

金融经济学笔记（王江）

作者：田天宇

最新版本: <https://github.com/Tianyu-Tian/FinancialEconomicsNotes>

第1章 引论

(略)

第2章 基本框架

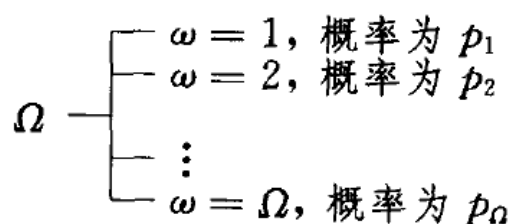
经济环境

状态 w : 未来每一可能性

状态空间 Ω : 可能状态的集合

概率测度 P : $P \equiv \{p_w, w \in \Omega\}$, p_w 是 w 发生概率, 且 $\sum_{w=1}^{\Omega} p_w = 1$

形式上, 可以用一棵“状态树”来表示上面描述的经济环境:



经济参与者

假设共有 K 个参与者, 并用指标 k 进行表示 ($k = 1, 2, \dots, K$)

一个参与者的**经济特征**包括: 参与者的经济资源; 参与者的经济需求

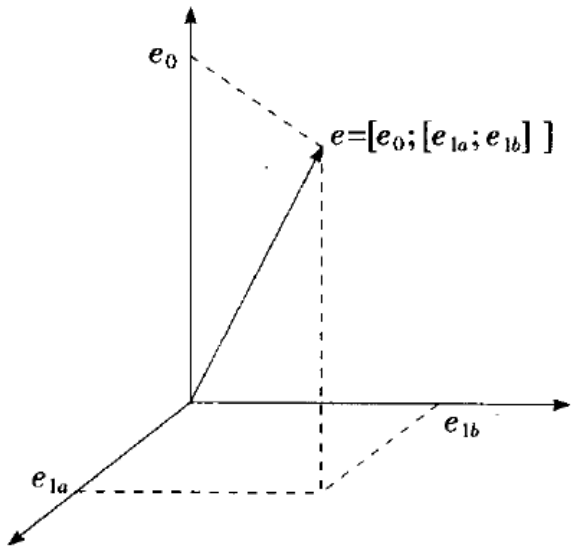
1. 参与者的经济资源:

禀赋: 参与者初始占有的资源, 在本文定义为在每一时期和未来每一可能状态下拥有的商品

比方说参与者 k , 记他在 0 期的禀赋为 $e_{k,0}$, 在 1 期 w 状态下的禀赋为 $e_{k,1w}$, 那么他的禀赋可以表示为:

$$e_k \equiv [e_{k,0}; e_{k,1}] = [e_{k,0}; [e_{k,11}, \dots, e_{k,1w}, \dots, e_{k,1\Omega}]]$$

在数学上, 每一个参与者的禀赋可以看成 $(1 + \Omega)$ 维实空间 $R^{1+\Omega}$ 中的一个元素。若进一步假设禀赋是非负的, 那么 $e_k \in R_+^{1+\Omega}$ (等价于 $e \geq 0$), 其中 $R_+^{1+\Omega}$ 是 $R^{1+\Omega}$ 的正象限



上图是当 $\Omega = 2$ 时禀赋作为 $R_+^{1+\Omega}$ 的一个元素的例子

2. 参与者的经济需求：

对于参与者 k ，记他在 0 期的消费为 $c_{k,0}$ ，在 1 期 w 状态下的消费为 $c_{k,1w}$ ，其中 $w \in \Omega$ ，那么他的消费可以表示为：

$$c_k \equiv [c_{k,0}; c_{k,1}] = [e_{k,0}; [c_{k,11}, \dots, c_{k,1w}, \dots, c_{k,1\Omega}]]$$

第 0 期的消费是在 0 期决定的，不依赖 1 期的状态，因此与 w 无关

(1) 消费集

消费计划：参与者的可能消费选择 $c = [c_0; c_1]$ ，依赖经济的未来状态

消费路径：消费计划的一个特定实现值，比如 (e_0, e_{1w})

消费集 C ：所有可能消费计划的集合。与禀赋一样，消费集就是 $C = R_+^{1+\Omega}$


定义 2.1 设 A 为 R^n 的一个集合，对于任意的 $a, b \in A$ 和 $\alpha \in [0, 1]$ ， $\alpha a + (1 - \alpha)b$ 也在 A 中，则称集合 A 为凸的

定义 2.2 对于 R^n 的集合 A ，如果有任意序列 $a_i (i = 1, 2, \dots)$ 有极限 α ，且 α 也在 A 内，则称集合 A 是闭的

假设 1 消费集 $C = R_+^{1+\Omega}$ 是 $R^{1+\Omega}$ 的一个闭凸子集

通俗地说，凸集就像内部没有“洞”或“凹陷”的实心物体，而闭集则像是包含了完整边界的容器，严丝合缝，没有“缺口”。

举例说明：

满月  是凸集，月牙  是非凸

$[0, 1]$ 是闭集， $(0, 1)$ 是开集

(2) 偏好

偏好：参与者对所有可能消费计划的一个排序，正式定义如下

定义 2.3 偏好是 C 上的一个二元关系，表示为 \succsim ，满足以下条件：

· 完备性： $\forall a, b \in C, a \succsim b$ 或 $b \succsim a$ ，或两者都成立（称 a 与 b 等价， $a \sim b$ ）

· 传递性： $a \succsim b$ 且 $b \succsim c$ ，则 $a \succsim c$

(3) 偏好的基本假设

公理 1 不满足性：如果 $a \succ b$ ，那么 $a \succ b$

\succsim 是弱偏好，代表“至少一样好”； \succ 代表“严格优于”

公理 2 连续性： $\forall c \in C$ ，集合 $\{a \in C : a \succsim c\}$ 和 $\{b \in C : b \precsim c\}$ 是闭的

集合 a 没有间断或是“缺口”的地方

公理3 凸性: $\forall a, b \in C$ 以及 $\alpha \in (0, 1)$, 如果 $a \succ b$, 则 $\alpha a + (1 - \alpha)b \succ b$

推导: 移项

(4) 效用函数

效用: 给每个消费计划赋予一个实数

效用函数: 从消费计划到实数的映射

定义2.4 对应于偏好关系的效用函数 U 是从 C 到 R 的函数, $U: C \rightarrow R$, 使得 $\forall a, b \in C$, 当且仅当 $a \succsim b$ 时 $U(a) \geq U(b)$

定理2.1 (Debreu) 对于一个在闭的、凸消费集 C 上由定义2.3所定义的、满足公理2的偏好, 存在以一个定义于 C 上的连续效用函数 $U(\cdot)$ 使得

$$\forall a, b \in C, a \succsim b, \text{ 当且仅当 } U(a) \geq U(b)$$

书p16, 看一看例2.3

基于效用函数的三个偏好基本假设:

1. 不满足性: 若 $a \geq b$, 那么 $U(a) \geq U(b)$

2. 连续性: $\lim_{a_n \rightarrow a} U(a_n) = U(a)$

3. 凸性: 如果 $U(a) > U(b)$ 且 $\alpha \in (0, 1)$, 那么 $U(\alpha a + (1 - \alpha)b) > U(b)$

证券市场

假设金融市场由一组证券构成。令 x_w 为证券在状态 w 时候的支付, 其中 $w \in \Omega$, 那么一个证券就可以由它在各个可能状态下的支付 $\{x_w, w = 1, 2, \dots, \Omega\}$ 来定义

支付矩阵通过表格形式, 定义了所有市场情境下各种决策的后果。可以理解为是表明了不同情况的收益矩阵

定义 R^Ω 为支付空间, 即所有可能支付的集合, 支付空间的一个向量 $x = [x_1; \dots; x_\Omega]$ 也就定义了一只证券

假设市场有 N 只可交易的证券, 标号为 $n (n = 1, 2, \dots, N)$, 则市场的所有交易证券的支付(也称市场结构)为:

$$X \equiv [X_{\cdot,1}, X_{\cdot,2}, \dots, X_{\cdot,N}] \equiv \begin{bmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,n} & \cdots & X_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{w,1} & \cdots & X_{w,n} & \cdots & X_{w,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{\Omega,1} & \cdots & X_{\Omega,n} & \cdots & X_{\Omega,N} \end{bmatrix}$$

每一行是相同的一个状态, 每一列代表一只证券, 举例:

$$\begin{bmatrix} & \text{半导体ETF} & \text{创新药ETF} \\ \text{纳斯达克涨} & +30\% & -10\% \\ \text{纳斯达克跌} & -20\% & +20\% \end{bmatrix}$$

证券组合: 一个对各证券持有量的集合。设一个组合对证券 n 的持有量为 $\theta_n (n = 1, \dots, N)$, 则我们用持有向量 $\theta \equiv [\theta_1; \dots; \theta_N]$ 来定义这个组合

假设每一个参与者 k , 在开始的时候持有 $\bar{\theta}_{k,n}$ 份证券 $n (n = 1, \dots, N; k = 1, \dots, K)$, 则 $\bar{\theta}_k \equiv [\bar{\theta}_{k,1}; \dots; \bar{\theta}_{k,N}]$ 代表参与者 k 的初始证券组合

如果将所有参与者的初始证券组合求和, 得到了市场中所有可交易证券的集合, 称为市场组合:

$$\theta_m = \sum_{k=1}^K \bar{\theta}_k$$

任何一个支付 x , 如果它可以由交易组合来复制或者产生, 即存在 θ , 使得 $X\theta = x$, 则我们称它为**市场化的**, 即可以通过交易由市场取得

X 是收益矩阵, θ 是你有的个股数量, x 是最终回报

我们记所有市场化支付的集合为 M , 有 $M \equiv \{X\theta : \theta \in R^N\}$

记 $S \equiv [S_1; S_2; \dots; S_N]$ 为交易证券的价格列向量, 令 $\theta_k(S) \equiv [\theta_{k,1}(S); \dots; \theta_{k,N}(S)]$ 表示参与者 k 在价格 S 下对证券的需求向量

交易系统找到一个价格向量 S 使得所有证券的总需求等于这些向量的总供给:

$$\sum_{k=1}^K \theta_k(S) = \sum_{k=1}^K \bar{\theta}_k$$

接着公布市场出清价格

本文假设没有市场摩擦（市场摩擦假设见书p22）

基本经济模型

定义2.5 一个经济的定义如下：

- 1.有两个时期，0和1，在1期有 Ω 个可能状态，有概率测度P
- 2.经济中有K个参与者(k=1,...,K):
 - (a) 同一参与者对未来状态发生的可能性都有相同信息，用P描述
 - (b) 每一参与者都有禀赋 $e_k \in R_+^{1+\Omega}$
 - (c) 每一参与者有定义于 $C = R_+^{1+\Omega}$ 上，且满足公理1到公理3的偏好
- 3.有一个市场结构为X的无摩擦证券市场

定义2.6 在上述定义的经济中，如果所有参与者的1期禀赋都可以表示为其初始证券组合的支付，则我们称之为证券市场经济

市场均衡

消费者在0期购买组合 θ ，则他在0期的消费为 $c_0 = e_0 - S^T \theta$

S 是证券价格矩阵， θ 代表消费者要买多少的证券。购买组合 θ 所用的成本代表了参与者0期的储蓄

在1期的消费为 $c_1 = e_1 + X\theta$

消费者可选的消费计划集（也叫预算集）为：

$$B(e, \{X, s\}) = \{c \geq 0 : c_0 = e_0 - S^T \theta, c_1 = e_1 + X\theta, \theta \in R^N\}$$

消费者选择让他效用最高的消费集，优化问题即：

$$\begin{aligned} \max_{\theta_k} \quad & U_k(c_k) \\ \text{s.t.} \quad & c_{k,0} = e_{k,0} - S^T \theta_k \\ & c_{k,1} = e_{k,1} + X\theta_k \\ & c_0, c_1 \geq 0 \end{aligned}$$

显然需求量是价格向量和禀赋的函数，记 $\theta_k(e_k, S)$

本文假设没有新发行的证券，所有证券都源于各个消费者之间的交换（也可看成实物交换），因而市场出清条件为 $\sum_{k=1}^K \theta_k(e_k, S) = 0$ ，这决定了证券交易的均衡价格

相当于零和博弈

因为 $c_{k,0} = e_{k,0} - S^T \theta_k$ ，因此

$$\sum_{k=1}^K c_{k,0} = \sum_{k=1}^K e_{k,0} - S^T \sum_{k=1}^K \theta_k(e_k, S) = \sum_{k=1}^K e_{k,0}$$

在不同的状态 w 下，该定理仍符合，即

$$\sum_{k=1}^K c_{k,w} = \sum_{k=1}^K e_{k,w}, w = 1, \dots, \Omega$$

Walrus法则：证券市场的出清也代表商品市场的出清：

$$\sum_{k=1}^K c_k = \sum_{k=1}^K e_k$$

因此，求均衡解包括两个步骤：首先，对任意价格向量 S 求解每个参与者的最优证券组合，得到需求量 $\theta_k(e_k, S)$ ；其次，通过市场出清条件得到均衡价格 S

最优性

前面求的是基于个人的最优解，但对于社会而言不一定是最优解

这里引入一个特定评判标准，记 $\{c_k, k = 1, \dots, K\}$ 为经济中的一个配置

定义2.7 配置 $\{c_k, \forall k\}$ ，Pareto占优配置 $\{c'_k, \forall k\}$ ，如果 $\forall k : U_k(c'_k) \geq U_k(c_k)$ 且严格不等式至少对一个参与者成立

帕累托改进，没有人变坏，至少有一个人变好

定义2.8 给定经济的总供给 $\{e_k, \forall k\}$ ，一个配置 $\{c_k, \forall k\}$ 是可行的，如果 $\sum_k c_k = \sum_k e_k$

可配置的资源等于经济的总资源，相当于各资源在使用上没有限制

定义2.9 帕累托最优(Pareto Optimality)：配置 $\{c_k, \forall k\}$ 是可行的且没有另外占优的可行配置

教材p28,例2.5：帕累托最优没有考虑不同参与者相对于不同参与者的福利

帕累托最优配置也叫有效配置，达到帕累托最优配置的市场叫有效市场