

金融经济学笔记（王江）

作者：田天宇

最新版本: <https://github.com/Tianyu-Tian/FinancialEconomicsNotes>

第1章 引论

(略)

第2章 基本框架

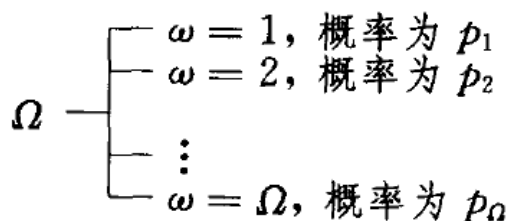
经济环境

状态 ω : 未来每一可能性

状态空间 Ω : 可能状态的集合

概率测度 P : $P \equiv \{p_\omega, \omega \in \Omega\}$, p_ω 是 ω 发生概率, 且 $\sum_{\omega=1}^{\Omega} p_\omega = 1$

形式上, 可以用一棵“状态树”来表示上面描述的经济环境:



经济参与者

假设共有 K 个参与者, 并用指标 k 进行表示 ($k = 1, 2, \dots, K$)

一个参与者的**经济特征**包括: 参与者的经济资源; 参与者的经济需求

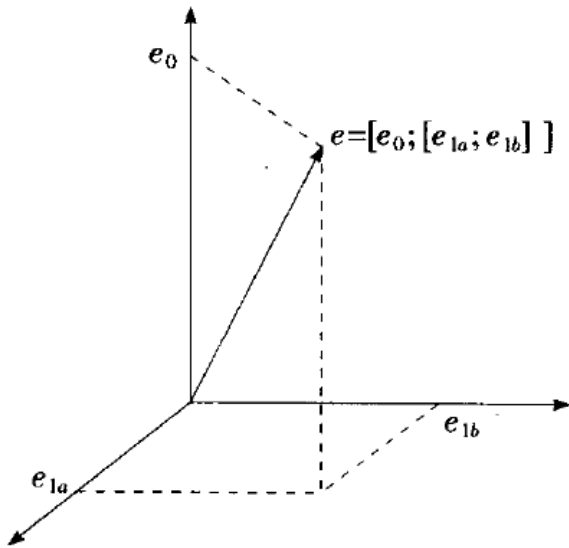
1. 参与者的经济资源:

禀赋: 参与者初始占有的资源, 在本文定义为在每一时期和未来每一可能状态下拥有的商品

比方说参与者 k , 记他在 0 期的禀赋为 $e_{k,0}$, 在 1 期 ω 状态下的禀赋为 $e_{k,1\omega}$, 那么他的禀赋可以表示为:

$$e_k \equiv [e_{k,0}; e_{k,1}] = [e_{k,0}; [e_{k,11}; \dots; e_{k,1\omega}, \dots, e_{k,1\Omega}]]$$

在数学上, 每一个参与者的禀赋可以看成 $(1 + \Omega)$ 维实空间 $R^{1+\Omega}$ 中的一个元素。若进一步假设禀赋是非负的, 那么 $e_k \in R_+^{1+\Omega}$ (等价于 $e \geq 0$), 其中 $R_+^{1+\Omega}$ 是 $R^{1+\Omega}$ 的正象限



上图是当 $\Omega = 2$ 时禀赋作为 $R_+^{1+\Omega}$ 的一个元素的例子

2. 参与者的经济需求：

对于参与者 k ，记他在 0 期的消费为 $c_{k,0}$ ，在 1 期 ω 状态下的消费为 $c_{k,1\omega}$ ，其中 $\omega \in \Omega$ ，那么他的消费可以表示为：

$$c_k \equiv [c_{k,0}; c_{k,1}] = [e_{k,0}; [c_{k,11}; \cdots; c_{k,1\omega}, \cdots, c_{k,1\Omega}]]$$

第 0 期的消费是在 0 期决定的，不依赖 1 期的状态，因此与 ω 无关

(1) 消费集

消费计划：参与者的可能消费选择 $c = [c_0; c_1]$ ，依赖经济的未来状态

消费路径：消费计划的一个特定实现值，比如 $(e_0, e_{1\omega})$

消费集 C ：所有可能消费计划的集合。与禀赋一样，消费集就是 $C = R_+^{1+\Omega}$



定义 2.1 设 A 为 R^n 的一个集合，对于任意的 $a, b \in A$ 和 $\alpha \in [0, 1]$ ， $\alpha a + (1 - \alpha)b$ 也在 A 中，则称集合 A 为凸的

定义 2.2 对于 R^n 的集合 A ，如果有任意序列 $a_i (i = 1, 2, \dots)$ 有极限 α ，且 α 也在 A 内，则称集合 A 是闭的

假设 1 消费集 $C = R_+^{1+\Omega}$ 是 $R^{1+\Omega}$ 的一个闭凸子集

通俗地说，凸集就像内部没有“洞”或“凹陷”的实心物体，而闭集则像是包含了完整边界的容器，严丝合缝，没有“缺口”。

举例说明：

满月  是凸集，月牙  是非凸

$[0, 1]$ 是闭集， $(0, 1)$ 是开集

(2) 偏好

偏好：参与者对所有可能消费计划的一个排序，正式定义如下

定义 2.3 偏好是 C 上的一个二元关系，表示为 \succsim ，满足以下条件：

· 完备性： $\forall a, b \in C, a \succsim b$ 或 $b \succsim a$ ，或两者都成立（称 a 与 b 等价， $a \sim b$ ）

· 传递性： $a \succsim b$ 且 $b \succsim c$ ，则 $a \succsim c$

(3) 偏好的基本假设

公理 1 不满足性：如果 $a \succ b$ ，那么 $a \succ b$

\succsim 是弱偏好，代表“至少一样好”； \succ 代表“严格优于”

公理 2 连续性： $\forall c \in C$ ，集合 $\{a \in C : a \succsim c\}$ 和 $\{b \in C : b \precsim c\}$ 是闭的

集合 a 没有间断或是“缺口”的地方

公理3 凸性: $\forall a, b \in C$ 以及 $\alpha \in (0, 1)$, 如果 $a \succ b$, 则 $\alpha a + (1 - \alpha)b \succ b$

推导: 移项

(4) 效用函数

效用: 给每个消费计划赋予一个实数

效用函数: 从消费计划到实数的映射

定义2.4 对应于偏好关系的效用函数 U 是从 C 到 R 的函数, $U: C \rightarrow R$, 使得 $\forall a, b \in C$, 当且仅当 $a \succeq b$ 时 $U(a) \geq U(b)$

定理2.1 (Debreu) 对于一个在闭的、凸消费集 C 上由定义2.3所定义的、满足公理2的偏好, 存在以一个定义于 C 上的连续效用函数 $U(\cdot)$ 使得

$$\forall a, b \in C, a \succeq b, \text{ 当且仅当 } U(a) \geq U(b)$$

书p16, 看一看例2.3

基于效用函数的三个偏好基本假设:

1. 不满足性: 若 $a \geq b$, 那么 $U(a) \geq U(b)$

2. 连续性: $\lim_{a_n \rightarrow a} U(a_n) = U(a)$

3. 凸性: 如果 $U(a) > U(b)$ 且 $\alpha \in (0, 1)$, 那么 $U(\alpha a + (1 - \alpha)b) > U(b)$

证券市场

假设金融市场由一组证券构成。令 x_ω 为证券在状态 ω 时候的支付, 其中 $\omega \in \Omega$, 那么一个证券就可以由它在各个可能状态下的支付 $\{x_\omega, \omega = 1, 2, \dots, \Omega\}$ 来定义

支付矩阵通过表格形式, 定义了所有市场情境下各种决策的后果。可以理解为是表明了不同情况的收益矩阵

定义 R^Ω 为支付空间, 即所有可能支付的集合, 支付空间的一个向量 $x = [x_1; \dots; x_\Omega]$ 也就定义了一只证券

假设市场有 N 只可交易的证券, 标号为 $n (n = 1, 2, \dots, N)$, 则市场的所有交易证券的支付(也称市场结构)为:

$$X \equiv [X_{\cdot,1}, X_{\cdot,2}, \dots, X_{\cdot,N}] \equiv \begin{bmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,n} & \cdots & X_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{\omega,1} & \cdots & X_{\omega,n} & \cdots & X_{\omega,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{\Omega,1} & \cdots & X_{\Omega,n} & \cdots & X_{\Omega,N} \end{bmatrix}$$

每一行是相同的一个状态, 每一列代表一只证券, 举例:

$$\begin{bmatrix} & \text{半导体ETF} & \text{创新药ETF} \\ \text{纳斯达克涨} & +30\% & -10\% \\ \text{纳斯达克跌} & -20\% & +20\% \end{bmatrix}$$

证券组合: 一个对各证券持有量的集合。设一个组合对证券 n 的持有量为 $\theta_n (n = 1, \dots, N)$, 则我们用持有向量 $\theta \equiv [\theta_1; \dots; \theta_N]$ 来定义这个组合

假设每一个参与者 k , 在开始的时候持有 $\bar{\theta}_{k,n}$ 份证券 $n (n = 1, \dots, N; k = 1, \dots, K)$, 则 $\bar{\theta}_k \equiv [\bar{\theta}_{k,1}; \dots; \bar{\theta}_{k,N}]$ 代表参与者 k 的初始证券组合

如果将所有参与者的初始证券组合求和, 得到了市场中所有可交易证券的集合, 称为市场组合:

$$\theta_m = \sum_{k=1}^K \bar{\theta}_k$$

任何一个支付 x , 如果它可以由交易组合来复制或者产生, 即存在 θ , 使得 $X\theta = x$, 则我们称它为**市场化的**, 即可以通过交易由市场取得

X 是收益矩阵, θ 是你有的个股数量, x 是最终回报

我们记所有市场化支付的集合为 M , 有 $M \equiv \{X\theta : \theta \in R^N\}$

记 $S \equiv [S_1; S_2; \dots; S_N]$ 为交易证券的价格列向量, 令 $\theta_k(S) \equiv [\theta_{k,1}(S); \dots; \theta_{k,N}(S)]$ 表示参与者 k 在价格 S 下对证券的需求向量

交易系统找到一个价格向量 S 使得所有证券的总需求等于这些向量的总供给:

$$\sum_{k=1}^K \theta_k(S) = \sum_{k=1}^K \bar{\theta}_k$$

接着公布市场出清价格

本文假设没有市场摩擦（市场摩擦假设见书p22）

基本经济模型

定义2.5 一个经济的定义如下：

- 1.有两个时期，0和1，在1期有 Ω 个可能状态，有概率测度P
- 2.经济中有K个参与者(k=1,...,K):
 - (a) 同一参与者对未来状态发生的可能性都有相同信息，用P描述
 - (b) 每一参与者都有禀赋 $e_k \in R_+^{1+\Omega}$
 - (c) 每一参与者有定义于 $C = R_+^{1+\Omega}$ 上，且满足公理1到公理3的偏好
- 3.有一个市场结构为X的无摩擦证券市场

定义2.6 在上述定义的经济中，如果所有参与者的1期禀赋都可以表示为其初始证券组合的支付，则我们称之为证券市场经济

市场均衡

消费者在0期购买组合 θ ，则他在0期的消费为 $c_0 = e_0 - S^T \theta$

S 是证券价格矩阵， θ 代表消费者要买多少的证券。购买组合 θ 所用的成本代表了参与者0期的储蓄

在1期的消费为 $c_1 = e_1 + X\theta$

消费者可选的消费计划集（也叫预算集）为：

$$B(e, \{X, s\}) = \{c \geq 0 : c_0 = e_0 - S^T \theta, c_1 = e_1 + X\theta, \theta \in R^N\}$$

消费者选择让他效用最高的消费集，优化问题即：

$$\begin{aligned} \max_{\theta_k} \quad & U_k(c_k) \\ \text{s.t.} \quad & c_{k,0} = e_{k,0} - S^T \theta_k \\ & c_{k,1} = e_{k,1} + X\theta_k \\ & c_0, c_1 \geq 0 \end{aligned}$$

显然需求量是价格向量和禀赋的函数，记 $\theta_k(e_k, S)$

本文假设没有新发行的证券，所有证券都源于各个消费者之间的交换（也可看成实物交换），因而市场出清条件为 $\sum_{k=1}^K \theta_k(e_k, S) = 0$ ，这决定了证券交易的均衡价格

相当于零和博弈

因为 $c_{k,0} = e_{k,0} - S^T \theta_k$ ，因此

$$\sum_{k=1}^K c_{k,0} = \sum_{k=1}^K e_{k,0} - S^T \sum_{k=1}^K \theta_k(e_k, S) = \sum_{k=1}^K e_{k,0}$$

在不同的状态 ω 下，该定理仍符合，即

$$\sum_{k=1}^K c_{k,\omega} = \sum_{k=1}^K e_{k,\omega}, \omega = 1, \dots, \Omega$$

Walrus法则：证券市场的出清也代表商品市场的出清：

$$\sum_{k=1}^K c_k = \sum_{k=1}^K e_k$$

因此，求均衡解包括两个步骤：首先，对任意价格向量 S 求解每个参与者的最优证券组合，得到需求量 $\theta_k(e_k, S)$ ；其次，通过市场出清条件得到均衡价格 S

最优性

前面求的是基于个人的最优解，但对于社会而言不一定是最优解

这里引入一个特定评判标准，记 $\{c_k, k = 1, \dots, K\}$ 为经济中的一个配置

定义2.7 配置 $\{c_k, \forall k\}$ ，Pareto占优配置 $\{c'_k, \forall k\}$ ，如果 $\forall k: U_k(c'_k) \geq U_k(c_k)$ 且严格不等式至少对一个参与者成立

帕累托改进，没有人变坏，至少有一个人变好

定义2.8 给定经济的总供给 $\{e_k, \forall k\}$ ，一个配置 $\{c_k, \forall k\}$ 是可行的，如果 $\sum_k c_k = \sum_k e_k$

可配置的资源等于经济的总资源，相当于各资源在使用上没有限制

定义2.9 帕累托最优(Pareto Optimality): 配置 $\{c_k, \forall k\}$ 是可行的且没有另外占优的可行配置

教材p28,例2.5: 帕累托最优没有考虑不同参与者相对于不同参与者的福利

帕累托最优配置也叫有效配置，达到帕累托最优配置的市场叫有效市场

第3章 Arrow-Debreu经济

Arrow-Debreu证券市场

定义3.1 状态 ω 或有要求权就是当状态为 ω 时支付为1而其他状态下支付为0的证券。也可写为 $x(\omega') = 1_\omega(\omega')$ ，其中 $1_\omega(\cdot)$ 是示性函数，当 $\omega' = \omega$ 时取值为1

对于每个证券，我们可以定义相应的状态或有要求权，总的来看共有 Ω 个状态或有要求权，这些状态或有要求权/状态或有证券也叫Arrow-Debreu证券

在这个市场中，不同的证券个数等于可能的状态数，即 $N = \Omega$ ，其支付矩阵/市场结构为：

$$X^{A-D} \equiv \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

状态价格

记 ϕ_ω 为状态 ω 或有证券在0期的价格，也叫状态 ω 的状态价格

状态价格向量记为 $\phi \equiv [\phi_1; \cdots; \phi_\omega; \cdots; \phi_\Omega]$

证券的状态价格必须为正（没有免费的午餐）： $\phi \gg 0$

市场的完全性

Arrow-Debreu证券的一个重要性质是为未来融资。设1期的消费计划为 $x = [c_{11}; \cdots; c_{1\omega}; \cdots; c_{1\Omega}]$ ，考虑如下1期的证券组合： $\theta = [c_{11}; \cdots; c_{1\omega}; \cdots; c_{1\Omega}]$ ，使得在1期的支付正好等于消费计划：

$$X\theta = X^{A-D}[c_{11}; \cdots; c_{1\omega}; \cdots; c_{1\Omega}] = x$$

这个支付的成本是：

$$\phi^T \theta = \sum_{\omega \in \Omega} \phi_\omega c_{1\omega}$$

定义3.2 如果市场的任一有限消费计划都可以通过有限成本的可交易证券来融资，那么称这个证券市场是完全的

参与者的优化

考虑一个参与者，其禀赋为 e ，效用函数为 U 。给定市场中交易的状态或有证券，我们可以认定参与者的1期禀赋就是他对这些证券的初始持有量

例如，在 ω 的情况下，参与者在1期获得的或有证券为 $e_{1\omega}$ ，其他证券都是0

下面组合 $\bar{\theta} = [e_{11}; \cdots; e_{1\omega}; \cdots; e_{1\Omega}]$ 所带来的支付与参与者在1期的禀赋完全一样:

$$X^{A-D}\bar{\theta} = \bar{\theta} = e_1 = \begin{bmatrix} e_{11} \\ \vdots \\ e_{1\Omega} \end{bmatrix}$$

$\bar{\theta}$ 也称复制组合，它的支付复制了一个给定的支付（参与者在1期的禀赋）

参与者的金融财富（或简单称为“财富”）:

$$\omega = e_0 + \phi^T e_1$$

参与者初始有的证券加上在1期能保留下来的或有证券

预算约束（现在和将来消费的总成本不能超过总财富）:

$$c_0 + \phi^T c_1 = \omega = e_0 + \phi^T e_1$$

ϕ 是或有证券的价格，取 $\omega = 1$ 时的状态举例，等式为 $c_0 + \phi_1 c_1 = e_0 + \phi_1 e_1$

为表达简单，定义价格向量 $\hat{\phi} = [1; \phi]$ ，规定1单位0期消费的价格为1，则预算约束变为 $\hat{\phi}^T c = \hat{\phi}^T e$

优化问题变为:

$$\begin{aligned} \max_{c \in C} \quad & U(c) \\ \text{s.t.} \quad & \hat{\phi}^T c = \hat{\phi}^T e \\ & c \geq 0 \end{aligned}$$

定理3.1 令消费集 $C \in R_+^{1+\Omega}$ 且 $U(\cdot)$ 在 C 上连续，则上面的优化问题有解

证明见书p37。提示：定义在 $R^{1+\Omega}$ 上的连续函数 $U(c)$ 有界闭集上可以取到最大值（Weierstrass定理）

假设参与者的效用函数可微，那么有不满足公理有:

$$\partial_0 D > 0, \quad \partial_\omega U > 0, \quad \forall \omega \in \Omega$$

其中， $\partial_0 D$ 代表 U 对0期消费 c_0 的偏导数/边际效用， $\partial_\omega U$ 代表对1期在状态 ω 下消费 $c_{1\omega}$ 的偏导数/边际效用。向量形式可写为:

$$DU \equiv \begin{bmatrix} \partial_0 D \\ \partial_1 D \\ \vdots \\ \partial_\Omega D \end{bmatrix} \gg 0$$

定理3.2 假定 $DU \gg 0$ ，那么优化问题的解满足:

$$\begin{aligned} \partial_i D &= \lambda \phi_i + \mu_i, \quad i = 0, 1, \cdots, \Omega \\ \hat{\phi}^T (e - c) &= 0 \\ \mu_i c_i &= 0, \quad i = 0, 1, \cdots, \Omega \end{aligned}$$

这里 $\lambda > 0, \mu > 0, \quad i = 0, 1, \cdots, \Omega$