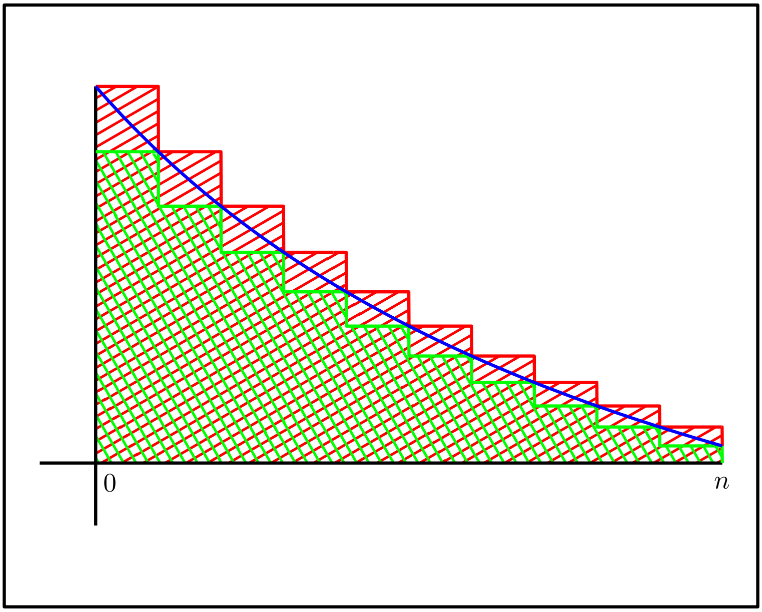
$$\forall t \in [k, k+1],\ f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$$

— En intégrant sur le segment $[k, k+1]$ et en utilisant la croissance de l'intégrale, on obtient

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant f(k)$$

En sommant sur k variant de 0 à $n-1$, on obtient le résultat.

Figure 2.1 – Comparaison série/intégrale



Remarque 2.5

Pour que la proposition s'applique, il suffit d'avoir une fonction décroissante à partir d'un certain rang, car les premiers termes d'une série n'interviennent pas quand on étudie la convergence ou non de cette série.

类似的方法我们也可用于单调递增函数。

Exemple 2.3 – Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors
$$\left[\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge}\right] \iff [\alpha > 1]$$

Démonstration

C'est une comparaison série/intégrale avec la fonction décroissante ($\alpha > 0$)
$$x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$$
Lorsque $\alpha \leqslant 0$, le terme général de la série ne tend pas vers 0...

Exemple 2.4 – Séries de Bertrand

Soit $\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors
$$\left[\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge}\right] \iff [\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)]$$

Démonstration

1. Si $\alpha > 1$, on utilise l'inégalité (vraie à partir d'un certain rang)
$$\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \leqslant \frac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}$$
2. Si $\alpha < 1$, on utilise l'inégalité (vraie à partir d'un certain rang)
$$\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geqslant \frac{1}{n}$$
3. Si $\alpha = 1$, on utilise une comparaison série/intégrale avec la fonction décroissante (à partir d'un certain rang)
$$x \longmapsto \frac{1}{x (\ln x)^\beta}$$

Remarque importante 2.6

La comparaison série/intégrale permet aussi d'avoir des évaluations des restes des séries de terme général $f(n)$ lorsqu'elles convergent bien sûr, mais pas toujours immédiatement un équivalent.

Soit $\sum f(n)$ une série convergente, où f est décroissante, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

La comparaison série/intégrale nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant R_n + f(n)$$

On a donc trois cas

1. Cas où $\boxed{f(n) = o\left(\int_n^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t\right)}$

   On a alors
   $$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$$

   Ainsi, pour les séries de Riemann convergentes ($\alpha > 1$), on a bien

   $$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

2. Pour les séries de type géométrique ou proche du type géométrique, cela ne marche plus. Ainsi

   $$u_n = \frac{1}{3^n},\quad R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,3^n} \text{ et } \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{3^x} = \frac{1}{\ln(3)\,3^n}$$

   Nous verrons plus loin une autre méthode... (Voir la proposition 2.4, page 137).

3. Cas où $\boxed{\int_n^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = o\left(f(n)\right)}$

   On a alors

   $$R_n = R_{n+1} + f(n+1) = f(n+1) + O\left(\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(n+1)$$

   Si on prend

   $$u_n = \frac{1}{3^{n^2}},\ \text{alors } \int_n^{+\infty} \frac{1}{3^{x^2}}\ \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\ \ln(3)\,n\,3^{n^2}} = o\left(\frac{1}{3^{n^2}}\right)$$

   donc
   $$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3^{(n+1)^2}}$$

- On peut généraliser ces résultats lorsque f est croissante.

Proposition 2.3 – Utilisation des relations de comparaison

Soit $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries* à termes strictement positifs, *telles que*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Alors

1. *Les deux séries sont de même nature.*[a]
2. *Si elles divergent*
$$S_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n(v)$$
3. *Si elles convergent*
$$R_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(v)$$

a. Donc elles convergent toutes les deux, ou bien, elles divergent toutes les deux.

注意此性质的条件为正项级数。

Démonstration

Soit $\varepsilon \in]0,1[$, à partir d'un certain rang N, on a

$$0 \leqslant (1-\varepsilon)\, v_n \leqslant u_n \leqslant (1+\varepsilon)\, v_n$$

— L'inégalité de droite nous permet de dire que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge, car ce sont des *séries à termes positifs* !

— L'inégalité de gauche nous permet de dire que si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge, pour la même raison.

▸ *Les séries sont donc bien de même nature !*

— *Si elles convergent,* alors, en sommant à partir d'un rang $n \geqslant N$, on obtient

$$\forall n \geqslant N,\ (1-\varepsilon)\, R_n(v) \leqslant R_n(u) \leqslant (1+\varepsilon)\, R_n(v)$$

ce qui nous permet de dire que

$$R_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(v)$$

— *Si elles divergent,* alors les sommes partielles tendent vers $+\infty$ (séries à termes positifs) et en sommant jusqu'à $n \geqslant N$, on obtient

$$(1-\varepsilon)\,\Big(S_n(v) - S_N(v)\Big) \leqslant S_n(u) - S_N(u) \leqslant (1+\varepsilon)\,\Big(S_n(v) - S_N(v)\Big)$$

ce qui permet de conclure que

$$S_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n(v)$$

Propriété 2.6

De même, lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont *à termes positifs*, on a [a]

1. Relation o

$$\left[u_n = o(v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ diverge}\right] \Longrightarrow \left[S_n(u) = o\left(S_n(v)\right)\right]$$

et

$$\left[u_n = o(v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ converge}\right] \Longrightarrow \left[\sum u_n \text{ converge et } R_n(u) = o\left(R_n(v)\right)\right]$$

2. Relation O

$$\left[u_n = O(v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ diverge}\right] \Longrightarrow \left[S_n(u) = O\left(S_n(v)\right)\right]$$

et

$$\left[u_n = O(v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ converge}\right] \Longrightarrow \left[\sum u_n \text{ converge et } R_n(u) = O\left(R_n(v)\right)\right]$$

a. On notera que c'est le comportement de la série dont le terme est dans le o ou le O qui détermine le résultat.

Démonstration

1. On applique la proposition précédente, en notant que

$$u_n = o(v_n) \text{ peut se traduire par } u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

2. Il existe $M \geqslant 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geqslant N,\ 0 \leqslant u_n \leqslant M\, v_n$$

— Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge, car ce sont des *séries à termes positifs* et, en sommant à partir d'un rang $n \geqslant N$, on obtient

$$\forall n \geqslant N,\ 0 \leqslant R_n(u) \leqslant M\, R_n(v)$$

ce qui nous permet de dire que

$$R_n(u) = O\left(R_n(v)\right)$$

— En sommant jusqu'à $n \geqslant N$, on obtient

$$0 \leqslant S_n(u) - S_N(u) \leqslant M\,\left(S_n(v) - S_N(v)\right) \leqslant M\, S_n(v)$$

Si $\sum v_n$ diverge alors $S_n(v) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$

$$0 \leqslant S_n(u) \leqslant M\, S_n(v) + S_N(u) \leqslant (M+1)\, S_n(v)$$

ce qui permet de conclure que

$$S_n(u) = O\left(S_n(v)\right)$$

注释 2.2

通常情况下我们很难计算级数的和，但是我们可以通过简单的基准级数如几何级数、黎曼级数等，结合比较关系性质来研究复杂级数的性质。

Exemple 2.5 – Formule d'Euler

$$\boxed{\exists \gamma \in \mathbb{R}_+^*,\ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1)}$$

请熟练掌握欧拉公式。

Démonstration

— Le premier terme se trouve à l'aide d'une comparaison série intégrale, notons S_n la somme partielle de rang n de la série à termes positifs divergente $\sum 1/n$, on a alors

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(n)$$

— Pour trouver la suite du développement asymptotique, on étudie la différence $u_n = S_n - \ln(n)$ (en tant que suite), à l'aide de sa série dérivée $v_n = u_n - u_{n-1}$. Voir les sessions `Wxmaxima` 2.1, de la présente page et `Python` 2.1, page suivante.

On en déduit que la série $\sum v_n$ est à termes négatifs, convergente (comparaison avec une série de Riemann), on note γ sa limite. L'équivalent permet même d'avoir un équivalent de $R_n(v)$. On obtient alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2\,n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où en découle la formule d'Euler.

Session `Wxmaxima` 2.1 – Formule d'Euler

```
(%i1) v(n) := 1/n-log(n)+log(n-1);
```

(%o1) $\mathrm{v}(n) := \frac{1}{n} - \log(n) + \log(n-1)$

```
(%i2) taylor(v(n),n,inf,2);
```

(%o2)/T/ $-\frac{1}{2\,n^2}+\ldots$

```
(%i3) %gamma,numer;
```

(%o3) 0.57721566490153

Session Python 2.1 – Formule d'Euler

On procède de même.

In[1] – Chargement des bibliothèques

```
import sympy as sp
sp.init_printing()
```

In[2] – Déclaration de n

```
n = sp.symbols('n', integer=True, nonnegative=True)
```

In[3] – Étude de la série dérivée $\sum (u_n - u_{n-1})$

```
(1/n-sp.ln(n)+sp.ln(n-1)).series(n, sp.oo, 3)
```

Out[3] – Série à termes négatifs convergente

$$-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3};n\to\infty\right)$$

In[4] – La constante d'Euler

```
sp.S.EulerGamma
```

Out[4]

γ

In[5]

```
_.evalf()
```

Out[5]

0.577215664901533

Exemple 2.6 – Formule de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Démonstration

- On procède de même, en étudiant la série $\sum \ln(n)$. Comme on veut un équivalent de l'exponentielle, il faut faire un développement asymptotique jusqu'à un $o(1)$...

— Une comparaison série/intégrale (la fonction ln est croissante) nous donne immédiatement

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{+\infty}{\sim} \int_1^n \ln(t)\, \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} n\, \ln(n)$$

Nous sommes dans le cas où le terme général de la série est négligeable devant l'intégrale (voir la remarque 2.6, page 123, cas 1).

— On étudie ensuite le terme $u_n = S_n - n\, \ln(n)$ et sa série dérivée $v_n = u_n - u_{n-1}$. Et on réitère le procédé ! Voir les sessions `Wxmaxima` 2.2, page suivante et `Python` 2.2, page 130.
On en déduit immédiatement que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = n\, \ln(n) - n + \frac{1}{2}\, \ln(n) + K + \frac{1}{12\, n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ce qui nous donne, en prenant le logarithme

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\, e^K$$

- ⚠ *En général, il n'est pas possible de trouver la constante.* Mais pour la formule de Stirling, il est possible de la trouver en utilisant les intégrales de Wallis.

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\, \mathrm{d}t$$

On procède alors de la manière suivante.

— La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, car

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$$

— Elle vérifie

$$I_0 = \frac{\pi}{2},\ I_1 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

la relation de récurrence s'obtenant à l'aide d'une intégration par parties (n est ici $\geqslant 2$)

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(t)\,\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

en posant $u = \sin^{n-1}(t)$ et $v' = \sin(t)$, il vient

$$I_n = \underbrace{\Big[-\cos(t)\,\sin^{n-1}(t)\Big]_{t=0}^{t=\pi/2}}_{=0 \text{ car } n\geqslant 2} + (n-1)\underbrace{\left(\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(t)\,\cos^2(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{=I_{n-2}-I_n}$$

— Pour trouver e^K, il suffit alors de calculer $I_{2\,p}$ et $I_{2\,p+1}$, et de remarquer que

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n-2} \text{ et } I_n \leqslant I_{n-1} \leqslant I_{n-2}$$

Ce qui nous donne

$$I_{2\,p} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{2\,p+1}$$

En reportant l'équivalent trouvé ci-dessus, on obtient

$$e^K = \sqrt{2\,\pi}$$

Finalement

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\,\pi\,n}$$

Session `Wxmaxima` 2.2 – Formule de Stirling

```
(%i1) v(n) := log(n)-n*log(n)+(n-1)*log(n-1);
```

(%o1) $\mathrm{v}(n) := \log(n) - n\log(n) + (n-1)\,\log(n-1)$

```
(%i2) taylor(v(n),n,inf,0);
```

(%o2)/T/ $-1 + \ldots$

(%i3) `taylor(v(n)+n-(n-1),n,inf,1);`

(%o3)/T/ $\frac{1}{2\,n} + \ldots$

(%i4) `taylor(v(n)+n-1/2*log(n)-((n-1)-1/2*log(n-1)),n,inf,2);`

(%o4)/T/ $-\frac{1}{12\,n^2} + \ldots$

Session Python 2.2 – Formule de Stirling, les calculs

On procède comme annoncé.

In [6] – Série dérivée

```
vn = sp.log(n)-n*sp.ln(n)+(n-1)*sp.ln(n-1)
```

In [7] – Première itération

```
vn.series(n, sp.oo, 1)
```

Out [7] – Série à termes négatifs divergente

$$-1 + O\left(\frac{1}{n}; n \to \infty\right)$$

In [8] – Deuxième itération

```
(vn+n-(n-1)).series(n, sp.oo, 2)
```

Out [8] – Série à termes positifs divergente

$$\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}; n \to \infty\right)$$

In [9] – Troisième itération

```
(vn+(n-sp.ln(n)/2)-((n-1)-sp.ln(n-1)/2)).series(n, sp.oo, 3)
```

Out[9] – Série à termes négatifs convergente

$$-\frac{1}{12n^2}+O\left(\frac{1}{n^3};n\to\infty\right)$$

Remarque 2.7

À quoi sert l'estimation du reste ? ou de la somme partielle ? En dehors, d'une notion de vitesse de convergence ou de divergence, il peut arriver que l'on ait besoin de calculer la somme d'une série. Par exemple, calculons à $\varepsilon = 10^{-3}$ près la somme de la série $\sum 1/n^3$.
On a

$$R_n \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{2n^2} \leqslant R_n + \frac{1}{n^3} \text{ et } S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = S_n + R_n$$

Si l'on choisit n tel que $R_n < \varepsilon$, alors S_n est une bonne estimation de la somme à ε près. Ainsi $n = 23$ convient [a]. D'où

$$S_{23} < S < S_{23} + \varepsilon$$

On peut même améliorer ce calcul, en remarquant que

$$\widetilde{S_n} = S_n + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} \text{ vérifie } \left|S - \widetilde{S_n}\right| \leqslant \frac{1}{4n^3}$$

Il ne reste donc plus qu'à calculer n pour que $1/2n^3 < \varepsilon$. Soit [b] $n = 8$... Voir les sessions Wxmaxima 2.3, de la présente page et Python 2.3, page suivante.

a. 22 aurait suffit expérimentalement.
b. 4 aurait suffit expérimentalement.

Session Wxmaxima 2.3 – Estimation numérique

```
(%i1) S : sum(1/n^3,n,1,inf),simpsum,numer;
(%o1) 1.202056903159594
(%i2) S23 : sum(1/n^3,n,1,23),numer;
(%o2) 1.20115192553742
(%i3) abs(S23-S);
(%o3) 9.0497762217478517 10^-4
```

(%i4) `Stilde8 : sum(1/n^3,n,1,p)+1/(2*p^2)-1/(2*p^3), p=8,numer;`

(%o4) 1.20199618106171

(%i5) `abs(Stilde8-S);`

(%o5) $6.072209788388072110^{-5}$

Session Python 2.3 – Évaluation numérique

Les mêmes calculs donnent les mêmes résultats (bien sûr).

In[10]

```
S = sp.Sum(1/n**3, (n, 1, sp.oo))
S
```

Out[10] – Sympy ne sait pas sommer ainsi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

In[11]

```
S = S.evalf()
S
```

Out[11]

1.20205690315959

In[12]

```
S23 = sp.Sum(1/n**3, (n, 1, 23)).evalf()
S23
```

Out[12]

1.20115192553742

In[13]

```python
abs(S-S23)
```

Out[13]

0.000904977622174119

In[14]

```python
p = sp.symbols('p', integer=True, positive=True)
Stilde8 = sp.Sum(1/n**3, (n, 1, p))+1/(2*p**2)-1/(2*p**3)
Stilde8 = Stilde8.subs({p: 8}).evalf()
Stilde8
```

Out[14]

1.20199618106171

In[15]

```python
abs(S-Stilde8)
```

Out[15]

$6.07220978838807\,10^{-5}$

Remarque 2.8

Si l'on cherche une approximation de la somme à ε près, que l'on possède un encadrement du reste de la forme

$$a_n \leqslant R_n \leqslant b_n$$

et que a_n et b_n sont équivalents au voisinage de $+\infty$, alors on peut choisir n tel que

$$\frac{b_n - a_n}{2} \leqslant \varepsilon, \text{ alors } \widetilde{S_n} = S_n + \frac{a_n + b_n}{2} \text{ vérifie } \left|S - \widetilde{S_n}\right| \leqslant \varepsilon$$

Exercice(s) 2.2

2.2.1 Pour les séries à termes positifs suivantes, préciser la nature, puis donner un équivalent de la somme partielle (lorsque la série diverge), ou du reste (lorsque la série converge).

$$\begin{aligned} u_n &= n^n \\ u_n &= e^{-\left(\ln(n)\right)^\alpha}, \qquad \alpha > 0 \\ u_n &= \frac{1}{\ln\left(\ln(n)\right)} \end{aligned}$$

2.2.2 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante qui tend vers 0, on pose $v_n = n\,(u_n - u_{n+1})$. Montrer que les deux séries sont de même nature et que si elles convergent, les deux sommes sont égales. (On pourra en déduire que lorsque $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et que la série $\sum u_n$ converge, on a $n\,u_n \to 0$. Ce résultat étant faux lorsque l'on n'a plus la décroissance).

2.2.3 Soit $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}_+$, croissante, continue par morceaux, montrer que

$$\sum f\left(e^{-n}\right) \text{ et } \sum \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ sont de même nature}$$

2.2.4 Soit une série divergente à termes positifs, de terme général x_n, déterminer la nature des séries suivantes de termes généraux

$$\frac{x_n}{1+x_n},\ \frac{x_n}{1+x_n^2},\ \frac{x_n}{1+nx_n},\ \frac{x_n}{1+n^2x_n}$$

2.2.2 Diverses techniques

注释 2.3

本小节介绍了正项级数敛散性的几种常见判别方法。

Remarque importante 2.9

Une technique très efficace pour déterminer la nature d'une série à termes positifs est d'utiliser une comparaison (propositions 2.3, page 124 et 2.6, page 125) avec une des séries de référence

- les séries de Riemann ;
- les séries de Bertrand ;
- les séries géométriques.

Propriété 2.7 – Comparaison logarithmique

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes *strictement* positifs, telles que

$$\text{à partir d'un certain rang } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

alors

$$\left[\sum v_n \text{ converge}\right] \implies \left[\sum u_n \text{ converge}\right]$$

Démonstration

Soit N le rang à partir duquel l'inégalité est vérifiée et les termes sont > 0. On a donc

$$\forall n \geqslant N,\ u_n > 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

En multipliant termes à termes, on obtient

$$\forall n \geqslant N,\ 0 < u_n \leqslant \frac{u_N}{v_N} v_n$$

ce qui nous permet d'obtenir le résultat.

Propriété 2.8 – Critère de d'Alembert

Le même que précédemment, en particularisant une des deux séries en une série géométrique. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs, telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \in [0, +\infty]$$

Alors

$$[\lambda > 1] \implies \left[\sum u_n \text{ diverge (grossièrement)}\right]$$
$$[\lambda < 1] \implies \left[\sum u_n \text{ converge}\right]$$
$$\left[\lambda = 1^+\right] \implies \left[\sum u_n \text{ diverge (grossièrement)}\right]$$
$$\left[\lambda = 1^-\right] \implies \text{ euh ? rien !}$$

请注意达朗贝尔判别法的使用条件。（让·勒朗·达朗贝尔，Jean le Rond d'Alembert，1717年－1783，法国物理学家、数学家和天文学家）。

Démonstration

C'est une comparaison logarithmique avec une série géométrique $\sum q^n$. En effet,

1. Si $\lambda > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, > 0, donc son terme général ne tend pas vers 0. La série est donc grossièrement divergente. Le cas $\lambda = 1^+$ est identique.
2. Si $\lambda < 1$, prenons
$$q = \frac{\lambda+1}{2} < 1$$
une comparaison logarithmique entre les séries $\sum u_n$ et $\sum q^n$ permet de conclure.
3. Si $\lambda = 1^-$, l'exemple des séries de Riemann nous donne des cas convergents et des cas divergents.

> *Ce critère n'est utile que pour les séries comparables à une série géométrique !*

Remarque 2.10

C'est un critère assez pauvre, affaiblissement considérable d'un résultat peu efficace, son utilisation doit se limiter aux situations où le rapport u_{n+1}/u_n se simplifie considérablement...

Exemple 2.7

$$\sum \frac{n!}{n^{k\,n}},\ (k>0) \text{ oui !} \qquad \sum e^{-\sqrt{n}} \text{ non !}$$

Démonstration

1. Si on pose
$$u_n = \frac{n!}{n^{k\,n}} > 0 \text{ alors } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{(n+1)^k\,(1+1/n)^{k\,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e^k\,n^{k-1}}$$
On obtient donc
$$\left[\sum u_n \text{ converge}\right] \iff [k \geqslant 1]$$
2. Clairement
$$\frac{e^{-\sqrt{n+1}}}{e^{-\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1^-$$

Remarque 2.11

En revanche, lorsqu'il permet de conclure, on peut aussi s'en servir pour obtenir des équivalents de sommes partielles et de restes.

Proposition 2.4 – Équivalents issus de d'Alembert

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs.

1. *Si on a*
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha > 1$$
alors
$$S_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_{n+1}}{\alpha - 1}$$
2. *Si, au contraire, on a*
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \in]0,1[$$
alors
$$R_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_{n+1}}{1 - \alpha}$$

Démonstration

1. Supposons $\alpha > 1$ et
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$$
La série $\sum a_n$ diverge donc (grossièrement). On a alors
$$S_{n+1}(a) - S_n(a) = a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\, a_n$$
les deux séries $\sum \left(S_{n+1}(a) - S_n(a)\right)$ et $\sum \alpha\, a_n$ sont à termes positifs, divergentes, donc les sommes partielles sont équivalentes. On obtient
$$a_{n+1} + S_n(a) = S_{n+1}(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\, S_n(a)$$
Ce qui nous donne
$$S_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_{n+1}}{\alpha - 1}$$
2. Le cas convergent ($\alpha < 1$) se traite de la même manière en écrivant
$$a_{n+1} = R_n(a) - R_{n+1}(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\, a_n$$

Remarque 2.12

On voit donc que cette situation correspond à l'une de celle où la comparaison série/intégrale fonctionnait mal (voir la remarque importante 2.6, page 122). Prenons
$$u_n = \frac{\ln(n)}{3^n}$$
on a alors
$$\int_n^{+\infty} \frac{\ln(t)}{3^t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{\ln(3)}$$

La comparaison série/intégrale ne fonctionne pas ! Mais

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3} \text{ donc } R_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{3^n}$$

Propriété 2.9 – Règle « $n^\alpha u_n$ »

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, alors

$$\exists \alpha > 1, \left[n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \right] \implies \left[\sum u_n \text{ converge} \right]$$

$$\exists \alpha \leqslant 1, \left[n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \right] \implies \left[\sum u_n \text{ diverge} \right]$$

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \exists \lambda \in]0, +\infty[, \left[n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \right] \implies \text{ trouvé avant !}$$

Uniquement là pour aider ceux qui ont des difficultés à comparer à une série de Riemann...

Démonstration

1. Si on a $\alpha > 1$ et
$$n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ alors } u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$
d'où (série à termes positifs) la convergence de $\sum u_n$.
2. Si on a $\alpha < 1$ et
$$n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \text{ alors } \frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$$
d'où (série à termes positifs) la divergence de $\sum u_n$.
3. Si on a $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in]0, +\infty[$ et
$$n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$$
ce qui permet de conclure.

注释 2.4

正项级数的情况下，无论是按序组合级数的项还是置换级数的项，都不影响级数的敛散性质。置换定义详见《线性代数 法文版》。(Réf. [?], définition 3.1, page 204)

Propriété 2.10 – Sommation par paquets

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, soit $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $\psi(0) = 0$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=\psi(n)}^{\psi(n+1)-1} u_k \quad \text{(paquet)}$$

Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature, et, en cas de convergence, même somme.

Ce n'est pas vrai, en général, lorsque les séries ne sont plus à termes positifs.

Démonstration

1. On a immédiatement pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand (de telle sorte que les termes soient positifs)

$$\boxed{S_n(v) = S_{\psi(n+1)-1}(u)}$$

Cette relation nous permet de dire que [a]

$$\left[\sum u_n \text{ converge}\right] \implies \left[\sum v_n \text{ converge}\right]$$

et, si $n \in [\![\psi(p), \psi(p+1) - 1]\!]$,

$$S_{p-1}(v) \leqslant S_n(u) \leqslant S_p(v)$$

Cette deuxième relation nous permet de dire que (il est ici indispensable d'avoir des séries à termes positifs)

$$\left[\sum u_n \text{ diverge}\right] \implies \left[\sum v_n \text{ diverge}\right]$$

a. Cette égalité *n'utilise pas* la positivité des u_n.

Exemple 2.8 – Contre-exemple lorsque les séries ne sont plus à termes positifs

Prenons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ et $\psi : n \longmapsto 2\,n$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 0$$

On constate que $\sum v_n$ converge et $\sum u_n$ diverge (grossièrement).

Exemple 2.9 – Comment utiliser cette sommation ?

Soit $\alpha > 0$, on considère $\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N},\ 0$ n'intervient pas dans l'écriture décimale de $n\}$, on renumérote $\mathcal{P}$, sous la forme $\varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, φ strictement croissante, alors

$$\left[\sum \frac{1}{\varphi(n)^\alpha} \text{ converge}\right] \iff [\alpha > \log_{10}(9)]$$

Démonstration

On va regrouper suivant le nombre de chiffres en base 10 de $\varphi(n)$, en posant

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ v_p = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ 10^{p-1} \leqslant \varphi(n) < 10^p - 1}} \frac{1}{\varphi(n)^\alpha}$$

On a alors clairement, pour $p \in \mathbb{N}^*$

$$9^p \frac{1}{\overline{9 \cdots 9}^\alpha} v_p \leqslant 9^p \frac{1}{\overline{1 \cdots 1}^\alpha}$$

où 9^p est le nombre d'entiers à p chiffres ne contenant pas de 0 dans l'écriture décimale et où l'on a minoré et majoré $\varphi(n)$ lorsque $\varphi(n)$ a p chiffres. Finalement

$$9^p \frac{1}{(10^p - 1)^\alpha} \leqslant v_p \leqslant 9^p \frac{9^\alpha}{(10^p - 1)^\alpha}$$

On en déduit que la série $\sum v_p$ converge si, et seulement si

$$\frac{9}{10^\alpha} < 1 \text{ soit } \alpha > \frac{\ln(10)}{\ln(9)} = \log_{10}(9)$$

Propriété 2.11 – Changement de l'ordre des termes

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et soit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ (une permutation de $\mathbb{N}$), alors $\sum u_n$ et $\sum u_{\sigma(n)}$ sont de même nature et ont même somme.

⚠ *Ce n'est pas vrai, en général, lorsque les séries ne sont plus à termes positifs.*

Démonstration

Quitte à changer les premiers termes et sans changer la nature de la série, on peut supposer que *tous* les u_n sont positifs.

1. *Supposons que* $\sum u_n$ *converge.* Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, posons $v_n = u_{\sigma(n)}$.

On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$

$$S_n(v) = \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \leqslant \sum_{k=0}^{N_n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S(u)$$

où

$$N_n = \max\left(\sigma\left(\llbracket 0, n \rrbracket\right)\right)$$

Ce qui montre que $\sum v_n$ converge.

2. *Supposons que $\sum v_n$ converge.* Comme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_{\sigma^{-1}(n)}$$

en inversant les rôles dans le cas précédent, on trouve que $\sum u_n$ converge. D'où le résultat.

On a d'ailleurs clairement

$$S(u) = S(v)$$

Exemple 2.10 – Contre-exemple quand la série n'est plus à termes positifs

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

et ψ correspondant à l'ordre des termes suivants (un positif, puis deux négatifs, pris dans l'ordre initial) [a]

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

alors, les deux séries convergent, mais

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(2) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{\ln(2)}{2}$$

Voir pour un contre-exemple plus général l'exemple 2.17, page 159.

a. Petit exercice. Écrire la formule permettant, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, d'exprimer $\psi(n)$.

Démonstration

1. On a vu que $\sum u_n$ converge (contre-exemple dans la démonstration de la proposition 2.1, page 115).
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_{2n}(u) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

en utilisant la formule d'Euler (voir l'exemple 2.5, page 126), on obtient

$$S_{2n}(u) = \ln(2n) - \ln(n) + o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$$

Donc $S(u) = \ln(2)$, car la série est convergente.

3. On procède de même pour la série $\sum v_n$, on obtient

$$S_{1+3n}(v) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) =$$
$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \frac{1}{2} S_{2n}(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln(2)}{2}$$

Il reste à démontrer que $\sum v_n$ converge. C'est immédiat, car

$$S_{2+3n}(v) = S_{1+3n}(v) + o(1) \text{ et } S_{3+3n}(v) = S_{2+3n}(v) + o(1)$$

et on conclut avec la remarque 1.5, page 24.

Théorème 2.1 – Produit de Cauchy de deux séries à termes positifs

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, on définit le produit de Cauchy *des deux séries comme étant la série de terme général*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum w_n$ converge et

$$S(w) = S(u)\, S(v)$$

无论级数是否收敛，我们都有柯西乘积的定义（奥古斯丁-路易·柯西，Augustin-Louis Cauchy，1789年－1857年，法国数学家）。当正项级数收敛时，我们通过几何方法证明了理想预期的结论。更为一般情况下，在级数$\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 绝对收敛时，我们有类似的定理。(Théorème 2.2, page 161)

Démonstration

Nous supposerons encore, sans perte de généralité, que tous les termes sont positifs.

1. On utilise les ensembles d'indices définis sur la figure 2.2, page suivante. On a alors clairement

$$\phi_n \subset \Gamma_n \subset \phi_{2n}$$

On a alors immédiatement

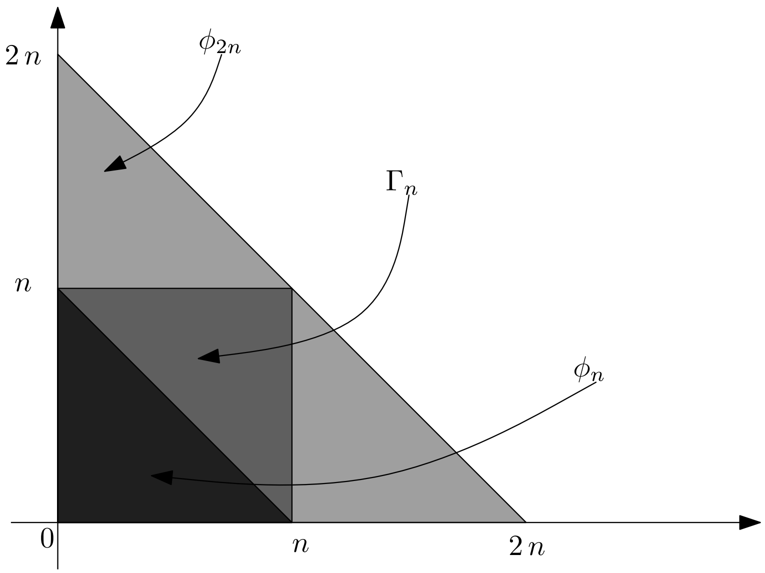
$$S_n(w) = \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k} u_j\, v_{k-j}\right) = \sum_{(j,k)\in\phi_n} u_j\, v_k \leqslant$$
$$\sum_{(j,k)\in\Gamma_n} u_j\, v_k = S_n(u)\, S_n(v) \leqslant S(u)\, S(v)$$

Ce qui montre que $\sum w_n$ converge et $S(w) \leqslant S(u)\, S(v)$.

2. L'autre inclusion nous donne

$$S_n(u)\, S_n(v) \leqslant S_{2\,n}(w) \text{ d'où } S(u)\, S(v) \leqslant S(w)$$

Figure 2.2 – Produit de Cauchy



Exercice(s) 2.3

2.3.1 Discuter suivant les paramètres la nature des séries de termes généraux suivants

$$u_n = \sqrt{n!}\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right),\ \text{où } x > 0$$
$$u_n = \left(1 - k\,\frac{\ln n}{n^\alpha}\right)^n,\ \text{où } k > 0 \text{ et } \alpha > 0$$

2.3.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et différents de 1, telle que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\ln n}{\ln u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ell \in [-\infty, 0]$$

Étudier la nature de $\sum u_n$ en fonction de ℓ.

2.3.3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *décroissante* de réels > 0. Montrer que les séries de termes généraux u_n, $n\,u_{n^2}$ et $2^n\,u_{2^n}$ sont de même nature.

2.3.4 Soit α un réel > 1, donner un équivalent de la somme partielle de la série de terme général

$$u_n = 3^{\sqrt{n^\alpha+n+1}}\ln n$$

2.3.5 Nature de la série de terme général

$$\frac{p_b(n)}{n\,(n+1)}$$

où $b \geqslant 2$ et où $p_b(n)$ est le nombre de chiffres dans l'écriture de n en base b.

2.3 Séries à termes quelconques

Définition 2.3 – Série absolument convergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors, il peut arriver l'un des cas suivants

1. Si $\sum |u_n|$ converge, on dit que $\sum u_n$ est *absolument convergente* (en ce cas, elle est bien sûr convergente) ;
2. si $\sum u_n$ converge alors que $\sum |u_n|$ diverge, on dit que $\sum u_n$ est *semi-convergente* ;
3. $\sum u_n$ diverge.

定义中第一种情况叫做绝对收敛，第二种情况叫做条件收敛。级数绝对收敛是收敛的充分不必要条件，证明过程中可以定义辅助级数$\sum v_n$，其中$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|)$。

Proposition 2.5 – des séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *telle que*[a]

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n\, u_{n+1} < 0$ *(i.e. un changement de signe à chaque indice) et*
2. $\left(|u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît *vers 0,*

alors

1. *la série est convergente ;*
2. *et on a la propriété du reste suivante*[b]

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \operatorname{sg}(u_{n+1}) R_n(u) \leqslant |u_{n+1}|}$$

a. Bien sûr, les propriétés ci-dessus peuvent n'être satisfaites *qu'à partir d'un certain rang.*

b. Où sg désigne la fonction *signe*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sg}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

此性质通常也叫做莱布尼茨（Leibniz）定理。

Démonstration

Supposons par exemple que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n\, |u_n|$$

Les suites $\left(S_{2\,n}(u)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(S_{2\,n+1}(u)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_{2\,n+1}(u) = \sum_{k=0}^{2\,n+1} u_k = \sum_{k=0}^{n} \left(u_{2\,k} + u_{2\,k+1}\right) \text{ et } S_{2\,n}(u) = \sum_{k=0}^{2\,n} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(u_{2\,k-1} + u_{2\,k}\right)$$

On en déduit que

$$\left(S_{2\,n+1}(u)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante, et } \left(S_{2\,n}(u)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}$$

Comme, de plus

$$S_{2\,n+1}(u) - S_{2\,n}(u) = u_{2\,n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

on a le résultat.

Exemple 2.11

Un exemple simple de séries semi-convergentes (voir le contre-exemple de la proposition 2.1, page 115).

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} \text{ avec } \alpha \in]0,1]$$

Remarque importante 2.13

La *décroissance* de $\left(|u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est *indispensable*, comme le montre la série suivante

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}, \text{ où } n \geqslant 2$$

Démonstration

On a bien

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n\, u_{n+1} < 0$$

mais la série diverge (car on n'a pas la décroissance). En effet

$$w_n = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = -\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+(-1)^n\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$$

$\sum w_n$ est donc divergente et, comme $\sum(-1)^n/\sqrt{n}$ est convergente (il y a la décroissance), on en déduit que

$$\sum u_n \text{ diverge !}$$

Remarque importante 2.14

Si l'on reprend l'exemple précédent et que l'on pose $v_n = (-1)^n/\sqrt{n}$, on a alors

$$\sum v_n \text{ converge },\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \text{ et pourtant } \sum u_n \text{ diverge !}$$

On ne peut pas raisonner avec des équivalents pour étudier la nature des séries semi-convergentes ! En revanche, cela fonctionne bien pour les séries absolument convergentes.

Remarque 2.15

Il est bien sûr possible, en utilisant les techniques sur les séries à termes positifs d'obtenir des équivalents, voire des développements asymptotiques des restes des séries alternées. Ainsi

$$\text{si } u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}, \text{ alors } R_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n^\alpha} \qquad (\alpha > 0)$$

Démonstration

Le plus simple est de raisonner sur l'évaluation de

$$R_{2\,n}(u) = \sum_{k=2\,n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n}^{+\infty} \underbrace{(u_{2\,k+1} + u_{2\,k+2})}_{=v_k} = R_{n-1}(v)$$

Or,

$$v_k = \frac{1}{(2\,k+1)^\alpha} - \frac{1}{(2\,k+2)^\alpha}$$

On a donc (voir les calculs `Wxmaxima` 2.4, de la présente page ou `Python` 2.4, page suivante)

$$R_n(v) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{2^{\alpha+1}\,k^{\alpha+1}}$$

nous avons vu que pour une série de Riemann, on pouvait écrire immédiatement

$$R_n(v) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} \frac{\alpha}{2^{\alpha+1}\,t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{\alpha+1}\,n^\alpha}$$

Donc

$$R_{2\,n}(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,(2\,n)^\alpha}$$

Il est alors facile d'obtenir

$$R_{2\,n+1}(u) = R_{2\,n}(u) - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2\,(2\,n+1)^\alpha}$$

et, finalement

$$R_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2\,n^\alpha}$$

Session `Wxmaxima` 2.4 – Équivalents d'un reste de série alternée

(%i1) `assume(alpha>0);`

(%o1) $[\alpha > 0]$

(%i2) `taylor(1/(2*k+1)^alpha-1/(2*k+2)^alpha,k,inf,1);`

(%o2)/T/ $\dfrac{\alpha}{2\,k^\alpha\,2^\alpha\,k} + \ldots$

Session Python 2.4 – Équivalents d'un reste de série alternée

On obtient de même

In[16]

```python
alpha = sp.symbols('\\alpha', positive=True)
(1/(2*n+1)**alpha-1/(2*n+2)**alpha).series(n, sp.oo, 2)
```

Out[16] – C'est faux !

$$O\left(\frac{1}{n^2}; n \to \infty\right)$$

In[17] – Aidons un peu Sympy

```python
(1/(2+1/n)**alpha-1/(2+2/n)**alpha).series(n, sp.oo, 2)
```

Out[17]

$$\frac{2^{-\alpha}\alpha}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}; n \to \infty\right)$$

In[18]

```python
_.removeO()/n**alpha
```

Out[18]

$$\frac{2^{-\alpha}\alpha n^{-\alpha}}{2n}$$

注释 2.5

当级数的一般项比较复杂时候，研究级数收敛性质时候通常可以使用如上两种方法。

Propriété 2.12 – Méthode du développement asymptotique

On développe u_n jusqu'à l'obtention d'un terme du DA qui est
- soit absolument convergent ;
- soit de signe constant.

Exemple 2.12 – Méthode du développement asymptotique

1. Soit la série définie par

$$u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n} \sin\left(1/\sqrt{n}\right)}{n + (-1)^n}, \text{ où } n \geqslant 2$$

On a alors

$$u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\text{alternée}} + \underbrace{-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{absolument convergente}}$$

2. Soit la série définie par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n}$$

On a alors

$$u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\ln(n)}}_{\text{alternée}} \underbrace{- \frac{1}{\ln(n)^2} + o\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right)}_{\text{divergente}}$$

Proposition 2.6 – Sommation par paquets de termes de même signe

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \left\{\psi(n), \ldots, \psi(n+1)-1\right\}^2,\ u_p\, u_q > 0$$

(soit un regroupement de termes de même signe), alors

$$\sum u_n \text{ et } \sum \underbrace{\left(\sum_{k=\psi(n)}^{\psi(n+1)-1} u_k\right)}_{=v_n} \text{ sont de même nature.}$$

Démonstration

1. On a toujours la relation
$$S_n(v) = S_{\psi(n+1)-1}(u)$$
Donc, et cela reste vrai quel que soient les propriétés de $\sum u_n$, on a
$$\left[\sum u_n \text{ converge}\right] \implies \left[\sum v_n \text{ converge}\right]$$
2. Supposons maintenant que $\sum v_n$ converge, soit $n \in \mathbb{N}$, on peut alors définir
$$p_n \in \mathbb{N},\ \psi(p_n) \leqslant n < \psi(p_n+1)$$
et on a alors
$$\left|S_n(u) - S_{p_n}(v)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\psi(p_n+1)-1} u_k\right| \tag{2.2}$$
3. Avec les hypothèses sur $\sum u_n$, la relation ci-dessus devient
$$\left|S_n(u) - S_{p_n}(v)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\psi(p_n+1)-1} |u_k| \leqslant |v_{p_n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
ce qui montre le résultat.

Exemple 2.13

La série de terme général ($\alpha \in \mathbb{R}$)
$$u_n = \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^\alpha}$$
est convergente si, et seulement si $\alpha > 1/2$.

Démonstration

1. Si $\alpha \leqslant 0$, la série est grossièrement divergente.
2. Si $\alpha > 1$, la série est absolument convergente, elle converge donc.
3. Lorsque $\alpha \in]0,1]$, regroupons des termes de même signe (donc $\psi(n) = n^2$). Posons
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} u_k = (-1)^n \left(\sum_{k=n^2}^{n^2+2n} \frac{1}{k^\alpha}\right)$$
On peut alors obtenir à l'aide d'une comparaison série/intégrale
$$|v_n| - \frac{1}{n^{2\alpha}} \leqslant \int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \leqslant |v_n| - \frac{1}{(n+1)^{2\alpha}}$$
On obtient donc (voir les sessions `WXmaxima` 2.5, page suivante et `Python` 2.5, page ci-contre).

- Pour $\alpha \in]0,1[$

$$|v_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^{2\,\alpha-1}}$$

On en déduit donc que

$$\left[\alpha \leqslant \frac{1}{2}\right] \implies \left[\sum v_n \text{ diverge grossièrement}\right]$$

En ce cas, on peut conclure que

$$\sum u_n \text{ diverge}$$

- Pour $\alpha \in]1/2,1]$

$$v_n = \underbrace{\frac{2\,(-1)^n}{n^{2\,\alpha-1}}}_{\text{semi-convergente}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{2\,\alpha}}\right)}_{\text{absolument convergente}}$$

$\sum v_n$ est convergente et, comme on a fait un regroupement de termes de signe constant, $\sum u_n$ est convergente.

Session `Wxmaxima` 2.5 – Sommation par paquets de termes de même signe

Cas $\alpha \in]0,1[$.

```
(%i1) assume(alpha>0,n>0,alpha<1);
```

(%o1) $[\alpha > 0, n > 0, \alpha < 1]$

```
(%i2) taylor(integrate(1/t^alpha,t,n^2,(n+1)^2)-1/n^(2*alpha),
        n,inf,1);
```

(%o2)/T/ $\dfrac{2\,n}{(n^\alpha)^2} - \dfrac{2\,\alpha}{(n^\alpha)^2} + \dfrac{4\,\alpha^2 - 2\,\alpha}{3\,(n^\alpha)^2\,n} + \ldots$

Cas $\alpha = 1$.

```
(%i3) taylor(integrate(1/t,t,n^2,(n+1)^2)-1/n^2,n,inf,2);
```

(%o3)/T/ $\dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n^2} + \ldots$

Session `Python` 2.5 – Sommation par paquets de termes de même signe

On trouve de même (noter qu'il faut encore « aider » `Sympy`).

`In[19]` – Étude de l'intégrale

```python
t = sp.symbols('t')
sp.integrate(1/t**alpha, (t, n**2, (n+1)**2))
```

Out[19]

$$\begin{cases} - \frac{n^{2-2\alpha}}{1-\alpha} + \frac{(n+1)^{2-2\alpha}}{1-\alpha} & \text{for } \alpha \neq 1 \\ -\log\left(n^2\right) + \log\left((n+1)^2\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

In[20] – Pour exprimer que $\alpha > 1$

```
res = _
beta =sp.symbols('\\beta', positive=True)
res.subs({alpha: 1-beta})
```

Out[20]

$$-\frac{n^{2\beta}}{\beta} + \frac{(n+1)^{2\beta}}{\beta}$$

In[21] – On aide encore un peu

```
((1+1/n)**(2*beta)/beta-1/beta).series(n, sp.oo, 2)
```

Out[21]

$$\frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}; n \to \infty\right)$$

In[22] – Et on revient en α

```
_.removeO()*n**(2*beta).subs({beta: 1-alpha})
```

Out[22]

$$\frac{2n^{2-2\alpha}}{n}$$

In[23] – Cas où $\alpha = 1$

```
res.subs({alpha: 1}).series(n, sp.oo, 2)
```

Out[23]

$$\frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}; n \to \infty\right)$$

Proposition 2.7 – Sommation par paquets de longueur bornée

$\sum u_n$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, vérifiant $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, tels que

$$\exists P \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \psi(n+1) - \psi(n) \leqslant P$$

(regroupement d'un nombre limité de termes tendant vers 0), alors

$$\sum u_n \text{ et } \sum \underbrace{\left(\sum_{k=\psi(n)}^{\psi(n+1)-1} u_k\right)}_{=v_n} \text{ sont de même nature.}$$

Démonstration

On reprend l'équation 2.2, page 150. On obtient maintenant

$$\left|S_n(u) - S_{p_n}(u)\right| \leqslant P \max\left(\left\{|u_k|,\ k \in [\![n+1, \psi(p_n+1)-1]\!]\right\}\right) \leqslant$$
$$P \max\left(\left\{|u_k|,\ k \in \mathbb{N},\ k \geqslant n+1\right\}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

D'où le résultat.

Proposition 2.8 – Comparaison à une intégrale (quantitative)

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$, de classe $\mathscr{C}^1$ et telle que

$$x \longmapsto \int_0^x \left|f'(t)\right| \,\mathrm{d}t$$

soit bornée sur $[0, +\infty[$, alors

$$\sum \underbrace{\left(\int_n^{n+1} f(t) \,\mathrm{d}t - f(n)\right)}_{=w_n} \text{ converge}$$

Démonstration

On écrit

$$w_n = \int_n^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t - f(n) = \int_n^{n+1} \big(f(t) - f(n)\big)\ \mathrm{d}t$$

puis, on effectue une intégration par parties, en s'arrangeant pour que le crochet s'annule

$$w_n = \Big[\big(t-(n+1)\big)\ \big(f(t)-f(n)\big)\Big]_{t=n}^{t=n+1} - \int_n^{n+1} \big(t-(n+1)\big)\ f'(t)\ \mathrm{d}t$$

Finalement

$$|w_n| \leqslant \int_n^{n+1} (n+1-t)\ \big|f'(t)\big|\ \mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \big|f'(t)\big|\ \mathrm{d}t$$

$\sum |w_n|$ est donc convergente car, par hypothèse

$$\sum \underbrace{\left(\int_n^{n+1} |f'(t)|\ \mathrm{d}t\right)}_{=x_n} \text{ converge}$$

puisque

$$S_n(x) = \int_0^{n+1} |f'(t)|\ \mathrm{d}t \text{ par relation de Chasles}$$

Remarque importante 2.16

On a donc, lorsque la proposition s'applique, c'est-à-dire quand

$$x \longmapsto \int_0^x |f'(t)|\ \mathrm{d}t \text{ est majorée}$$

le résultat suivant

$$\Big[\sum u_n \text{ converge}\Big] \iff \left[\left(\int_0^n f(t)\ \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\right]$$

On a vu qu'une condition suffisante (mais non nécessaire) pour que la suite $\left(\int_0^n f(t)\ \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente est que [a]

$$x \longmapsto \int_0^x |f(t)|\ \mathrm{d}t \text{ soit majorée}$$

a. C'est le même type de raisonnement que celui utilisé pour montrer que dans $\mathbb{K}$

$$\Big[\sum |u_n| \text{ converge}\Big] \implies \Big[\sum u_n \text{ converge}\Big]$$

On écrit $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$ lorsque f est réelle et on utilise les parties réelles et les parties imaginaires lorsque f est complexe, où

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f^+(x) = \max\big(f(x), 0\big) \text{ et } f^-(x) = \max\big(-f(x), 0\big)$$

Exemple 2.14 – Comparaison quantitative avec une intégrale

Soit $\alpha > 0$, la série définie par

$$u_n = \frac{\sin\left(\sqrt{n}\right)}{n^\alpha} \text{ converge si, et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}$$

Démonstration

On pose

$$f(t) = \frac{\sin\left(\sqrt{t}\right)}{t^\alpha}$$

On a donc (voir les sessions `Wxmaxima` 2.6, page suivante ou `Python` 2.6, page suivante)

$$\forall x \in [1, +\infty[, \ \left|f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{x^{\alpha+1/2}} + \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

- Pour $\alpha > 1/2$, on a

$$x \longmapsto \int_1^x \left|f'(t)\right| \,\mathrm{d}t \text{ est majorée sur } [1, +\infty[$$

D'après la proposition précédente, $\sum u_n$ est de même nature que la série

$$\sum \left(\int_n^{n+1} f(t) \,\mathrm{d}t\right)$$

et, comme

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t) \,\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} f(t) \,\mathrm{d}t$$

il nous reste à étudier le comportement de cette intégrale. Mais

$$\int_1^{n+1} f(t) \,\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} \frac{\sin\left(\sqrt{t}\right)}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t \underset{x=\sqrt{t}}{=} \int_1^{\sqrt{n+1}} \frac{2\,\sin(x)}{x^{2\,\alpha-1}} \,\mathrm{d}x$$

$$\underset{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{2\,\cos(x)}{x^{2\,\alpha-1}}\right]_{x=1}^{x=\sqrt{n+1}} - \int_1^{\sqrt{n+1}} 2\,(2\,\alpha-1)\,\frac{\cos(x)}{x^{2\,\alpha}} \,\mathrm{d}x$$

Il est facile de conclure puisque $\alpha > 1/2$.

- Lorsque $\alpha \in]0, 1/2]$, on écrit (formule de Taylor avec reste intégral)

$$\int_n^{n+1} f(t) \,\mathrm{d}t = f(n) + \underbrace{\frac{f'(n)}{2}}_{=v_n} + \underbrace{\int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{2}\, f''(t) \,\mathrm{d}t}_{=w_n}$$

On vérifie successivement que

- $x \longmapsto \int_1^x |f''(t)| \,\mathrm{d}t$ est majorée ;
- on en déduit facilement que $\sum w_n$ est absolument convergente ;
- $\sum v_n$ converge, par application de la proposition, puisque

$$\left(\int_1^{n+1} f'(t) \,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{a une limite}$$

- on conclut en montrant que

$$\left(\int_1^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ne converge pas}$$

car

$$\int_1^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t = \underbrace{\int_1^{\sqrt{n+1}} \frac{2\ \sin(x)}{x^{2\,\alpha-1}}\ \mathrm{d}x}_{=g\left(\sqrt{n+1}\right)} =$$

$$g(\pi) + \sum_{k=1}^{p-1} \Big(g\left((k+1)\,\pi\right) - g(k\,\pi)\Big) + g\left(\sqrt{n+1}\right) - g(p\,\pi)$$

où

$$p = \left\lfloor \frac{\sqrt{n+1}}{\pi} \right\rfloor$$

On peut alors conclure facilement.

IPP 表示分部积分法，详见《高等数学II 法文版》。(Réf. [?], propriété 3.8, page 118)

Session Wxmaxima 2.6 – Comparaison quantitative avec une intégrale

(%i1) `f(x) := sin(sqrt(x))/x^alpha;`

(%o1) $\mathrm{f}\left(x\right) := \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{x^{\alpha}}$

(%i2) `diff(f(x),x);`

(%o2) $\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)\ x^{-\alpha-\frac{1}{2}}}{2} - \alpha \sin\left(\sqrt{x}\right)\ x^{-\alpha-1}$

Session Python 2.6 – Comparaison quantitative avec une intégrale

De même.

In[24]

```
(sp.sin(sp.sqrt(t))/t**alpha).diff(t)
```

Out [24]

$$-\frac{\alpha t^{-\alpha} \sin\left(\sqrt{t}\right)}{t} + \frac{t^{-\alpha} \cos\left(\sqrt{t}\right)}{2\sqrt{t}}$$

Exemple 2.15 – Comparaison qualitative avec une intégrale

La série définie par ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\left[u_n = \frac{\sin(n)}{n^\alpha} \text{ converge}\right] \iff [\alpha > 0]$$

Démonstration

- Pour $\alpha > 1$, la série est absolument convergente.
- Pour $\alpha \leqslant 0$, la série diverge grossièrement.
- Pour $\alpha \in]0,1]$, on procède par analogie. Pour l'intégrale, on fait une intégration par parties. On écrit donc, pour $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} (\Gamma_k - \Gamma_{k-1}) \frac{1}{k^\alpha} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\Gamma_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)}_{=w_k} + \frac{\Gamma_n}{(n+1)^\alpha} - \Gamma_0$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k)$$

Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma_n = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i\,k}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\,(n+1)} - 1}{e^i - 1}\right) = \frac{\sin\left((n+1)/2\right)\,\sin\left(n/2\right)}{\sin\left(1/2\right)}$$

On obtient que la suite $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient que

$$|w_k| \leqslant \frac{1}{\sin\left(1/2\right)} \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{\sin\left(1/2\right)\ k^{1+\alpha}}$$

Ce qui nous permet d'affirmer que la série $\sum w_n$ est absolument convergente. En reportant dans l'expression de S_n, on obtient que la série $\sum u_n$ est convergente.

Proposition 2.9 – Changement de l'ordre des termes

Soit $\sum u_n$ *une série* absolument convergente *réelle ou complexe, et* $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, *alors*

$$\sum u_{\sigma(n)} \text{ converge, et } \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

此性质使用的条件需同时满足绝对收敛与级数一般项为实数。

Démonstration

On reprend les résultats et les notations de la propriété 2.11, page 140. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$

1. la série $\sum \left|u_{\sigma(n)}\right|$ est convergente, puisque $\sum |u_n|$ l'est et, en notant $|u|$ la suite $\left(|u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$, u_σ la suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $|u_\sigma|$ la suite $\left(\left|u_{\sigma(n)}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$, on a
$$S\left(|u_\sigma|\right) = S\left(|u|\right)$$
2. soit $n \in \mathbb{N}$, posons $\Delta_n = \mathbb{N}\backslash\sigma\left(\llbracket 0, n\rrbracket\right)$, on obtient alors
$$\left|S_n\left(u_\sigma\right) - S(u)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(n)} - \sum_{k=0}^{+\infty} u_n\right| = \left|\sum_{k=0,\ k\in\Delta_n}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0,\ k\in\Delta_n}^{+\infty} |u_k| = \left|S_n\left(|u_\sigma|\right) - S\left(|u|\right)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exemple 2.16

La série de terme général défini par

$$u_n = \frac{1}{(3\,n-2)^\alpha} + \frac{1}{(3\,n-1)^\alpha} + \frac{1}{(3\,n)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}, \text{ où } n \geqslant 1 \text{ et } \alpha > 0$$

converge si, et seulement si, $\alpha \geqslant 1$, sa somme est nulle pour $\alpha > 1$ et non nulle pour $\alpha = 1$.

Démonstration

1. Si $\alpha \neq 1$, on a
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{3^{\alpha-1}} - 1\right)\frac{1}{n^\alpha}$$
Ce qui nous donne la convergence de la série si $\alpha > 1$ et sa divergence si $\alpha < 1$.
2. Si $\alpha > 1$, on a un regroupement de quatre termes consécutifs de la

série $\sum v_n$ où, pour $p \in \mathbb{N}^*$

$$v_{4\,p-4} = \frac{1}{(3\,p-2)^\alpha},\ v_{4\,p-3} = \frac{1}{(3\,p-1)^\alpha},$$
$$v_{4\,p-2} = \frac{1}{(3\,p)^\alpha} \text{ et } v_{4\,p-1} = -\frac{1}{p^\alpha}$$

d'après la proposition 2.7, page 153, $\sum v_n$ est convergente et a même somme que $\sum u_n$.

Comme $\alpha > 1$, la série $\sum v_n$ est absolument convergente, on peut donc changer l'ordre des termes pour les mettre sous la forme

$$\frac{1}{1^\alpha},\ -\frac{1}{1^\alpha},\ \frac{1}{2^\alpha},\ -\frac{1}{2^\alpha},\ \frac{1}{3^\alpha},\ -\frac{1}{3^\alpha},\ldots$$

Un dernier regroupement deux à deux nous permet d'obtenir la somme nulle. [a]

3. Si $\alpha = 1$, on obtient que

$$u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

la série est donc absolument convergente. Mais, le raisonnement précédent ne tient plus car la série $\sum 1/n$ diverge. On peut calculer la somme avec la formule d'Euler (exemple 2.5, page 126), on obtient

$$S_n(u) = \sum_{k=1}^{3\,n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(3\,n) - \ln(n) + o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(3)$$

---

a. C'est pour jouer avec les résultats, en effet, il est plus simple d'écrire

$$S_n(u) = \sum_{k=1}^{3\,n} \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 0$$

Exemple 2.17

Soit $\sum u_n$ à valeurs réelles, *semi-convergente*, alors

$$\forall \lambda \in [-\infty, +\infty],\ \exists \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}),\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \lambda$$

Démonstration

1. Posons

$$\Delta_+ = \{n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0\} \text{ et } \Delta_- = \{n \in \mathbb{N},\ u_n < 0\}$$

ces deux ensembles sont infinis, dénombrables d'après la semi-convergence de la série. On les numérote, ce qui donne deux fonctions φ_+ et $\varphi_- : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissantes telles que

$$\varphi_+(\mathbb{N}) = \Delta_+ \text{ et } \varphi_-(\mathbb{N}) = \Delta_-$$

et, de plus

$$\sum u_{\varphi_+(n)} \text{ et } \sum -u_{\varphi_-(n)} \text{ sont des séries à termes positifs divergentes}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on construit un ordre $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ de la manière suivante.
   - *Initialisation*
   - *Si* $\lambda \geqslant 0$, on pose $\sigma(0) = \varphi_+(0), \ldots, \sigma(k) = \varphi_+(k)$ où k est défini par
   $$k = \min\left(\left\{j \in \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{j} u_{\varphi_+(i)} > \lambda\right\}\right)$$
   (k existe car l'ensemble est non vide, puisque $\sum u_{\varphi_+(n)}$ diverge)
   - *Si* $\lambda < 0$, on pose $\sigma(0) = \varphi_-(0), \ldots, \sigma(k) = \varphi_-(k)$ où k est défini par
   $$k = \min\left(\left\{j \in \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{j} u_{\varphi_-(i)} < \lambda\right\}\right)$$
   (k existe car l'ensemble est non vide, puisque $\sum u_{\varphi_+(n)}$ diverge)
   - *Itération*

   Supposons construits $\sigma(0), \ldots, \sigma(n)$ (en utilisant les indices $\varphi_+(0), \ldots, \varphi_+(n_+)$ et $\varphi_-(0), \ldots, \varphi_-(n_-)$)
   - Si
   $$\sum_{i=0}^{n} u_{\sigma(i)} < \lambda$$
   on pose $\sigma(n+1) = \varphi_+(n_+ + 1), \ldots, \sigma(n+k) = \varphi_+(n_+ + k)$, où k est défini par
   $$k = \min\left(\left\{j \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{i=0}^{n} u_{\sigma(i)} + \sum_{i=1}^{j} u_{\varphi_+(n_+ + i)} > \lambda\right\}\right)$$
   - Si
   $$\sum_{i=0}^{n} u_{\sigma(i)} > \lambda$$
   on pose $\sigma(n+1) = \varphi_-(n_- + 1), \ldots, \sigma(n+k) = \varphi_-(n_- + k)$, où k est défini par
   $$k = \min\left(\left\{j \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{i=0}^{n} u_{\sigma(i)} + \sum_{i=1}^{j} u_{\varphi_-(n_- + i)} < \lambda\right\}\right)$$

3. Si $\lambda = +\infty$. Sans détailler, on procède de la manière suivante
   (a) on additionne des termes positifs jusqu'à dépasser 1 ;
   (b) on revient en dessous de 1 en additionnant des termes négatifs ;

   (c) on additionne des termes positifs jusqu'à dépasser 2 ;
   (d) etc.
4. Si $\lambda = -\infty$. Sans détailler, on procède de la manière suivante
   (a) on additionne des termes négatifs jusqu'à dépasser -1 ;
   (b) on revient en dessus de -1 en additionnant des termes positifs ;
   (c) on additionne des termes négatifs jusqu'à dépasser -2 ;
   (d) etc.

Remarque 2.17

On peut même aller au-dessus de 1, puis en-dessous de -1, puis au-dessus de 2, en-dessous de -2, etc. On obtient une série amusante. Quelles sont les valeurs d'adhérence de

$$\left(S_n\left(u_\sigma\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(laissé en exercice) ?

Théorème 2.2 – Produit de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente dans le corps $\mathbb{K}$ et $\sum v_n$ une série absolument convergente dans $\mathbb{K}$, alors la série $\sum w_n$, où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$$

est absolument convergente, et

$$S(w) = S(u)\, S(w)$$

Démonstration

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|\, |v_{n-k}|$$

d'après le théorème 2.1, page 142, on sait alors que $\sum d_n$ converge et que $S(d) = S\left(|u|\right)\ S\left(|v|\right)$.

1. On en déduit que $\sum w_n$ converge absolument car, pour $n \in \mathbb{N}$, $|w_n| \leqslant d_n$.
2. Il reste donc à montrer la relation $S(w) = S(u)\, S(v)$. Reprenons les notations de la démonstration du théorème 2.1, page 142. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$

$$|S_n(w) - S_n(u)\,S_n(v)| = \left|\sum_{(i,j)\in\Gamma_n\setminus\phi_n} u_i\,v_j\right| \leqslant$$

$$\sum_{(i,j)\in\Gamma_n\setminus\phi_n} |u_i|\,|v_j| = \left|S_n(d) - S_n\left(|u|\right)\,S_n\left(|v|\right)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Remarque 2.18

1. En revanche, lorsque les deux séries sont semi-convergentes, on ne peut rien dire.
2. Cependant, on peut généraliser à la situation où l'une des séries est semi-convergente, l'autre absolument convergente. En ce cas, la série-produit est encore convergente.

Démonstration

1. *On ne peut rien dire quand les deux séries sont semi-convergentes* Prenons, par exemple, pour $n \in \mathbb{N}^*$
$$u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$
on a alors
$$w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\,\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k\,(n-k)}}$$
Mais, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a
$$k\,(n-k) \leqslant \frac{n^2}{4},\ \text{donc } |w_n| \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{n} = \frac{2\,(n-1)}{n} \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
la série $\sum w_n$ diverge (grossièrement).
2. *Si l'une est semi-convergente et l'autre absolument convergente, $\sum w_n$ converge* Supposons par exemple que $\sum u_n$ soit semi-convergente et $\sum v_n$ absolument convergente. On peut alors utiliser la remarque importante 2.3, page 117 et écrire, pour $n \in \mathbb{N}$ (on rappelle que $R_{-1}(u) = S(u)$)
$$u_n = R_{n-1}(u) - R_n(u)$$
On a alors
$$S_n(w) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} u_j\,v_{k-j} = \sum_{(i,j)\in\phi_n} u_i\,v_j = \sum_{i=0}^{n}\left(u_i\left(\sum_{j=0}^{n-i} v_j\right)\right) =$$
$$\sum_{i=0}^{n}\left(\left(R_{i-1}(u) - R_i(u)\right)\left(\sum_{j=0}^{n-i} v_j\right)\right) =$$
$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(-R_i(u)\,v_{n-i}\right) + S(u)\,S_n(v)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que

$$\forall n \geqslant N,\ \left|R_n(u)\right| \leqslant \varepsilon$$

et posons

$$K = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|R_{n-1}(u)\right|$$

on a alors, pour $n \geqslant N$

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} \left(-R_i(u)\, v_{n-i}\right)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{N} K\left|v_{n-i}\right| + \varepsilon \sum_{i=N+1}^{n} \left|v_{n-i}\right| \leqslant$$

$$K\, R_{n-N-1}\left(|v|\right) + \varepsilon\, S\left(|v|\right)$$

et, comme $R_n\left(|v|\right)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe N' tel que, pour $n \geqslant \max\left(N, N'\right)$

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} \left(-R_i(u)\, v_{n-i}\right)\right| \leqslant \Big(1 + S\left(|v|\right)\Big)\ \varepsilon$$

ce qui montre que

$$S_n(w) \xrightarrow[n\to+\infty]{} S(u)\, S(v)$$

Exercice(s) 2.4

2.4.1 Étudier la nature des séries de terme général suivant

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \\ u_n &= \ln\left(\tan\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)\right) \\ u_n &= \frac{\sin(n)}{n - \sqrt{n}\,\sin(n)} \\ u_n &= \frac{1}{n^\alpha} \text{ où } \alpha \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

2.4.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels tendant vers 0. On suppose qu'il existe $r \in]0, 1[$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ -1 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant r$$

Montrer que $\sum u_n$ converge.

2.4.3 Montrer que

$$\cos 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \text{ est irrationnel}$$

2.4.4 Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\alpha \in]0, \pi/2[$. On suppose que chaque z_n a un argument dans $[-\alpha, \alpha]$ et que $\sum z_n$ converge. Montrer que $\sum |z_n|$ converge.

2.4.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \qquad \text{et} \qquad \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k$$

On suppose que $u_n = O(1/n)$ et que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Montrer que la série de terme général u_n converge.

2.4.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels > 0.

(a) On suppose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow a \qquad \text{avec} \quad a \in [0, 1[$$

Montrer

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k \sim \frac{(-1)^n u_n}{1+a}$$

(b) On suppose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow a \qquad \text{avec} \quad a > 1$$

Montrer

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k \sim \frac{(-1)^n u_n}{1+a}$$

(c) Donner un énoncé analogue si $u_{n+1}/u_n \to +\infty$.

(d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs convergeant vers 0 en décroissant, telle que $(u_n - u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante, que $u_{n+1} \underset{\infty}{\sim} u_n$. Montrer

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k \sim \frac{(-1)^n u_n}{2}$$

2.4 Applications des séries aux suites récurrentes

Remarque 2.19

On peut remarquer qu'il y a une certaine *analogie* entre les séries et les fonctions, ainsi

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \big(S_n(u)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ressemble à } f \longmapsto \left(x \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

c'est la primitivation... De même,

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_n - u_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ ressemble à } f \longmapsto f'$$

c'est la dérivation... (On peut même aller plus loin et apparier n avec x, u_n avec $f(x)$, etc.) Cette analogie n'est que très rarement quantitative, mais l'étude du problème continu analogue peut donner de bonnes idées d'approche du problème discret.

级数与积分、数列与导函数的相似之处，如级数类似于无上界区间的积分。

注释 2.6

由函数定义的递推数列，我们可以应用第一章节所介绍的方法来研究。

Exemple 2.18

Soit la suite récurrente définie par (voir le comportement de la suite sur la figure 2.3, page 167)

$$u_0 \in]0,1[, \; u_{n+1} = \sin u_n$$

Cette suite converge vers 0, et

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Démonstration de l'exemple 2.18, de la présente page

On montre que (démonstration laissée comme exercice)

$$\forall n \in \mathbb{N},\; u_n > 0 \quad \text{et} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On a alors

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o\left(u_n^3\right)$$

que l'on peut lire comme

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{6}$$

Le problème continu analogue est

$$\frac{f'(x)}{f(x)^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\frac{1}{6}$$

On voit donc que la *bonne* fonction pour étudier cette propriété est la fonction $1/f^2$, et qu'en plus, il faut la dériver ! Posons donc

$$v_n = \frac{1}{u_n^2} \text{ et étudions la série dérivée } w_{n+1} = v_{n+1} - v_n$$

On a alors

$$w_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_n^2}\left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o\left(u_n^2\right)\right)^{-2} - 1\right)$$

Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il vient

$$w_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3} \text{ donc } S_{n-1}(w) = v_n = \frac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}$$

On obtient alors, puisque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Exemple 2.19

Soit la suite récurrente définie par (voir la figure 2.4, page 168)

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{\arctan(u_n)}{2}$$

La méthode d'analogie permet de trouver un équivalent.

Démonstration de l'exemple 2.19, de la présente page

Cette suite converge vers 0, la série est évidemment convergente d'après le critère de d'Alembert, et $R_n \sim u_n$, de manière immédiate. Mais quel est l'équivalent de u_n ?
On a

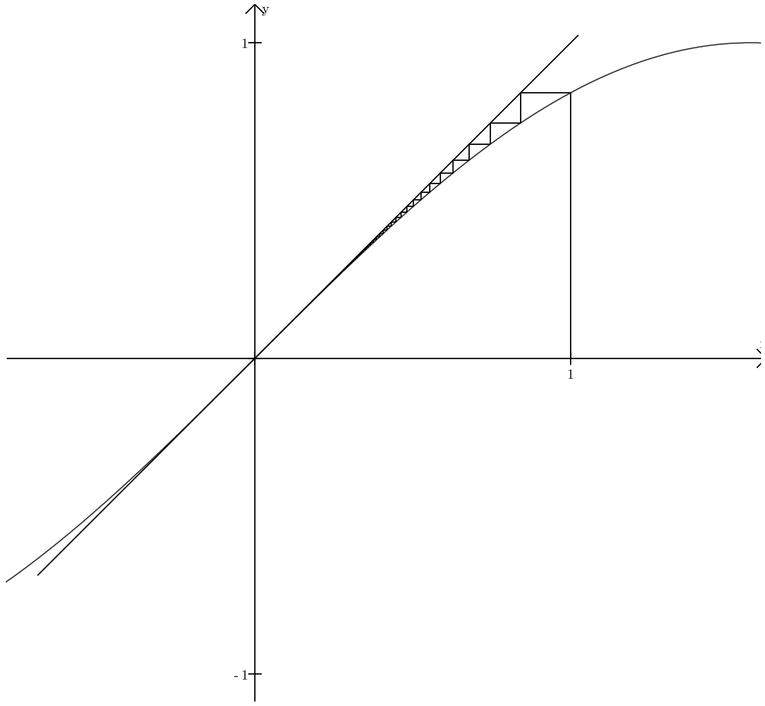
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$$

La première idée est de résoudre le système sans second membre, et de faire une variation de la constante, soit de chercher une solution sous la forme

$$u_n = \frac{v_n}{2^n},\ \text{avec } v_{n+1} = v_n - \frac{v_n^3}{3\,4^n} + o\left(\frac{v_n^3}{4^n}\right)$$

On peut continuer le calcul par analogie...

Figure 2.3 – $u_{n+1} = \sin(u_n)$



Exemple 2.20

Soit la suite récurrente définie par (voir la figure 2.5, page 169)

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$$

La méthode d'analogie permet de trouver un équivalent.

Démonstration de l'exemple 2.20, de la présente page

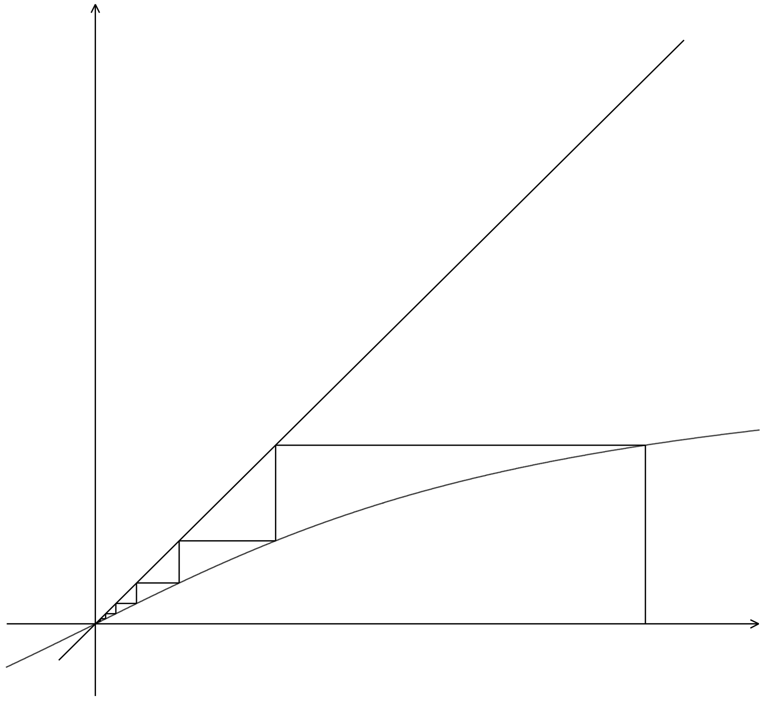
Cette suite converge vers 0, la série est évidemment convergente d'après le critère de d'Alembert, et $R_n \sim u_{n+1}$ de manière immédiate.
On a

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$$

L'étude de la partie homogène nous incite à poser

$$u_n = 2v_n^{2^n}, \text{ où } \frac{v_{n+1} - v_n}{v_n} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Figure 2.4 – $u_{n+1} = \arctan(u_n)/2$



La suite se continue par analogie...

Exercice(s) 2.5

2.5.1 Étude de la suite définie par

$$u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1+u_n^2}$$

et de la série $\sum(u_n - 1)$.

2.5.2 Étudier la suite

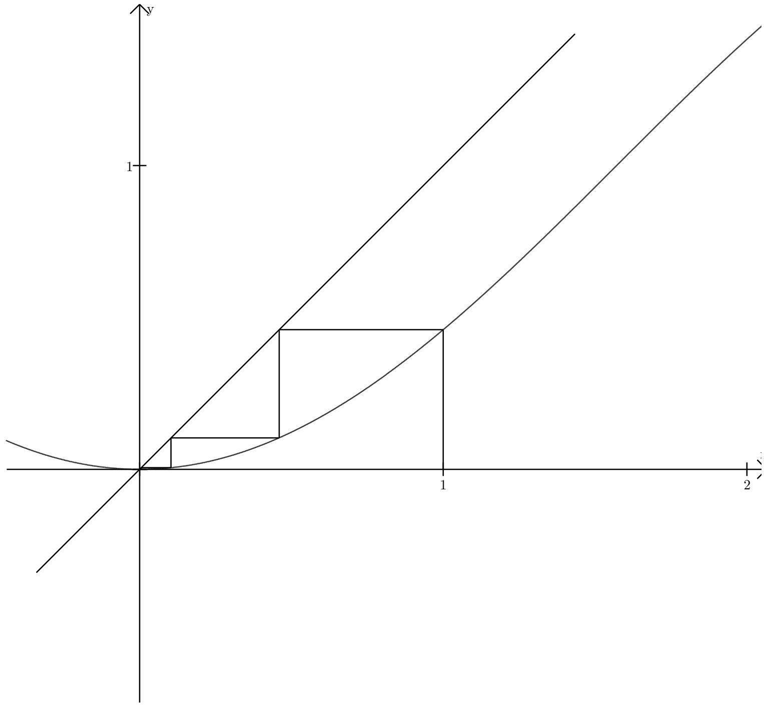
$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = u_n + u_n^{-5} \end{cases}$$

Équivalent de u_n ? Terme suivant du développement asymptotique.

2.5.3 Soit la suite récurrente définie par (voir la figure 2.6, page 170)

$$u_0 \in]0,1[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \ln(u_n)$$

Figure 2.5 – $u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$



(a) Montrer qu'elle converge vers 0.

(b) Donner un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.

2.5.4 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs divergente et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer la nature de la série de terme général

$$\frac{u_n}{S_n(u)^\alpha}$$

2.5.5 Soit $\alpha > 0$, $u_0 > 0$ et la suite récurrente définie par

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$$

(a) Si $\alpha \leqslant 1$, montrer que la suite diverge vers l'infini et donner un équivalent de u_n.

(b) Si $\alpha > 1$, montrer que la suite converge (vers une limite notée l) et donner un équivalent de $u_n - l$.

2.5.6 Soit $a > 0$ et $\alpha > 0$ deux réels, étudier la suite définie par

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = u_n + \frac{1}{S_n(u)^\alpha}$$

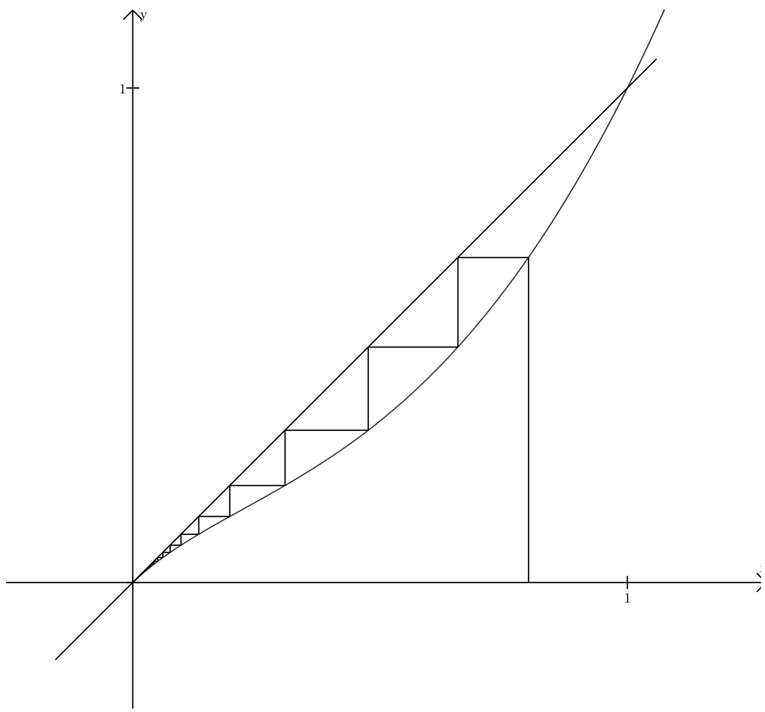
2.5.7 Soit la suite définie par

$$u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$$

Déterminer un développement asymptotique de u_n.

2.5.8 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de termes $\geqslant 0$, qui converge vers 0 et telle que $(S_n(a) - n\,a_n)$ reste bornée. Montrer que la série $\sum a_n$ converge.

Figure 2.6 – Exercice 2.5.2.5.3, page 168



2.5 Familles sommables

Les familles sommables sont une généralisation des séries lorsque l'ensemble des indices n'est pas nécessairement ordonné, par exemple pour des suites doubles $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$, ou lorsque l'ordre de sommation n'intervient pas, comme pour les séries absolument convergentes.

Dans cette partie, on note I un ensemble dénombrable.

注释 2.7

Familles sommables 是级数概念的拓展，级数定义中我们要求下标集为有序的自然数集 $\mathbb{N}$ ，而 Familles sommables 定义中我们要求下标集为可数集即可，而自然数集是可数集的一种特殊情况。

2.5.1 Généralités

Notation 2.1

Il est pratique de convenir que si $I = \varnothing$, alors

$$\sum_{k\in I} u_k = 0$$

Définition 2.4 – Famille sommable de nombres positifs

On dit que la famille $(u_k)_{k\in I}$ à termes positifs est *sommable* lorsque

$$\left\{\sum_{k\in J} u_k,\ J \text{ fini et } J \subset I\right\} \text{ est borné}$$

On définit alors sa *somme*

$$\sum_{k\in I} u_k = \sup\left\{\sum_{k\in J} u_k,\ J \text{ fini et } J \subset I\right\}$$

Exemple 2.21

Soit $p \in [0,1[$ alors $\left(p^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et sa somme vaut

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} p^{|n|} = \frac{1+p}{1-p}$$

Démonstration

Soit $I \subset \mathbb{Z}$ fini, alors

$$\sum_{n\in I} p^{|n|} = \sum_{n\in I\cap\mathbb{N}} p^n + \sum_{n\in I\cap\mathbb{Z}_-^*} p^{-n} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} p^n + \sum_{n=1}^{+\infty} p^n = \frac{1}{1-p} + \frac{p}{1-p} = \frac{1+p}{1-p} < +\infty$$

ce qui montre la sommabilité de la famille.

Par ailleurs, si on prend $I_n = [\![-n, n]\!]$, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k\in I_n} p^{|k|} = \sum_{k=0}^{n} p^k + \sum_{k=1}^{n} p^k = \frac{1-p^{n+1}}{1-p} + p\,\frac{1-p^n}{1-p} = \frac{1+p-2\,p^{n+1}}{1-p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1+p}{1-p}$$

Remarque 2.20

Lorsque $I = \mathbb{N}$, on retrouve la notion de série à termes positifs convergente

$$\left[(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est sommable}\right] \iff \left[\sum u_k \text{ est convergente}\right]$$

Démonstration

1. ($\Rightarrow$) Si la famille est sommable, alors la suite $\left(S_n(u)\right)_{u\in\mathbb{N}}$ est majorée (on prend $I = [\![0, n]\!]$), donc la série, à termes positifs, est convergente.
2. ($\Leftarrow$) Supposons la série convergente et soit $I \subset \mathbb{N}$ fini, non vide. Posons $N = \max(I)$, alors

$$\sum_{k\in I} u_k \leqslant S_N(u) \leqslant S(u) < +\infty$$

Notation 2.2

Lorsque la famille à termes positifs $(u_k)_{k\in I}$ n'est pas sommable, il est cohérent de poser

$$\sum_{k\in I} u_k = +\infty$$

Proposition 2.10 – Comparaison de familles sommables à termes positifs

Soit $(u_k)_{k\in I}$ et $(v_k)_{k\in I}$ deux familles de réels avec

$$\forall k \in I,\ 0 \leqslant u_k \leqslant v_k$$

1. *Si $(v_k)_{k\in I}$ est sommable alors $(u_k)_{k\in I}$ est sommable et*

$$\sum_{k\in I} u_k \leqslant \sum_{k\in I} v_k$$

2. *Si $(u_k)_{k\in I}$ n'est pas sommable alors $(v_k)_{k\in I}$ n'est pas sommable.*

Démonstration

1. On suppose que la famille $(v_k)_{k\in I}$ est sommable. Soit $J \subset I$ fini, on a alors

$$0 \leqslant \sum_{k\in J} u_k \leqslant \sum_{k\in J} v_k \leqslant \sum_{k\in I} v_k \in \mathbb{R}_+$$

ce qui montre que la famille $(u_k)_{k\in I}$ est sommable et, en prenant la borne supérieure dans l'inégalité

$$\sum_{k\in J} u_k \leqslant \sum_{k\in I} v_k$$

on obtient

$$\sum_{k\in I} u_k \leqslant \sum_{k\in I} v_k$$

2. Il s'agit juste de la contraposée du premier point.

Exemple 2.22

Déterminer la nature de la famille

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}$$

Démonstration

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Posons pour $x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[$

$$v_x = \frac{1}{x^2} \text{ et } u_x^{(q)} = \begin{cases} 0 & \text{si } q\,x \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{x^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

On a clairement

$$\forall x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[,\ 0 \leqslant u_x^{(q)} \leqslant v_x$$

Mais, si on ne considère que les termes non nuls, la famille $\left(u_x^{(q)}\right)_{x \in \mathbb{Q} \cap [1,+\infty[}$ correspond à la série

$$\sum_p \frac{q^2}{p^2},\ \text{où } p \geqslant q$$

Or

$$\sum_{p=q}^{+\infty} \frac{q^2}{p^2} \geqslant q^2 \int_q^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = q$$

par comparaison à une intégrale, donc

$$\forall q \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{x \in \mathbb{Q} \cap [1,+\infty[} \frac{1}{x^2} \geqslant q$$

donc

$$\sum_{x \in \mathbb{Q} \cap [1,+\infty[} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Définition 2.5 – Famille sommable

On dit que la famille $(u_k)_{k \in I}$ à termes quelconques est *sommable* lorsque la famille $\left(|u_k|\right)_{k \in I}$ à termes positifs est *sommable*. De plus, on définit sa somme par

1. si $(u_k)_{k \in I}$ est une famille à termes réels

$$\sum_{k \in I} u_k \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k \in I} u_k^+ - \sum_{k \in I} u_k^-$$

2. si $(u_k)_{k \in I}$ est une famille à termes complexes

$$\sum_{k \in I} u_k \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k \in I} \mathrm{Re}(u_k) + i \sum_{k \in I} \mathrm{Im}(u_k)$$

Démonstration (justification de la définition)

Si la famille $(u_k)_{k \in I}$ à termes réels est sommable alors

$$0 \leqslant u_k^+ = \max(u_k, 0) \leqslant |u_k| \text{ et } 0 \leqslant u_k^- = \max(-u_k, 0) \leqslant |u_k|$$

donc, par la proposition 2.10, page 173, les familles à termes positifs $(u_k^+)_{k\in I}$ et $(u_k^-)_{k\in I}$ sont sommables. Les sommes qui apparaissent dans la définition 2.5, page précédente sont donc bien définies.

Remarque 2.21

Lorsque $I = \mathbb{N}$, on retrouve la notion de série absolument convergente

$$\left[(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est sommable}\right] \iff \left[\sum u_k \text{ est absolument convergente}\right]$$

Démonstration

C'est la conséquence immédiate de la remarque 2.20, page 172.

Proposition 2.11 – Combinaison linéaire de familles sommables

Soit $(u_k)_{k\in I}$ et $(v_k)_{k\in I}$ deux familles sommables et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $(u_k + \lambda\, v_k)_{k\in I}$ est sommable et

$$\sum_{k\in I} (u_k + \lambda\, v_k) = \sum_{k\in I} u_k + \lambda \sum_{k\in I} v_k$$

Familles sommables 作为线性空间 $\mathbb{K}^I$的子空间，满足定义中的八条性质 详见《线性代数 法文版》。(Réf. [?], définition 1.4, page 6)

Démonstration

Évident.

Remarque importante 2.22

L'ensemble des familles sommables indicées par I est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$ et

$$(u_k)_{k\in I} \longmapsto \sum_{k\in I} u_k \text{ est une forme linéaire}$$

Démonstration

C'est une application immédiate de la proposition 2.11, de la présente page.

2.5.2 Sommation par paquets

Le principal intérêt des familles sommables est de pouvoir les sommer « comme on veut », on va donc retrouver les propriétés de sommations par paquets et de commutation des termes...

Propriété 2.13 – Réunion disjointe

Soit $(u_k)_{k\in I}$ une famille sommable, $I_1 \subset I$ et $I_2 \subset I$, tels que $I_1 \cap I_2 = \varnothing$, alors le familles $(u_k)_{k\in I_1}$, $(u_k)_{k\in I_2}$ et $(u_k)_{k\in I_1\cup I_2}$ sont sommables et

$$\sum_{k\in I_1\cup I_2} u_k = \sum_{k\in I_1} u_k + \sum_{k\in I_2} u_k$$

Démonstration

Il suffit de le montrer dans le cas d'une famille à termes positifs, en passant aux familles $\left(u_k^+\right)_{k\in I}$ et $\left(u_k^-\right)_{k\in I}$.

1. Il est évident par la définition de la sommabilité que si $\left(|u_k|\right)_{k\in I}$ est sommable, alors pour tout $I' \subset I$, la famille $(u_k)_{k\in I'}$ est sommable, car si $J \subset I'$ fini, alors $J \subset I$ et
$$\sum_{k\in J} |u_k| \leqslant \sum_{k\in I} |u_k| \in \mathbb{R}_+$$
2. Si $J \subset I_1 \cup I_2$, alors
$$\sum_{k\in J} |u_k| = \sum_{k\in J\cap I_1} |u_k| + \sum_{k\in J\cap I_2} |u_k| \leqslant \sum_{k\in I_1} |u_k| + \sum_{k\in I_2} |u_k|$$
donc
$$\sum_{k\in I_1\cup I_2} |u_k| \leqslant \sum_{k\in I_1} |u_k| + \sum_{k\in I_2} |u_k|$$
3. Si $J_1 \subset I_1$ et $J_2 \subset I_2$ sont finis, alors
$$\sum_{k\in J_1} |u_k| + \sum_{k\in J_2} |u_k| = \sum_{k\in J_1\cup J_2} |u_k| \leqslant \sum_{k\in I_1\cup I_2} |u_k|$$
donc
$$\sum_{k\in I_1} |u_k| + \sum_{k\in I_2} |u_k| \leqslant \sum_{k\in I_1\cup I_2} |u_k|$$

Proposition 2.12 – Critère de sommabilité

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une partition de* I*, alors*

$$\Big[(u_k)_{k\in I} \text{ est sommable}\Big] \iff \left[\begin{array}{l} \forall n\in\mathbb{N},\ \big(|u_k|\big)_{k\in I_n} \text{ est sommable} \\ \displaystyle\sum_n \Big(\sum_{k\in I_n} |u_k|\Big) \text{ est convergente} \end{array}\right]$$

Remarque 2.23

L'étude de la sommabilité se ramène souvent à l'étude de convergences de séries.

Il ne faut jamais oublier les valeurs absolues lorsqu'on applique ce critère.

Démonstration de la proposition 2.12, de la présente page

1. ($\Leftarrow$) Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I, telle que
   (a) pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\big(|u_k|\big)_{k\in I_n}$ est sommable ;
   (b) la série
   $$\sum_n \Big(\sum_{k\in I_n} |u_k|\Big) \text{ converge}$$
   Soit $J\subset I$ fini, non vide, alors posons, pour $n\in\mathbb{N}$, $J_n = J\cap I_n$, comme J est fini, l'ensemble
   $$\Delta = \{n\in\mathbb{N},\ J_n \neq \varnothing\} \text{ est fini, et } J = \bigcup_{n\in\Delta} J_n$$
   Alors
   $$\sum_{k\in J} |u_k| = \sum_{n\in\Delta}\Big(\sum_{k\in J_n} |u_k|\Big) \leqslant \sum_{n\in\Delta}\Big(\sum_{k\in I_n} |u_k|\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k\in I_n} |u_k|\Big) \in \mathbb{R}_+$$
   ce qui montre que la famille $\big(|u_k|\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable.
2. ($\Rightarrow$) La famille $\big(|u_k|\big)_{k\in I}$ est sommable. Prenons $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I
   (a) pour $n\in\mathbb{N}$, comme $I_n\subset I$, la famille $\big(|u_k|\big)_{k\in I_n}$ est sommable ;

(b) pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k \in I_j} |u_k| \right) = \sum_{k \in \bigcup_{j=0}^{n} I_j} |u_k| \leqslant \sum_{k \in I} |u_k| \in \mathbb{R}_+$$

La somme partielle étant bornée et la série à termes positifs, la série est convergente.

Exemple 2.23 – Utilisation de la sommation par paquets

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la famille $\left(\dfrac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si, et seulement si, $\alpha > 2$.

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $I_n = \mathbb{N}^* \times \{n\}$ et appliquons la sommation par paquets.

1. La série $\sum_m \frac{1}{(m+n)^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. On sait donc déjà que pour $\alpha \leqslant 1$, la famille n'est pas sommable.
2. Prenons donc $\alpha > 1$. Par comparaison avec une intégrale, on a (voir la remarque importante 2.6, page 122)

$$\sum_{m \in I_n} \frac{1}{(m+n)^\alpha} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m+n)^\alpha} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{(\alpha - 1)\, n^{\alpha - 1}}$$

Donc, la famille est sommable si, et seulement si, $\alpha > 2$.

Proposition 2.13 – Sommation par paquets

Soit $(u_k)_{k \in I}$ une famille sommable et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I, alors

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\big(|u_k|\big)_{k \in I_n}$ est sommable ;*
2. *la série*

$$\sum_n \left(\sum_{k \in I_n} |u_k| \right)$$

est convergente ;

3. *et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k \in I_n} u_k \right) = \sum_{k \in I} u_k$$

Démonstration

1. Les deux premiers points ont déjà été abordés à la proposition 2.12, page 177.
2. Là encore, il suffit de le montrer pour les familles sommables à termes positifs.

- Soit $J \subset I$ fini, alors en posant, pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n = J \cap I_n$, on a

$$J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = \bigcup_{n\in\Delta} J_n, \text{ où } \Delta = \{n \in \mathbb{N},\ J_n \neq \varnothing\} \text{ est fini}$$

$$\sum_{k\in J} |u_k| = \sum_{n\in\Delta}\left(\sum_{k\in J_n} |u_k|\right) \leqslant \sum_{n\in\Delta}\left(\sum_{k\in I_n} |u_k|\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k\in I_n} |u_k|\right) \in \mathbb{R}_+$$

donc

$$\sum_{k\in I} |u_k| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k\in I_n} |u_k|\right) \in \mathbb{R}_+$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k\in I_j} |u_k|\right) = \sum_{k\in\bigcup_{j=0}^{n}} |u_k| \leqslant \sum_{k\in I} |u_k| \in \mathbb{R}_+$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k\in I_n} |u_k|\right) \leqslant \sum_{k\in I} |u_k|$$

Exemple 2.24

Soit $I = \{(n,k) \in \mathbb{N}^2,\ n \leqslant k\}$, montrer que la famille $\left(\frac{1}{k!}\right)_{(n,k)\in I}$ est sommable et calculer sa somme.

Démonstration

Posons pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$

$$u_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{k!} & \text{si } n \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La famille est sommable car

1. elle est à termes positifs ;
2. pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n \left|u_{n,k}\right|$ converge, en effet, c'est une

somme finie et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|u_{n,k}\right| = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{k!} = \frac{k+1}{k!}$$

3. la série

$$\sum_k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left|u_{n,k}\right| \right) \text{ converge}$$

en utilisant, par exemple le critère de d'Alembert.

Et on a immédiatement

$$\sum_{(n,k)\in I} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} = 2\,e$$

Remarque importante 2.24 – Applications aux séries doubles- Théorèmes de Fubini

Soit $(u_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes alors

1. si pour tout $j \in \mathbb{N}$, les séries $\sum_k |u_{j,k}|$ convergent et si la série $\sum_j \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{j,k}|$ converge alors la famille $(u_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable (proposition 2.12, page 177).
2. Dans ce cas, on a (proposition 2.13, page 178)

$$\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} u_{j,k} = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{j,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{j,k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j+k=n}^{+\infty} u_{j,k} = \dots$$

Remarque 2.25

La proposition 2.13, page 178 permet de démontrer la proposition 2.9, page 158 sur le changement d'ordre des termes d'une série absolument convergente et le théorème 2.2, page 161 sur la convergence du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Exercice(s) 2.6

2.6.1 On définit, pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$

$$a_{n,p} = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2 - p^2} & \text{si } n \neq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Étudier la sommabilité de la famille $\left(a_{n,p}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$.

(b) Comparer

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}} a_{n,p}\right) \text{ et } \sum_{p\in\mathbb{N}}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,p}\right)$$

2.6.2 Soit $(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et $u_{p,q}=e^{-a\,p-b\,q}$ pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. Montrer que la famille $\left(u_{p,q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

2.6.3 Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, étudier la sommabilité de la famille

$$\left(\frac{a^p\, b^q}{(p+q)!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$$

2.6.4 Soit $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|<1$, montrer que, après avoir justifier l'existence

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{1-z^{2n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{1-z^{2n}}$$

2.6.5 Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une énumération des nombres rationnels,

$$I_n=\left]r_n-\frac{1}{n^2},r_n-\frac{1}{n^2}\right[\text{ et } I=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$$

Montrer que $I\neq\mathbb{R}$.

2.6.6 La fonction ζ est définie sur $]1,+\infty[$ par

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$$

Montrer la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_s(-1)^s\ \big(\zeta(s)-1\big)$$

où $s\geqslant 2$.

2.6.7 Soit I un ensemble et $(u_k)_{k\in I}\in{\mathbb{R}_+^*}^I$ une famille telle que

$$\sup\left(\left\{\sum_{k\in J}u_k,\ J\subset I\text{ fini}\right\}\right)<+\infty$$

Montrer que I est fini ou dénombrable.

2.6.8 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \big[|z| < 1\big] \implies \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)\, z^n\right]$$

2.6.9 Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z\,(z+1)\,\cdots\,(z+n)} = e\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)}\right)$$

Chapitre 3

Séries entières

Les séries entières sont des objets importants en mathématiques, elles généralisent les fonctions polynomiales. On peut les étudier directement (ce qui est le parti pris dans ce cours) ou les étudier comme un cas particulier des séries de fonctions (voir le chapitre **??**, page ??).

Dans les deux points de vue (séries entières/séries de fonctions), l'objectif est de savoir manipuler de nouvelles fonctions définies en tout point comme des sommes de séries.

注释 3.1

本章节介绍了幂级数的定义性质及其应用，重点介绍了幂级数的敛散性判定方法。幂级数是函数项级数的一种特殊情况，一般项形式为幂函数。幂级数的应用在于幂函数具有良好的性质，可以通过函数在收敛域内的幂级数展开，从而简化复杂函数的研究，在数值计算领域有着广泛的应用。当幂级数的系数从某一项开始全是零的时候，即我们所学过的多项式。

3.1 Généralités

3.1.1 Définition

Définition 3.1 – Série entière

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $z \in \mathbb{C}$

1. la série $\sum a_n\, z^n$ s'appelle la *série entière* de terme général $a_n\, z^n$;
2. les complexes a_n sont les *coefficients* de la série entière, a_0 est le *terme constant* ;

3. le *domaine de convergence* de la série entière est l'ensemble des z tels que $\sum a_n z^n$ soit convergente ;
4. la *fonction somme* de la série entière est

$$z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

et est définie sur le domaine de convergence, elle sera notée S_a.

这里给出幂级数，收敛域以及和函数的定义。请注意只有在收敛域内和函数记作 S_a，和函数的定义域即级数的收敛域。对于确定的任一个 z，幂级数即为上一章节所学习的常数项级数。

Remarque 3.1

1. Quand les a_n sont réels, on peut considérer la série entière $\sum a_n x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$ et les quantités considérées restent réelles.
2. Les fonctions polynomiales sont des séries entières particulières (les coefficients sont tous nuls à partir d'un certain rang).
3. La somme partielle d'une série entière est une fonction polynomiale mais sa somme est une fonction de z, pas nécessairement polynomiale.

Exemple 3.1 – La série géométrique

La série géométrique $\sum z^n$ est une série entière

1. de coefficients $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
2. de domaine de convergence

$$\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$$

3. de fonction somme

$$z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Notation 3.1 – Boules ouvertes, boules fermées

Soit $r \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{C}$, on note

$$BO(a,r) \overset{\text{Not}}{=} \{z \in \mathbb{C},\ |z-a| < r\}$$

la *boule ouverte de centre a et de rayon r*,

$$BF(a,r) \overset{\text{Not}}{=} \{z \in \mathbb{C},\ |z-a| \leqslant r\}$$

la *boule fermée de centre a et de rayon r* et

$$S(a,r) \overset{\text{Not}}{=} \{z \in \mathbb{C},\ |z-a| = r\}$$

la *sphère de centre a et de rayon r.*

Exemple 3.2

1. $\sum \dfrac{(3\,z)^n}{n^2+1}$ est une série entière de domaine de convergence $BF(0,1/3)$.
2. $\sum \dfrac{z^{2\,p}}{p+1}$ est aussi une série entière de coefficients

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2\,p+1 \text{ est impair} \\ \dfrac{1}{p+1} & \text{si } n = 2\,p \text{ est pair} \end{cases}$$

3. $\sum e^{-n\,z}$ est une série de paramètre z mais n'est pas une série entière.

3.1.2 Rayon de convergence

Théorème 3.1 – Lemme d'Abel

Si $r_0 > 0$ et $\left(|a_n|\, r_0^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée alors

$$\sum a_n\, z^n \textit{ est absolument convergente sur } BO(0, r_0)$$

本定理中条件如果改为级数 $\sum a_n\, {r_0}^n$ 收敛，我们有同样的结果。

Démonstration

Soit $r_0 > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n|\, r_0^n \leqslant M$$

Soit $z \in BO\left(0, r_0\right)$, alors, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\left|a_n\, z^n\right| \leqslant M \left(\frac{|z|}{r_0}\right)^n$$

et le terme de droite est le terme général d'une série géométrique convergente. Les critères de comparaison des séries à termes positifs nous permettent d'affirmer que

$$\sum |a_n\, z^n| \text{ converge}$$

Ce résultat très simple (qualifié usuellement de « lemme », ou « petit résultat ») est essentiel, toutes les démonstrations théoriques et certaines pratiques s'appuieront sur ce lemme ou sur des résultats qui en découlent.

Théorème 3.2

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière, il existe $R_a \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que [a]

1. *si $|z| < R_a$ alors $\sum a_n\, z^n$ est absolument convergente ;*
2. *si $|z| > R_a$ alors $\sum a_n\, z^n$ est grossièrement divergente.*

a. Voir la figure 3.1, page suivante

定义中我们允许收敛半径等于零或正无穷。一般情况下对于定义在收敛半径上的级数，我们不能确定敛散性。

Démonstration

Posons

$$D = \left\{z \in \mathbb{C},\ \sum a_n\, z^n \text{ converge}\right\}$$

on a alors plusieurs cas

1. $D = \mathbb{C}$, alors $R_a = +\infty$ convient.
2. $D = \{0\}$, alors $R_a = 0$ convient.
3. Sinon, il existe z_0 et z_1 dans $\mathbb{C}^*$ tels que

$$\sum a_n\, z_0^n \text{ converge et } \sum a_n\, z_1^n \text{ diverge}$$

Posons

$$\Delta = \left\{r \in \mathbb{R}_+^*,\ \sum |a_n|\, r^n \text{ converge}\right\}$$

— $\Delta \neq \varnothing$, car $]0, |z_0|[\subset \Delta$, d'après le lemme d'Abel, car la suite $\left(|a_n|\ |z_0|^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

— Δ est majoré par $|z_1|$, car sinon, on aurait un $r > |z_1|$ dans Δ et la suite $\left(|a_n|\, r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, le lemme d'Abel nous assurerait la convergence de $\sum a_n\, z_1^n$.

Posons

$$\boxed{R_a = \sup(\Delta)}$$

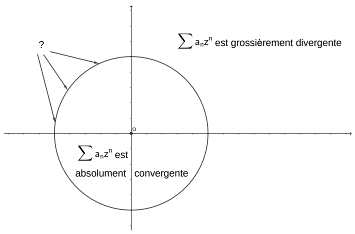
et montrons qu'il convient.

(a) Si $z \in BO(0, R_a)$, alors il existe $r \in \Delta$ tel que $|z| < r \leqslant R_a$, par définition de la borne supérieure. La suite $\left(|a_n|\, r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

étant bornée, le lemme d'Abel nous assure que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

(b) Si $z \in \mathbb{C} \backslash BF(0, R_a)$ (c'est-à-dire si $|z| > R_a$), alors la suite $\left(|a_n|\,|z|^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne saurait être bornée, car sinon, le lemme d'Abel nous assurerait que $]R_a, |z|[\subset \Delta$, ce qui contredit la définition de R_a.

Figure 3.1 – Conséquences du lemme d'Abel



Définition 3.2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, le nombre $R_a \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ de la proposition précédente est le *rayon de convergence* de la série entière.

Notation 3.2

Nous noterons le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ par

$$R_a \overset{\text{Not}}{=} \text{Rayon}\left(\sum a_n z^n\right)$$

Remarque importante 3.2

On a les différentes caractérisations

$$\begin{aligned} R_a &= \boxed{\sup\left(\left\{r \geqslant 0,\ \left(|a_n|\, r^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}\right)} \\ &= \boxed{\sup\left(\left\{r \geqslant 0,\ \sum |a_n|\, r^n \text{ est convergente}\right\}\right)} \\ &= \boxed{\sup\left(\left\{r \geqslant 0,\ \lim_{n\to+\infty} a_n\, r^n = 0\right\}\right)} \end{aligned}$$

熟练掌握收敛半径等价的三种形式。

Démonstration

Posons

$$R_1 = \sup\left(\left\{r \geqslant 0,\ \left(|a_n|\, r^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}\right)$$

$$R_2 = \sup\left(\left\{r \geqslant 0,\ \sum |a_n|\, r^n \text{ est convergente}\right\}\right)$$

$$R_3 = \sup\left(\left\{r \geqslant 0,\ \lim_{n\to+\infty} a_n\, r^n = 0\right\}\right)$$

Il est clair que ces trois bornes supérieures sont dans $[0, +\infty]$ car les ensembles concernés sont non vides (ils contiennent tous 0). On a déjà vu dans la démonstration du théorème 3.2, page 186 que $R_a = R_2$. Montrons les autres formules.

1. Si r est tel que $\sum |a_n|\, r^n$ converge, alors $a_n\, r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $R_2 \leqslant R_3$.
2. Si r est tel que $a_n\, r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $\left(|a_n|\, r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $R_3 \leqslant R_1$.
3. Si r est tel que $\left(|a_n|\, r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors, d'après le lemme d'Abel, pour tout $r' \in [0, r[$, la série

$$\sum |a_n|\, r'^n \text{ converge}$$

donc $R_1 \leqslant R_2$.

Définition 3.3

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R_a son rayon de convergence

1. le disque ouvert de centre O et de rayon R_a s'appelle le *disque ouvert de convergence* ;
2. le cercle de centre O et de rayon R_a s'appelle parfois le *cercle d'incertitude*, parce qu'on n'est pas sûr de ce qui s'y passe !

这里我们给出了收敛圆盘和收敛圆的定义，请注意收敛圆盘不含边界。

Bilan

On utilisera souvent le lemme d'Abel. Il faut toutefois faire attention aux inégalités larges et strictes. On a, pour une série entière $\sum a_n z^n$

Initialisation de la démonstration

Soit $r \in \mathbb{R}_+$

$$[r < R_a] \implies \left[\begin{array}{c} \sum |a_n| r^n \text{ converge} \\ \left(|a_n| r^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \\ a_n r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array}\right]$$

Conclusion de la démonstration

$$\left[\begin{array}{c} \sum |a_n| r^n \text{ converge} \\ \left(|a_n| r^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \\ a_n r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array}\right] \implies [r \leqslant R_a]$$

Remarque 3.3 – Domaine de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a \in]0, +\infty[$ et D son domaine de convergence, on a toujours

$$BO(0, R_a) \subset D \subset BF(0, R_a)$$

Exemple 3.3 – Domaines de convergence

1. Le rayon de convergence de $\sum z^n$ est $R = 1$ et le disque ouvert de convergence est $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.

Il n'y a pas convergence sur le cercle d'incertitude.

2. Le rayon de convergence de $\sum \dfrac{(3\,z)^n}{n^2+1}$ est $R = \dfrac{1}{3}$, le disque ouvert de convergence est $\left\{z \in \mathbb{C},\ |z| < \dfrac{1}{3}\right\}$. Il y a convergence en tout point du cercle d'incertitude.
3. Le rayon de convergence de $\sum \dfrac{1}{n}\, z^n$ est $R = 1$ et le disque ouvert de convergence est $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Il y a convergence en tout point du cercle d'incertitude sauf en 1.
4. Cela peut être plus compliqué, ainsi pour

$$a_n = \begin{cases} 1/p, & \text{si } n = 3^p \\ -1/p, & \text{si } n = 2\,3^p \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

le rayon de convergence est $R = 1$, $\sum a_n\, z^n$ converge en $z = \exp(2\,i\,k\,\pi/3^p)$ et diverge en $z = \exp\big((2k+1)\,i\,\pi/3^p\big)$, $k \in \mathbb{Z}$.

通过以上几个例子，验证了在收敛半径上的幂级数敛散性的不确定性。

Démonstration

1. Pour $r \geqslant 0$, la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si, et seulement si, $r < 1$. Donc
$$\text{Rayon}\left(\sum z^n\right) = 1$$
Par ailleurs, si $|z| = 1$ la série $\sum z^n$ est grossièrement divergente, donc $D = BO(0,1)$.
2. Pour $r \geqslant 0$, la suite
$$\left(\frac{3^n\, r^n}{n^2+1}\right)$$
converge vers 0 si, et seulement si, $r \leqslant 1/3$. Donc
$$\text{Rayon}\left(\sum \frac{(3\,z)^n}{n^2+1}\right) = \frac{1}{3}$$
Par ailleurs, si $|z| = 1/3$ la série $\sum 1/(n^2+1)$ est convergente, donc la série
$$\sum \frac{(3\,z)^n}{n^2+1} \text{ converge sur } BF\left(0, \frac{1}{3}\right)$$
3. Pour $r \geqslant 0$, la suite $(r^n/n)_{n\in\mathbb{N}*}$ converge vers 0 si, et seulement si, $r \leqslant 1$. Donc
$$\text{Rayon}\left(\sum \frac{1}{n}\, z^n\right) = 1$$
Par ailleurs, la série entière diverge clairement pour $z = 1$ et converge pour $z = -1$ (proposition des séries alternées, voir la proposition 2.5, page 145).

Que se passe-t-il pour $z = e^{i\,\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi.\mathbb{Z}$? Elle converge encore car, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a (voir l'exercice 2.15, page 157)

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} e^{i\,k\,\theta} = \exp\left(i\,\frac{n}{2}\,\theta\right)\,\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

qui vérifie

$$|T_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} = K$$

et alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\,k\,\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{n} (T_k - T_{k-1})\,\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{T_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}_{=w_k} - T_0 + \frac{T_n}{n+1}$$

et la série $\sum w_n$ converge absolument car

$$|w_n| \leqslant K\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc le domaine de convergence de la série est $BF(0,1)\backslash\{1\}$.

4. Pour $r \geqslant 0$, la suite $(a_n\,r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si, et seulement si, $r \leqslant 1$ donc $R_a = 1$. L'étude proposée sur certains points du cercle d'incertitude est laissé en exercice.

3.1.3 Détermination pratique du rayon de convergence

Propriété 3.1 – Comparaison de séries entières

1. En reprenant la définition, on remarque que

$$\sum a_n\,z^n, \quad \sum |a_n|\,z^n \quad \text{et} \quad \sum \lambda\,a_n\,z^n \quad (\lambda \neq 0)$$

ont même rayon de convergence.

2. Soit $\sum a_n\,z^n$ et $\sum b_n\,z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b, alors [a]

$$\big[\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant |b_n|\big] \implies \big[R_a \geqslant R_b\big]$$

3. Si les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont des termes non nuls (du moins, à partir d'un certain rang), alors

$$\left[|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|\right] \implies [R_a = R_b]$$

a. L'inégalité $|a_n| \leqslant |b_n|$ peut n'être réalisée qu'à partir d'un certain rang.

Démonstration

1. Soit $r \geqslant 0$, les conditions pour que les suites $(a_n\, r^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(|a_n|\, r^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\lambda\, a_n\, r^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, lorsque $\lambda \neq 0$, tendent vers 0 sont les mêmes.
2. Soit $r < R_b$, alors $\big(|b_n|\, r^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc la suite $\big(|a_n|\, r^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc $r \leqslant R_a$. En faisant tendre r vers R_b^-, on obtient $R_b \leqslant R_a$.
3. À partir d'un certain rang, on a
$$\frac{1}{2}\,|a_n| \leqslant |b_n| \leqslant 2\,|a_n|$$
ce qui, en utilisant les deux premiers résultats de cette propriété, nous donne que $R_a = R_b$.

Propriété 3.2 – Utilisation de la règle de d'Alembert

Si $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose (pour $z \neq 0$) $u_n(z) = a_n\, z^n \neq 0$

Si
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\big|u_{n+1}(z)\big|}{\big|u_n(z)\big|} = \lambda(z)$$
existe alors

— si $\lambda(z) < 1$, la série $\sum a_n\, z^n$ est absolument convergente ;

— si $\lambda(z) > 1$, la série $\sum a_n\, z^n$ est grossièrement divergente ;

ce qui fournit, après simplifications, le rayon de convergence R_a.

▸ Le cas $\lambda(z) = 1$ correspond à z sur le cercle d'incertitude (et *on ne peut pas conclure par cette méthode*).

Démonstration

C'est l'utilisation directe de la propriété 2.8, page 135.

Remarque importante 3.4

Bien sûr, il n'y aucune raison en générale que $\lambda(z)$ existe ! Auquel cas, la règle de d'Alembert est totalement inutile...

Encore une fois, l'utilisation du critère de d'Alembert ne se justifie que lorsque les choses se simplifient !

注释 3.2

除了直接使用达朗贝尔判别法外。在一些缺少奇次幂或偶次幂的级数时候，如 $\sum \frac{z^{2n}}{2^n}$，我们也可以通过变量变换简化之后再使用此方法。

Exemple 3.4 – D'Alembert ou pas d'Alembert ?

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, pour trouver le rayon de convergence de
$$\sum \frac{1}{n^\alpha} z^n$$
il est totalement inutile d'utiliser le critère de d'Alembert.
2. Pour trouver le rayon de convergence de
$$\sum \binom{2n}{n} z^n$$
il est pertinent d'utiliser le critère de d'Alembert (on pourrait aussi utiliser la formule de Stirling, exemple 2.6, page 128).

Démonstration

1. $\lambda(z) = 1^-$. On peut procéder ainsi, soit $r \geqslant 0$, alors pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\frac{1}{n^\alpha} r^n = \exp\left(n \ln(r) - \alpha \ln(n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } r < 1 \\ +\infty & \text{si } r > 1 \\ ? & \text{sinon} \end{cases}$$
Donc
$$\text{Rayon}\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}, z^n\right) = 1$$
2. Pour $z \neq 0$, calculons $\lambda(z)$.
$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} |z| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} |z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4|z| = \lambda(z)$$
Donc
$$\text{Rayon}\left(\sum \binom{2n}{n} z^n\right) = \frac{1}{4}$$

Exercice(s) 3.1

3.1.1 Calculer les rayons de convergence des séries entières suivantes. [a]

$$\sum \frac{(2\,n)!}{n!\,n^n}\,x^n$$

$$\sum \arctan(n^\alpha)\,x^n \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\sum a^{\sqrt{n}}\,x^n \qquad a\in]0,+\infty[$$

$$\sum a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\,x^n \qquad a\in]0,+\infty[$$

$$\sum \sin(n\,\theta)\,z^n \qquad \theta\in\mathbb{R}$$

$$\sum n!\,z^{n^2}$$

$$\sum n!\,z^{n!}$$

$$\sum \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}\,x^n$$

$$\sum a_n\,z^n \qquad \text{où}\ \begin{cases} a_{3\,p}=2^p\\ a_{3\,p+1}=5^p\\ a_{3\,p+2}=\ln(p+1)\end{cases}$$

$$\sum \frac{1}{\sin(n\,\pi\,\sqrt{5})}\,x^n$$

$$\sum \exp\big(n\,\sin(n\,\theta)\big)\,x^n \qquad \theta\in\mathbb{R}$$

3.1.2 Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels >0 ; on suppose

$$\frac{a_{n+1}\,a_{n-1}}{{a_n}^2}\longrightarrow l\in[0,+\infty[\setminus\{1\}$$

Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n\,z^n$?

3.1.3 Soit $\sum a_n\,z^n$ une série entière, montrer que

$$R_a=\frac{1}{\sup\left(\mathrm{Adh}\left(\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right)}\in[0,+\infty]$$

a. Nous conviendrons que x désigne une variable *réelle* et z une variable *complexe*.

3.1.4 Combinaisons de séries entières

注释 3.3

本小节我们重点介绍了幂级数运算与收敛半径的联系。

Proposition 3.1 – Somme de séries entières

Soit $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence* R_a *et* R_b*. La série entière* $\sum (a_n + b_n) z^n$ *a pour rayon de convergence* $R_s \geqslant \min(R_a, R_b)$ *et, pour tout* $|z| < \min(R_a, R_b)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \quad \textit{(somme)}$$

Plus précisément,

1. *si* $R_a \neq R_b$*, alors* $R_s = \min(R_a, R_b)$ *;*
2. *si* $R_a = R_b$*, alors, dans le cas général, on ne peut qu'affirmer* $R_s \geqslant \min(R_a, R_b)$*.*

Démonstration

1. Si $r < \min(R_a, R_b)$, alors
$$a_n r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } b_n r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \text{ donc } (a_n + b_n) r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Donc $r \leqslant R_s$, en faisant tendre r vers $\min(R_a, R_b)^-$, on obtient
$$\min(R_a, R_b) \leqslant R_s$$
2. Si $R_a \neq R_b$, supposons par exemple que $R_a > R_b$, alors pour $r \in]R_b, R_a[$, on a
$$a_n r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } b_n r^n \centernot{\xrightarrow[n\to+\infty]{}} 0, \text{ donc } (a_n + b_n) r^n \centernot{\xrightarrow[n\to+\infty]{}} 0$$
donc $r \geqslant R_s$ (noter l'inégalité large). En faisant tendre r vers $\min(R_a, R_b)^+$, on obtient
$$R_s \leqslant \min(R_a, R_b), \text{ et finalement } R_s = \min(R_a, R_b)$$

Remarque 3.5 – Imbrication

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b vérifiant $R_a = R_b$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n b_n = 0$$

(on parle d'*imbrication* des deux séries). Alors

$$R_s = R_a = R_b$$

Démonstration

Soit $r > R_a = R_b$, alors, il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{\varphi(n)} \neq 0 \text{ et } \left|a_{\varphi(n)}\right| r^{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

mais, dans ce cas, avec l'hypothèse d'imbrication

$$\left|a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)}\right| r^{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Donc $r \geqslant R_s$ et $R_s = R_a = R_b$.

Exemple 3.5

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a \neq +\infty$, alors

1. si on pose, pour $R \in]R_a, +\infty[$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = -a_n + \frac{1}{R^n}$$
on obtient $R_a = R_b$ et $R_s = R$;
2. de même, si on pose
$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = -a_n \qquad (\text{ou } b_n = -a_n + \frac{1}{n!})$$
on obtient $R_a = R_b$ et $R_s = +\infty$.

Démonstration

Évident.

Proposition 3.2 – Produit de séries entières

Soit $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b. La série entière

$$\sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right) z^n$$

a pour rayon de convergence $R_p \geqslant \min(R_a, R_b)$ *et, pour tout* $|z| < \min(R_a, R_b)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n\right) \quad \textit{(produit)}$$

Démonstration

Si $|z| < \min(R_a, R_b)$, les deux séries $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ convergent absolument, on utilise alors le théorème 2.2, page 161 pour conclure à la convergence absolue de la série

$$\sum\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right) z^n$$

ce qui montre que $r \leqslant R_p$ puis que $\min(R_a, R_b) \leqslant R_p$.

Remarque 3.6

Si les coefficients des séries entières sont définis pour $n \geqslant 1$, le produit de Cauchy est la série entière

$$\sum\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\, b_{n-k}\right) z^n$$

(ce que l'on obtient aussi en posant $a_0 = b_0 = 0$).

Exemple 3.6

La série entière

$$\sum(n+1)\, z^n$$

peut être vue comme un produit de Cauchy.

Démonstration

C'est

$$\left(\sum z^n\right)^2$$

对于所有复数 z且 $|z| < 1$, 我们有

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z}\,\frac{1}{1-z} = \left(\sum z^n\right)^2 = \sum(n+1)\, z^n$$

Remarque importante 3.7 – Prévision de R_p

On ne peut, en général, rien dire de plus sur R_p en fonction de R_a et R_b. En utilisant (en avance) le théorème 3.8, page 229 qui nous permet de connaître *a priori* l'existence du développement d'une fonction rationnelle et son rayon de convergence. On obtient, par exemple

1. $R_p = \min(R_a, R_b)$ (supposons $R_a \leqslant R_b$) [a]

$$\frac{1}{R_a - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n \text{ et } \frac{1}{R_b - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n$$

alors, pour $z \in BO\left(0, \min(R_a, R_b)\right)$

$$\frac{1}{R_a - z}\,\frac{1}{R_b - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k} \right) z^n \text{ vérifie } R_p = R_a$$

2. $R_p > R_b > R_a$, soit $+\infty > R > R_a$ et $z \in BO\,(0, R_a)$

$$\frac{R_b - z}{(R_a - z)\;(R - z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n \text{ et } \frac{R_a - z}{R_b - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n$$

alors

$$\frac{1}{R - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k} \right) z^n \text{ vérifie } R_p = R$$

3. $R_p > R_a = R_b$, quittons le domaine des fonctions rationnelles [b]. Soit $R \in]R_a, +\infty[$, alors (ici x désigne une variable réelle) pour $x \in]-R_a, R_a[$

$$\sqrt{R_a - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \text{ et } \frac{\sqrt{R_a - x}}{R - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n$$

alors

$$\frac{1}{R - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k} \right) x^n \text{ vérifie } R_p = R$$

4. $R_p = +\infty$, de même et sans détailler, on peut obtenir un rayon infini du produit en faisant

$$\frac{R_b - z}{R_a - z}\,\frac{R_a - z}{R_b - z} \text{ si } R_a \neq R_b$$

ou

$$\sqrt{R_a - x}\,\frac{1}{\sqrt{R_a - x}} \text{ si } R_a = R_b$$

a. Il est facile de trouver

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{R_a^{n+1}} \text{ et } b_n = \frac{1}{R_b^{n+1}}$$

b. On utilise le dernier développement donné à la propriété 3.6, page 219, qui est aussi traité dans l'exemple 3.17, page 230.

Propriété 3.3 – Série à trous

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière, soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, alors

$$\text{Rayon}\left(\sum a_{\varphi(n)}\, z^{\varphi(n)}\right) \geqslant \text{Rayon}\left(\sum a_n\, z^n\right)$$

Démonstration

Soit $r < R_a$, alors

$$a_n\, r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \text{ et donc } a_{\varphi(n)}\, r^{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On conclut que

$$r \leqslant \text{Rayon}\left(\sum a_{\varphi(n)}\, z^{\varphi(n)}\right), \text{ donc } R_a \leqslant \text{Rayon}\left(\sum a_{\varphi(n)}\, z^{\varphi(n)}\right)$$

Exercice(s) 3.2

3.2.1 Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a \neq 0$, on note R' le rayon de convergence de la série $\sum S_n(a)\, z^n$ (où $S_n(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k$).

(a) Montrer que

$$R' \geqslant \min(1, R_a)$$

(b) Montrer que

$$R_a \geqslant R'$$

(c) On suppose que $R_a > 1$, montrer que $\sum a_n$ converge et que

$$R' = \begin{cases} 1 & \text{si } S(a) \neq 0 \\ R_a & \text{si } S(a) = 0 \end{cases}$$

3.2.2 Soit $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b dans $\mathbb{R}_+^*$. Soit R' le rayon de convergence de la série entière

$$\sum a_n\, b_n\, z^n$$

(a) Montrer que

$$R' \geqslant R_a\, R_b$$

(b) Donner des exemples où R prend n'importe quelle valeur dans $[R_a\, R_b, +\infty]$.

(c) Étudier les cas où R_a et R_b peuvent prendre les valeurs 0 ou $+\infty$.

3.2 Fonction somme d'une série entière

Les sommes de séries entières ont plein de propriétés sympathiques dans le disque ouvert de convergence, c'est pourquoi, nous nous contenterons de l'étudier que sur ce disque. L'étude de la somme sur le cercle d'incertitude (et donc, sur le domaine de convergence) ne sera abordée que dans de très rares cas. Ceci justifie l'étude approfondie que nous avons faite du rayon de convergence d'une série entière.

注释 3.4

在收敛圆盘内，我们定义了和函数，本小节我们重点研究了和函数的性质：连续性、可导性等。

3.2.1 Cas général

Dans cette partie, on note

— $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes ;

— R_a le rayon de convergence de $\sum a_n\, z^n$ et on suppose que $\boxed{R_a > 0}$;

— S_a la fonction somme définie sur

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C},\ \sum a_n\, z^n \text{ converge} \right\}$$

Théorème 3.3 – Continuité dans la boule ouverte de convergence

S_a est continue sur $BO(0, R_a)$.

Démonstration

Soit $z_0 \in BO(0, R_a)$, $r \in \left]|z_0|, R_a\right[$, $r' \in \left]|z_0|, r\right[$ et $h \in BO\left(0, r' - |z_0|\right)$. La suite $\left(|a_n|\, r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, posons [a]

$$M = \sup\left(\left\{|a_n|\, r^n,\ n \in \mathbb{N}\right\}\right)$$

On a alors, en introduisant une famille sommable (notée $\sum_{n\in\mathbb{N}*} \cdots$) pour pouvoir prendre une valeur infinie éventuelle

$$\left|S_a(z_0+h) - S_a(z_0)\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ \left((z_0+h)^n - z_0^n\right)\right| =$$

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, h\left(\sum_{k=1}^{n-1} (z_0+h)^k\, z_0^{n-k-1}\right)\right| \leqslant |h| \left(\sum_{n\in\mathbb{N}*} \frac{M}{r^n}\, n\, {r'}^{n-1}\right) \tag{3.1}$$

Or, d'après le critère de d'Alembert, la série

$$\sum n\, \frac{{r'}^{n-1}}{r^n}$$

est convergente, notons K sa somme. On obtient finalement

$$\left|S_a(z_0+h) - S_a(z_0)\right| \leqslant K\, M\, |h| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

ce qui montre la continuité de S_a en z_0.

a. Notons comment le lemme d'Abel nous permet de nous débarrasser des a_n.

Théorème 3.4 – Continuité sur la boule fermée (dans un cas particulier)

Si $R_a \neq +\infty$ et $\sum |a_n|\, R_a^n$ est convergente alors S_a est continue sur $BF(O, R_a)$.

Démonstration

Dès qu'on travaille sur le cercle d'incertitude, le lemme d'Abel ne nous est, hélas, plus utile.

1. On commence par remarquer que sous l'hypothèse donnée, on a une convergence absolue de la série entière sur $BF(0, R_a)$ donc $D = BF(0, R_a)$.
2. Soit $\varepsilon > 0$, comme la série $\sum |a_n|\, R_a^n$ converge, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant N] \implies \left[\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|\, R_a^k\right) \leqslant \varepsilon\right]$$

Soit $z_0 \in S(0, R_a)$ et $z \in BF(0, R_a)$, on a alors

$$\left|S_a(z) - S_a(z_0)\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ \left(z^n - z_0^n\right)\right| \leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n|\ \left|z^n - z_0^n\right| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} 2\,|a_n|\ R_a^n$$

Mais la fonction

$$\psi\ :\ z \longmapsto \sum_{n=1}^{N} |a_n|\ \left|z^n - z_0^n\right|$$

est continue sur $\mathbb{C}$. En particulier en $|z_0|$, il existe donc un $\eta > 0$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \Big[|z - z_0| \leqslant \eta\Big] \implies \Big[\left|\psi(z) - \psi(z_0)\right| \leqslant \varepsilon\Big]$$

Finalement, si $|z - z_0| \leqslant \eta$ on a

$$\left|S_a(z) - S_a(z_0)\right| \leqslant 3\,\varepsilon$$

ce qui montre la continuité en z_0.

Théorème 3.5 – Continuité radiale

Si $R_a \neq +\infty$ et $z_0 \in S(0, R_a)$ est tel que $\sum a_n\, z_0^n$ converge alors

$$\begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & S_a(t\,z_0) \end{array} \quad \textit{admet pour limite } S_a(z_0) \textit{ en } 1^-$$

Remarque 3.8

On parle de *continuité radiale* parce qu'on se déplace sur le rayon $[0, z_0]$ du disque ouvert de convergence.

Démonstration du théorème 3.5, de la présente page

Soit z_0 tel que $\sum a_n\, z_0^n$, on a alors, en posant pour $n \in \mathbb{N}$

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\, z_0^k, \qquad a_n\, z_0^n = R_{n-1} - R_n$$

Soit $t \in]0,1[$, on a alors, pour $N \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\, z_0^n\, \left(t^n - 1\right)\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} \left(R_{n-1} - R_n\right)\, \left(t^n - 1\right)\right| =$$

$$\left|\left(\sum_{n=1}^{N} R_n\, \left(t^{n+1} - t^n\right) + R_0\,(t-1) - \frac{R_N}{N+1}\right)\right| \leqslant$$

$$(1-t)\,|R_0| + \frac{|R_N|}{N+1} + \sum_{n=1}^{N} \underbrace{|R_n|\,\left(t^n - t^{n+1}\right)}_{=w_n}$$

Et, comme la série $\sum w_n$ converge clairement, puisque la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a

$$\left|S_a(t\,z_0) - S_a(z_0)\right| \leqslant (1-t)\,|R_0| + \sum_{n=1}^{+\infty} |R_n|\,\left(t^n - t^{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} |R_n|\,\left(t^n - t^{n+1}\right)$$

On procède ensuite comme pour la démonstration précédente, soit $\varepsilon > 0$, il existe un $M \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant M] \implies \left[|R_n| \leqslant \varepsilon\right]$$

Puis, il existe un $\eta > 0$, tel que

$$\forall t \in [\eta, 1[,\ \sum_{n=0}^{M} |R_n|\,\left(t^n - t^{n+1}\right) \leqslant \varepsilon$$

Ce qui nous donne finalement, pour $t \in [\eta, 1[$

$$\left|S_a(t\,z_0) - S_a(t)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{M} |R_n|\,\left(t^n - t^{n+1}\right) + \varepsilon\left(\sum_{n=M+1}^{+\infty} \left(t^n - t^{n+1}\right)\right) \leqslant 2\,\varepsilon$$

et la continuité radiale annoncée.

Remarque 3.9

La fonction $\begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & S_a(t\,z_0) \end{array}$ peut avoir une limite en 1^- sans que la série $\sum a_n\, z_0^n$ converge.

Démonstration

La série entière $\sum (-1)^n\, z^n$ a pour somme évidente la fonction

$$z \longmapsto \frac{1}{1+z}$$

Or

$$\frac{1}{1+x} \xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{1}{2}, \text{ alors que } \sum (-1)^n \text{ diverge (grossièrement)}$$

Définition 3.4

On appelle *série entière dérivée* de la série entière $\sum a_n\, z^n$ la série

$$\sum n\, a_n\, z^{n-1} = \sum (n+1)\, a_{n+1}\, z^n$$

Théorème 3.6

La série entière et sa série entière dérivée ont même rayon de convergence

$$\text{Rayon}\left(\sum a_n\, z^n\right) = \text{Rayon}\left(\sum n\, a_n\, z^{n-1}\right) = R_a$$

De plus, comme $R_a > 0$ *(hypothèse de tout le chapitre), pour tout* $z \in BO(0, R_a)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z+h)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, z^{n-1}$$

Démonstration

1. Posons R' le rayon de convergence de la série dérivée.
   — Soit $r < R'$, alors pour $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$n\, a_n\, r^{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \text{ donc } a_n\, r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
   ce qui montre que $r \leqslant R_a$ et donc $R' \leqslant R_a$.
   — Soit $r < R_a$ et $r' \in]r, R_a[$, alors
   $$a_n\, r'^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
   donc
   $$n\, a_n\, r^{n-1} = \left(a_n\, r'^n\right)\left(n\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}\frac{1}{r'}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
   ce qui montre que $r \leqslant R'$ et donc $R_a \leqslant R'$.
2. Reprenons les notations de la démonstration du théorème 3.3, page 200. Soit $z_0 \in BO(0, R_a)$, $r \in \left]|z_0|, R_a\right[$, $r' \in \left]|z_0|, r\right[$ et $h \in BO\left(0, r' - |z_0|\right)$, $h \neq 0$ et
   $$M = \sup\left(\left\{|a_n|\, r^n,\ n \in \mathbb{N}\right\}\right)$$
   Alors, on obtient (voir l'égalité (3.1), page 201)

$$\left| \frac{S_a(z_0+h) - S_a(z_0)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, z_0^{n-1} \right| =$$

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\left(\sum_{k=1}^{n-1} (z_0+h)^k\, z_0^{n-1-k} \right) - n\, z_0^{n-1} \right) \right| =$$

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} z_0^{n-1-k} \left((z_0+h)^k - z_0^k \right) \right) \right| \leqslant$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{M}{r^n} |h| \left(\sum_{k=1}^{n-1} {r'}^{n-1-k}\, k\, {r'}^k \right) =$$

$$M\,|h| \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{{r'}^{n-1}}{r^n} \frac{n\,(n-1)}{2}$$

en utilisant, pour $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \left((z_0+h)^k - z_0^k \right) \right| = |h| \sum_{j=0}^{k-1} |z_0+h|^j\, |z_0|^{k-1-j} \leqslant |h|\, k\, {r'}^{k-1}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que la série

$$\sum \frac{{r'}^{n-1}}{r^n} \frac{n\,(n-1)}{2}$$

est convergente (en utilisant, par exemple, le critère de d'Alembert). Le $|h|$ en facteur nous permet d'obtenir

$$\left| \frac{S_a(z_0+h) - S_a(z_0)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, z_0^{n-1} \right| \xrightarrow[h \to 0,\ h \neq 0]{} 0$$

Remarque 3.10

Les sommes de séries entières se dérivent *sur leur disque de convergence* comme si la variable était réelle et qu'on pouvait intervertir sommation et dérivation ! *Ce qui est faux en général ! Voir le cours sur les séries de fonctions (chapitre* **??***, page ??).*

Exercice(s) 3.3

3.3.1 En posant $z = x\, e^{i\,\theta}$, calculer les sommes des séries entières suivantes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$

3.3.2 Soit la fonction définie par [a].

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(2\,n)\,x^n$$

(a) Montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

(b) En déduire que

$$\forall n \geqslant 2,\ \left(n+\frac{1}{2}\right)\,\zeta(2\,n) = \sum_{p=1}^{n-1} \zeta(2\,p)\,\zeta(2\,n-2\,p)$$

a. La fonction ζ a été définie dans l'exercice 4.4.7, page 281

3.2.2 Cas réel

Dans cette partie, on note

— $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes ;

— R_a le rayon de convergence de $\sum a_n\,x^n$ et on suppose que $R_a > 0$;

— S_a la fonction de la variable réelle définie sur

$$D = \left\{x \in \mathbb{R},\ \sum a_n\,x^n \text{ converge}\right\}$$

Si $R_a \neq +\infty$, on a $D =]-R_a, R_a[$ ou $]-R_a, R_a]$ ou $[-R_a, R_a[$ ou $[-R_a, R_a]$.

Proposition 3.3 – Continuité

S_a est continue sur D.

Démonstration

1. La continuité sur $]-R_a, +R_a[$ s'obtient à l'aide du théorème 3.3, page 200.
2. Si R_a ou $-R_a$ est dans D, la continuité à gauche en R_a et/ou à droite en $-R_a$ s'obtient à l'aide du théorème 3.5, page 202 ou, s'il y a convergence sur $[-R_a, R_a]$, à l'aide du théorème 3.4, page 201.

Ce théorème est particulier au cas où la variable (ici x) est dans $\mathbb{R}$. Ce résultat est *faux* dans $\mathbb{C}$!

Exemple 3.7 – Domaine de définition ≠ domaine de convergence

La fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est continue sur $]-1,1[$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

pour $x \in]-1,1[$. Remarquons que la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{1-x} \text{ est continue sur }]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$$

Exemple 3.8 – Contre-exemple à la continuité sur D lorsque la variable est complexe

L'article `http://www.mathcounterexamples.net/power-series-converging-everywhere-on-its-circle-of-convergence-defining-a-non-continuous-function/` propose la fonction, somme d'une série de fonctions (voir le chapitre **??**, page ??)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5\ \left(1 + i\, n^{-3} - z\right)}$$

On peut montrer qu'elle est somme d'une série entière... C'est pour le moment hors de notre objectif.

Proposition 3.4 – Dérivation terme à terme

S_a est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R_a,R_a[$ et, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-R_a,R_a[$

$$S_a^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)\cdots(n+1)\, a_{n+p}\, x^n = \sum_{n=p}^{+\infty} n\ \cdots\ (n-p+1)\, a_n\, x^{n-p}$$

(série de rayon de convergence R_a).

Notamment

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ a_p = \frac{S_a^{(p)}(0)}{p!}}$$

Démonstration

1. La dérivabilité s'obtient grâce au théorème 3.6, page 204.
2. Le caractère $\mathscr{C}^1$ s'obtient en appliquant le théorème 3.3, page 200 à la série entière dérivée.
3. Le caractère $\mathscr{C}^\infty$ s'obtient par récurrence immédiate sur p.
4. La formule encadrée s'obtient en faisant $x = 0$ dans l'expression de $S_a^{(p)}$.

Remarque 3.11

En particulier, $S_a(0) = a_0$ et $S_a'(0) = a_1$.

Exemple 3.9

La série $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1 donc $\sum n\, x^{n-1}$ aussi et la fonction $x \longmapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n \cdots (n-p+1)\, x^{n-p} = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

On en déduit

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{p!\,(n-p)!}\, x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$$

Comme tous les coefficients de la série entière $\sum x^n$ valent 1, on a $S^{(p)}(0) = p!$.

Proposition 3.5 – Intégration terme à terme

1. *La série entière*
$$\sum \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}$$
a pour rayon de convergence R_a.

2. *Les primitives de S_a sur $]-R,R[$ sont données par*

$$\Phi(x) = C + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1} = C + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n}\, x^n \qquad \textit{avec } C = \Phi(0)$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer la proposition 3.4, page 207 à la série entière

$$\sum \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}$$

Exemple 3.10

La série $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1 et la primitive qui s'annule en 0 de la fonction

$$x \longmapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

est définie sur $]-1,1[$ par

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

Proposition 3.6 – Intégration

1. *Pour $x \in]-R_a, R_a[$*

$$\int_0^x S_a(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}$$

2. *Pour $[\alpha,\beta] \subset]-R_a, R_a[$*

$$\int_\alpha^\beta S(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} \left(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\right)$$

Démonstration

On applique le théorème 3.5, page précédente.

Remarque 3.12

On a donc

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} x^n \,\mathrm{d}x$$

et on a interverti les signes $\sum$ et $\int$.

Remarque importante 3.13

Les bornes d'intégration doivent appartenir à l'intervalle ouvert $]-R_a, R_a[$ et *non au domaine de convergence* !

Exemple 3.11

Montrons que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4\,n+1}$$

en utilisant la série géométrique

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1+t^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, t^{4\,n} \qquad\qquad R = 1$$

▸ Mauvaise démonstration.
Par intégration sur $[0,1]$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, t^{4\,n} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 (-1)^n\, t^{4\,n}\, \mathrm{d}t \right)$$

interversion non justifiée !
▸ Démonstration correcte.
Pour $x \in [0,1[$, par intégration terme à terme sur $[0,x] \subset [0,1[$

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, t^{4\,n} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x (-1)^n\, t^{4\,n}\, \mathrm{d}t \right) =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4\,n+1}\, x^{4\,n+1}$$

La série entière $\sum \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1}$ a pour rayon de convergence 1 et converge pour $x = 1$. Par continuité radiale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1} = \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

▸ <u>Meilleure démonstration</u>.
La démonstration précédente fait appel au théorème de continuité radiale, qui est un peu compliqué à démontrer et qui n'est pas indispensable ici. Il suffit de connaître les sommes géométriques. Pour $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{4n+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$$

puisque la série est convergente. Or

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{4n} \right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1 - \left(-t^4\right)^{N+1}}{1+t^4} \, \mathrm{d}t =$$
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} + \underbrace{(-1)^N \int_0^1 \frac{t^{4N+1}}{1+t^4} \, \mathrm{d}t}_{=R_N}$$

et l'inégalité

$$|R_N| \leqslant \int_0^1 t^{4N+1} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4N+2} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

permet, en passant à la limite, de conclure la démonstration.

熟练掌握本例题的思路，理解级数与积分的内在联系。

Ne passez pas à côté des démonstrations élémentaires ! La somme géométrique se retrouve très souvent ! Soit $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 1$ et $N \in \mathbb{N}$, alors

$$\boxed{\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{N} q^n + \frac{q^{N+1}}{1-q}}$$

3.3 Développements en série entière

注释 3.5

在解决实际问题时候，我们往往得到的是比较复杂的函数，如何应用幂级数来简化函数的研究？本小节我们介绍了函数的幂级数可展性，即函数表达成幂级数的形式。本小节内容与《高等数学II 法文版》中函数泰勒展开相互关联。(Réf. [?], théorème 3.6, page 143).

3.3.1 Généralités

Définition 3.5

Soit f une fonction définie sur D et $z_0 \in \mathring{D}$.[a] On dit que f est *développable en série entière* au voisinage de z_0 lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n\, z^n$ vérifiant

1. le rayon de convergence est non nul

$$R_a = \text{Rayon}\left(\sum a_n\, z^n\right) \neq 0$$

2. il existe $R \in]0, R_a[$, $BO(z_0, R) \subset \mathring{D}$ et

$$\forall z \in BO(z_0, R),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, (z - z_0)^n$$

a. Cela signifie qu'il existe un $r > 0$ tel que

$$BO(z_0, r) \subset D$$

函数的幂级数展开 (développable en série entière 有时候也简写成DSE) 与定义域和收敛域都相关。

Cette définition qui paraît très simple nous parle en fait d'objets très différents. Il y a *trois* domaines qui interviennent dans cette définition (prenons ici pour simplifier $z_0 = 0$)

1. le domaine de définition D_f de la fonction f ;
2. le domaine de convergence D de la série entière $\sum a_n z^n$;
3. l'ensemble où f et S_a coïncident

$$\{z \in D \cap D_f,\ f(z) = S_a(z)\}$$

Exemple 3.12 – Trois ensembles différents

Soit la fonction f définie par

$$x \longmapsto \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

On verra à la remarque importante 3.18, page 222 que

1. $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$;
2. $D = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$;
3. et
$$\{x \in D \cap D_f\} = \left]-1, +\sqrt{2}\right]$$

Exemple 3.13

$f : z \longmapsto \dfrac{1}{1-z}$ est défini sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ et est développable en série entière au voisinage de 0. En fait, f est développable en série entière au voisinage de tout point de D.

Proposition 3.7

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a > 0$ et S_a sa fonction somme. S_a est développable en série entière au voisinage de tout point $z_0 \in BO(0, R_a)$.

Démonstration

Soit $z_0 \in BO(0, R_a)$, on a alors, pour $z \in BO(0, R_a)$

$$S_a(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \left(z_0 + (z - z_0)\right)^n =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k}\, (z - z_0)^k \right)$$

Mais la famille définie par

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ u_{n,k} = \begin{cases} \binom{n}{k} z_0^{n-k}\, (z - z_0)^k & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est sommable lorsque $|z - z_0| < R_a - |z_0|$, car

— pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |z_0|\, |z - z_0|^{n-k} = \left(|z_0| + |z - z_0|\right)^n$$

— et, comme $|z_0| + |z - z_0| < R_a$ la série

$$\sum_n \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| \text{ converge}$$

la proposition 2.13, page 178 et sa conséquence, la remarque importante 2.24, page 180 nous permet d'intervertir l'ordre de sommation. On obtient donc que

$$\forall z \in BO\left(z_0, R_a - |z_0|\right),\ S_a(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k} \right) (z - z_0)^k$$

ce qui est le résultat cherché.

Remarque 3.14

Dans ce cas, le rayon de convergence R du développement en série entière en z_0 vérifie $R \geqslant R_a - |z_0|$ mais l'inégalité peut-être stricte.

Démonstration

Prenons, par exemple la série entière du logarithme et $z_0 = \frac{1}{2}$, alors

$$\forall x \in]-1, +1[,\ \ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

on sait alors que la fonction

$$h \longmapsto \ln\left(1 + \frac{1}{2} + h\right)$$

est développable en série entière avec un rayon de convergence $\geqslant 1/2$. Mais, si $h > -3/2$

$$\ln\left(\frac{3}{2}+h\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{2\,h}{3}\right)$$

et le terme de droite est développable en série entière avec un rayon de convergence de $3/2$.

Remarque 3.15

f est développable en série entière au voisinage de z_0 si, et seulement si, $z \longmapsto f(z_0+z)$ est développable en série entière au voisinage de 0, c'est pourquoi on se restreindra aux développements au voisinage de 0.

Propriété 3.4 – Conséquences

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a > 0$ et de fonction somme S_a.

1. *Principe des zéros isolés.* S'il existe une suite $(z_p)_{p\in\mathbb{N}} \in BO(0,R_a)^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in BO(0,R_a)$ tels que

$$\forall p\in\mathbb{N},\ S_a(z_p)=0,\quad z_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \ell \text{ et } \forall p\in\mathbb{N},\ z_p \neq \ell$$

alors $a_n = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et S_a est la fonction nulle.

2. *Unicité du développement en série entière.* S'il existe une série entière $\sum b_n\, z^n$ de rayon de convergence $R_b > 0$ telle que

$$\forall z\in\mathbb{C} \text{ avec } |z| < \min(R_a,R_b),\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n$$

alors $b_n = a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Démonstration

1. Comme $\ell \in BO(0,R_a)$, en considérant la fonction $z \longmapsto S_a(\ell+z)$, on peut se ramener au cas où $\ell = 0$. Supposons

$$\Delta = \left\{n\in\mathbb{N},\ a_n \neq 0\right\} \neq \varnothing$$

posons $n_0 = \min(\Delta)$, on a alors $a_{n_0} \neq 0$ et, pour z au voisinage de 0

$$S_a(z) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n\, z^n = z^{n_0} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n_0+n}\, z^n\right)}_{=g(z)}$$

comme $g(0) = a_{n_0} \neq 0$ et que la fonction g somme d'une série entière de rayon non nul est continue, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall z \in BO(0,r),\ g(z) \neq 0,\ \text{et en ce cas } \forall z \in BO(0,r)\backslash\{0\},\ S_a(z) \neq 0$$

ce qui contredit l'hypothèse. Donc $\Delta = \varnothing$ et S_a est la fonction nulle.

2. On applique la première question à la fonction $S_a - S_b$ définie sur $BO\left(0, \min(R_a, R_b)\right)$.

Exemple 3.14

La fonction

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Démonstration

Prendre, pour $p \in \mathbb{N}$

$$z_p = \frac{1}{(p+1)\,\pi}$$

On pourrait aussi montrer qu'elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0.

3.3.2 Cas réel – série de Taylor

Dans le reste de cette partie, on considère des séries et des fonctions de la variable réelle x.

Remarque importante 3.16

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Si f est développable en série entière au voisinage de 0 avec

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

alors [a]

1. f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R_a, R_a[$ et
$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$
2. En particulier, les coefficients du développement en série entière sont uniques.

3. Si f est paire alors les coefficients d'ordre impair sont tous nuls et si f est impaire alors les coefficients d'ordre pair sont tous nuls.

a. N'oublions pas que cela signifie en particulier que $R_a \neq 0$.

Démonstration

1. Le point 1. a déjà été vu.
2. Le point 2. est évident.
3. Si f est paire, alors pour $x \in]-R_a, +R_a[$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, a_n\, x^n$$

L'unicité du développement en série entière nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (-1)^n\, a_n$$

donc, tous les termes d'indice impair seront nuls. De même, si f est impaire...

Propriété 3.5 – Condition pour que f soit développable en série entière

Pour que f soit développable en série entière au voisinage de 0, il faut et il suffit que

1. f soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle de la forme $]-R_0, R_0[$, avec $R_0 > 0$;
2. sa *série de Taylor*

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$$

ait un rayon de convergence $R_1 > 0$;
3. la somme de cette série soit égale à f sur un intervalle de la forme $]-R_2, R_2[$.

Là encore, il y a trois objets

1. D_f le domaine de définition de f ;
2. D le domaine de convergence de la série de Taylor de f ;
3. l'ensemble des points

$$\left\{ x \in D \cap D_f,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right\}$$

Remarque importante 3.17 – Développement des fonctions de la variable complexe

Si on veut développer en série entière une fonction f de la variable complexe au voisinage de z_0, on se ramène à une fonction de la variable réelle, en posant pour z au voisinage de z_0 et x au voisinage de 0

$$g(x) = f\left(z_0 + x\left(z - z_0\right)\right)$$

注释 3.6

函数f在某点邻域内可幂级数展开能够推出函数在此点无限次可导，反之则不然。如

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{当} x > 0 \\ 0 & \text{当} x \leqslant 0 \end{cases}$$

这里函数在0点处无限可导但不能在0点处幂级数展开。详见下一小节。

Proposition 3.8 – Une condition suffisante pour qu'une fonction soit développable en série entière

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$, s'il existe $r > 0$ tel que $]-r, r[\subset I$ et

$$\forall x \in]-r, r[,\ \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

alors f est développable en série entière au voisinage de 0.

此性质也可以理解为函数f在某点邻域内可幂级数展开的充分条件是函数在此点无限次可导且所有导函数值有界。

Démonstration

On reconnaît la formule de Taylor avec reste intégral [a] (Réf. [?], théorème 3.6, page 143). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-r, r[$, on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

ce qui a pour conséquences

1. que la série de Taylor converge au moins sur $]-r, r[$ (donc son rayon de convergence sera $\geqslant r$) ;
2. et que sa limite est la fonction f au moins sur $]-r, r[$.

La fonction f est bien développable en série entière.

---

a. On pourrait aussi utiliser une inégalité de Taylor-Lagrange (Réf. [?], théorème 3.7, page 144).

⚠

Les développements en série entière suivants sont à connaître par cœur *avec* leur rayon de convergence.

Propriété 3.6 – Développement en série entière usuel

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \text{ pour } z \in BO(0,1), \quad (R=1)$$

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} z^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n \text{ pour } z \in BO(0,1), \quad (R=1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \text{ pour } x \in]-1, 1], \quad (R=1)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+1}\, x^{2\,n+1} \text{ pour } x \in]-1, 1], \quad (R = 1)$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ pour } z \in \mathbb{C}, \quad (R = +\infty)$$

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2\,n}}{(2\,n)!} \text{ pour } z \in \mathbb{C}, \quad (R = +\infty)$$

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} \text{ pour } z \in \mathbb{C}, \quad (R = +\infty)$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\, z^{2\,n} \text{ pour } z \in \mathbb{C}, \quad (R = +\infty)$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}\, z^{2\,n+1} \text{ pour } z \in \mathbb{C}, \quad (R = +\infty)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!}\, x^n \text{ pour } x \in \begin{cases}]-1, 1[, \quad (R = 1), & \alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N} \\ \mathbb{R}, \quad (R = +\infty), & \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$$

熟练掌握以上公式。

Démonstration

x désigne une variable réelle, z une variable complexe. Les calculs des rayons de convergence, très faciles, sont laissés en exercice.

1. $(1/(1-z))$

   C'est une série géométrique bien connue (voir l'exemple 2.1, page 114).

2. $(1/(1-z)^p)$

On l'obtient à partir du développement géométrique précédent en utilisant une récurrence sur p et en utilisant le théorème 3.6, page 204. On peut aussi effectuer les produits consécutifs (par récurrence)

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \frac{1}{(1-z)^p}\,\frac{1}{1-z}$$

3. $(\ln(1+x))$

   On primitive le développement de $x \longmapsto 1/(1+x)$ (prenons $x=-z$ dans le développement géométrique) à l'aide de la proposition 3.5, page 208.
4. $(\arctan(x))$

   On primitive le développement géométrique où on a pris $z=-x^2$.
5. (e^z)

   Comme conseillé dans la remarque importante 3.17, page 218, on se ramène au cas réel en considérant pour $z \in \mathbb{C}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$\psi \ : \ x \longmapsto e^{x\,z}$$

   Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

   $$\psi^{(n)}(x) = z^n\, e^{x\,z}$$

   On va utiliser la proposition 3.8, page 218.

   $$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\psi^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,|z|^{n+1}\,e^{|x|\,|z|}\,\mathrm{d}t \right| = \frac{|x|^{n+1}\,|z|^{n+1}\,e^{|x|\,|z|}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   en utilisant, par exemple, le critère de d'Alembert, pour montrer que la série converge, son terme général tend vers 0. On a donc

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x\,z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\,x^n$$

   en particulier, pour $x=1$, on trouve le développement annoncé.
6. $(\cosh(z)$, $\sinh(z)$, $\cos(z)$ et $\sin(z))$ On utilise les formules

   $$\forall z \in \mathbb{C},\ \cosh(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2},\ \sinh(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

   et

   $$\forall z \in \mathbb{C},\ \cos(z) = \frac{e^{i\,z}+e^{-i\,z}}{2} \text{ et } \sin(z) = \frac{e^{i\,z}-e^{-i\,z}}{2\,i}$$
7. $((1+x)^\alpha)$
   (a) Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, c'est la formule du binôme de Newton qui est valable sur tout $\mathbb{R}$ (et même tout $\mathbb{C}$) ;
   (b) pour $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$, on constate que la fonction

   $$\psi \ : \ x \longmapsto (1+x)^\alpha$$

   est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et, pour tout $x \in]-1,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$\psi^{(n)}(x) = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)\right)(1+x)^{\alpha-n}$$

On va à nouveau utiliser la proposition 3.8, page 218. On a

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n}(\alpha-k)\right)(1+t)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant$$

$$\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n}|\alpha-k|\sup_{t\in[0,x]}\left(\left|(1+t)^{\alpha-1}\right|\right)\left|\int_0^x\left|\frac{x-t}{1+t}\right|^n\mathrm{d}t\right|$$

Or la fonction

$$t\longmapsto\frac{x-t}{1+t}$$

étant monotone sur $]-1,+1[$, son maximum sur $[0,x]$ en valeur absolue est atteint en $t=0$. Finalement

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n}(\alpha-k)\right)(1+t)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant$$

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}|\alpha-k|\sup_{t\in[0,x]}\left(\left|(1+t)^{\alpha-1}\right|\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

(toujours en utilisant le critère de d'Alembert).

3.3.3 Autres développements en séries entières

Remarque importante 3.18

Pour les développements en série entière, il y a trois domaines importants, le domaine de définition de f, celui de sa série de Taylor et celui où les quantités coïncident

1. $f\ :\ x\longmapsto\dfrac{1}{1+x}$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, la série de Taylor converge sur $]-1,1[$ et ils coïncident sur $]-1,1[$;
2. $f\ :\ x\longmapsto\arctan\dfrac{1}{1+x}$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, la série de Taylor converge sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ et ils coïncident sur $]-1,\sqrt{2}[$;
3. $f\ :\ x\longmapsto\begin{cases}e^{-1/x^2} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}$, la série de Taylor converge sur $\mathbb{R}$ et ils coïncident sur $\{0\}$.

Démonstration

1. Évident.
2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition $D_f=$

$\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et

$$\forall x \in D_f,\ f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}\,\frac{1}{1+\frac{1}{(1+x)^2}} = -\frac{1}{2+2\,x+x^2}$$

Soit ω et $\overline{\omega}$ les deux racines complexes conjuguées de l'équation $x^2+2\,x+2=0$, on a alors, pour $x \in D$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-\omega)\,(x-\overline{\omega})} = \frac{1}{\omega-\overline{\omega}}\left(\frac{1}{x-\overline{\omega}} - \frac{1}{x-\omega}\right)$$

Or, pour $|x| < \sqrt{2} = |\omega|$, on a, si $\omega = \sqrt{2}\,e^{i\,\theta}$

$$\frac{1}{x-\omega} = -\frac{1}{\omega}\,\frac{1}{1-\frac{x}{\omega}} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\omega^{n+1}}\,x^n$$

Donc, pour $x \in \left]-1, \sqrt{2}\right[$

$$f'(x) = \frac{1}{\omega-\overline{\omega}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\omega^{n+1}} - \frac{1}{\overline{\omega}^{n+1}}\right)x^n\right) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin\left((n+1)\,\theta\right)}{2\,\sin(\theta)}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^n$$

sous cette forme, il est facile de conclure.

3. (a) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, pour montrer cela, on montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction rationnelle R_n telle que pour tout $x \neq 0$

$$f^{(n)}(x) = R_n(x)\,\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par croissances comparées. Le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ (Réf.[?], théorème 1.8, page 54) nous permet alors de prolonger toutes les dérivées de f en 0, et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$$

(b) La série de Taylor de f est donc nulle, elle converge pour tout nombre réel, son rayon de convergence est $+\infty$.

(c) Le seul point de coïncidence entre $f(x)$ et la somme de sa série de Taylor en 0, pris en x est le point $x = 0$.

Remarque 3.19

On peut déduire des développements en série entière usuels les développements en série entière des fonctions suivantes

$$\arcsin,\ \arccos,\ x \longmapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})...$$

Démonstration

Les calculs restent à faire, les principes seulement sont donnés.

1. On a, pour tout $x \in]-1,+1[$,
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-1/2}$$
qu'on développe à l'aide du développement de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$.
2. De même, pour tout $x \in]-1,+1[$,
$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
On peut aussi utiliser la formule bien connue
$$\forall x \in [-1,+1],\ \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$
3. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si on pose
$$\psi(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right),\ \text{alors } \psi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exemple 3.15 – Fonction absolument monotone

La fonction tan est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et le rayon de convergence de sa série de Taylor en 0 est $\pi/2$.

Démonstration

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre qu'il existe une fonction polynomiale P_n *à coefficients dans* $\mathbb{N}$, non nulle telle que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) = P_n\left(\tan(x)\right)$$
En particulier, on obtient que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) \geqslant 0$$
On dit que tan est *absolument monotone* sur $[0,\pi/2[$.
2. tan *coïncide avec la somme de sa série de Taylor (qui converge donc) sur* $[0,\pi/2[$
En effet, utilisons la proposition 3.8, page 218. Soit $x \in [0,\pi/2[$ et $y \in]x,\pi/2[$, on a alors, pour $n \in \mathbb{N}$
$$0 \leqslant R_n(x) \overset{\text{Not}}{=} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\tan^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \underset{t=x\,u}{=} \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n \tan^{(n+1)}(x\,u)\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n \tan^{(n+1)}(y\,u)\,\mathrm{d}u$$

puisque la fonction est absolument monotone. On obtient donc

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} R_n(y)$$

Mais, à nouveau puisque la fonction est absolument monotone $0 \leqslant R_n(y) \leqslant \tan(y)$, car

$$\tan(y) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} y^k}_{\geqslant 0} + R_n(y)$$

Finalement

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} \tan(y) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

3. tan *coïncide avec la somme de sa série de Taylor sur* $]-\pi/2, 0]$
   En effet, pour $x \in]-\pi/2, 0]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a, puisque la fonction tan est impaire, toutes ses dérivées successives sont paires ou impaires,

$$\left|R_n(x)\right| \leqslant R_n(-x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

On conclut donc que la fonction tan vérifie

1. $D_f =]-\pi/2, \pi/2[$;
2. sa série de Taylor converge avec un rayon de convergence $R \geqslant \pi/2$;
3. tan coïncide avec la somme de sa série de Taylor sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Notons S la somme de la série de Taylor de tan en 0 qui est définie sur $]-R, +R[$. Alors

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \; S(x) = \tan(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \pm\infty$$

Une somme de série entière étant continue sur son disque ouvert de convergence, on a nécessairement

$$R = \frac{\pi}{2}$$

Remarque 3.20 – Fonctions absolument monotones

1. Une somme de série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R_a \neq 0$ est absolument monotone sur $[0, R_a[$ si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; a_n \geqslant 0$$

2. On remarque que la démonstration fonctionne pour toutes les fonctions absolument monotones, en effet
   (a) pour les $x \geqslant 0$, la démonstration est toujours valide ;
   (b) pour les $x < 0$, il suffit d'écrire la fonction comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire (qui seront encore absolument monotones sur les $x \geqslant 0$).

Démonstration

1. $(\Rightarrow)$ On a
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} \geqslant 0$$
$(\Leftarrow)$ Comme on a
$$\forall x \in [0, R_a[,\ S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$
Soit $p \in \mathbb{N}$, en dérivant p fois (théorème 3.4, page 207), on obtient pour $x \in [0, R_a[$
$$S_a^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n \cdots (n-p+1)\, a_n\, x^{n-p} \geqslant 0$$
2. Si f est absolument monotone sur $[0, \alpha[$, où $\alpha \in]0, +\infty]$, alors elle est développable en série entière au moins sur $[0, \alpha[$ et on a, pour tout $x \in [0, \alpha[$,
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^n, \quad \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2\,n}\, x^{2\,n}$$
et
$$\frac{f(x) - f(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2\,n+1}\, x^{2\,n+1}$$
ce qui nous permet d'affirmer que les parties paire et impaire de f sont aussi absolument monotones.

Faisons une petite parenthèse algébrique sur les *fonctions rationnelles*. Une fonction rationnelle F est le quotient de deux fonctions polynomiales P et $Q \neq 0$, à coefficients complexes (ou réels) qui vérifient
$$\forall \alpha \in \mathbb{C},\ \big[Q(\alpha) = 0\big] \implies \big[P(\alpha) \neq 0\big] \tag{3.2}$$
On dira plus tard que P et Q sont *premiers entre eux*. Les racines de Q s'appellent les *pôles* de F.

Le principal résultat est la *décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles*.

Théorème 3.7 – Décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles

Soit F une fonction rationnelle, soit P et Q deux fonctions polynomiales telles que $F = P/Q$, où P et Q vérifient la propriété (3.2), de la présente page. On suppose de plus que Q est scindé [a]*, c'est-à-dire qu'on connaît l'ensemble de ses pôles $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, un nombre complexe $C \neq 0$ et des entiers*

$(n_1, \dots, n_q) \in (\mathbb{N}^*)^q$ *tels que*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ Q(z) = C \prod_{k=1}^{q} (z - \lambda_k)^{n_k}$$

Alors, il existe une fonction polynomiale E (appelée partie entière de F*) et des familles de nombres complexes*

$$(\alpha_{i,j})_{i \in [\![1,q]\!],\ j \in [\![1,n_i]\!]}$$

tels que

$$\forall z \in \mathbb{C} \backslash \{\lambda_1, \dots, \lambda_q\},\ F(z) = E(z) + \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{k_i=1}^{n_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(z - \lambda_i)^{k_i}} \right)$$

et cette décomposition est unique. On l'appelle décomposition en éléments simples de F.

---

a. Dans $\mathbb{C}$, toutes les fonctions polynomiales sont scindées, c'est la théorème de d'Alembert. Une démonstration est disponible dans le cours [?].

Démonstration

On procède par récurrence sur

$$n = \sum_{k=1}^{q} n_k$$

de la manière suivante.

1. *Initialisation* Pour $n = 0$, Q est une fonction constante non nulle C, on a $E = P/C$.
2. *Hérédité* On suppose le théorème vrai pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et soit F une fonction rationnelle telle que

$$\sum_{k=1}^{q} n_k = n + 1$$

on applique alors l'hypothèse de récurrence à la fonction rationnelle définie pour $z \in \mathbb{C} \backslash \{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$ par

$$F - \frac{P(\lambda_q)}{\prod_{k=1}^{q-1} (\lambda_q - \lambda_k)} \frac{1}{(z - \lambda_q)^{n_q}}$$

Exemple 3.16

Prenons la fonction rationnelle définie par

$$F(z) = \frac{z^5 - 3\,z^3 + z^2 - z + 1}{(z-1)^3\,(z-2)}$$

alors

$$F(z) = z + 5 + \frac{2}{z-1} + \frac{4}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{11}{z-2}$$

Voir les sessions Wxmaxima 3.1, de la présente page et Python 3.1, de la présente page.

Session Wxmaxima 3.1 – Exemple d'une décomposition en éléments simples

(%i1) F : (z^5-3*z^3+z^2-z+1)/((z-1)^3*(z-2));

(%o1) $$\frac{z^5 - 3z^3 + z^2 - z + 1}{(z-2)\,(z-1)^3}$$

(%i2) partfrac(F, z);

(%o2) $$z + \frac{2}{z-1} + \frac{4}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{11}{z-2} + 5$$

Session Python 3.1 – Exemple d'une décomposition en éléments simples

De même, en Python, avec la bibliothèque sympy.

In[1] – Chargement des bibliothèques

```
import sympy as sp
sp.init_printing()
```

In[2] – Création de la fonction rationnelle

```
z = sp.symbols('z')
F = (z**5-3*z**3+z**2-z+1)/((z-1)**3*(z-2))
```

In[3] – Décomposition en éléments simples

```
F.apart()
```

Out [3]

$$z+5+\frac{2}{z-1}+\frac{4}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{11}{z-2}$$

Théorème 3.8 – Développement en série entière des fonctions rationnelles

Soit F une fonction rationnelle à coefficients complexes n'ayant pas le pôle 0, alors F est développable en série entière au voisinage de 0, si $\Lambda = \{$pôles de $F\}$, alors le rayon de convergence de la série de Taylor de F en 0 est

$$\boxed{R=\min_{\lambda\in\Lambda}|\lambda|}$$

De plus, F coïncide avec la somme de sa série de Taylor sur $BO(0,R)$.

Démonstration

1. L'existence vient de la décomposition en éléments simples de F. Chaque terme se développe facilement car c'est un développement connu à savoir (les premier et deuxième de la propriété 3.6, page 219). Il suffit alors de sommer les développements.
2. Le rayon vient du fait que (même argument qu'à la fin de la démonstration de l'exemple 3.15, page 224)

$$|F(t\,\lambda)| \xrightarrow[t\to 1^-]{} +\infty$$

Utilisation de l'unicité du développement

On peut souvent s'appuyer sur un théorème d'existence *et d'unicité* d'une solution à un problème de Cauchy (voir le théorème 3.9, page suivante), pour trouver un développement en série entière d'une fonction donnée. Le schéma de la recherche est le suivant

1. On cherche une équation différentielle si possible linéaire, si possible à coefficients polynomiaux que satisfait f.
2. (Analyse) On suppose que cette équation différentielle possède une solution développable en série entière, on la cherche donc, ce qui nous donne une relation de récurrence sur les coefficients (les valeurs initiales sont données par les valeurs des dérivées de f en 0).
3. (Synthèse) On prend la série entière trouvée, on montre que son rayon de convergence est non nul. Soit S_a sa somme.
4. S_a et f vérifient la même équation différentielle et les mêmes condi-

tions initiales, elles coïncident donc au voisinage de 0. On a (si on a su calculer a_n) même trouvé le développement de Taylor de f.

Théorème 3.9 – de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires

Soit le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y^{(p)} + a_1(x)\,y^{(p-1)} + \cdots + a_p(x)\,y = b(x) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(p-1)}(x_0) = y_{p-1} \end{cases}$$

où les fonctions a_k et b, sont définies, continues sur un intervalle I contenant x_0, alors il existe une unique *fonction φ définie sur I de classe $\mathscr{C}^p$ sur I, qui vérifie à la fois l'équation différentielle et les conditions initiales imposées.*

《高等数学II 法文版》中我们已经给出了一阶线性微分方程和二阶常系数微分方程的解法，这里我们提供了一种关于高阶常系数线性微分方程幂级数的解题思路。(Réf. [?], paragraphe 4.2, page 221).

Démonstration

Voir le cours sur les équations différentielles ([?]).

Exemple 3.17 – Utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Exemple simple

On peut retrouver le développement de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ à l'aide de cette méthode.

Exemple plus compliqué

Il arrive parfois que l'on ne sache pas résoudre l'équation récurrente trouvée, on peut cependant souvent en déduire que la fonction est développable en série entière. Ainsi

$$x \longmapsto \sqrt{1+2\,x+3\,x^2},\ \text{est développable au voisinage de } 0$$

On peut même calculer son rayon de convergence $R = 1/\sqrt{3}$.

Démonstration de l'exemple simple 3.17, page précédente

La fonction $f : x \longmapsto (1+x)^\alpha$, où nous supposerons $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$, vérifie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' - \frac{\alpha}{x+1}\, y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. (*Analyse*) Supposons que la somme de la série entière $\sum a_n\, x^n$, avec $R_a \neq 0$ soit solution du problème de Cauchy donné, alors, pour $x \in]-R_a, R_a[$, on a

$$(1+x)\, S_a'(x) = \alpha\, S_a(x)$$

qui peut s'écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^n = \alpha \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \right)$$

▸ *on renumérote toutes les sommes*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha\, a_n\, x^n$$

▸ *on identifie les coefficients de x^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$* (l'unicité du développement nous rend nécessaire ce travail)

$$a_1 = \alpha\, a_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1}\, a_n$$

▸ *on utilise les conditions initiales, s'il y en a*

$$y(0) = 1, \text{ donc } a_0 = 1 \text{ et } a_1 = \alpha$$

2. (*Synthèse*) Soit la suite récurrente vérifiant

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1}\, a_n$$

alors, comme $\alpha \notin \mathbb{N}$, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. En ce cas, le critère de d'Alembert nous donne que $R_a = 1$ car

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 = \frac{1}{R_a}$$

La fonction S_a somme de la série entière est définie sur $]-1,+1[$ et est solution du problème de Cauchy (d'après l'analyse).

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire nous assure que, comme f et S_a vérifient sur $]-1,+1[$ le même problème de Cauchy, elles coïncident sur $]-1,+1[$. Et on trouve, en résolvant la formule de récurrence sur les a_n

$$\forall x \in]-1,+1[,\ f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) \right) x^n \qquad R_a = 1$$

Remarque importante 3.21

Le point important dans la synthèse est de démontrer que $R_a \neq 0$, sinon la fonction S_a n'existe pas en dehors de 0 et ne vérifie donc rien !

Cette méthode est fondamentale *! Il faut bien la maîtriser.*

Démonstration de l'exemple plus compliqué 3.17, page 230

Cet exemple est un peu long, mais il résume bien les difficultés qu'on peut rencontrer avec cette méthode.

1. *Recherche du problème de Cauchy*

   Posons
   $$f \;:\; x \longmapsto \sqrt{1+2\,x+3\,x^2}$$
   son domaine de définition est $\mathbb{R}$. Cette fonction étant strictement positive, on peut en prendre le logarithme et dériver, alors pour $x \in \mathbb{R}$
   $$(\ln\circ f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}\,\frac{2+6\,x}{1+2\,x+3\,x^2} = \frac{1+3\,x}{1+2\,x+3\,x^2}$$
   donc f est solution du problème de Cauchy
   $$\begin{cases} y' = \dfrac{1+3\,x}{1+2\,x+3\,x^2}\,y \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

2. *Application de la méthode de l'équation différentielle*

   (*Analyse*) Supposons que la somme de série entière $\sum a_n\,x^n$, de rayon $R_a \neq 0$ soit solution du problème de Cauchy donné, alors, pour $x \in]-R_a, R_a[$, on a
   $$\left(1+2\,x+3\,x^2\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n-1}\right) = (1+3\,x)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n\right)$$
   ce qui en développant nous donne
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\,n\,a_n\,x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 3\,n\,a_n\,x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 3\,a_n\,x^{n+1}$$
   - *on renumérote toutes les sommes*
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,a_{n+1}\,x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\,n\,a_n\,x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} 3\,(n-1)\,a_{n-1}\,x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 3\,a_{n-1}\,x^n$$
   - *on identifie les coefficients de x^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$*
   $$a_1 = a_0,\;\; 2\,a_2 + 2\,a_1 = a_1 + 3\,a_0$$

et

$$\forall n \geqslant 2,\ (n+1)\,a_{n+1} + 2\,n\,a_n + 3\,(n-1)\,a_{n-1} = a_n + 3\,a_{n-1}$$

▸ *on utilise les conditions initiales, s'il y en a*

$a_1 = a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)\,a_{n+1} + (2\,n-1)\,a_n + (3\,n-6)\,a_{n-1} = 0$

(*Synthèse*) Considérons la suite récurrente définie par

$a_1 = a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)\,a_{n+1} + (2\,n-1)\,a_n + (3\,n-6)\,a_{n-1} = 0$

et montrons que la série entière associée a un rayon $R_a \neq 0$. On va pour cela trouver $r > 0$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n|\,r^n \leqslant M \qquad (*)$$

Mais comment trouver r et M ? On cherche quelque chose, il faut à nouveau faire une analyse/synthèse.

(a) (*Analyse*) Supposons r et M connus, on montrerait la relation $(*)$ par récurrence sur n.

Hérédité Supposons l'inégalité $(*)$ vérifiée pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, pour un n donné, alors

$$|a_{n+1}|\,r^{n+1} \leqslant \left|\frac{2\,n-1}{n+1}\right| |a_n|\,r^{n+1} + \left|\frac{3\,n-6}{n+1}\right| |a_{n-1}|\,r^{n+1} \leqslant 2\,M\,r + 3\,M\,r^2$$

Le raisonnement par récurrence fonctionnera lorsque $2\,r + 3\,r^2 \leqslant 1$, car en ce cas, on obtiendra $|a_{n+1}|\,r^{n+1} \leqslant M$.

(b) (*Synthèse*) Choisissons $r = 1/3$ (ainsi $2\,r + 3\,r^2 = 1$) et $M = 1$ (pour initialiser la récurrence), alors, on obtient par récurrence (avec une initialisation pour $n = 0$ et $n = 1$) la relation $(*)$. On en déduit que

$$R_a \geqslant r = \frac{1}{3}$$

Le reste de la démonstration est identique à l'exemple précédent. f et S_a satisfont le même problème de Cauchy donc coïncident sur $]-R_a, +R_a[$, ce qui montre que f est développable en série entière (mais nous ne savons pas résoudre ce type de récurrence facilement ou peut-être pas du tout).

3. *Pourquoi le rayon de convergence est-il* $1/\sqrt{3}$ *?*

En calculant, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)^2$, on obtient

$$f'(x)^2 = \frac{(1+3\,x)^2}{1+2\,x+3\,x^2}$$

c'est une fonction rationnelle dont les deux pôles sont de module $1/\sqrt{3}$, donc d'après le théorème 3.8, page 229, elle est développable en série entière de rayon de convergence $1/\sqrt{3}$. En appliquant la proposition 3.2, page 196 et le théorème 3.6, page 204, on obtient que

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \geqslant R_a$$

car $S_a'(x)^2$ a un rayon de convergence $\geqslant R_a$, comme produit de deux série entières de rayon R_a.

Enfin, en reprenant l'équation 3.3, page 232 et en développant la fonction rationnelle

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right[, \quad \frac{1+3\,x}{1+2\,x+3\,x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n \qquad R_b = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

et en reportant, on obtient une nouvelle relation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\right)$$

qui nous donne une nouvelle relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\, a_{n-k}\right)$$

alors, si $r < 1/\sqrt{3}$, $r' \in]r, 1/\sqrt{3}[$, posons [a]

$$P = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(|b_n|\, r'^n\right)$$

puis $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ \frac{P\,r\,r'}{(n+1)\ (r'-r)} \leqslant 1 \qquad (**)$$

et

$$M = \max\left(|a_0|, \ldots, |a_N|\, r^N\right)$$

on montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n|\, r^n \leqslant M$$

(*Initialisation*) M a été choisi pour que ce soit vrai jusqu'au rang N.

(*Hérédité*) Si la relation est vraie jusqu'au rang $n \geqslant N$, alors

$$|a_{n+1}|\, r^{n+1} \leqslant \frac{r^{n+1}}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} |b_k|\, |a_{n-k}|\right) \leqslant$$

$$\frac{P\,M\,r^{n+1}}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{r'^k}\, \frac{1}{r^{n-k}}\right) = \frac{P\,M\,r}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{r}{r'}\right)^k\right) \leqslant$$

$$\frac{P\,M\,r}{n+1}\, \frac{1}{1-r/r'} = M \left(\frac{P\,r\,r'}{(n+1)\ (r'-r))}\right) \leqslant M$$

d'après le relation $(**)$. Ce qui montre que $R_a \geqslant r$ et donc que $R_a \geqslant 1/\sqrt{3}$.

a. On fait directement la synthèse, l'analyse est à faire en exercice.

Remarque importante 3.22

La méthode *a priori* d'écriture d'une équation récurrente vérifiée par la suite des coefficients de la série entière cherchée se généralise facilement aux équations fonctionnelles.

Exemple 3.18 – Utilisation d'une équation fonctionnelle

Soit $S_a(z)$ la somme d'une série entière $\sum a_n\, z^n$ de rayon de convergence $R_a \neq 0$, telle que $a_0 \neq 0$, alors la fonction

$$z \longmapsto \frac{1}{S_a(z)} \text{ est développable en série entière en 0.}$$

Démonstration

1. La fonction S_a est continue sur $BO(0, R_a)$ (théorème 3.3, page 200), il existe donc un réel $\delta > 0$ tel que
$$\forall z \in BO(0, \delta),\ S_a(z) \neq 0$$
2. La fonction cherchée est l'*unique* solution de l'équation fonctionnelle
$$\forall z \in BO(0, \delta),\ S_a(z)\, f(z) = 1$$
3. On procède alors par analyse/synthèse.

(*Analyse*) Supposons que f soit développable au voisinage de 0 et somme de $\sum b_n\, z^n$ avec un rayon de convergence $R_b \neq 0$, alors
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right) z^n = 1$$
Alors, on obtient les relations
$$a_0\, b_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k} = 0$$
(*Synthèse*) Considérons la suite définie par
$$b_0 = \frac{1}{a_0} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = -\frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_{n-k}\right)$$
Soit $0 < r' < R_a$,
$$P = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(|a_n|\, r'^n\right)$$
$0 < r < r'$ tel que
$$\frac{P\, r}{|a_0|\ (r' - r)} \leqslant 1$$
et $M = 1/|a_0|$. On montre alors par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |b_n|\, r^n \leqslant M$$
(*Initialisation*) D'après la valeur de b_0, c'est vérifié.

(*Hérédité*) Supposons l'inégalité vérifiée pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$|b_n|\, r^n \leqslant \frac{r^n}{|a_0|} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{P}{r'^k} \frac{M}{r^{n-k}} \right) = \frac{P\, M}{|a_0|} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{r}{r'}\right)^k \right) = \left(\frac{P\, r}{|a_0|\, (r'-r)} \right) M \leqslant M$$

Ce qui nous permet de dire que $R_b \geqslant r > 0$ et que la fonction f est développable en série entière.

Par unicité de la solution de l'équation fonctionnelle, on en déduit que $1/S_a$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice(s) 3.4

3.4.1 Soit la fonction

$$f\,:\, x \longmapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(a) Calculer son développement en série entière à l'aide d'une équation différentielle.

(b) Comparer au développement obtenu en effectuant le produit de $x \longmapsto \arcsin(x)$ et de $x \longmapsto 1/\sqrt{1-x^2}$.

(c) Retrouver le résultat ci-dessus par des moyens directs.

3.4.2 Développer en série entière

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\tan\frac{\alpha}{2}\right) && \alpha \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\} \\ f(x) &= \ln(x^2 - 5\,x + 6) \\ f(x) &= e^{-x}\,\sin x \\ f(x) &= \big(\arcsin(x)\big)^2 \\ f(x) &= \sin\big(\alpha\,\arcsin(x)\big) && \alpha \in \mathbb{R} \\ f(x) &= (x + \sqrt{1+x^2})^m && m \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

3.4.3 Montrer que la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sinh(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est développable en série entière en 0.

Préciser son rayon de convergence (*Indication* : $R = \pi$).

3.4.4 Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

(a) Montrer que

$$f \ : \ u \longmapsto \begin{cases} \frac{e^{u\,x}-e^{u}}{e^{u}-1} & \text{si } u \neq 0 \\ \frac{x-1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

est développable en série entière et que les coefficients du développement sont des fonctions polynomiales en x qu'on écrit sous la forme $Q_n(x)/n!$.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$, montrer que

$$Q_n(p) = 1^n + 2^n + \cdots + (p-1)^n$$

3.4.5 Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n, \text{ de rayon de convergence } R_a \neq 0$$

Montrer que l'équation différentielle

$$y' + f(x)\, y = 0$$

a toutes ses solutions développables en série entière.

3.4.6 Trouver f de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 sous forme d'une intégrale telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = (n!)^2$$

3.4.7 Soit $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ croissante, montrer qu'il existe une fonction f développable en série entière de rayon infini telle que

$$\forall x > 0,\ f(x) > g(x)$$

3.4.8 Si $n \geqslant 1$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On convient que $B_0 = 1$.

(a) Montrer, si $n \in \mathbb{N}^*$

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} B_{n-i}$$

(b) Montrer que

$$\sum \frac{B_n}{n!}\, z^n$$

a un rayon de convergence infini et que, si $z \in \mathbb{C}$

$$\sum \frac{B_n}{n!}\, z^n = \exp\left(e^z - 1\right)$$

(c) Montrer

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k \geqslant 0} \frac{k^n}{k!}$$

3.4.9 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel q vérifiant $|q| < 1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1 - q\,x)\,f(q\,x)$$

Montrer que f se développe en une série entière de rayon de convergence $+\infty$.

3.4 Sommation de séries entières

Remarque 3.23

Naturellement, il n'est pas possible de sommer toutes les séries entières, seules quelques-unes sont accessibles.

Exemple 3.19 – Méthodes de sommation des séries entières

Reconnaître des développements connus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2\,n+1},\ R = 1$$

Coefficients polynomiaux

On fait apparaître les développements des $(1 - z)^{-p}$ en décomposant la fonction polynomiale P (où $a_n = P(n)$ dans la base $\big(x \longmapsto 1, x \longmapsto x+1, x \longmapsto (x+1)\,(x+2), \dots, x \longmapsto (x+1)\,\cdots\,(x+p)\big)$ où p est le degré de P.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - 3\,i\,n + 2)\,z^n,\ R = 1$$

Coefficients fonctions rationnelles en n

On décompose en éléments simples la fraction rationnelle.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,(2\,n+1)},\ R = 1$$

Exponentielles modifiées

Sous la forme $\sum (F(n)/n!) z^n$, où F est une fonction rationnelle à pôles simples, entiers, strictement négatifs on comble les trous au dénominateur pour se ramener à une forme en factorielle en $(n +$

$p)!$; puis, on décompose le numérateur obtenu (fonction polynomiale) dans la base $\big(x \longmapsto 1, x \longmapsto x+p, x \longmapsto (x+p)\,(x+p-1), \ldots, x \longmapsto (x+p)\cdots(x+p-q+1)\big)$ où q est le degré du numérateur.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+i}{(n+2)\,(n+4)}\,\frac{z^n}{n!},\ R=+\infty$$

Séries entières à trous réguliers

Soit une série de la forme $\sum a_{k\,n+p}\,z^{k\,n+p}$, où l'on connaît la somme $f(z)$ de $\sum a_n\,z^n$ on comble les trous en faisant intervenir les $f(\omega^q\,z)$, où ω est une racine k-ième primitive de l'unité.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n}}{(5\,n+2)!},\ R=+\infty$$

Utilisation d'une équation différentielle

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n,\ \text{où } a_0=1 \text{ et } \forall n,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2\,n+k)}{n+1},\ k\in\mathbb{R}^*,\ R=\frac{1}{2}$$

Démonstration où l'on reconnaît des développements connus

1. Si $x\in]0,1[$, on pose $x=t^2$, où $t\in]0,1[$, et on calcule la dérivée de $\psi : t \longmapsto t\,S(t^2)$, où $S(x)$ désigne la somme à calculer. On obtient

$$\psi'(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2\,n}=\frac{1}{1-t^2}$$

donc

$$\psi(t)=\int_0^t \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{t+1}{1-t}\right)$$

d'où

$$\forall x\in]0,1[,\ S(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

2. Si $x\in]-1,0[$, on pose $x=-t^2$, où $t\in]0,1[$, et on calcule la dérivée de $\psi : t \longmapsto t\,S(-t^2)$.

$$\psi'(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,t^{2\,n}=\frac{1}{1+t^2}$$

$$\psi(t)=\int_0^t \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\arctan(t)$$

d'où

$$\forall x\in]-1,0[,\ S(x)=\frac{1}{\sqrt{-x}}\,\arctan\left(\sqrt{-x}\right)$$

Démonstration où les coefficients sont polynomiaux

Tout simplement car on sait calculer les sommes du type

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+p) \cdots (n+1)\, z^n, \text{ pour } [z| < 1$$

Calculons, pour $|z| < 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - 3\,i\,n + 2)\, z^n$$

On écrit que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$n^2 - 3\,i\,n + 2 = (n+2)\,(n+1) - 3\,(1+i)\,(n+1) + 3\,(1+i)$$

Donc

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)\,(n+1)\, z^n - 3\,(i+1) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, z^n\right) + 3\,(1+i) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) = \frac{2}{(1-z)^3} - 3\,(1+i)\,\frac{1}{(1-z)^2} + 3\,(1+i)\,\frac{1}{1-z}$$

Démonstration où les coefficients sont des fonctions rationnelles

On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n\,(2\,n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2\,n+1}$$

On écrit, pour $x \in]-1, +1[$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,(2\,n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2\,n+1}$$

Le dernier terme s'obtient à partir du résultat du premier exemple, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2\,n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2\,\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) - 1 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-x}} \arctan\left(\sqrt{-x}\right) - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration où on a des exponentielles modifiées

Il suffit de remarquer que, si $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+p)!} = \frac{1}{z^p} \left(e^z - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{z^k}{k!}\right) \text{ si } z \in \mathbb{C}^*$$

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+i}{(n+2)\,(n+4)}\,\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+i)\,(n+3)\,(n+1)\,\frac{z^n}{(n+4)!} =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \big((n+4)\,(n+3)\,(n+2) + (i-5)\,(n+4)\,(n+3) +$$

$$(12-3\,i)\,(n+4) + 3\,i - 12\big)\,\frac{z^n}{(n+4)!} =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} + (i-5)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}\right) + (12-3\,i)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+3)!}\right) +$$

$$(3\,i-12)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+4)!}\right) =$$

$$\frac{1}{z}\,\big(e^z - 1\big) + \frac{i-5}{z^2}\,\big(e^z - 1 - z\big) + \frac{12-3\,i}{z^3}\left(e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2!}\right) +$$

$$\frac{3\,i-12}{z^4}\left(e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!}\right)$$

Démonstration où on a des séries entières à trous réguliers

Dans l'exemple donné, on pose

$$\omega = \exp\left(\frac{2\,i\,\pi}{5}\right)$$

on a alors

$$\begin{aligned}
e^{z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n}}{(5\,n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+1}}{(5\,n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+2}}{(5\,n+2)!} + \\
&\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+3}}{(5\,n+3)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+4}}{(5\,n+4)!} \\
e^{\omega\,z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n}}{(5\,n)!} + \omega \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+1}}{(5\,n+1)!} + \omega^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+2}}{(5\,n+2)!} + \\
&\qquad \omega^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+3}}{(5\,n+3)!} + \omega^4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+4}}{(5\,n+4)!} \\
e^{\omega^2\,z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n}}{(5\,n)!} + \omega^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+1}}{(5\,n+1)!} + \omega^4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+2}}{(5\,n+2)!} + \\
&\qquad \omega \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+3}}{(5\,n+3)!} + \omega^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+4}}{(5\,n+4)!} \\
e^{\omega^3\,z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n}}{(5\,n)!} + \omega^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+1}}{(5\,n+1)!} + \omega \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+2}}{(5\,n+2)!} + \\
&\qquad \omega^4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+3}}{(5\,n+3)!} + \omega^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+4}}{(5\,n+4)!} \\
e^{\omega^4\,z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n}}{(5\,n)!} + \omega^4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+1}}{(5\,n+1)!} + \omega^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+2}}{(5\,n+2)!} + \\
&\qquad \omega^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+3}}{(5\,n+3)!} + \omega \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n+4}}{(5\,n+4)!}
\end{aligned}$$

Finalement, pour $z \neq 0$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5\,n}}{(5\,n+2)!} = \frac{1}{5\,z^2} \left(e^{z} + \omega^3\,e^{\omega\,z} + \omega\,e^{\omega^2\,z} + \omega^4\,e^{\omega^3\,z} + \omega^2\,e^{\omega^4\,z} \right)$$

Démonstration où l'on résout une équation différentielle

On va utiliser que si

$$S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n, \text{ avec } R_a \neq 0$$

alors

$$S_a'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,a_{n+1}\,x^n, \text{ avec } R = R_a$$

L'équation nous donne, d'une part que le rayon est 1/2 (critère de d'Alembert) et d'autre part la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)\,a_{n+1} = 2\,n\,a_n + k\,a_n$$

Si l'on multiplie la relation par x^n (où $|x| < 1/2$) et que l'on somme de 0 à $+\infty$, on obtient

$$S_a'(x) = 2\,x\,S_a'(x) + k\,S_a(x)$$

La fonction cherchée est donc *la* solution du problème de Cauchy

$$y' - \frac{k}{1-2\,x}\,y = 0 \text{ et } y(0) = 1$$

Donc

$$S_a(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{k}{1-2\,t}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{(1-2\,x)^{k/2}}$$

Session Python 3.2 – Sommation de séries entières

Les calculs se font directement en sympy.

In[1] – Chargement de la bibliothèque

```
from sympy import *
```

In[2] – Déclarations des variables

```
t = symbols('t')
n = symbols('n', integer=True)
```

In[3] – Développements connus

```
Sum(t**n/(2*n+1), (n, 0, oo))
```

Out[3]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2n+1}$$

In[4] – Cas $t > 0$

```
_.subs({t: t**2}).doit()
```

Out[4]

$$\begin{cases} \frac{\operatorname{atanh}(t)}{t} & \text{for } t > -1 \wedge t < 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} & \text{otherwise} \end{cases}$$

In[5] – Cas $t < 0$

```
__.subs({t: -t**2}).doit()
```

Out[5]

$$\begin{cases} \frac{\operatorname{atan}(t)}{t} & \text{for } t \geq -1 \wedge t \leq 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n+1} & \text{otherwise} \end{cases}$$

In[6] – Coefficients polynomiaux

```
Sum((n**2-3*I*n+2)*t**n, (n, 0, oo)).doit()
```

Out[6]

$$-3i \left(\begin{cases} \frac{t}{(1-t)^2} & \text{for } |t| < 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} n t^n & \text{otherwise} \end{cases} \right) + \begin{cases} \frac{t(-t-1)}{(t-1)^3} & \text{for } |t| < 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} n^2 t^n & \text{otherwise} \end{cases} + 2 \left(\begin{cases} \frac{1}{1-t} & \text{for } |t| < 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} t^n & \text{otherwise} \end{cases} \right)$$

In[7] – Fonctions rationnelles en n

```
Sum(t**n/(n*(2*n+1)), (n, 1, oo)).subs({t:
↪  t**2}).doit().subs({t: sqrt(t)})
```

Out[7]

$$\begin{cases} \frac{t\left(-\frac{3\log(1-t)}{t} + \frac{6}{t} - \frac{6\operatorname{atanh}\left(\sqrt{t}\right)}{t^{\frac{3}{2}}}\right)}{3} & \text{for } |t| \leq 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2n^2+n} & \text{otherwise} \end{cases}$$

In[8] – Cas $t > 0$

```
Sum(t**n/(n*(2*n+1)), (n, 1, oo)).subs({t:
↪  -t**2}).doit().subs({t: sqrt(-t)})
```

Out[8]

$$\begin{cases} \frac{t\left(\frac{6\operatorname{atan}\left(\sqrt{-t}\right)}{(-t)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\log\left(1-t\right)}{t} + \frac{6}{t}\right)}{3} & \text{for } |t| \leqslant 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-t)^n}{2n^2+n} & \text{otherwise} \end{cases}$$

In[9] – Cas $t < 0$

```
Sum((n+I)/((n+4)*(n+2))*t**n/factorial(n), (n, 0,
    oo)).doit()
```

Out[9] – Exponentielles modifiées

$$\frac{t\left(\frac{180-15t^2}{t^5} + \frac{\left(15t^3-75t^2+180t-180\right)e^t}{t^5}\right)}{15} + i\left(\frac{4t^2-24}{8t^4} + \frac{\left(8t^2-24t+24\right)e^t}{8t^4}\right)$$

In[10] – Exponentielles à trous

```
Sum(t**(5*n)/factorial(5*n), (n, 0, oo)).doit()
```

Out[10] – Fonction totalement inconnue...

$${}_0F_4\left(\left.\begin{matrix} \\ \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\end{matrix}\right| \frac{t^5}{3125}\right)$$

In[11]

```
_.series(t, 0, 20)
```

Out[11] – ... qui donne le bon développement limité

$$1 + \frac{t^5}{120} + \frac{t^{10}}{3628800} + \frac{t^{15}}{1307674368000} + O\left(t^{20}\right)$$

Exemple 3.20 – Calculs de sommes de séries numériques

On peut donc maintenant préciser les cas de calculs de sommes de séries

Utilisation d'une série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\,n\,\theta}}{n},\ \theta \notin \mathbb{R}\backslash 2\,\pi.\mathbb{Z}$$

Séries dérivées

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{2\,n^2}\right)$$

Fonctions rationnelles à pôles simples dont la différence deux à deux est toujours entière

Décomposer en éléments simples et calculer la somme partielle.

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2\,n-1}{n^3-4\,n}$$

Démonstration où on utilise une série entière

Convergence de la série

Cette série a été étudiée dans l'exemple 3.3, page 189.

Calcul de la somme

La fonction

$$\theta \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\,n\theta}}{n}$$

est définie, continue sur $\mathbb{R}\backslash 2\,\pi.\mathbb{Z}$, elle est $2\,\pi$-périodique et, pour passer de θ à $-\theta$, il suffit de conjuguer. Nous allons donc supposer que $0 < \theta \leqslant \pi$. Pour calculer la somme, nous allons utiliser la continuité radiale sur la fonction (ici θ est fixé dans $]0,\pi[$)

$$\psi\ :\ x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\,n\,\theta}}{n}\,x^n \quad R=1$$

On a alors pour $x \in]-1,+1[$

$$\psi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{i\,n\,\theta}\,x^{n-1} = \frac{e^{i\,\theta}}{1-x\,e^{i\,\theta}} = \frac{e^{i\,\theta}\left(1-x\,e^{-i\,\theta}\right)}{1-2\,x\,\cos(\theta)+x^2} =$$

$$\frac{\cos(\theta)-x}{1-2\,x\,\cos(\theta)+x^2} + i\,\frac{\sin(\theta)}{1-2\,x\,\cos(\theta)+x^2}$$

Donc

$$\psi(x) = \int_0^x \psi'(t)\,\mathrm{d}u = \int_0^x \frac{\cos(\theta) - u}{1 - 2\,u\,\cos(\theta) + u^2}\,\mathrm{d}u + i\int_0^x \frac{\sin(\theta)}{1 - 2\,u\,\cos(\theta) + u^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\,\ln\left(1 - 2\,x\,\cos(\theta) + x^2\right) + i\left[\arctan\left(\frac{u - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\right]_{u=0}^{u=x}$$

Puis, on fait tendre x vers 1^- et on utilise le théorème 3.5, page 202, on obtient

$$\psi(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} -\frac{1}{2}\,\log\left(2 - 2\,\cos(\theta)\right) + i\left(\arctan\left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + \arctan\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\right)$$

Finalement

$$\forall \theta \in \left]0, \pi\right[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\,n\theta}}{n} = -\ln\left(2\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$$

Démonstration où l'on utilise une série dérivée

Il suffit de remarquer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) = \arctan(2\,n + 1) - \arctan(2\,n - 1)$$

En effet, on a la relation bien connue, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a\,b \neq 1$

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a + b}{1 - a\,b}\right) + \begin{cases} 0 & \text{si } a\,b < 1 \\ \pi & \text{si } a\,b > 1 \text{ et } a > 0 \\ -\pi & \text{si } a\,b > 1 \text{ et } a < 0 \end{cases}$$

On rappelle aussi que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Donc, ici, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\arctan(2\,n + 1) - \arctan(2\,n - 1) = \arctan\left(\frac{(2\,n + 1) - (2\,n - 1)}{1 + (2\,n + 1)\,(2\,n - 1)}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2\,n^2}\right)$$

Finalement,

$$\sum_{n=1}^{N} \arctan\left(\frac{1}{2\,n^2}\right) = \sum_{n=1}^{N} \left(\arctan(2\,n+1) - \arctan(2\,n-1)\right) =$$
$$\arctan(2\,N+1) - \arctan(1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$$

Démonstration où on a une fonction rationnelle dont les pôles sont simples et écartés d'entiers

On décompose la fonction rationnelle de la manière suivante

$$\forall n \geqslant 3,\ \frac{2\,n-1}{n^3-4\,n} = -\frac{5}{8}\,\frac{1}{n+2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{n} + \frac{3}{8}\,\frac{1}{n-2}$$

Donc, pour un $N \geqslant 3$, on obtient

$$\sum_{n=3}^{N} \frac{2\,n-1}{n^3-4\,n} = -\frac{5}{8}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+2} + \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} + \frac{3}{8}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2}$$

Ceci donne après ré-indexation

$$\sum_{n=3}^{N} \frac{2\,n-1}{n^3-4\,n} = -\frac{5}{8}\left(\sum_{n=5}^{N+2}\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4}\left(\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{8}\left(\sum_{n=1}^{N-2}\frac{1}{n}\right)$$
$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{89}{96}$$

Exercice(s) 3.5

3.5.1 Soit l'équation différentielle

$$(E) \qquad x\,(x^2+1)\,y'' - 2\,(x^2+1)\,y' + 2\,x\,y = 0$$

trouver les solutions développables en série entière, calculer le rayon de convergence de la série obtenue, résoudre.

3.5.2 Résoudre

$$4\,x\,y'' + 2\,y' + y = 0$$

3.5.3 On désigne par $d_k(n)$ le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ qui ont exactement k points fixes. Établir les formules

$$\begin{aligned} d_k(n) &= \binom{n}{k}\,d_0(n-k) \\ n! &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,d_0(k) \end{aligned}$$

En utilisant la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_0(n)}{n!}\,x^n$$

calculer explicitement $d_0(n)$ puis $d_k(n)$.

3.5.4 Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,n+1}}{3\,n+2}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3\, x^n$$

3.5.5 Convergence et somme de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{2\,n+1}}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3\,n+2}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+2)\,2^n}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2\,n}{n}}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n}\,\sin^2(n\,\theta), \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

3.5.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par

$$\begin{cases} u_0, v_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n - 2\,v_n \end{cases}$$

Déterminer les rayons de convergence et les sommes de $\sum u_n\, x^n$ et $\sum v_n\, x^n$.

3.5.7 On admet que pour $z \in \mathbb{C}$, $\Phi(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ est développable en série entière et on pose

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n\, \frac{z^n}{n!}$$

(a) Montrer que $B_n = 0$ si $n \geqslant 3$ et impair.

(b) Donner une relation de récurrence entre les B_n.

(c) Faire le développement en série entière de $\tanh(z)$.

(d) En déduire celui de $\tan(x)$.

3.5 Applications aux probabilités

注释 3.7

本小节介绍了幂级数在概率课程中的应用，如随机变量的概率母函数的定义等。学习本小节需要具备一定概率课程的基础。

3.5.1 Fonctions génératrices

Définition 3.6 – Fonction génératrice d'une `v.a.r.`

Soit X une `v.a.r.` définie sur un espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle *fonction génératrice de* X la somme de la série entière

$$G_X(t) \overset{\text{Def}}{=} \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\, t^n, \quad R \geqslant 1$$

Propriété 3.7

La rayon de convergence est $\geqslant 1$, car la série converge pour $t=1$ et G_X est toujours définie, continue sur $[-1,+1]$.

Démonstration

Par définition d'une probabilité, on a, puisque $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$$

Comme la série entière converge en $t=1$, le théorème 3.4, page 201 nous assure que G_X est définie sur $[-1,+1]$.

Propriété 3.8

La fonction génératrice d'une `v.a.r.` est continue sur $[-1,1]$.

Démonstration

Si $R > 1$, c'est le théorème de continuité (théorème 3.3, page 200) et si $R = 1$, c'est la continuité radiale (théorème 3.5, page 202).

Propriété 3.9

La fonction génératrice caractérise la loi de X. Donc, si

$$G_X = G_Y \text{ alors } X \text{ et } Y \text{ ont même loi.}$$

Démonstration

C'est l'unicité d'écriture d'une somme de série entière dont le rayon de convergence est non nul.

Exemple 3.21 – Lois usuelles

Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $(\lambda > 0)$ alors

$$\forall t \in [-1, +1],\ G_X(t) = \exp\big(\lambda\,(t-1)\big)$$

Loi binomiale

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $(p \in [0, 1])$ alors

$$\forall t \in [-1, +1],\ G_X(t) = (1 - p + p\,t)^n$$

Loi géométrique

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $(p \in]0, 1[)$ alors

$$G_X(t) = \frac{p\,t}{1 - (1-p)\,t}$$

Démonstration

Simples calculs

1. (*Loi de Poisson*)

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, e^{-\lambda}\, t^n = e^{-\lambda} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t\,\lambda)^n}{n!} \right) = e^{t\,\lambda - \lambda}$$

2. (*Loi binomiale*)

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}\,t^k = (1 - p + p\,t)^n$$

3. (*Loi géométrique*)

$$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{n-1}\,t^n = \frac{p\,t}{1-(1-p)\,t}$$

Propriété 3.10 – Série génératrice et espérance

X admet une espérance si, et seulement si, G_X admet une dérivée à gauche en 1. On a alors

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1^-)$$

Démonstration

1. $(\Rightarrow)$ La fonction G_X est dérivable sur $]-1,+1[$ et, pour $t \in]-1,+1[$, on a

$$G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X=n)\,t^{n-1}$$

Si X a une espérance la série $\sum n\,\mathbb{P}(X=n)$ converge, donc le théorème 3.4, page 201 nous assure que la fonction G'_X est continue sur $[-1,1]$, en particulier

$$G'_X(t) \xrightarrow[t\to 1^-]{} \mathbb{E}(X)$$

Propriété 3.11 – Série génératrice et moment d'ordre p

Plus généralement, si X admet un moment d'ordre p, alors G_X admet des dérivées à gauche en 1, d'ordre $k \in [\![1,p]\!]$ et

$$G_X^{(p)}(1^-) = \mathbb{E}\big(X\,(X-1)\cdots(X-p+1)\big)$$

Démonstration

Une simple récurrence sur p, les arguments étant les mêmes qu'à la propriété précédente.

Proposition 3.9

Si X et Y sont deux v.a.r. *à valeurs dans* $\mathbb{N}$ indépendantes, *alors*

$$\forall t \in [-1,1],\ G_{X+Y}(t) = G_X(t)\,G_Y(t)$$

Démonstration

Comme $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on a $(X+Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on peut donc exprimer la fonction génératrice de $X+Y$ et, pour $t \in [-1,1]$

$$G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X+Y=n)\, t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\, \mathbb{P}(Y=n-k) \right) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\mathbb{P}(X=k)\, t^k \right) \left(\mathbb{P}(Y=n-k)\, t^{n-k} \right) \right)$$

puisque X et Y sont indépendantes (cela nous donne la formule de la loi de $X+Y$), on reconnaît un produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes (voir le théorème 2.2, page 161). Donc

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)\, G_Y(t)$$

Exemple 3.22 – Calculs de sommes de `v.a.r.`

Lois de Poisson

Ainsi, si X et Y indépendantes suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, alors

$$\forall t \in [-1,+1],\ G_{X+Y}(t) = G_X(t)\, G_Y(t) = e^{\lambda\,(t-1)}\, e^{\mu\,(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)\,(t-1)}$$

donc $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Lois binomiales

De même, si X et Y indépendantes suivent des lois binomiales de paramètres (m_1, p) et (m_2, p), alors pour $t \in [-1,+1]$

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)\, G_Y(t) = (1-p+p\,t)^{m_1}\, (1-p+p\,t)^{m_2} = (1-p+p\,t)^{m_1+m_2}$$

Donc, $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètre (m_1+m_2, p).

Proposition 3.10

Soit N et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des `v.a.r.` indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, où les X_k suivent toutes une même loi (elles ont donc même fonction génératrice G_X), alors la `v.a.r.` définie par

$$S = \sum_{k=0}^{N} X_k \text{ a pour fonction génératrice } G_N \circ G_X$$

Démonstration

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$$

On a alors

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n \; \mathbb{1}_{N=n}$$

Soit $t \in [-1, +1]$, il vient

$$\mathbb{E}\left(t^{S}\right) = \mathbb{E}\left(t^{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n \; \mathbb{1}_{N=n}}\right)$$

mais comme il n'y a qu'un seul indice pour lequel $\mathbb{1}_{N=n}$ donne une valeur non nulle, on a

$$\mathbb{E}\left(t^{S}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^{S_n} \; \mathbb{1}_{N=n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left(t^{S_n} \; \mathbb{1}_{N=n}\right)$$

D'après l'hypothèse d'indépendance de N avec les X_k, on obtient

$$\mathbb{E}\left(t^{S}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left(t^{S_n}\right) \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{N=n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} G_X(t)^n \; \mathbb{P}(N = n) = G_N\left(G_X(t)\right)$$

Exercice(s) 3.6

3.6.1 Soit X le nombre de garçons d'une famille et Y le nombre total d'enfants. On suppose qu'à chaque naissance, il y a autant de chance d'avoir une fille ou un garçon.

(a) Montrer que

$$\forall t \in [-1, +1],\; G_X(t) = G_Y\left(\frac{1+t}{2}\right)$$

(b) On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ, quelle est la loi de X ?

(c) On suppose que Y suit une loi géométrique de paramètre p, quelle est la loi de X ?

(d) Quel modèle choisiriez-vous ? (Poisson ou géométrique).

3.6.2 On veut démontrer qu'il n'est pas possible de construire un dé truqué de telle sorte que la somme de 2 lancers consécutifs suive une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

(a) Calculer la fonction génératrice d'une `v.a.r.` suivant une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

(b) Calculer la fonction génératrice de la loi d'une somme de deux lancers indépendants d'un même dé truqué.

(c) En déduire, en considérant les zéros des deux fonctions génératrices, le résultat annoncé.

3.6.3 On lance trois fois de suite un dé à 6 faces non truqué. On considère le jeu suivant

— Si le troisième lancer est un « 1 », le joueur gagne le nombre de nombres pairs obtenus dans les deux premiers lancers ;

— Sinon, le joueur gagne le nombre de « 6 » obtenus dans les deux premiers lancers.

Calculer (à l'aide de fonctions génératrices) la loi du gain du joueur.

3.6.4 Trouver une loi telle que toute `v.a.r.` X suivant cette loi vérifie

$$G_X^2 = G_{2X}$$

Conclusion ?

3.6.5 On reprend les notations de la proposition 2.5.24, page 253.

(a) Montrer que si N et X_1 ont des espérances, alors

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\ \mathbb{E}(X_1)$$

(b) Si, de plus, N et X_1 ont des moments d'ordre 2, montrer que

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S) = \mathbb{E}(X_1^2)\ \mathbb{V}\mathrm{ar}(N) + \mathbb{E}(N)\ \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)$$

3.6.6 On s'intéresse à la transmission entre générations d'une propriété (par exemple, un gène). Chaque individu i peut transmettre cette propriété à un nombre de descendants X `v.a.r.` à valeurs entières, indépendantes, suivant une même loi de probabilité définie par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X) = p_k$$

Le nombre total d'individus ayant la propriété est alors

$$N_0 = 1,\ N_1 = \sum_{i=1}^{N_0} X_{1,i}, \ldots, N_n = \sum_{i=1}^{N_{n-1}} X_{n,i}$$

où les $X_{i,j}$ sont des `v.a.r.` indépendantes de même distribution que X.

(a) Calculer la fonction génératrice de N_n.

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(N_{n+1} = 0) = G_X\left(\mathbb{P}(N_n = 0)\right)$$

(c) Montrer que

$$\exists \xi \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(N_n = 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \xi$$

(d) Discuter la valeur de ξ en fonction de la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

(e) Que signifie ce résultat ?

3.5.2 Dénombrements

Définition 3.7 – Série génératrice

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on appelle *série génératrice de la suite a*, la série entière

$$\sum a_n\, x^n$$

Remarque 3.24

⚠ Il peut arriver que $R_a = 0$, en ce cas, on ne peut pas calculer avec S_a. En ce cas, on peut parfois adapter la série en prenant

$$\sum \frac{a_n}{n!}\, x^n, \text{ par exemple}$$

Exemple 3.23 – Résolution d'une récurrence linéaire

Soit la récurrence linéaire définie par

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ \text{et } \forall n \geqslant 1,\ (n-1)\, a_{n+1} + 4\,(1-n)\, a_n + (3\,n+1)\, a_{n-1} = 0$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n^2$$

Démonstration

La série génératrice est définie par

$$S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

1. Son rayon de convergence est non nul ! (Méthode usuelle par analyse/synthèse).
2. Sa somme vérifie l'équation différentielle suivante
$$y' - \frac{3}{1-x}\, y = \frac{1+2\,x}{(1-x)^3} \text{ et } y(0) = 0$$
3. La solution de cette équation est
$$f(x) = \frac{x\,(x+1)}{(1-x)^3} + \frac{K}{(1-x)^3}$$
Et la condition initiale nous donne
$$K = 0$$

On trouve donc, en développant la fonction trouvée en série entière

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n^2$$

Exercice(s) 3.7

3.7.1 Résoudre les récurrences suivantes

$$\forall n \geqslant 0,\ 2\,n\,(n+1)\,u_n - (n^2+3\,n-2)\,u_{n+1} + (n-1)\,u_{n+2} = 0$$
$$\forall n \geqslant 0,\ (n+4)\,a_{n+3} + (n+3)\,a_{n+2} - n\,a_{n+1} + (n^2-1)\,a_n = \frac{n+2}{n+1}$$

3.7.2 *Tri rapide.* On a un tableau à trier de longueur n, l'algorithme utilisé est le suivant

— On cherche la place du premier élément, on le met à sa place ;

— on trie ensuite les autres éléments, en mettant avant les plus petits et après les plus grands ;

— on recommence à trier les deux sous-tableaux obtenus (ceux qui sont avant et ceux qui sont après)...

Ainsi, les étapes successives pour trier le tableau de la première ligne sont

2	5	9	0	6	3	4	1
0	1	2	5	9	6	3	4
0	1	2	3	4	5	9	6
0	1	2	3	4	5	6	9

On appelle c_n le nombre de comparaisons qu'il faut, en moyenne, pour trier un tableau.

(a) Montrer que

$$\forall n \geqslant 1,\ c_n = n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} c_k$$

(b) En utilisant la fonction génératrice associée à la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer c_n.

(c) Montrer que

$$c_n \underset{+\infty}{\sim} 2\,n\,\ln(n)$$

Chapitre 4

Probabilités discrètes

4.1 Formalisation

4.1.1 Définitions

Définition 4.1 – Tribu

Soit Ω un ensemble (appelé *univers*), on appelle *tribu sur* Ω toute partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. *stabilité par passage au complémentaire* [a]

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \Omega \backslash A \overset{\text{Not}}{=} \overline{A} \in \mathcal{A}$$

3. *stabilité par réunion au plus dénombrable* Soit I un ensemble au plus dénombrable, alors

$$\forall (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}^I,\ \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$$

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés *événements*. L'ensemble Ω muni de la tribu $\mathcal{A}$ est dit *espace probabilisable* et est alors noté $(\Omega, \mathcal{A})$.

---

a. Attention à ne pas confondre les notations :
— en topologie, $\overline{A}$ désigne l'adhérence de A
— en probabilités, $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A

Remarque importante 4.1

On en déduit facilement que

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. *stabilité par intersection au plus dénombrable* Soit I un ensemble au plus dénombrable, alors
$$\forall (A_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}^I,\ \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$$

Définition 4.2 – Événements incompatibles

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, A et B deux événements de $\mathcal{A}$, on dit que
$$A \text{ et } B \text{ incompatibles} \overset{\text{Def}}{\iff} A \cap B = \varnothing$$
On écrit alors
$$\boxed{A \sqcup B \text{ pour signifier } A \cup B,\ \text{ lorsque } A \cap B = \varnothing}$$

Exemple 4.1 – Tribus

Soit Ω un ensemble non vide, on a alors deux tribus évidentes

1. $\{\varnothing, \Omega\}$ (sans intérêt réel)
2. $\mathcal{P}(\Omega)$ (utilisée souvent lorsque Ω est au plus dénombrable)
3. lorsque Ω est infini, non dénombrable, cela peut devenir très compliqué (mais c'est hors-programme !)

Remarque 4.2

Si F est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, alors l'ensemble des tribus sur Ω contenant F est non vide et stable par intersection quelconque. On peut donc définir la *plus petite tribu contenant F*, on l'appelle *tribu engendrée par F*.

Définition 4.3 – Probalilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, on appelle *probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ toute fonction
$$\mathbb{P} \ :\ \mathcal{A} \to [0, 1]$$
qui vérifie

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2. pour tout I ensemble au plus dénombrable, pour toute famille $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}^I$ d'*événements deux à deux incompatibles* [a]

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Un espace probabilisable muni d'une probabilité est dit *espace probabilisé* et est noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

---

a. On pourrait écrire

$$\bigsqcup_{i\in I} A_i$$

Exemple 4.2

1. *Lancer de dé à six faces*

$$\Omega = [\![1,6]\!]\,,\ \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \text{ et } \forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{6}$$

2. *Probabilité uniforme sur un ensemble fini* Soit Ω un ensemble fini non vide, la probabilité uniforme est définie sur $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ par

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

3. *Probabilité sur* $\mathbb{N}$

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) = \sum_{k\in A} \frac{1}{2^{k+1}}$$

Proposition 4.1 – Probabilité sur un ensemble au plus dénombrable

Soit Ω un ensemble au plus dénombrable, soit $(p_\omega)_{\omega\in\Omega} \in [0,1]^\Omega$ telle que

$$\boxed{\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1}$$

alors il existe une unique probabilité sur $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ telle que

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$$

elle est définie par

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) \overset{Def}{=} \sum_{\omega \in A} p_\omega}$$

Exemple 4.3 – Premier succès

On joue à Pile ou Face avec une pièce éventuellement déséquilibrée qui a une probabilité $p \in [0,1]$ de tomber sur Pile. On arrête le jeu dès que l'on a obtenu Pile. Comment créer $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$?

1. L'univers Ω est dénombrable, de la forme

$$\left\{ P, FP, FFP, \ldots, \underbrace{F \cdots F}_{k \text{ fois}} P, \ldots \right\} \cup \left\{ \underbrace{F \ldots}_{\text{infiniment}} \right\}$$

2. La tribu sur Ω est

$$\mathcal{P}(\Omega)$$

3. La probabilité sur $\mathcal{A}$ peut être définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left(F^k P\right) = (1-p)^k p$$

On a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \neq 0 \\ 0 & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

Finalement :

$$\mathbb{P}\left(\underbrace{F \ldots}_{\text{infiniment}} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 0 \\ 1 & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

Pour les ensembles infinis, non dénombrables, il est souvent plus délicat de montrer que l'on définit bien un probabilité, car il est souvent difficile de décrire *tous* les événements de la tribu concernée.

Exemple 4.4 – Jeu de Pile ou Face

On joue indéfiniment à Pile ou Face avec une pièce éventuellement déséquilibrée qui a une probabilité $p \in [0,1]$ de tomber sur Pile. On s'intéresse dans le cas général à des événements plus compliqués, par exemple :

1. « on a obtenu un nombre infini de Pile »
2. « on a obtenu n Pile consécutifs » ($n \in \mathbb{N}$)
3. « on a obtenu en alternance Pile et Face »
   ou aussi
4. « on s'arrête dès que l'on obtient une séquence déterminée »
5. « à tout moment, on a obtenu plus de Pile que de Face »

Comment modéliser cette situation ?

1. L'univers Ω est de la forme
$$\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$$
2. La tribu sur Ω est engendrée par les
$$C_A = \left\{(\omega_p)_{p\in\mathbb{N}},\ (\omega_0, \ldots, \omega_n) \in A\right\} \text{ où } n \in \mathbb{N} \text{ et } A \in \mathcal{P}\left(\{P, F\}^n\right)$$
3. La probabilité sur cette tribu (lorsque $p = 1/2$) peut être définie sur les événements qui engendrent la tribu par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall A \in \mathcal{P}\left(\{P, F\}^n\right),\ \mathbb{P}(C_A) = \frac{\text{card}(A)}{2^n}$$

L'existence et l'unicité de la probabilité sera *admise* !

(On pourra regarder l'exercice 4.2.4.2.5, page 269).

Remarque culturelle Sur $\mathbb{R}$ (par exemple), les seules probabilités que l'on peut construire sur la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sont les probabilités « discrètes », c'est à dire qu'il existe une partie $\Omega_0 \subset \mathbb{R}$, au plus dénombrable, telle que $\mathbb{P}\left(\overline{\Omega_0}\right) = 0$.
Cela justifie a posteriori l'intérêt de la notion de tribu. Sur $\mathbb{R}$, on prend souvent la tribu engendrée par les segments $[a, b]$.

Exercice(s) 4.1

Tribus

4.1.1 Soit $\Omega = \mathbb{R}$, on considère l'ensemble suivant
$$\mathcal{A} = \left\{A \subset \mathbb{R},\ A \text{ au plus dénombrable, ou } A^c \text{ au plus dénombrable}\right\}$$
Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.

4.1.2 Soit $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ un espace probabilisable, soit Ω_1 un ensemble quelconque et $f \in \mathcal{F}(\Omega_1, \Omega_2)$. Montrer que

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ f^{-1}(A_2),\ A_2 \in \mathcal{A}_2 \right\} \text{ est une tribu sur } \Omega_1$$

4.1.3 Soit $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ un espace probabilisable, soit Ω_2 un ensemble quelconque et $f \in \mathcal{F}(\Omega_1, \Omega_2)$. Montrer que

$$\mathcal{A}_2 = \left\{ A_2 \subset \Omega_2,\ f^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1 \right\} \text{ est une tribu sur } \Omega_2$$

Probabilités

4.1.4 *Probabilité de Dirac* Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et $a \in \Omega$, montrer que la fonction définie par

$$\delta_a\ :\ \begin{cases} \mathcal{A} \to [0,1] \\ A \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

est une probabilité sur $\mathcal{A}$.

4.1.5 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $\mathbb{P}'$ une probabilité définie sur $\mathcal{A}$ et telle que $\mathbb{P} \leqslant \mathbb{P}'$. Que dire de $\mathbb{P}'$?

4.1.6 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A et B deux événements. Montrer que

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

Plus généralement, si $(A_1, \dots, A_n)$ sont n événements, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - n + 1$$

4.1.7 On reprend l'exercice 4.1.4.1.2, de la présente page et on suppose que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$. Et on définit sur $\mathcal{A}_1$ la fonction P par

$$\forall A_1 \in \mathcal{A}_1,\ P(A_1) = \mathbb{P}\left(f(A_1)\right)$$

Donner une CNS pour que P soit une probabilité sur $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$?

4.1.8 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A et B deux événements de cette tribu. Montrer que

$$\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

4.1.9 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une partie $B \subset \Omega$ est dite $\mathbb{P}$-négligeable si
$$\exists A \in \mathcal{A},\ B \subset A \text{ et } \mathbb{P}(A) = 0$$
On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties $\mathbb{P}$-négligeable de Ω.

(a) Montrer que
$$\mathcal{A}' = \{A \cup N,\ A \in \mathcal{A},\ N \in \mathcal{N}\}$$
est une tribu sur Ω.

(b) Montrer que la fonction $\mathbb{P}'$ définie sur $\mathcal{A}'$ par
$$\forall A' \in \mathcal{A}',\ \mathbb{P}'(A') = \mathbb{P}(A) \text{ où } A' = A \cup N,\ A \in \mathcal{A} \text{ et } N \in \mathcal{N}$$
est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A}')$.

Modélisation

4.1.10 Préciser les univers, les tribus et les probabilités appropriés aux expériences aléatoires suivantes. Puis, répondre aux questions posées.

(a) On tire p boules avec remise dans une urne qui contient n boules numérotées de 1 à n. Quelle est la probabilité que les p numéros tirés soient distincts ? Quelle est la probabilité qu'ils aient été tirés en ordre strictement croissant ? En ordre croissant au sens large ?

(b) On tire p boules successivement et sans remise dans une urne qui contient n boules numérotées de 1 à n. Quelle est la probabilité que les numéros apparaissent dans l'ordre croissant ?

(c) On tire n boules simultanément dans un sac contenant r boules rouges et b boules bleues. Quelle est la probabilité que l'échantillon tiré contienne k boules rouges ?

(d) Deux joueurs A et B jouent avec une pièce non truquée. Le joueur A lance deux fois la pièce, B trois fois. Si un des deux joueurs a obtenu strictement plus de Faces que l'autre, il gagne. Sinon, ils rejouent. La partie se poursuit tant que l'un des deux joueurs n'a pas gagné. Quelle est la probabilité que A gagne ?

(e) Un joueur répète une expérience constituant à lancer deux dés non pipés. Il la répète tant qu'il n'a pas obtenu un des deux totaux 5 et 7. Quelle est la probabilité que 5 apparaisse avant 7 ?

(f) Soit $A_1, \dots, A_n$, n points du cercle unité. Quelle est la probabilité pour que 0 appartienne à l'enveloppe convexe de $A_1, \dots, A_n$?

4.1.2 Propriétés diverses

Propriété 4.1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On a clairement

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2$, $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
4. Plus généralement

$$\boxed{\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2,\ \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}$$

Proposition 4.2 – Continuité croissante

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *une suite d'événements. Alors*

$$\boxed{\left[\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}\right] \Rightarrow \left[\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \uparrow \mathbb{P}(A_n)\right]}$$

Propriété 4.2 – σ-additivité

Sans la croissance de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

Proposition 4.3 – Continuité décroissante

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *une suite d'événements. Alors*

$$\boxed{\left[\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \supset A_{n+1}\right] \Rightarrow \left[\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \downarrow \mathbb{P}(A_n)\right]}$$

Définition 4.4

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Tout événement $A \in \mathcal{A}$ qui vérifie $\mathbb{P}(A) = 0$ est dit *événement négligeable*
2. Tout événement $A \in \mathcal{A}$ qui vérifie $\mathbb{P}(A) = 1$ est dit *événement presque sûr*
3. Toute propriété P définie sur Ω est dite *presque sûre* si

$$\Delta = \left\{\omega \in \Omega,\ P(\omega) \text{ vraie}\right\} \text{ vérifie } \Delta \in \mathcal{A} \text{ et } \mathbb{P}(\Delta) = 1$$

on écrit alors

$$\boxed{P \text{ est vraie} \quad \textbf{p.s.}}$$

Exemple 4.5 – Propriété presque sûre

Au jeu de Pile ou Face, avec une pièce équilibrée, on joue jusqu'à l'obtention d'un premier Pile, alors

« Le jeu s'arrête presque sûrement »

Si on note X le nombre de lancers qu'il faut faire pour obtenir un premier Pile, on a alors

$$X < +\infty \quad \textbf{p.s.}$$

Exercice(s) 4.2

4.2.1 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite d'événements. Montrer que

(a) si tous les A_n sont négligeables, alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ est négligeable}$$

(b) si tous les A_n sont presque sûrs, alors

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ est presque sûr}$$

(c) si tous les A_n vérifient $\mathbb{P}(A_n) \geqslant \alpha$ ($\alpha \in [0,1]$), alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) \geqslant \alpha$$

(d) *Borel-Cantelli* Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega,\ \{n \in \mathbb{N},\ \omega \in A_n\} \text{ est infini}\right\}\right) = 0$$

4.2.2 Répondre aux questions soulevées dans l'exemple 4.4, page 262.

4.2.3 *Formule du crible* Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ des événements. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{I\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)\setminus\{\varnothing\}} (-1)^{\mathrm{card}(I)-1}\, \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in I} A_k\right)$$

Applications

(a) On tire au hasard une permutation de $\mathfrak{S}_n$, quelle est la probabilité qu'elle n'ait pas de point fixe (*dérangement*) ?

(b) *Collectionneur de coupons* On vend un produit accompagné d'un coupon pris au hasard parmi n, le collectionneur cherche à avoir tous les coupons au moins une fois. Calculer la probabilité qu'après p achats ($p \geqslant n$) il ait ses n coupons.

(c) n personnes ont chacune un T-shirt marqué à son nom, qui sont rangés dans un tiroir. Chaque personne prend au hasard un T-shirt. Quelle est la probabilité qu'aucune personne n'obtienne le T-shirt à son nom ?

(d) n couples s'assoient aléatoirement autour d'une table ronde (il y a donc $2n$ personnes autour de la table). Quelle est la probabilité qu'aucune personne n'ait son conjoint ou sa conjointe à côté d'elle ?

4.2.4 On munit $\mathbb{R}$ de la tribu $\mathcal{A}$ engendrée par les segments. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur cette tribu.

(a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ]-\infty, x] \in \mathcal{A}$$

On pose

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x]) \qquad (*)$$

(b) Montrer que F vérifie les propriétés suivantes :

— $F(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$

— $F(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$

— F est croissante sur $\mathbb{R}$

— F est continue à droite en tous points

— F admet une limite à gauche en tous points

(c) Montrer que, réciproquement, toute fonction F vérifiant les propriétés de la question précédente nous permet de définir une probabilité sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$.

4.2.5 Soit Ω un ensemble non vide. Un π-système est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ stable par intersection (finie). Une classe monotone est une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ contenant Ω et :

P.1 *stable par différence* si A et B sont dans $\mathcal{C}$ avec $A \subset B$, alors $B \backslash A \in \mathcal{C}$

P.2 *stable par réunion dénombrable croissante* si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante (pour l'inclusion) d'éléments de $\mathcal{C}$, alors

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{C}$$

(a) Vérifier qu'une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu si et seulement si c'est un π-système et une classe monotone.

(b) Vérifier également qu'une intersection quelconque de classes monotones est une classe monotone, ce qui permet de définir la classe monotone engendrée par une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Soit $\mathcal{I}$ un π-système. Soit $\mathcal{C}$ la classe monotone engendrée par $\mathcal{I}$.

(c) Soit

$$\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{C},\ \forall I \in \mathcal{I}, B \cap I \in \mathcal{C}\}$$

Montrer que $\mathcal{A}$ est une classe monotone contenant $\mathcal{I}$, donc $\mathcal{C}$.

(d) Montrer par un argument analogue que $\mathcal{C}$ est stable par intersection et conclure que $\mathcal{C}$ est une tribu, donc la tribu engendrée par $\mathcal{I}$.

(e) *Application* : Soit Ω un ensemble non vide, $\mathcal{I}$ un π-système, $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}'$ deux probabilités définies sur des tribus contenant toutes deux $\mathcal{I}$. Démontrer que si $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}'$ coïncident sur $\mathcal{I}$, elle coïncident sur la tribu engendrée par $\mathcal{I}$.

4.1.3 Conditionnement

Définition 4.5 – Conditionnement

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit A un événement de Ω (c'est-à-dire un élément de $\mathcal{A}$)) tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle *probabilité conditionnelle sachant* A, la probabilité définie sur $\mathcal{A}$ par

$$\forall B \in \mathcal{A}, \quad \boxed{\mathbb{P}_A(B) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \stackrel{\text{Not}}{=} \mathbb{P}(B|A)}$$

Remarque importante 4.3

On a donc immédiatement

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\ \mathbb{P}(A)}$$

ce qui nous autorisera à donner un sens à l'expression $\mathbb{P}_A(B)\ \mathbb{P}(A)$ (valeur 0) même lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$. Il est en effet difficile parfois de prévoir *avant les calculs* si une probabilité est nulle ou non...
Ainsi, lorsque $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ sont des événements, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} A_n\right) \mathbb{P}\left(A_n \middle| \bigcap_{k=0}^{n-1} A_k\right)}$$

ceci permet donc de calculer par récurrence les probabilités des intersections d'événements...

Proposition 4.4 – Probabilités composées

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *des événements, on a alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_0) \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_k \middle| \bigcap_{j=0}^{k-1} A_j\right)$$

Remarque importante 4.4

Cette formule permet de gérer les situations où on utilise un *arbre* de décision pour décrire la situation.

Exemple 4.6 – Probabilités composées

On distribue 3 cartes d'un jeu de 52 cartes, quelle est la probabilité que les niveaux des cartes obtenus soient consécutifs (le Roi est suivi de l'As qui est suivi du 2) ? On peut décrire la situation par l'arbre de la figure 4.1, page suivante. Bien sûr, il est plus simple de dénombrer calmement en « Top-down ». Mais cette manière de calculer les probabilités est parfois utile.

Exemple 4.7 – Probabilités composées

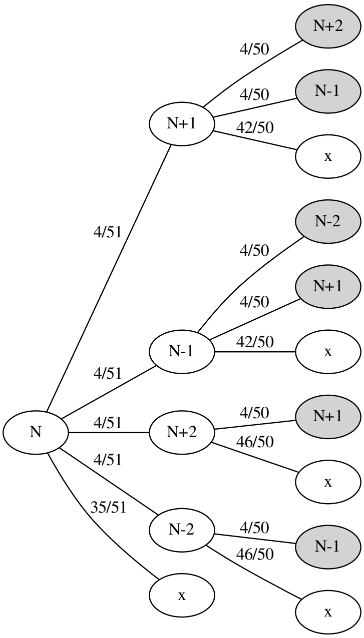
Au jeu de Pile ou Face, avec $p \neq 0$, l'événement « il sort une infinité de Pile » est presque sûr.

Définition 4.6 – Système complet d'événements

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, on appelle *système complet d'événements* toute famille au plus dénombrable d'événements $(A_i)_{i\in I}$ telle que

1. les événements sont deux à deux incompatibles
$$\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j\ \Rightarrow\ A_i \cap A_j = \varnothing$$
2. ils recouvrent Ω
$$\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$$

Figure 4.1 – Probabilités composées



Remarque 4.5

C'est donc une partition constituée d'événements, où on autorise de plus à certains événements d'être vides...

Théorème 4.1 – Probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, soit* I *un ensemble au plus dénombrable, soit* $(A_i)_{i\in I}$ *un système complet d'événements, alors*

$$\forall B \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B|A_i)\ \mathbb{P}(A_i)$$

Remarque importante 4.6

Ce théorème est à la base du calcul des probabilités dans les situations issues de la modélisation. Il est souvent *indispensable* de préciser un « bon » système complet d'événements adapté à la situation.

Proposition 4.5

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, soit* I *un ensemble au plus dénombrable, soit* $(A_i)_{i\in I}$*, tels que*

1. *négligeabilité des intersections*

$$\forall (i,j) \in I^2,\ \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$$

2. *réunion presque sûre*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$$

alors, on a encore

$$\boxed{\forall B \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B|A_i)\ \mathbb{P}(A_i)}$$

Exemple 4.8 – Probabilités totales

On joue à Pile ou Face avec une pièce déséquilibrée (probabilité $p \in]0,1[$ d'obtenir un Pile). On s'arrête de jouer quand on obtient 3 Pile consécutifs, quelle est la probabilité que l'on s'arrête au n-ième coup ? En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.
Modélisons :

1. On reprend la situation développée à l'exemple 4.4, page 262. On obtient un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
2. Considérons l'événement (c'est bien un élément de $\mathcal{A}$, car il dépend des n premiers lancers)

$$A_n = \text{« le jeu continue après le } n\text{-ième lancer »}$$

3. On a alors clairement

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 1 \text{ et } \mathbb{P}(A_3) = 1 - p^3$$

4. Notons F_k le résultat du k-ième lancer, on a alors un système complet d'événements basé sur les derniers lancers FPP, FP, F ou B (autre), la formule des probabilités totales nous donne alors

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(A_n|(F_n = F)\right)\,\mathbb{P}\left((F_n = F)\right) + \mathbb{P}\left(A_n|(F_n = P) \cap (F_{n-1} = F)\right)\,\mathbb{P}\left((F_n = P) \cap (F_{n-1} = F)\right) + \mathbb{P}\left(A_n|(F_n = P) \cap (F_{n-1} = P) \cap (F_{n-2} = F)\right)\,\mathbb{P}\left((F_n = P) \cap (F_{n-1} = P) \cap (F_{n-2} = F)\right) + \mathbb{P}(A_n|B)\,\mathbb{P}(B)$$

5. Chaque probabilité conditionnelle se calcule facilement, et en anticipant sur la notion d'indépendance (prochain paragraphe), on obtient

$$\mathbb{P}(A_n) = (1-p)\,\mathbb{P}(A_{n-1}) + p\,(1-p)\,\mathbb{P}(A_{n-2}) + p^2\,(1-p)\,\mathbb{P}(A_{n-3}) + 0$$

Donc, $u_n = \mathbb{P}(A_n)$ est solution de l'équation récurrente

$$u_1 = u_2 = 1,\ u_3 = 1-p^3 \text{ et } \forall n \geqslant 4,\ u_n = (1-p)\,u_{n-1} + p\,(1-p)\,u_{n-2} + p^2\,(1-p)\,u_{n-3}$$

La valeur cherchée est

$$\mathbb{P}(A_{n-1}) - \mathbb{P}(A_n)$$

6. On a donc (le montrer) l'existence de 3 complexes λ, μ et ν tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\,\alpha^n + \mu\,\beta^n + \nu\,\gamma^n$$

où (α, β, γ) sont les racines complexes de $X^3 - (1-p)\,X^2 - p\,(1-p)\,X - p^2\,(1-p)$. Pour obtenir que le jeu s'arrête, il suffit de montrer que les racines de ce polynôme sont toutes de module < 1 (le montrer).

Proposition 4.6 – Formule de Bayes

Sous les mêmes hypothèses que pour les probabilités totales, où, de plus $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a

$$\forall i \in I,\ \mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\displaystyle\sum_{i\in I} \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}$$

Exercice(s) 4.3

4.3.1 On joue à Pile ou Face avec une pièce déséquilibrée. Le jeu s'arrête dès que sortent deux résultats consécutifs identiques. Le joueur gagne lorsque cela s'arrête sur 2 Pile et perd sinon.

(a) Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

(b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne sachant qu'il a obtenu Face au premier lancer.

4.3.2 Une urne contient b boules blanches et r boules rouges, on tire successivement *sans remise*. Soit $k \leqslant b+r$, quelle est la probabilité que la première boule blanche apparaisse au k-ième tirage ?

4.3.3 (a) Un ami a deux enfants dont une fille, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

(b) Un autre ami a deux enfants, le plus jeune est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre soit une fille ?

(c) Plus généralement, pour un couple ayant n enfants dont les m premiers sont des filles, quelle est la probabilité que les $n-m$ suivants soient des filles ?

(d) Quelle est la probabilité pour un couple ayant n enfants dont au moins m garçons qu'il n'ait que des garçons ?

4.3.4 On a 10 boules (5 rouges et 5 blanches), on a deux urnes indiscernables dans lesquelles on répartit les 10 boules. On choisit une urne au hasard et on y tire une boule. Quelle répartition des boules doit-on faire pour maximiser la probabilité de tirer une boule rouge ?

4.3.5 Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire successivement les boules deux par deux *sans remise*. Quelle est la probabilité qu'à chaque tirage on ait une boule blanche et une boule rouge ?

4.3.6 *Ruine du joueur* Un joueur joue à Pile ou Face avec une pièce déséquilibrée. Il possède une somme initiale de c euros. À chaque coup, s'il tire un Pile, il gagne 1 euro, s'il tire un Face il perd un euro. Calculer sa probabilité d'être ruiné.

4.3.7 S'il pleut, l'étudiant X a une probabilité $1/5$ d'être en retard en cours, s'il neige, cette probabilité devient $3/5$. Or il neige avec une probabilité $2/5$ et il pleut avec une probabilité $3/5$. Quelle est la probabilité que X soit en retard ?

4.3.8 *Urne de Pólya* On a une urne qui contient au départ b boules blanches et n boules noires. On tire une boule, puis on la remet dans l'urne en ajoutant c boules de la même couleur. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au k-ième tirage.

4.3.9 Le jeu de Monty Hall se présente de la façon suivante. Trois portes sont fermées ; derrière l'une d'entre elles se trouve une voiture, derrière chacune des deux autres un porte-clés. Le candidat se place devant l'une des portes. Le présentateur, qui sait quelle est la porte cachant la voiture, ouvre alors l'une des deux autres portes, derrière laquelle, bien sûr, se trouve un porte-clés. Que doit faire le candidat ?

4.3.10 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, on effectue des tirages *avec* remise. Quelle est la probabilité que sur n tirages consécutifs, il existe au moins un tirage numéroté k où l'on a tiré la boule numérotée k ?

4.3.11 Une usine possède 4 chaînes de production, les deux premières produisent des pièces défectueuses à raison de 1%, la troisième 2% et la quatrième 3%. On tire au hasard deux pièces provenant d'une même chaîne de production, elles sont toutes les deux défectueuses, calculer la probabilité qu'elles proviennent de l'une des deux premières chaînes de production.

4.3.12 n convives se placent au hasard autour d'une table ronde, Alice et Bernard, deux des convives regardent le nombre minimum de personnes assises entre eux deux. Quelle est la probabilité que ce nombre vaille k ?

4.3.13 Un candidat à un jeu télévisé doit répondre à une question dont il connaît la réponse avec une probabilité p. S'il ignore la réponse il la choisit au hasard de façon équiprobable dans une liste de n suggestions. Sachant qu'il a bien répondu quelle est la probabilité qu'il ait connu la réponse.

4.3.14 Lors du dépouillement d'une élection le candidat N obtient r suffrages et le candidat R obtient r suffrages avec $n > r \geqslant 0$. Quelle est la probabilité $p(n, r)$ pour qu'au cours du dépouillement le candidat N ait toujours la majorité ?

4.3.15 *Urnes de Laplace* On considère $m+1$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_m$ et supposons que, pour chaque k, U_k contienne k boules bleues et $m-k$ boules rouges. On choisit de manière équiprobable l'une des urnes et on y effectue $n+1$ tirages avec remise.

(a) Sachant que les n premiers tirages ont donnés des boules bleues, quelle est la probabilité qu'il en soit de même du $(n+1)$-ème ?

(b) Déterminer la limite de la probabilité précédente quand $n \to \infty$.

4.3.16 $\Omega = (\mathbb{N}^*)^2$. Construire une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que, pour tout $(p, q) \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(\{(p, q)\}) = \frac{1}{2^{p+q}}$$

On tire au hasard un couple $(a, b) \in \Omega$. Exprimer sous forme de somme de série la probabilité pour que $\{a\}|\{b\}$.

4.3.17 On tire une entier naturel non nul pair : $2\,n$ avec la probabilité p_n ($n \geqslant 1$). Puis l'on tire deux boules dans une urne contenant n boules blanches et n noires. Calculer, dans chaque cas :

$$p_n = \frac{1}{n\,(n+1)} \text{ puis } p_n = a\,p^n, \; (p \in]0,1[\text{ donné, } a > 0 \text{ à calculer})$$

(a) La probabilité d'avoir tiré dans une urne ne contenant que quatre boules sachant que les deux boules tirées ont la même couleur.

(b) La probabilité d'avoir tiré une boule blanche sachant que l'autre est noire.

4.3.18 Soit $a \in]0,1[$. La probabilité qu'une famille ait k enfants est p_k avec

$$p_0 = p_1 \text{ et } p_k = \frac{1-2\,a}{2^{k-1}} \text{ pour } k \geqslant 2$$

On suppose que les garçons et les filles sont équiprobables.

(a) Calculer p_0 et p_1.

(b) Quelle est la probabilité qu'une famille ait exactement deux filles ?

(c) Quelle est la probabilité qu'une famille ayant deux filles ait deux enfants seulement.

(d) Quelle est la probabilité qu'une famille ait deux garçons sachant qu'elle a deux filles.

4.1.4 Indépendance

Définition 4.7 – Indépendance d'événements

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ deux événements, on dit que *A et B sont indépendants* s'ils vérifient :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}(B)}$$

Soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}^I$ une famille *au plus dénombrable* d'événements, on dit que ces événements sont *mutuellement indépendants* si

$$\boxed{\forall J \subset I,\ J \text{ fini},\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)}$$

Remarque 4.7

Toute sous-famille d'événements mutuellement indépendants est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Remarque importante 4.8

Des événements mutuellement indépendants sont indépendants deux-à-deux. La réciproque est fausse !

Exemple 4.9 – Réciproque fausse

Soit $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme. Prenons

$$A_i = \left\{(i, j) \in \Omega,\ i \text{ pair}\right\},\ A_2 = \left\{(i, j) \in \Omega,\ j \text{ pair}\right\} \text{ et } A_3 = \left\{(i, j) \in \Omega,\ i + j \text{ pair}\right\}$$

On a immédiatement

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$$

mais

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$$

Propriété 4.3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ deux événements, alors

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ indépendants} \quad &\iff \quad A \text{ et } \overline{B} \text{ indépendants} \\ &\iff \quad \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \text{ lorsque } \mathbb{P}(A) \neq 0 \end{aligned}$$

Propriété 4.4

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}^I$ une famille au plus dénombrable d'événements, pour $I' \subset I$, on pose

$$\forall i \in I,\ B_i = \begin{cases} A_i & \text{si } i \in I' \\ \overline{A_i} & \text{si } i \in I \backslash I' \end{cases}$$

on a alors

$$\Big[(A_i)_{i \in I} \text{ mutuellement indépendants}\Big] \iff \Big[(B_i)_{i \in I} \text{ mutuellement indépendants}\Big]$$

Proposition 4.7 – Borel-Cantelli (HP)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'événements.

1. *On a*

$$\left[\sum \mathbb{P}(A_n) \text{ converge}\right] \Rightarrow \left[\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k\right)\right) = 0\right]$$

2. *Si, de plus, les événements sont* mutuellement indépendants*, on a*

$$\left[\sum \mathbb{P}(A_n) \text{ diverge}\right] \Rightarrow \left[\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k\right)\right) = 1\right]$$

Remarque 4.9

Que représente cet ensemble

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right)?$$

Il représente l'événement constitué des $\omega \in \Omega$ qui vérifient

« l'ensemble des n tels que $\omega \in A_n$ est infini »

Exemple 4.10 – Borel-Cantelli

On joue à Pile ou Face avec une pièce déséquilibrée ($p \in]0,1[$), on a le motif $X = PPPFPPPPF$, pour quelle(s) valeur(s) de p est-on presque sûr qu'il se produise au moins une fois ? une infinité de fois ?

Exercice(s) 4.4

4.4.1 Une population contient une proportion p de malades. Un test est positif avec une probabilité p_1 (proche de 1) si le patient est malade et avec une probabilité p_0 (proche de 0) si le patient est sain.

(a) Sachant que le test est positif, probabilité que le patient soit malade ?

(b) Si le test est positif on en effectue un autre « indépendant du premier ». Quelle est la probabilité que le patient soit malade sachant que le test est deux fois positif.

4.4.2 Un objet se trouve dans un meuble de n tiroirs avec la probabilité p. On fouille dans les $n-1$ premiers tiroirs et on ne le trouve pas. Quelle est la probabilité qu'il se trouve dans le dernier tiroir ?

4.4.3 Soit p_1 et p_2 deux entiers naturels premiers tels que $p_1 < p_2$. $q \in [\![1,n]\!]$, on note pour $i \in \{1,2\}$, E_i l'évènement : « q est divisible par p_i ». Montrer que s'il existe k et $k_1 \in \mathbb{N}$ tels que $n = k\,p_1\,p_2 + k_1\,p_1$ avec $k_1\,p_1 < p_2$ alors E_1 et E_2 sont indépendants.

4.4.4 Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux événements d'un espace probabilisé soient indépendants est :

$$\mathbb{P}(A \cap B)\,\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B})\,\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

4.4.5 Les événements A_1, …, A_k sont mutuellement indépendants et de probabilités respectives p_1, …, p_k. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne se produise est majorée par

$$\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{k} p_i}$$

4.4.6 On lance n pièces équilibrées. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on note A_k l'événement : « le k-ième lancer tombe sur pile ». On note A_{n+1} l'événement : « le nombre total de piles est pair ». Montrer que n quelconques des événements A_k, $1 \leqslant k \leqslant n+1$ sont mutuellement indépendants alors que A_1, ..., A_{n+1} ne sont pas mutuellement indépendants.

4.4.7 *Loi* ζ Soit $s \in]1, +\infty[$.

(a) Montrer qu'on peut définir une probabilité sur $\big(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)\big)$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}_s(\{n\}) = \frac{1}{n^s\,\zeta(s)}$$

(b) Si $d \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\mathbb{P}_s\left(d.\mathbb{N}^*\right)$$

(c) Soit $(d_1, d_2) \in {\mathbb{N}^*}^2$, à quelle(s) condition(s) les événements $d_1.\mathbb{N}^*$ et $d_2.\mathbb{N}^*$ sont-ils indépendants ?

(d) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_N = \big\{n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{P},\ [p|n] \ \Rightarrow\ [p > N]\big\}$$

Montrer que

$$\prod_{p \in \mathbb{P},\ p \leqslant N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)} \left(\sum_{n \in A_N} \frac{1}{n^s}\right)$$

(e) Une partie A de $\mathbb{N}^*$ a une *densité naturelle* si

$$\frac{1}{n}\ \mathrm{card}\left(A \cap [\![1, n]\!]\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} d(A)$$

Montrer qu'en ce cas, on a

$$\mathbb{P}_s(A) \xrightarrow[s \to 1^+]{} d(A)$$

4.2 Variables aléatoires

4.2.1 Loi d'une variable aléatoire

Définition 4.8 – Variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(E, \mathcal{T})$ un espace probabilisable, soit X une application de Ω dans E.

1. On dit que X est une *variable aléatoire* si

$$\forall B \in \mathcal{T},\ X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

2. On dit que X est une *variable aléatoire discrète* si
   (a) $X(\Omega)$ est au plus dénombrable
   (b) Pour tout $x \in X(\Omega)$, on a

$$\{x\} \in \mathcal{T} \text{ et } X^{-1}\left(\{x\}\right) \in \mathcal{A}$$

3. On dit que X est une *variable aléatoire discrète réelle* si $E = \mathbb{R}$.

Remarque 4.10

Au programme, E n'est pas muni d'une tribu. Comme on ne considère que les variables aléatoires discrètes, il suffit de prendre la tribu

$$\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$$

Définition 4.9 – Loi d'une variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit E un ensemble et X une variable aléatoire discrète de Ω dans E, alors la fonction

$$\mathbb{P}_X\ :\begin{cases} \mathcal{P}(E) \to [0,1] \\ B \mapsto \sum_{x\in B} \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\{x\}\right)\right) \end{cases}$$

est une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$ appelée *loi de X*.

Remarque 4.11

Dans le cas général, on définit la loi de X par

$$\forall B \in \mathcal{T},\ \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\{B\}\right)\right)$$

Notation 4.1

1. Si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans E qui définissent la même loi, on écrit

$$X \sim Y$$

2. Si $\mathcal{L}$ est une loi sur E (une probabilité donc) et si X est une variable aléatoire sur E telle que $\mathbb{P}_X = \mathcal{L}$, on écrit

$$X \hookrightarrow \mathcal{L} \text{ (au programme, il y a } X \sim \mathcal{L})$$

Notation 4.2

Soit X une variable aléatoire de Ω dans E et $x \in E$, on note

les événements
$$(X = x) \overset{\text{Not}}{=} X^{-1}\left(\{x\}\right)$$

et
$$\forall B \in \mathcal{T},\ (X \in B) \overset{\text{Not}}{=} X^{-1}(B)$$

Et lorsque la variable aléatoire est réelle :

les événements
$$(X \leqslant x) \overset{\text{Not}}{=} X^{-1}\left(]-\infty, x]\right)$$

et, de même
$$(X < x),\ (X \geqslant x) \text{ et } (X > x)$$

Exemple 4.11

Revenons au jeu du Pile ou Face. On lance une infinité de fois la pièce (déséquilibrée ou non) et on s'intéresse aux résultats obtenus sur les n premiers lancers, on a donc l'application

$$X\ :\begin{cases} \{P,F\}^{\mathbb{N}} \to \{P,F\}^n \\ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (x_0,\dots,x_{n-1}) \end{cases}$$

Il est naturel de vouloir que cette fonction soit une variable aléatoire. Pour cela, il faut que la tribu sur $\Omega = \{P,F\}^{\mathbb{N}}$, satisfasse

$$\forall (x_0,\dots,x_{n-1}) \in \{P,F\}^n,\ X^{-1}\Big(\{(x_0,\dots,x_{n-1})\}\Big) \in \mathcal{A}$$

on retrouve la tribu engendrée par les « cylindres ».

Définition 4.10 – Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle de Ω dans $\mathbb{R}$, on appelle *fonction de répartition de X* et on note

$$F_X \; : \begin{cases} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \mapsto \mathbb{P}\left((X \leqslant x)\right) \end{cases}$$

(Voir l'exercice 4.2.4.2.4, page 269).

Remarque 4.12

Lorsque la variable aléatoire est discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, la fonction de répartition est une fonction en escalier.

Remarque importante 4.13

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, alors, pour $A \in \mathcal{A}$, on appelle *indicatrice de A* et on note

$$\mathbb{1}_A \; : \begin{cases} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

on a alors

$$\mathbb{1}_A \text{ variable aléatoire}$$

Remarque importante 4.14

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit E un ensemble et X une variable aléatoire discrète de Ω dans E, alors

$$\boxed{\left((X = x)\right)_{x \in X(\Omega)} \text{ est un système complet d'événements}}$$

Proposition 4.8

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit E un ensemble et X une variable aléatoire discrète de Ω dans E, soit f une application de E dans un ensemble F, alors $f \circ X$ est une variable aléatoire de Ω dans F. On la note souvent et abusivement $f(X)$.

Exercice(s) 4.5

4.5.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on munit l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme. Déterminer les lois des variables aléatoires suivantes :

(a) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}$, $X(\sigma)$ désigne $\sigma(1)$.

(b) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}$, $X(\sigma)$ désigne $\sigma(A)$, où A est une partie fixée de $[\![1, n]\!]$.

(c) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}$, $X(\sigma)$ désigne le nombre de points fixes de σ.

(d) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}$, $X(\sigma)$ désigne la longueur de l'orbite de 1 par σ, soit le cardinal de $\{\sigma^k(1),\ k \in \mathbb{N}\}$.

4.5.2 Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F_X, calculer les fonctions de répartition des variables aléatoires suivantes (en fonction de F_X) :

(a) X^2

(b) $|X|$

(c) $\arctan(X)$

(d) $\min(X, 1)$

4.5.3 Trouver un espace probabilisé Ω et X une variable aléatoire définie dessus telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}_X(\{n\}) = \frac{1}{n\,(n+1)}$$

4.2.2 n-uplets de variables aléatoires

Définition 4.11 – Vecteurs aléatoires

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs respectives dans des ensembles E_k ($X_k(\Omega) \subset E_k$), alors l'application

$$\underline{X} : \begin{cases} \Omega \to E_1 \times \cdots \times E_n \\ \omega \mapsto \big(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\big) \end{cases}$$

est une variable aléatoire discrète. La loi de $\underline{X}$ est dite *loi conjointe de* $(X_1, \dots, X_n)$. Les lois des X_k sont dites *lois marginales de* $(X_1, \dots, X_n)$. Lorsque tous les E_k sont égaux à (ou inclus dans) $\mathbb{R}$, on parle de *vecteur aléatoire*.

Notation 4.3

Comme les variables aléatoires sont toutes discrètes, connaître la loi conjointe revient à connaître les probabilités des événements

$$\forall(x_1,\dots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n,\ (X_1=x_1)\cap(X_2=x_2)\cap\cdots\cap(X_n=x_n)$$

cet événement se note aussi

$$\Big(X_1=x_1,\ X_2=x_2,\ \dots,\ X_n=x_n\Big)$$

Remarque importante 4.15

Il est facile, connaissant la loi conjointe de déterminer les lois marginales, en effet

$$\forall x_k\in E_k,\ \mathbb{P}_{X_k}\left(\{x_k\}\right)=\mathbb{P}_{\underline{X}}\left(E_1\times\cdots\times E_{k-1}\times\{x_k\}\times E_{k+1}\times\cdots\times E_n\right)$$

En revanche, connaissant les lois marginales, il est en général impossible de connaître les lois conjointes !

Exemple 4.12

Soit $\underline{X}_1$ de loi sur $\{0,1\}^2$ définie par

$$\mathbb{P}_{\underline{X}_1}(\{(i,j)\})=\begin{cases}p^2 & \text{si } (i,j)=(1,1)\\ p\,(1-p) & \text{si } i\neq j\\ (1-p)^2 & \text{si } (i,j)=(0,0)\end{cases}$$

a pour lois marginales identiques

$$\mathbb{P}_1(\{1\})=p \text{ et } \mathbb{P}_1(\{0\})=1-p$$

mais $\underline{X}_2$ de loi sur $\{0,1\}^2$ définie par

$$\mathbb{P}_{\underline{X}_2}(\{(i,j)\})=\begin{cases}p & \text{si } (i,j)=(1,1)\\ 0 & \text{si } i\neq j\\ 1-p & \text{si } (i,j)=(0,0)\end{cases}$$

a les mêmes lois marginales...

Proposition 4.9

Soit $(X_1,\dots,X_n)$ des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ à valeurs respectives dans des ensembles E_k ($X_k(\Omega)\subset E_k$), soit f une application de $E_1\times\cdots\times E_n$ dans un ensemble F, alors

$$f(X_1,\dots,X_n) \text{ est une variable aléatoire discrète}$$

Exemple 4.13

Il est facile de trouver certaines lois de fonctions de variables aléatoires :

1. *lois marginales d'un couple*

$$\forall x_1\in E_1,\ \mathbb{P}\left((X_1=x_1)\right)=\sum_{x_2\in X_2(\Omega)}\mathbb{P}\Big((X_1=x_1,\ X_2=x_2)\Big)$$

2. *somme de deux variables aléatoires réelles discrètes*

$$\mathbb{P}\Big((X_1+X_2=z)\Big)=\sum_{x_1\in X_1(\Omega)}\mathbb{P}\Big((X_1=x_1,\ X_2=z-x_1)\Big)$$

Exercice(s) 4.6

4.6.1 Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire une poignée de k jetons. On note X la variable aléatoire égale au plus petit numéro obtenu. Quelle est la loi de X ?

4.6.2 Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n, on tire 2 jetons successivement sans remise. On note X et Y les tirages successifs. Lois de (X,Y) ? de $Y-X$? de $|Y-X|$?

4.6.3 Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue $n+1$ tirages avec remise. On note X_i le résultat du i-ème tirage. On note T le plus petit i tel que $X_i\leqslant X_{i+1}$. Déterminer

$$\mathbb{P}\Big((T>k)\Big),\ \text{pour } k\leqslant n$$

En déduire la loi de T.

4.6.4 Une urne contient initialement une boule blanche et une noire. On tire une boule et on rajoute une boule de la même couleur. On note T le numéro du tirage où l'on obtient une première fois une boule blanche.

Dans quel ensemble T prend-elle ses valeurs ? Calculer $\mathbb{P}\Big((T = 1)\Big)$, $\mathbb{P}\Big((T = +\infty)\Big)$; donner la loi de T.

4.6.5 Deux joueurs jouent à pile ou face. Le premier est déclaré gagnant si et seulement si le motif PPF apparaît avant le motif FPP ; le deuxième gagne si FPP apparaît avant PPF. Pour chaque entier $n \geqslant 2$, on note A_n l'évènement :

$$\text{« } (X_k, X_{k+1}, X_{k+2}) \notin \{(P,P,F),(F,P,P)\},\ \forall k \in [\![1, n-1]\!] \text{ »}$$

A_1 est un évènement certain ; et, pour $n \geqslant 1$, on note PF_n l'évènement :

$$PF_n = \text{« } (X_n = P, X_{n+1} = F) \text{ »} \cap A_n$$

On définit également les trois autres évènements PP_n, FF_n, FP_n

(a) Calculer PP_n.

(b) Montrer que l'un des deux gagne presque sûrement.

(c) Montrer que le deuxième joueur a plus de chance de gagner que le premier.

4.6.6 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Sur l'ensemble des variables aléatoires définies sur cet espace et à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit la relation $<$ par :

$$X < Y \iff \mathbb{P}\Big((Y < X)\Big) \leqslant \frac{1}{2}$$

Est-ce une relation d'équivalence ?

4.6.7 Soit X une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega) \text{ si } X(\omega) \text{ est pair},\ Y(\omega) = \frac{1 - X(\omega)}{2} \text{ sinon}$$

(a) Montrer que $Y(\Omega) = \mathbb{Z}$, montrer que Y est une variable aléatoire et calculer

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}\Big((Y = k)\Big)$$

(b) Calculer la loi de Y lorsque la loi de X est déterminée par ($p \in]0, 1[$)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\Big((X = n)\Big) = (1 - p)^n\, p$$

4.2.3 Indépendance de variables aléatoires

Définition 4.12 – Loi conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur Ω à valeurs respectives dans E et F, soit $x \in E$ tel que $\mathbb{P}\Big((X = x)\Big) \neq 0$, on appelle alors *loi conditionnelle de Y sachant $X = x$* la probabilité définie sur $Y(\Omega)$ par

$$\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{X=x}\Big((Y = y)\Big) = \frac{\mathbb{P}\Big((X = x,\ Y = y)\Big)}{\mathbb{P}\Big((X = x)\Big)} \overset{\text{Not}}{=} \mathbb{P}\Big((Y = y|X = x)\Big)$$

Remarque 4.16

On peut bien sûr conditionner par n'importe quel événement du type $(X \in A)$ du moment que $\mathbb{P}\Big((X \in A)\Big) \neq 0$.

Définition 4.13

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes définies sur Ω à valeurs respectivement dans E_1 et E_2. On dit que *X_1 et X_2 sont indépendantes* si

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2,\ \mathbb{P}\Big((X_1 = x_1,\ X_2 = x_2)\Big) = \mathbb{P}\Big((X_1 = x_1)\Big)\ \mathbb{P}\Big((X_2 = x_2)\Big)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires discrètes définies sur Ω à valeurs respectivement dans E_k $(k \in [\![1, n]\!])$, on dit qu'elles sont *mutuellement indépendantes* si

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n,\ \mathbb{P}\Big((X_1 = x_1,\ \ldots,\ X_n = x_n)\Big) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\Big((X_k = x_k)\Big)$$

3. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable de variables aléatoires discrètes définies sur Ω à valeurs respectivement dans E_k $(k \in I)$, on dit qu'elles sont *mutuellement indépendantes* si

$$\forall J \subset I,\ J \text{ fini},\ (X_i)_{i \in J}$$

est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Remarque 4.17

Si X et Y sont indépendantes, alors Y et Y sachant $X = x$ ont même loi !

Notation 4.4

Lorsqu'on aura à faire à une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes *et de même loi*, on dira que la famille est **i.i.d.**

Proposition 4.10

Soit I un ensemble au plus dénombrable, soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans des ensembles respectifs E_k $(k \in I)$, alors les variables aléatoires sont indépendantes si, et seulement si,

$$\forall J \subset I,\ J \text{ fini},\ \forall (A_i)_{i \in J} \in \prod_{i \in J} \mathscr{P}(E_i),\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}\left((X_i \in A_i)\right)$$

Remarque 4.18

Dans le cas général des variables aléatoires, il faudrait prendre les A_i dans les tribus $\mathcal{T}_i$ de E_i...

Remarque 4.19

Toute sous-famille d'une famille de variables aléatoires (discrètes) indépendantes est une famille de variables aléatoires indépendantes.

Remarque importante 4.20

Lorsque les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, on peut construire la loi conjointe à partir des lois marginales.

Exemple 4.14

Soit $(A_i)_{i \in I}$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on a équivalence entre dire

1. les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendants
2. les variables aléatoires $(\mathbb{1}_{A_i})_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes

Proposition 4.11 – Lemme des coalitions

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

1. *Soit* X_1 *à valeurs dans* E_1 *et* X_2 *à valeurs dans* E_2*, deux variables aléatoires indépendantes discrètes sur* Ω*, soit* $f_1 : E_1 \to F_1$ *et* $f_2 : E_2 \to F_2$ *deux applications quelconques, alors*

$$f_1 \circ X_1 \text{ et } f_2 \circ X_2 \text{ sont indépendantes}$$

2. *Soit* $X_1, \ldots, X_n$ *des variables aléatoires discrètes à valeurs respectivement dans des ensembles* E_k $(k \in [\![1, n]\!])$, indépendantes, *soit* $m \in [\![1, n-1]\!]$ *et* $f : E_1 \times \cdots \times E_m \to F_1$ *et* $g : E_{m+1} \times \cdots \times E_n \to F_2$ *deux applications, alors*

$$f \circ (X_1, \ldots, X_m) \text{ et } g \circ (X_{m+1}, \ldots, X_n) \text{ sont indépendantes}$$

Dans la pratique, les variables aléatoires ne sont pas définies sur le même espace probabilisé... On peut cependant se ramener au cas énoncé ci-dessus grâce au théorème admis suivant :

Théorème 4.2

Soit $(E_i)_{i \in I}$ *une famille au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables, soit* $(\mathbb{P}_i)_{i \in I}$ *une famille de probabilités telles que*

$$\forall i \in I,\ (E_i, \mathcal{P}(E_i), \mathbb{P}_i) \text{ est un espace probabilisé}$$

alors, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et une famille* $(X_i)_{i \in I}$ *une famille de variables aléatoires définies sur* Ω *à valeurs respectivement dans* E_i $(i \in I)$ *tels que*

1. $(X_i)_{i \in I}$ *est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes*
2. *et*

$$\forall i \in I,\ \mathbb{P}_{X_i} = \mathbb{P}_i$$

Remarque 4.21

Si, au départ, on a des variables aléatoires discrètes Y_i indépendantes définies sur des espaces probabilisés $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mathbb{P}_{\Omega_i})$, le théorème permet de se ramener au cas où tous les Ω_i sont égaux, car on prend $X_i \sim Y_i$.

Exemple 4.15

On a modélisé un jeu infini de Pile ou Face avec indépendance des lancers. Chaque lancer k ($\in \mathbb{N}^*$) peut-être modélisé par

$$\Omega_k = \{P, F\},\ \mathcal{A}_k = \mathcal{P}(\Omega_k),\ \mathbb{P}_{\Omega_k}\left(\{P\}\right) = p,\ \mathbb{P}_{\Omega_k}\left(\{F\}\right) = 1 - p$$

L'espace probabilisé du théorème est celui que nous avons déjà utilisé...

Exercice(s) 4.7

4.7.1 Déterminer pour quels $a > 0$ il existe deux variables aléatoires discrètes X et Y et un espace probabilisé sur lequel elles sont définies telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ telles que

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^{*2},\ \mathbb{P}\left((X = i,\ Y = j)\right) = \frac{a}{2^{i+j}}$$

déterminer les lois marginales. X et Y sont-elles indépendantes ?

4.7.2 Soit X une variable aléatoire discrète, montrer que sont équivalentes les propriétés suivantes

(a) X est presque sûrement constante

(b) X est indépendante d'elle même

(c) X est indépendante de toute autre variable aléatoire

4.7.3 On munit $\Omega = \mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme, pour $i \in [\![1, n]\!]$, on définit la variable aléatoire

$$X_i\ :\ \omega \mapsto \omega(i)$$

On définit aussi la variable aléatoire Y_i par

$$Y_1 = 1,\ \text{et}\ Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i > \max(X_1, \ldots, X_{i-1}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Donner la loi des X_i

(b) Donner la loi conditionnelle de Y_i sachant $X_i = k$

(c) Donner la loi des Y_i

4.7.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $U_0, \ldots, U_n$ des urnes. On suppose que l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit uniformément une urne au hasard et on y pioche une boule. On note X la variable aléatoire donnant le numéro de l'urne et Y celle donnant le numéro de la boule.

(a) Déterminer la loi du couple (X, Y).

(b) X et Y sont-elles indépendantes ?

(c) Calculer $\mathbb{P}\left((X = Y)\right)$.

4.7.5 Un étang contient n brochets et $N-n$ carpes $1 \leqslant n < N$. Un pécheur prend un poisson puis le rejette à l'eau. Donner la loi de la variable aléatoire T_i égale au nombre de prises nécessaires à l'obtention de i brochets.

4.7.6 Soit X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1,2\}$. Quelle est la loi de $Y = (X_Z, X_{3-Z})$?

4.7.7 Trois joueurs lancent chacun un dé à 6 faces. On note pour chacun d'eux T_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ le temps d'attente d'un 6. Donner la loi du vecteur (T_1, T_2, T_3) et déterminer $\mathbb{P}\Big((T_1 < T_2 < T_3)\Big)$.

4.7.8 Soit X_1, ..., X_n des variables aléatoires réelles indépendantes de fonctions de répartitions F_{X_1}, ..., F_{X_n}. Calculer la fonction de répartition des variables aléatoires suivantes

(a) $Y_1 = \max(X_1, \ldots, X_n)$

(b) $Y_2 = \min(X_1, \ldots, X_n)$

(c) Z_k où Z_k désigne la k-ième valeur la plus petite quand on ordonne les X_1, ..., X_n. Ainsi $Z_1 = Y_n$ et $Z_n = Y_1$.

4.7.9 Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On procède à une suite de tirage indépendants avec remise et on note T_n le premier tirage où l'on obtient un numéro déjà tiré auparavant.

(a) Quelles valeurs peut prendre T_n ?

(b) Déterminer la loi de T_n (On pourra s'intéresser à l'évènement $T_n > k$).

(c) Étudier la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ des fonctions de répartition des variables aléatoires $T_n/\sqrt{n}$ quand $n \to \infty$.

4.7.10 On considère une suite de pièces qui sortent d'une chaîne de fabrication. Une pièce donnée a une probabilité p d'être défectueuse et p' d'être contrôlée. On note D_i *resp.* C_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si et seulement si la pièce numéro i est défectueuse *resp.* contrôlée. Toutes ces variables sont mutuellement indépendantes. On note T le numéro de la première pièce à être défectueuse et contrôlée.

(a) Déterminer la loi de T.

(b) On note N le nombre de pièces défectueuses d'indice inférieur ou égal à T. Déterminer la loi conjointe du couple (T, N) puis les lois de T et de N. Sont-elles indépendantes ?

4.7.11 Soit $s \in]1, +\infty[$ et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\zeta(s)$ [a]. Calculer

$$\mathbb{P}\Big((X \wedge Y = 1)\Big)$$

4.7.12 Soit $s \in]1, +\infty[$, X une variable aléatoire suivant une loi $\zeta(s)$, soit Y une variable aléatoire suivant, conditionnellement à $(X = x)$ une loi uniforme sur $[\![1, x]\!]$. Calculer la loi de Y/X.

a. Voir l'exercice 4.4.4.4.7, page 281.

4.2.4 Espérance

Définition 4.14 – Espérance

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète *réelle* définie sur Ω

1. Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, on appelle *espérance de* X et on note

$$\boxed{\mathbb{E}(X) \overset{\text{Not}}{=} \sum_{x \in X(\Omega)} x \; \mathbb{P}\Big((X = x)\Big) \in [0, +\infty]}$$

2. Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, on dit que X est *d'espérance finie* si la famille

$$\Big(x \; \mathbb{P}\Big((X = x)\Big)\Big)_{x \in X(\Omega)} \quad \text{est sommable}$$

on écrit alors

$$\boxed{\mathbb{E}(X) \overset{\text{Not}}{=} \sum_{x \in X(\Omega)} x \; \mathbb{P}\Big((X = x)\Big) \in \mathbb{R}}$$

Une variable aléatoire réelle X d'espérance finie est dite *centrée* si $\mathbb{E}(X) = 0$.

Remarque 4.22

Si X est une variable aléatoire réelle d'espérance finie, alors

$$X - \mathbb{E}(X) \text{ est une variable aléatoire centrée}$$

Remarque importante 4.23

Il arrive souvent que la variable aléatoire X soit à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ (par exemple, le temps d'attente d'un motif au jeu de Pile ou Face), en ce cas

1. Si $\mathbb{P}\Big((X = +\infty)\Big) = 0$, on convient que
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega) \setminus \{+\infty\}} x \, \mathbb{P}\Big((X = x)\Big)$$
2. Si $\mathbb{P}\Big((X = +\infty)\Big) \neq 0$, on convient que $\mathbb{E}(X) = +\infty$

En probabilités, on pose souvent « $0 \times \infty = 0$ ».

Exemple 4.16

On lance n fois un dé à six faces (les lancers étant supposés indépendants), on note S la somme ses résultats trouvés, alors $\mathbb{E}(S)$ représente la moyenne des sommes possibles.

Théorème 4.3 – Formule de transfert

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète, soit $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque, alors

1. *$f \circ X$ est d'espérance finie si, et seulement si*
$$\Big(f(x) \, \mathbb{P}\Big((X = x)\Big)\Big)_{x \in X(\Omega)} \quad \text{est sommable}$$
2. *et en ce cas, on a*
$$\boxed{\mathbb{E}(f \circ X) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \, \mathbb{P}\Big((X = x)\Big)}$$

Propriété 4.5

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur le même espace probabilisé Ω

1. Si Y est d'espérance finie et
$$|X| \leqslant Y \quad \textbf{p.s.} \text{ alors } X \text{ est d'espérance finie}$$

2. L'espérance est une fonction *croissante* : si X et Y sont d'espérances finies telles que

$$X \leqslant Y \quad \textbf{p.s.} \text{ alors } \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$$

En particulier, si $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, alors $\mathbb{E}(Y) \geqslant 0$.

3. L'espérance est *linéaire* : sous les hypothèses précédentes, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\lambda.X+\mu.Y \text{ est d'espérance finie, et } \mathbb{E}(\lambda.X+\mu.Y) = \lambda\ \mathbb{E}(X)+\mu\ \mathbb{E}(Y)$$

Remarque 4.24

L'utilité de ce théorème est de montrer qu'il est inutile de calculer la loi de $f \circ X$ pour en évaluer son espérance.

Proposition 4.12

Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, *alors*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\ \mathbb{P}\left((X = n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left((X > n)\right)$$

Théorème 4.4 – Inégalité de Markov

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, soit* X *une variable aléatoire discrète réelle définie sur* Ω, *d'espérance finie, alors*

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}\left((|X| \geqslant a)\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}}$$

Remarque 4.25

On a utilisé la remarque évidente (mais intéressante) suivante :

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A\right)}$$

Proposition 4.13

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, soit* X *et* Y *des variables aléatoires discrètes réelles définies sur* Ω*, d'espérances finies,* indépendantes *alors*

1. $X\,Y$ *est d'espérance finie*
2. *et*

$$\mathbb{E}(X\,Y) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

la réciproque étant fausse.

Exercice(s) 4.8

4.8.1 Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance finie à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, montrer que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}\Big((X \geqslant n)\Big) \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\Big((X \geqslant n)\Big)$$

4.8.2 Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles de même loi et d'espérances finies, montrer que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$, la réciproque étant fausse.

4.8.3 Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles, montrer que

$$\Big[X \sim Y\Big] \iff \Big[\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+),\ \mathbb{E}\Big(f(X)\Big) = \mathbb{E}\Big(f(Y)\Big)\Big]$$

4.8.4 Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes prenant leurs valeurs dans $[0,1]$. On suppose que, pour tout entier naturel n, on a $\mathbb{E}(X^n) = \mathbb{E}(Y^n)$. En commençant par le cas où X et Y prennent un nombre fini de valeurs, démontrer que X et Y ont même loi.

4.8.5 Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles, montrer que

$$\Big[X \text{ et } Y \text{ indépendantes}\Big] \iff \left[\forall (f,g) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)^2,\ \begin{cases} \mathbb{E}\Big(f(X)\,g(Y)\Big) = \\ \mathbb{E}\Big(f(X)\Big)\,\mathbb{E}\Big(g(Y)\Big) \end{cases}\right]$$

4.8.6 Calculer l'espérance du temps d'attente (première réalisation de l'événement)

Au jeu de Pile ou Face (pièce déséquilibrée, avec $p \in]0,1[$)

(a) de la première réalisation du motif « PF »

(b) de la première réalisation d'avoir autant de Pile que de Face

(c) de la première réalisation d'un motif fini quelconque.

4.8.7 Un joueur lance un dé non pipé. Ensuite, trois dés non pipés sont lancés simultanément. Le joueur perd sa mise m si le numéro qu'il a obtenu n'apparaît pas. Sinon, il récupère sa mise, doublée si son numéro est apparu une fois, triplée s'il est apparu deux fois, quadruplée s'il est apparu trois fois. Quelle est son espérance de gain ?

4.8.8 On se donne m et n dans $\mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble des applications de $[\![1, m]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ de l'équiprobabilité. Soit $X(f)$ le cardinal de l'image de f. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Application : un ascenseur amène m personnes à n étages. Espérance du nombre d'arrêts ?

4.8.9 On munit $\mathbb{N}$ de la distribution de probabilité $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On écrit

$$X = \sum_{n=0}^{+\infty} X_n\, 2^n$$

le développement en base 2 de X ; les X_n valent 0 ou 1 et sont donc des variables de Bernoulli. Déterminer, si $n \in \mathbb{N}$, la probabilité de $(X_n = 1)$.

4.8.10 Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est muni de la probabilité uniforme. Trouver l'espérance du nombre de X_k où $1 \leqslant k \leqslant n$ et X_k est la variable aléatoire donnant le nombre de k-cycles.

4.8.11 Soit E un ensemble fini de cardinal n, $X_1, \dots, X_{n+1}$ des variables indépendantes à valeurs dans E, T la variable aléatoire définie par :

$$T = \min\left\{j \in [\![2, n+1]\!]\,,\ X_j \in \{X_1, \dots, X_{j-1}\}\right\}$$

(a) Montrer

$$\mathbb{E}(T) = \frac{n!}{n^n} \sum_{j=0}^{n} \frac{n^j}{j!}$$

(b) Montrer

$$\mathbb{E}(T) = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t$$

où la fonction f_n est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f_n(t) = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}\, t}$$

(c) Donner un équivalent de $\mathbb{E}(T)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4.8.12 Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, montrer que

$$\mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geqslant 1$$

4.8.13 Le jeu du "not seven" se joue de la manière suivante. On lance deux dés ; si le total diffère de 7, le gain du joueur s'accroît dudit total. Sinon il perd tout et le jeu s'arrête. Le joueur peut décider d'arrêter la partie quand il veut et empoche alors son gain.

(a) Quelle est la loi de la somme S des deux faces des dés lors d'un lancer aléatoire. Calculer son espérance.

(b) Définir la stratégie de quelqu'un qui connaît le résultat du prochain lancer et calculer l'espérance de son gain.

(c) On suppose que les n premiers coups n'ont pas amené la somme 7 et on note G_n le gain obtenu. Soit X le gain du joueur au coup suivant donc, si S_{n+1} est le total amené au $n+1$-e coup :

$$X = \begin{cases} 0 & \text{si } S_{n+1} = 7 \\ G_n + S_{n+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $\mathbb{E}(X|G_n = i)$. En déduire une stratégie d'arrêt en fonction du score obtenu.

4.8.14 Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}+$ et $r > 0$. On suppose que X^r est d'espérance finie. Montrer que

$$\mathbb{P}\Big((X > x)\Big) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^r}\right)$$

4.8.15 Si X admet une espérance montrer que

$$n\ \mathbb{P}\Big((X > n)\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

4.8.16 Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes d'espérances finies telles que

Hyp.1 $\mathbb{E}(X\,Y) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$.

Hyp.2 Il existe deux fonctions croissantes f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une variable aléatoire discrète Z telles que $X = f(Z)$ et $Y = g(Z)$.

Soit $\widehat{Z}$ une variable aléatoire de même loi que Z et indépendante de Z.

(a) Calculer

$$\mathbb{E}\left(\Big(f(\widehat{Z}) - f(Z)\Big)\Big(g(\widehat{Z}) - g(Z)\Big)\right)$$

(b) Montrer que X ou Y est presque sûrement constante.

4.2.5 Lois usuelles

Loi de Bernoulli

Définition 4.15 – Loi de Bernoulli

La loi de Bernoulli intervient pour modéliser une expérience aléatoire à deux résultats (représentés par 0 et 1). La probabilité d'obtenir 1 est notée $p \in [0, 1]$. Si X est une `v.a.r.` de loi de Bernoulli de paramètre p, on écrit :

$$X \sim \mathcal{B}(p), \text{ et on a } \mathbb{P}\Big((X = 1)\Big) = p \text{ et } \mathbb{P}\Big((X = 0)\Big) = 1 - p$$

Propriété 4.6

Soit X une `v.a.r.` suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = p$$

Exemple 4.17

On jette deux dés à 6 faces, et on s'intéresse au fait que la somme des résultats soit divisible par 3. On a donc X qui vaut 1 si la somme est divisible par 3 et 0 sinon. Clairement, X suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Mais que vaut p ?

Exercice(s) 4.9

4.9.1 Dans un gratte-ciel, un ascenseur n'assure que la descente. Il part du sommet à l'étage n, et à chaque fermeture de porte, il descend pour s'arrêter aléatoirement à un étage strictement inférieur jusqu'à ce qu'il parvienne au rez-de-chaussée (étage 0). On suppose qu'à chaque fois le numéro de l'étage d'arrêt suit une loi uniforme sur l'ensemble des numéros des étages encore accessibles.

On note $A(p, n)$ la probabilité que lors de sa descente l'ascenseur s'arrête à l'étage p avec $0 \leqslant p < n$.

(a) Calculer $A(0, n)$, $A(n - 1, n)$, $A(n - 2, n)$.

(b) Démontrer la relation $\mathcal{R}(n)$:

$$\forall p \in [\![0, n-2]\!] \,,\ A(p, n) = \frac{1}{n}\left(1 + \sum_{j=p+1}^{n-1} A(p, j)\right)$$

(c) En utilisant $\mathcal{R}(n)$ et $\mathcal{R}(n-1)$, montrer que

$$\forall p \in [\![0, n-3]\!]\,,\ A(p,n) = A(p,n-1)$$

(d) Déterminer $A(p,n)$ pour $0 \leqslant p < n$.

(e) Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts lors de la descente. Déterminer l'espérance et la variance de X.

4.9.2 L'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $[\![1,n]\!]$ est muni de la probabilité uniforme. On effectue un tirage aléatoire d'une permutation. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1, si k est fixe par la permutation et 0 sinon. On note X la variable aléatoire égale au nombre de points fixes de la permutation. Exprimer X en fonction des X_k et en déduire l'espérance de X.

4.9.3 On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue n tirages successifs sans remise. On appelle *record* tout tirage amenant un nombre plus grand que tous les tirages précédents. Déterminer l'espérance du nombre de records.

4.9.4 On considère un ascenseur qui dessert k étages d'un immeuble, avec n personnes qui rentrent dans cet ascenseur au rez-de-chaussée. On suppose que chacune de ces personnes, indépendamment les unes des autres, a une probabilité uniforme $\frac{1}{k}$ de sortir à l'un ou l'autre des étages. Et on suppose enfin que personne ne rentre dans l'ascenseur au-dessus du rez-de-chaussée.

(a) Soit j un entier entre 1 et k. Quelle est la probabilité que l'ascenseur s'arrête à l'étage j ?

(b) Quelle est l'espérance du nombre d'arrêts de l'ascenseur ?

4.9.5 On lance N fois une pièce donnant « Pile » avec la probabilité $p \in]0,1[$ et « Face » avec la probabilité $q = 1-p$. On admet que les lancers sont mutuellement indépendants. Pour tout entier naturel $2 \leqslant k \leqslant N$, on dit que le k-ième lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $k-1$-ième lancer. Pour tout entier naturel $2 \leqslant n \leqslant N$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

(a) Déterminer la loi de X_2 et son espérance.

(b) Faire de même avec X_3.

(c) On suppose $p \neq q$.

i. Déterminer $\mathbb{P}\Big((X_n = 0)\Big)$, $\mathbb{P}\Big((X_n = 1)\Big)$ et $\mathbb{P}\Big((X_n = n-1)\Big)$.

ii. Déterminer la loi de X_4 et son espérance.

iii. Pour tout $2 \leqslant k \leqslant N$ on note Y_k la variable aléatoire égale à 1 si le k-ième lancer est un changement et 0 sinon. Exprimer X_n à l'aide des Z_k et en déduire $\mathbb{E}(X_n)$.

(d) On suppose $p = q$.

i. Calculer les lois de X_2, X_3 et X_4.

ii. Calculer la loi de X_n.

iii. Pourquoi ce résultat n'est-il plus valable dans le cas $p \neq q$?

4.9.6 Un chat se fait chaque jour les griffes, soit sur le canapé soit sur les rideaux. Il ne se fait jamais les griffes deux jours de suite sur le canapé ; s'il se fait les griffes sur les rideaux un jour donné, alors il choisira le lendemain le canapé avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Le premier jour, il attaque les rideaux. On définit la variable aléatoire X_n égale au nombre de jours où le chat a fait ses griffes sur les rideaux parmi les n premiers jours. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

4.9.7 Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur Ω où $X_n \sim \mathcal{B}(p)$ $(0 < p < 1)$. Montrer que Ω n'est pas dénombrable.

Loi binomiale

Définition 4.16 – Loi binomiale

La loi binomiale intervient pour modéliser une expérience aléatoire de n tirages *avec remises* dans une population où p représente la probabilité de succès. Si X est une `v.a.r.` de loi binomiale de paramètres n et p, on écrit :

$$X \sim \mathcal{B}(n, p), \text{ et on a } \forall k \in [\![0, n]\!]\,, \ \mathbb{P}\left((X = k)\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Remarque 4.26

Les tirages sont supposés *indépendants* les uns des autres. La formule donnée représente donc la probabilité d'avoir k succès (p^k) parmi n tirages. On a donc $n-k$ échecs $((1-p)^{n-k})$. La combinaison $\binom{n}{k}$ correspond au choix des k tirages parmi n pour lesquels nous aurons un succès.

Proposition 4.14

Soit $(X_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de même paramètre p, alors

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Et si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$ sont indépendantes, alors $X+Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$.

Propriété 4.7

Soit X une `v.a.r.` suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = n\,p$$

Exemple 4.18

1. La cas académique est le suivant : on a une urne contenant une proportion p de boules blanches et $1-p$ de boules noires. On tire *avec remise* n fois une boule et il y a succès du tirage lorsque cette boule tirée est blanche.
2. On jette n fois un dé à 6 faces et on s'intéresse au nombre de fois où l'on tire un 5. C'est une loi binomiale de paramètres n et $1/6$.

Proposition 4.15 – Comportement asymptotique discret

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires suivant des lois binomiales $\mathcal{B}(n,p_n)$, où $n\,p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda > 0$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\Big((X_n = k)\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$

Exercice(s) 4.10

4.10.1 On transmet un message en binaire sous forme d'une suite de n bits. Lors de la transmission, chaque bit a une probabilité p d'être modifié. Quelle est la probabilité que le message reçu comporte au plus une erreur ?

4.10.2 On lance 5 dés. À l'issue du premier jet, on reprend les dés qui n'ont pas amené l'as. On procède alors à un second jet et ainsi de suite avec les dés restant jusqu'à obtenir 5 as.

   (a) Quelle est la probabilité que l'on obtienne les 5 as en un lancer ? En au plus deux lancers ? En au plus n lancers ?

   (b) En déduire la probabilité que l'on obtienne les 5 as en exactement n lancers.

   (c) Quelle est la probabilité que le nombre total de dés jetés soit égal à n ?

4.10.3 Deux joueurs lancent une pièce de monnaie parfaitement équilibrée n fois chacun. Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de fois pile.

4.10.4 Un individu gravit un escalier. À chaque fois, avant de faire un pas, il lance une pièce non équilibrée donnant pile avec la probabilité p (avec $0 < p < \frac{1}{2}$) et progresse d'une marche s'il obtient « pile » et enjambe deux marches d'un coup s'il obtient « face ».

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n le nombre de marches gravies à l'issue des n premiers pas et X'_n le nombre de fois où l'individu a progressé par enjambées de 2 marches au cours des n premiers pas.

i. Déterminer une relation simple liant X_n et X'_n. En déduire la loi de X_n.

ii. Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n le nombre aléatoire de pas juste nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche.

i. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y_n ?

ii. Déterminer la loi de Y_1, puis celle de Y_2 et préciser l'espérance de ces deux variables aléatoires.

iii. Montrer que pour tout entier naturel k, et tout entier $n \geqslant 3$, on a :

$$\mathbb{P}\left((Y_n = k)\right) = p\ \mathbb{P}\left((Y_{n-1} = k-1)\right) + q\ \mathbb{P}\left((Y_{n-2} = k-1)\right)$$

iv. En déduire que pour $n \geqslant 3$:

$$\mathbb{E}(Y_n) = p\ \mathbb{E}(Y_{n-1}) + q\ \mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1$$

v. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ quand $n \to +\infty$.

4.10.5 Un vendeur de cycles vend des pédales de bicyclette qu'il se procure chez son grossiste par boîtes de deux. Toutes les boîtes sont supposées identiques et dans chaque boîte il y a une pédale droite et une pédale gauche. Lorsqu'un client demande le remplacement de ses deux pédales de vélo, le commerçant lui vend une boîte complète et lui fait payer la somme de $2\,r$ euros. Lorsqu'un client demande le remplacement d'une seule des deux pédales, le commerçant décide de ne pas obliger le client à acheter une boîte complète, mais majore le prix de la pédale dans une proportion α, c'est-à-dire lui fait payer la somme de $(1+\alpha)\,r$ euros. Pour la simplicité de l'étude, on suppose que chaque client demande le remplacement d'une seule pédale et que l'on sait que le nombre de pédales à poser séparément pendant la durée de l'étude vaut $2\,n$, où n est un entier naturel non nul. On suppose que le vendeur ne dispose au départ que de boîtes complètes et en nombre suffisant. Soit p la probabilité qu'un client demande une pédale droite et X le nombre de boîtes nécessaires à la satisfaction de ces $2n$ demandes (le commerçant n'ouvre une boîte que s'il ne dispose pas d'une boîte entamée lui permettant d'accéder à la demande du client).

(a) Quelle est la loi de X ? On précisera l'ensemble des valeurs prises par X.

(b) Montrer que X peut s'écrire $a+|Y-b|$ où a et b sont des constantes qu'on précisera et Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale.

(c) Donner l'expression l'espérance de $\mathbb{E}(X)$ en fonction de n et p.

Dans la suite, on prendra la valeur $p = \frac{1}{2}$.

(d) Simplifier l'expression de $\mathbb{E}(X)$.

(e) Quelle majoration α le marchand de cycles doit-il appliquer au prix de chaque pédale vendue séparément pour qu'en moyenne le prix de vente des $2n$ pédales vendues séparément soit égal au prix de vente des X boîtes nécessaires vendues $2r$ euros chacune.

La valeur α trouvée dépend de n et on la note dorénavant α_n.

(f) Prouver que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Donner un équivalent simple de α_n.

4.10.6 On considère une population de 2^n vaches susceptibles, avec la probabilité p, d'être porteuses d'un virus donné. On dispose d'un test détectant de façon certaine ce virus dans le lait des vaches. On fixe $0 \leqslant k \leqslant n$. On sépare les vaches en 2^{n-k} groupes de 2^k vaches. On mélange leur lait, on fait un test sur chacun des mélanges, puis on effectue un test sur chacune des vaches des groupes contaminés. On note Y le nombre de groupes malades et X le nombre total de tests effectués.

(a) Exprimer X en fonction de Y, k et n.

(b) Déterminer la probabilité qu'un groupe donné soit malade.

(c) Donner la loi de Y et son espérance.

(d) En déduire l'espérance de X.

(e) On suppose $n = 10$ et $p = 0.01$. Déterminer la meilleure valeur de k.

4.10.7 Soit p et p' deux réels tel que $0 < p \leqslant p' < 1$.

(a) Montrer qu'il existe un couple (X, X') de variables aléatoires discrètes telles que :

$$X \sim \mathcal{B}(p),\ X' \sim \mathcal{B}(p'),\ X' \geqslant X \textbf{ p.s.}$$

(b) En déduire que, si X_n et Y_n sont deux variables aléatoires suivant respectivement des lois binomiales $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(n,p')$, alors, pour tout $k \in [|0, n|]$

$$\mathbb{P}\left((Y_n \geqslant k)\right) \geqslant \mathbb{P}\left((X_n \geqslant k)\right)$$

Loi de Poisson

Définition 4.17 – Loi de Poisson

La loi de Poisson intervient pour modéliser une file d'attente, plus précisément le nombre d'individus arrivant dans une file d'attente avant un temps donné. Si X est une `v.a.r.` est une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on écrit :

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda), \text{ et on a } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left((X = k)\right) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Propriété 4.8

Soit X une `v.a.r.` suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

Proposition 4.16

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois de Poisson de paramètres λ et μ, alors

$$X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$

Exercice(s) 4.11

4.11.1 Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit Y une autre variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n, la loi conditionnelle de Y sachant $N = n$ est une loi binomiale de paramètres (n, p) où $p \in]0, 1[$. On pose $Z = N - Y$. Étudier la loi conditionnelle de Z sachant $Y = k$.

4.11.2 Un promeneur ramasse un nombre N de champignons où N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose qu'un champignon est un bolet avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et une morille avec une probabilité $q = 1 - p$. On note X la loi du nombre de bolets ramassés et Y la loi du nombre de morilles.

(a) Déterminer la loi conjointe du couple (N, X). En déduire la loi de X.

(b) X et Y sont elles indépendantes ?

4.11.3 Soit M une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Posons :

$$X = X_1 + \cdots + X_M$$

Montrer que c'est une variable aléatoire et étudier sa loi.

4.11.4 Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = k$.

4.11.5 Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, calculer pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}\left(X\,(X-1)\,\cdots\,(X-k)\right)$$

4.11.6 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de l'exercice. Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Montrer que, pour toute fonction g définie sur $\mathbb{N}$ telle que les espérances existent, on a :

$$\mathbb{E}(N\,g(N)) = \lambda\ \mathbb{E}(g(N+1))$$

(b) Calculer

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{N+1}\right)$$

(c) Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle qu'il existe un réel λ vérifiant, pour toute fonction g telle que les espérances existent,

$$\mathbb{E}(T\,g(T)) = \lambda\ \mathbb{E}(g(T+1))$$

La variable aléatoire T suit-elle une loi de Poisson ?

4.11.7 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Quelle(s) valeur(s) de j maximise(nt) $\mathbb{P}\Big((X = j)\Big)$?

(b) Pour $j \in \mathbb{N}^*$ fixé, quelle(s) valeur(s) de λ maximise(nt) $\mathbb{P}\Big((X = j)\Big)$?

(c) Calculer pour $\lambda \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}\left(|X - \lambda|\right)$$

4.11.8 Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue $n+1$ tirages avec remise. On note X_i le résultat du i e tirage. On note T le plus petit entier tel que $X_i \leqslant X_{i+1}$.

(a) Déterminer $\mathbb{P}\Big((T > k)\Big)$

(b) Loi de T ?

(c) $\mathbb{E}(T)$?

(d) Mêmes questions si l'urne est infinie et si les jetons sont tirés suivant une loi de Poisson.

4.11.9 Calculer $\mathbb{E}(\cos(\pi X))$ où $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

4.11.10 Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

(a) Montrer que, pour tout $\theta \geqslant 0$ et tout $K \geqslant 0$:

$$\mathbb{P}\left((X \geqslant K\,\lambda)\right) \leqslant \exp\left(-K\,\theta\,\lambda\right)\,\mathbb{E}\left(\exp(\theta\,X)\right)$$

(b) Calculer $\mathbb{E}(\theta\,X)$.

(c) Trouver le « meilleur θ possible ».

(d) Trouver K tel que $\mathbb{P}\left((X \geqslant K\,\lambda)\right) \leqslant 10^{-3}$.

4.11.11 Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables de Bernoulli de paramètre p mutuellement indépendantes, N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de $(X_n)_{n\geqslant 1}$, S la somme aléatoire

$$S = X_1 + \cdots + X_N$$

Déterminer la loi de S. Expliciter le cas où $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Loi géométrique

Définition 4.18 – Loi géométrique

La loi géométrique intervient pour modéliser un premier succès lors d'une succession d'expériences de type Bernoulli. Si X est une `v.a.r.` suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, on écrit :

$$X \sim \mathcal{G}(p),\ \text{et on a } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left((X = k)\right) = p\,(1-p)^{k-1}$$

Remarque 4.27

Il faut échouer $k-1$ fois ($(1-p)^{k-1}$) avant de réussir une fois (p). Les expériences sont, bien sûr, supposées indépendantes.

Propriété 4.9

Soit X une `v.a.r.` suivant une loi géométrique de paramètre p. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

Proposition 4.17

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, alors

$$\left[X \text{ géométrique}\right] \iff \left[\forall (n,k) \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left((X > n+k)\right) = \mathbb{P}\left((X > n)\right)\mathbb{P}\left((X > k)\right)\right]$$

Exercice(s) 4.12

4.12.1 Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(q)$, on suppose que les événements $(X = k)$ et $(Y = l)$ sont toujours indépendants pour tout $(k,l) \in \mathbb{N}^{*2}$.

(a) Calculer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

(b) Retrouver le résultat sans calcul.

4.12.2 (a) Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$, où $p \in]0,1[$. Montrer que, quel que soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de $X - n_0$ sachant $X > n_0$, ne dépend pas de n_0.

(b) Comment interpréter cette propriété ?

(c) Étudier la réciproque : si la loi conditionnelle de $X - n_0$ sachant $X > n_0$ est indépendante de n_0, X `v.a.r.` à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ est-elle une loi géométrique ?

4.12.3 Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. Déterminer $\mathbb{E}(1/X)$.

4.12.4 Soit X_1, ..., X_n des variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p_1, ..., p_n. Quelle est la loi de

$$\min(X_1, \ldots, X_n)\ ?$$

4.2.6 Moments

Définition 4.19 – Moments

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète, réelle définie sur Ω. Soit, de plus, $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que X *possède un moment d'ordre* p si X^p est d'espérance finie, on pose alors

$$m_p = \mathbb{E}\left(X^p\right)$$

Remarque 4.28

Si X possède un moment d'ordre p, alors

$$\forall q \in [\![1, p]\!]\,,\ X \text{ possède un moment d'ordre } q$$

Définition 4.20 – Variance et écart-type

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète, réelle définie sur Ω, ayant un moment d'ordre 2, on appelle *variance* de X et on note

$$\boxed{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) \overset{\text{Not}}{=} \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X)^2\right)}$$

Si X est de variance égale à 1, on dit que X est une variable aléatoire *réduite*.
On appelle *écart-type de* X et on note

$$\sigma(X) \overset{\text{Not}}{=} \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}$$

Remarque importante 4.29

On a aussi

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$$

Propriété 4.10

1. $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) \geqslant 0$ et
$$\left[\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 0\right] \iff \left[X = Cste\ \textbf{p.s.}\right]$$
2. Si X a un moment d'ordre 2, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(a.X + b) = a^2\ \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$$

3. Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = p\,(1-p)$.
4. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = n\,p\,(1-p)$.
5. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \lambda$.
6. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = (1-p)/p^2$.

Remarque 4.30

Si X est une variable aléatoire ayant un moment d'ordre 2 non nul, alors

$$\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} \text{ est centrée et réduite}$$

Définition 4.21 – Covariance

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires discrètes, réelles, ayant des moments d'ordre 2, on appelle *covariance de X et Y* et on note

$$\boxed{\mathbb{C}\mathrm{ovar}(X,Y) \overset{\text{Not}}{=} \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))\,(Y - \mathbb{E}(Y))\Big) = \mathbb{E}(X\,Y) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)}$$

Proposition 4.18

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires discrètes, réelles, ayant des moments d'ordre 2, alors $X+Y$ admet un moment d'ordre 2 et

$$\boxed{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X+Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + 2\,\mathbb{C}\mathrm{ovar}(X,Y) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)}$$

En particulier, l'espace $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (ou $\mathcal{L}^2(\Omega)$) des variables aléatoires (discrètes) réelles ayant un moment d'ordre 2 est un espace vectoriel et l'application

$$(X,Y) \mapsto \mathbb{C}\mathrm{ovar}(X,Y)$$

est bilinéaire, symétrique, positive (elle n'est pas définie, car les variables aléatoires presque sûrement constantes ont une variance nulle).

Remarque importante 4.31

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires discrètes, réelles, ayant des moments d'ordre 2, alors

$$\Big[X \text{ et } Y \text{ indépendantes}\Big] \Rightarrow \Big[\mathbb{C}\text{ovar}(X, Y) = 0\Big]$$

la réciproque étant fausse.
Si X et Y sont indépendantes, on a donc

$$\mathbb{V}\text{ar}(X + Y) = \mathbb{V}\text{ar}(X) + \mathbb{V}\text{ar}(Y)$$

Proposition 4.19 – Cauchy-Schwarz

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires discrètes, réelles, ayant des moments d'ordre 2, non presque sûrement constantes, alors

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbb{C}\text{ovar}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}\text{ar}(X)\ \mathbb{V}\text{ar}(Y)}} \in [-1, 1]$$

s'appelle le coefficient de corrélation de X et Y.
On a de plus (cas d'égalité)

$$\Big[|\rho(X, Y)| = 1\Big] \iff \Big[\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\},\ \alpha.X + \beta.Y = Cste \ \textbf{p.s.}\Big]$$

On peut en déduire que

$$\sigma(X + Y) \leqslant \sigma(X) + \sigma(Y)$$

Remarque 4.32

Plus généralement, on peut définir les espaces $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (ou $\mathcal{L}^p(\Omega)$), où $p \in]1, +\infty[$ par

$$X \in \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ lorsque } \mathbb{E}\left(|X|^p\right) < +\infty$$

et utiliser les inégalités de Hölder pour trouver l'inégalité triangulaire sur

$$\sqrt[p]{\mathbb{E}\left(|X - \mathbb{E}(X)|^p\right)}$$

On a de plus,

$$\forall(p_1, p_2) \in]1, +\infty[^2,\ p_1 \leqslant p_2 \ \Rightarrow\ \mathcal{L}^{p_1}(\Omega) \supset \mathcal{L}^{p_2}(\Omega)$$

Remarque 4.33

On peut de même avoir des inégalités de type Jensen. Si X a une espérance finie, si φ est une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\varphi(X)$ soit d'espérance finie, alors
$$\varphi\left(\mathbb{E}(X)\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\varphi(X)\right)$$

Proposition 4.20

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé,* $(X_1, \ldots, X_n)$ *des variables aléatoires discrètes, réelles, ayant des moments d'ordre 2, alors* $X_1 + \cdots + X_n$ *a un moment d'ordre 2 et*

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{C}\mathrm{ovar}(X_i, X_j)$$

En particulier, si les variables aléatoires sont mutuellement indépendantes (ou simplement indépendantes deux-à-deux), on a

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n)$$

Remarque 4.34

Dans la situation de la proposition ci-dessus, on peut introduire la *matrice de covariance* de $(X_1, \ldots, X_n)$ par

$$\left[\mathbb{C}\mathrm{ovar}(X_i, X_j)\right]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$$

elle est symétrique, positive...

Théorème 4.5 – Bienaymé-Tchebychev

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, soit* X *une variable aléatoire discrète, réelle définie sur* Ω *et ayant un moment d'ordre 2, alors*

$$\boxed{\forall \epsilon > 0,\ \mathbb{P}\Big(\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \epsilon\right)\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}{\epsilon^2}}$$

Exercice(s) 4.13

4.13.1 On a une population constituée de k catégories de proportions p_1, ..., p_k, on tire au hasard n individus, *avec* remise. On note X_j le nombre d'individus de la catégorie j obtenu. Calculer

(a) les espérances et les variances des variables aléatoires X_1, ..., X_k ;

(b) les covariances des (X_i, X_j).

4.13.2 On a une population constituée de k catégories d'effectifs n_1, ..., n_k, on tire au hasard n individus, *sans* remise. On note X_j le nombre d'individus de la catégorie j obtenu. Calculer

(a) les espérances et les variances des variables aléatoires X_1, ..., X_k ;

(b) les covariances des (X_i, X_j).

4.13.3 Soit X et Y deux lois de Bernoulli, $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(q)$. Montrer que :

$$(X, Y) \text{ indépendantes} \iff \mathbb{C}\text{ovar}(X, Y) = 0$$

4.13.4 Soit $X_1, \dots, X_n$ de variance σ^2 et telles que pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$ on ait $\mathbb{C}\text{ovar}(X_i, X_j) = \rho$. Montrer que

$$\rho \geqslant -\frac{\sigma^2}{n-1}$$

Étudier le cas d'égalité.

4.13.5 Soit $X_1, \dots, X_{n+1}$ indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. On pose $Y_i = X_i\, X_{i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $S = Y_1 + \cdots + Y_n$. Loi de Y_i ? Espérance et variance de S ?

4.13.6 On considère une famille $(X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ des **v.a.r.i.i.d.** suivant la loi d'une variable aléatoire X prenant équiprobablement les deux valeurs ± 1. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire

$$\det\Big(\big[X_{i,j}\big]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]} \Big)$$

4.13.7 Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $X \prec Y$ si, pour tout réel t, $\mathbb{P}\Big((X \geqslant t)\Big) \leqslant \mathbb{P}\Big((Y \geqslant t)\Big)$.

(a) Montrer que $X \prec Y$ si et seulement si, pour toute fonction h : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ croissante et bornée on a $\mathbb{E}\Big(h(X)\Big) \leqslant \mathbb{E}\Big(h(Y)\Big)$.

(b) On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Montrer que $X \prec Y$ si et seulement si $\lambda \leqslant \mu$.

(c) On suppose X et Y indépendantes et $X \prec Y$. Montrer que $\mathbb{P}\Big((X \leqslant Y)\Big) \geqslant 1/2$.

4.13.8 Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de X, N une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des $(X_n)_{n\geqslant 1}$,

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

On suppose que toutes les X_n et N ont un moment d'ordre 2. Montrer que S a un moment d'ordre 2 et le calculer.

4.13.9 Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements[a] dont chacun est de probabilité au moins c, avec $c > 1/n$. Montrer qu'il existe i et j distincts tels que

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) \geqslant \frac{c\,(n\,c-1)}{n-1}$$

4.13.10 Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Montrer que, si m est un nombre réel.

$$\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) \leqslant \mathbb{E}\left((X-m)^2\right)$$

a. On pourra prendre en considération les indicatrices de ces événements.

4.2.7 Fonctions génératrices

Dans ce paragraphe, les variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. On a donc

$$X(\Omega) \subset \mathbb{N}$$

On convient donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash X(\Omega),\ \mathbb{P}\left((X=n)\right) = 0$$

Définition 4.22 – Fonction génératrice

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définies sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle *fonction génératrice de* X et on note

$$\forall t \in [-1,1],\ G_X(t) \overset{\text{Def}}{=} \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left((X=n)\right) t^n$$

Cette série entière a un rayon $\geqslant 1$ et sa somme est définie, continue sur $[-1, 1]$.

Proposition 4.21

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, *alors*

$$\forall t \in [-1, 1],\ G_{X+Y}(t) = G_X(t)\, G_Y(t)$$

De même, si X_1, ..., X_n sont n variables aléatoires définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, *alors*

$$\forall t \in [-1, 1],\ G_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t)$$

En particulier, si les X_k sont ***i.i.d.***, *on a*

$$G_{X_1+\cdots+X_n} = \left(G_{X_1}\right)^n$$

Propriété 4.11

1. Toute fonction génératrice est convexe sur $[0, 1]$. Elle est aussi croissante et absolument monotone sur $[0, 1]$.
2. La fonction génératrice caractérise la loi de X, ainsi
$$\Big[X \sim Y\Big] \iff \Big[G_X = G_Y\Big]$$
3. *Loi de Bernoulli* si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors
$$G_X(t) = 1 - p + p\,t$$
4. *Loi binomiale* si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors
$$G_X(t) = (1 - p + p\,t)^n$$
5. *Loi de Poisson* si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors
$$G_X(t) = \exp\Big(\lambda\,(t-1)\Big) = e^{-\lambda}\, e^{\lambda\, t}$$
6. *Loi géométrique* si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors
$$G_X(t) = \frac{p\,t}{1 - (1-p)\,t}$$

Proposition 4.22 – Calculs des moments

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X *une variable aléatoire définie sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{N}$*, on a*

1. Espérance

$$\Big[\mathbb{E}(X) < +\infty\Big] \iff \Big[G_X \text{ est dérivable à gauche en 1}\Big]$$

et, en ce cas, on a

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = G'_X(1^-)}$$

2. Variance

$$\Big[\mathrm{Var}(X) < +\infty\Big] \iff \Big[G_X \text{ est dérivable deux fois à gauche en 1}\Big]$$

et, en ce cas, on a

$$\boxed{G''_X(1^-) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X) \text{ et } \mathrm{Var}(X) = G''_X(1^-) + G'_X(1^-) - G'_X(1^-)^2}$$

3. Moment d'ordre p *soit* $p \in \mathbb{N}^*$

$$\Big[\mathbb{E}\left(|X|^p\right) < +\infty\Big] \iff \Big[G_X \text{ est dérivable } p \text{ fois à gauche en 1}\Big]$$

et, en ce cas

$$\boxed{G_X^{(p)}(1^-) = \mathbb{E}\Big(X(X-1)\cdots(X-p+1)\Big)}$$

Proposition 4.23 – Somme aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé,* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une famille de variables aléatoires* ***i.i.d.*** *définies sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *et* N *une variable aléatoire définie sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{N}$*, indépendante des* X_n*, on pose*

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k$$

N *est une variable aléatoire !*

alors

$$\boxed{G_S = G_N \circ G_{X_1}}$$

Exercice(s) 4.14

4.14.1 Soit X le nombre de garçons d'une famille et Y le nombre total d'enfants. On suppose qu'à chaque naissance, il y a autant de chance d'avoir une fille ou un garçon.

(a) Montrer que :

$$\forall t \in [-1, +1],\ G_X(t) = G_Y\left(\frac{1+t}{2}\right)$$

(b) On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ, quelle est la loi de X ?

(c) On suppose que Y suit une loi géométrique de paramètre p, quelle est la loi de X ?

(d) Quel modèle choisiriez-vous ? (Poisson ou géométrique).

4.14.2 On veut démontrer qu'il n'est pas possible de construire un dé truqué de telle sorte que la somme de 2 lancers consécutifs suive une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

(a) Calculer la fonction génératrice d'une `v.a.r.` suivant une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

(b) Calculer la fonction génératrice de la loi d'une somme de deux lancers indépendants d'un même dé truqué.

(c) En déduire, en considérant les zéros des deux fonctions génératrices, le résultat annoncé.

Reprendre le problème avec deux dés pipés (différemment), peut-on faire ne sorte que la somme des deux dés suivent une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$?

4.14.3 On lance trois fois de suite un dé à 6 faces non truqué. On considère le jeu suivant :

— si le troisième lancer est un « 1 », le joueur gagne le nombre de nombres pairs obtenus dans les deux premiers lancers ;

— sinon, le joueur gagne le nombre de « 6 » obtenus dans les deux premiers lancers.

Calculer (à l'aide de fonctions génératrices) la loi du gain du joueur.

4.14.4 Trouver une loi telle que toute v.a.r. X suivant cette loi vérifie :

$$G_X^2 = G_{2\,X}$$

Conclusion ?

4.14.5 On reprend les notations de la proposition 4.23, page 317.

(a) Montrer que si N et X_1 ont des espérances, alors :

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\ \mathbb{E}(X_1)$$

(b) Si, de plus, N et X_1 ont des moments d'ordre 2, montrer que :

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S) = \mathbb{E}(X_1^2)\ \mathbb{V}\mathrm{ar}(N) + \mathbb{E}(N)\ \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)$$

4.14.6 On s'intéresse à la transmission entre générations d'une propriété. Chaque individu i peut transmettre cette propriété à un nombre de descendants X v.a.r. à valeurs entières, indépendantes, suivant une même loi de probabilité définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\Big((X = k)\Big) = p_k$$

Le nombre total d'individus ayant la propriété est alors :

$$N_0 = 1,\ N_1 = \sum_{i=1}^{N_0} X_{1,i}, \ldots, N_n = \sum_{i=1}^{N_{n-1}} X_{n,i}$$

où les $X_{i,j}$ sont des v.a.r. indépendantes de même distribution que X.

(a) Calculer la fonction génératrice de N_n.

(b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\Big((N_{n+1} = 0)\Big) = G_X\left(\mathbb{P}\Big((N_n = 0)\Big)\right)$$

(c) Montrer que :

$$\exists \xi \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\Big((N_n = 0)\Big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \xi$$

(d) Discuter la valeur de ξ en fonction de la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

(e) Que signifie ce résultat ?

4.14.7 Soit T_i le temps d'attente du i-ème succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

(a) Déterminer directement la loi de T_i.

(b) Retrouver le résultat à l'aide de fonctions génératrices en identifiant la loi de $T_i - T_{i-1}$ et en remarquant que T_{i-1} et $T_i - T_{i-1}$ sont indépendantes.

(c) Un artisan réalise r appels téléphoniques vers r débiteurs. La probabilité que le destinataire décroche est $p \in]0,1[$. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'appels nécessaires pour contacter les r destinataires. Calculer G_X, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

(d) L'artisan ayant fait de bonnes affaires, il est désormais à la tête d'une entreprise qui compte r secrétaires travaillant simultanément. À chaque série d'appels chaque secrétaire contacte un débiteur jusqu'à ce qu'il ait répondu.

i. Quelle est la loi du nombre de séries d'appels nécessaire pour contacter tous le monde ? A-t-elle une espérance finie ?

ii. Quelle est la loi du nombre de personnes N_k ayant répondu avant la k-ème série incluse ?

Un appel, fructueux ou non, dure en moyenne une minute. Quel est en minutes la loi et l'espérance du temps nécessaire à l'entreprise pour contacter les r mauvais payeurs ?

(e) Même question si l'artisan ne dispose plus que de trois secrétaires travaillant simultanément.

4.14.8 Pour $r \geqslant 1$, on note T_r le temps d'attente de la première série de r « 1 » consécutifs dans une succession d'épreuves de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 < p < 1$.

(a) Loi de T_1 ?

(b) Déterminer $\mathbb{P}\Big((T_r = n)\Big)$ pour $1 \leqslant n \leqslant r$.

(c) On note F_1 le temps d'apparition du premier 0. Pour $n > r$ que vaut $\mathbb{P}\Big((T_r = n | F_1 = k)\Big)$?

(d) Déterminer G_{T_2} puis $\mathbb{E}(T_2)$.

(e) Déterminer une fraction rationnelle f_r de la variable t telle que $G_{T_r}(t) = f_r(t)$ pour tout réel t tel que $|t| \leqslant 1$.

(f) Donner l'espérance et la variance de T_r.

4.14.9 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \mathbb{P}\Big((X = i,\ Y = j)\Big) = a_{i+j}$$

déterminer la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que X et Y soient indépendantes.

4.14.10 Un QCM comporte n questions. Il y a $k \geqslant 1$ réponses possibles pour chaque question et une seule réponse exacte qui amène un point. On répond au hasard et on note X le total de points obtenus à l'issue de cette première série. On rend le QCM dans lequel les réponses fausses ont été barrées. On procède à une deuxième série de tests à l'issue de laquelle chaque réponse juste est créditée d'un demi point. On note Y la note obtenue pour cette seconde série.

(a) Déterminer la loi de X.

(b) Déterminer la loi de Y.

(c) Retrouver la loi de Y et identifier la loi de $2\,Y$ en introduisant des variables de Bernoulli convenables.

(d) On note $Z = X + Y$ la note totale obtenue par le candidat à l'issue de cette série des deux tests. Quelle est la fonction génératrice de $2\,Z$? En déduire l'espérance et la variance de Z.

4.14.11 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, q dans $\mathbb{N}^*$. Exprimer, $\mathbb{P}\Big((q \text{ divise } X)\Big)$ en fonction des valeurs de G_X.

4.14.12 Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X et Y sont mutuellement indépendantes si, et seulement si,

$$\forall (s,t) \in [0,1]^2,\ \mathbb{E}\left(s^X\, t^Y\right) = G_X(s)\, G_Y(t)$$

4.14.13 Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est muni de la loi uniforme. On note X_n le nombre de cycles d'une permutation.

(a) Montrer, si $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left(t^{X_n}\right) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t+k)$$

(b) En déduire l'espérance et la variance de X_n.

4.14.14 Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p mutuellement indépendantes, N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des X_n. On pose :

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

On suppose que S et $N - S$ sont indépendantes.

(a) Montrer que

$$\forall x \in [-1,1],\ G(p\,x + (1-p))\, G((1-p)\,x + p) = G(x)$$

(b) En considérant la dérivée logarithmique de G, montrer que, soit N est presque sûrement nulle, soit N suit une loi de Poisson.

On revient au cas général.

(c) On suppose que N suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Trouver la loi de $(S, N-S)$ et en déduire la réciproque du résultat précédent.

Figure 4.2 – Une fougère synthétique