金融经济学笔记（王江）

作者：田天宇

下载最新版本:
Github（需要翻墙）:https://github.com/Tianyu-Tian/FinancialEconomicsNotes
码云（无需翻墙）：https://gitee.com/tian_tianyu/FinancialEconomicsNotes

目录

第1章 引论

（略）

第2章 基本框架

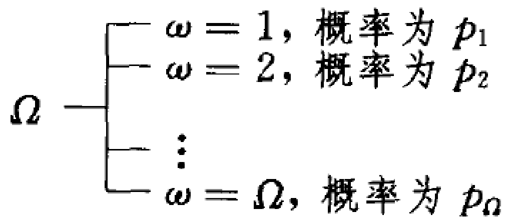
经济环境

状态 ω：未来每一可能性

状态空间 Ω：可能状态的集合

概率测度 P：$P \equiv \{p_\omega, \omega \in \Omega\}$，$p_\omega$是ω发生概率，且$\sum_{\omega=1}^{\Omega} p_\omega = 1$

形式上，可以用一棵“状态树”来表示上面描述的经济环境：



经济参与者

假设共有K个参与者，并用指标k进行表示（$k=1,2,...,K$）

一个参与者的**经济特征**包括：参与者的经济资源；参与者的经济需求

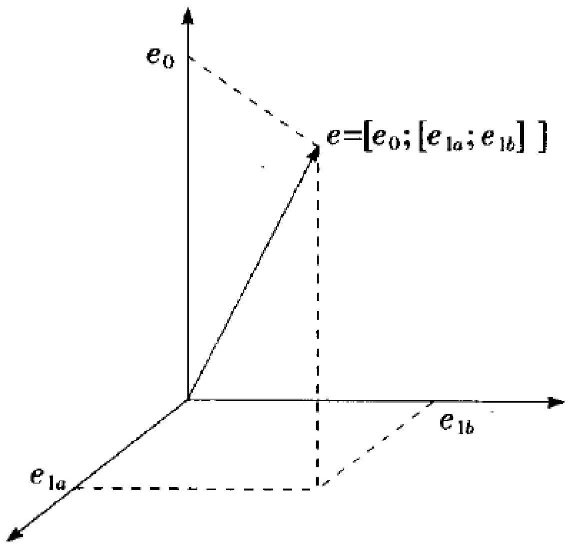
1.参与者的经济资源：

禀赋：参与者初始占有的资源，在本文定义为在每一时期和未来每一可能状态下拥有的商品

比方说参与者k，记他在0期的禀赋为$e_{k,0}$，在1期w状态下的禀赋为$e_{k,1\omega}$，那么他的禀赋可以表示为:

$$e_k \equiv [e_{k,0}; e_{k,1}] = [e_{k,0}; [e_{k,11}; \cdots; e_{k,1\omega}, \cdots, e_{k,1\Omega}]]$$

在数学上，每一个参与者的禀赋可以看成$(1+\Omega)$维实空间$R^{1+\Omega}$中的一个元素。若进一步假设禀赋是非负的，那么 $e_k \in R_+^{1+\Omega}$ （等价于$e \geq 0$）,其中 $R_+^{1+\Omega}$是 $R^{1+\Omega}$的正象限



上图是当 $\Omega=2$时禀赋作为 $R_+^{1+\Omega}$的一个元素的例子

2.参与者的经济需求：

对于参与者k，记他在0期的消费为$c_{k,0}$，在1期ω状态下的消费为$c_{k,1\omega}$，其中$\omega \in \Omega$，那么他的消费可以表示为:

$$c_k \equiv [c_{k,0}; c_{k,1}] = [e_{k,0}; [c_{k,11}; \cdots; c_{k,1\omega}, \cdots, c_{k,1\Omega}]]$$

第0期的消费是在0期决定的，不依赖1期的状态，因此与ω无关

（1）消费集

消费计划：参与者的可能消费选择$c=[c_0;c_1]$，依赖经济的未来状态

消费路径：消费计划的一个特定实现值，比如 $(e_0, e_{1\omega})$

消费集 C：所有可能消费计划的集合。与禀赋一样，消费集就是$C=R_+^{1+\Omega}$

定义2.1　设A为R^n的一个集合，对于任意的$a,b \in A$和$\alpha \in [0,1]$，$\alpha a+(1-\alpha)b$也在A中，则称集合A为凸的

定义2.2　对于R^n的集合A，如果有任意序列$a_i(i=1,2,...)$有极限α，且α也在A内，则称集合A是闭的

假设1　消费集$C=R_+^{1+\Omega}$是$R^{1+\Omega}$的一个闭凸子集

> 通俗地说，凸集就像内部没有“洞”或“凹陷”的实心物体，而闭集则像是包含了完整边界的容器，严丝合缝，没有“缺口”。
> 举例说明：
> 满月🌕是凸集，月牙🌙是非凸
> [0,1]是闭集，(0,1)是开集

（2）偏好

偏好：参与者对所有可能消费计划的一个排序，正式定义如下

定义2.3　偏好是C上的一个二元关系，表示为$\succsim$，满足以下条件：
·完备性：$\forall a, b \in C, a \succsim b$ 或 $b \succsim a$，或两者都成立（称a与b等价，$a \backsim b$）
·传递性：$a \succsim b$且$b \succsim c$，则$a \succsim c$

（3）偏好的基本假设

公理1　不满足性：如果$a > b$，那么$a \succ b$

> $\succsim$是弱偏好，代表“至少一样好”；$\succ$代表 “严格优于”

公理2　连续性：$\forall c \in C$，集合$\{a \in C : a \succsim c\}$和$\{b \in C : b \precsim c\}$是闭的

> 集合a没有间断或是“缺口”的地方

公理3　凸性：$\forall a, b \in C$以及$\alpha \in (0,1)$，如果$a \succ b$，则 $\alpha a + (1-\alpha)b \succ b$

> 推导：移项

（4）效用函数

效用：给每个消费计划赋予一个实数

效用函数：从消费计划到实数的映射

定义2.4　对应于偏好关系的效用函数U是从C到R的函数，$U : C \rightarrow R$，使得 $\forall a, b \in C$，当且仅当$a \succsim b$时$U(a) \geq U(b)$

定理2.1　（Debreu）对于一个在闭的、凸消费集C上由定义2.3所定义的、满足公理2的偏好，存在以一个定义于C上的连续效用函数U(·)使得

$$\forall a, b \in C, a \succsim b, \text{当且仅当} U(a) \geq U(b)$$

> 书p16，看一看例2.3

基于效用函数的三个偏好基本假设：
1.不满足性：若$a \geq b$，那么$U(a) \geq U(b)$
2.连续性：$\lim_{a_n \rightarrow a} U(a_n) = U(a)$
3.凸性：如果$U(a) > U(b)$且$\alpha \in (0,1)$，那么$U(\alpha a + (1-\alpha)b) > U(b)$

证券市场

假设金融市场由一组证券构成。令x_ω为证券在状态w时候的支付，其中$\omega \in \Omega$，那么一个证券就可以由它在各个可能状态下的支付$\{x_\omega, \omega = 1, 2, ..., \Omega\}$来定义

> 支付矩阵通过表格形式，定义了所有市场情境下各种决策的后果。可以理解为是表明了不同情况的收益矩阵

定义R^Ω为支付空间，即所有可能支付的集合，支付空间的一个向量$x = [x_1; ...; x_\Omega]$也就定义了一只证券

假设市场有N只可交易的证券，标号为$n(n = 1, 2, ..., N)$,则市场的中所有交易证券的支付(也称市场结构)为：

$$X \equiv [X_{\cdot,1}, X_{\cdot,2}, ..., X_{\cdot,N}] \equiv \begin{bmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,n} & \cdots & X_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{\omega,1} & \cdots & X_{\omega,n} & \cdots & X_{\omega,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{\Omega,1} & \cdots & X_{\Omega,n} & \cdots & X_{\Omega,N} \end{bmatrix}$$

> 每一行是相同的一个状态，每一列代表一只证券，举例：
>
> $$\begin{bmatrix} & \text{半导体}ETF & \text{创新药}ETF \\ \text{纳斯达克涨} & +30\% & -10\% \\ \text{纳斯达克跌} & -20\% & +20\% \end{bmatrix}$$

证券组合：一个对各证券持有量的集合。设一个组合对证券n的持有量为$\theta_n(n = 1, ..., N)$，则我们用持有向量$\theta \equiv [\theta_1; ...; \theta_n]$来定义这个组合

假设每一个参与者k，在开始的时候持有$\bar{\theta}_{k,n}$份证券$n(n = 1, ..., N; k = 1, ...K)$，则$\bar{\theta}_k \equiv [\bar{\theta}_{k,1}; ...; \bar{\theta}_{k,N}]$代表参与者k的初始证券组合

如果将所有参与者的初始证券组合求和，得到了市场中所有可交易证券的集合，称为市场组合：

$$\theta_m = \sum_{k=1}^{K} \bar{\theta}_k$$

任何一个支付 x，如果它可以由交易组合来复制或者产生，即存在 θ，使得 $X\theta = x$，则我们称它为**市场化的**，即可以通过交易由市场取得

> X是收益矩阵，θ是你有的个股数量，x是最终回报

我们记所有市场化支付的集合为M，有 $M \equiv \{X\theta : \theta \in R^N\}$

记 $S \equiv [S_1; S_2; ...S_N]$为交易证券的价格列向量，令 $\theta_k(S) \equiv [\theta_{k,1}(S); ...; \theta_{k,N}(S)]$表示参与者k在价格S下对证券的需求向量

交易系统找到一个价格向量S使得所有证券的总需求等于这些向量的总供给：

$$\sum_{k=1}^{K} \theta_k(S) = \sum_{k=1}^{K} \bar{\theta}_k$$

接着公布市场出清价格

本文假设没有市场摩擦（市场摩擦假设见书p22）

基本经济模型

定义2.5　一个经济的定义如下：
1.有两个时期，0和1，在1期有Ω个可能状态，有概率测度P
2.经济中有K个参与者(k=1,...,K):
（a）同一参与者对未来状态发生的可能性都有相同信息，用P描述
（b）每一参与者都有禀赋 $e_k \in R_+^{1+\Omega}$
（c）每一参与者有定义于 $C = R_+^{1+\Omega}$上，且满足公理1到公理3的偏好
3.有一个市场结构为X的无摩擦证券市场

定义2.6　在上述定义的经济中，如果所有参与者的1期禀赋都可以表示为其初始证券组合的支付，则我们称之为证券市场经济

市场均衡

消费者在0期购买组合 θ，则他在0期的消费为 $c_0 = e_0 - S^T\theta$

> S是证券价格矩阵，θ代表消费者要买多少的证券。购买组合θ所用的成本代表了参与者0期的储蓄

在1期的消费为 $c_1 = e_1 + X\theta$

消费者可选的消费计划集（也叫预算集）为：

$$B(e, \{X, s\}) = \{c \geq 0 : c_0 = e_0 - S^T\theta, c_1 = e_1 + X\theta, \theta \in R^N\}$$

消费者选择让他效用最高的消费集，优化问题即：

$$\begin{aligned} \max_{\theta_k} \quad & U_k(c_k) \\ \text{s.t.} \quad & c_{k,0} = e_{k,0} - S^T\theta_k \\ & c_{k,1} = e_{k,1} + X\theta_k \\ & c_0, c_1 \geq 0 \end{aligned}$$

显然需求量是价格向量和禀赋的函数，记 $\theta_k(e_k, S)$

本文假设没有新发行的证券，所有证券都源于各个消费者之间的交换（也可看成实物交换），因而市场出清条件为 $\sum_{k=1}^{K} \theta_k(e_k, S) = 0$，这决定了证券交易的均衡价格

> 相当于零和博弈

因为 $c_{k,0} = e_{k,0} - S^T\theta_k$，因此

$$\sum_{k=1}^{K} c_{k,0} = \sum_{k=1}^{K} e_{k,0} - S^T \sum_{k=1}^{K} \theta_k(e_k, S) = \sum_{k=1}^{K} e_{k,0}$$

在不同的状态ω下，该定理仍符合，即

$$\sum_{k=1}^{K} c_{k,\omega} = \sum_{k=1}^{K} e_{k,\omega}, \omega = 1, ..., \Omega$$

Walrus法则：证券市场的出清也代表商品市场的出清：

$$\sum_{k=1}^{K} c_k = \sum_{k=1}^{K} e_k$$

因此，求均衡解包括两个步骤：首先，对任意价格向量S求解每个参与者的最优证券组合，得到需求量$\theta_k(e_k, S)$；其次，通过市场出清条件得到均衡价格S

最优性

前面求的是基于个人的最优解，但对于社会而言不一定是最优解

这里引入一个特定评判标准，记$\{c_k, k = 1, ..., K\}$为经济中的一个配置

定义2.7　配置$\{c_k, \forall k\}$，Pareto占优配置$\{c'_k, \forall k\}$，如果 $\forall k: U_k(c'_k) \geq U_k(c_k)$且严格不等式至少对一个参与者成立

> 帕累托改进，没有人变坏，至少有一个人变好

定义2.8　给定经济的总供给$\{e_k, \forall k\}$，一个配置$\{c_k, \forall k\}$是可行的，如果 $\sum_k c_k = \sum_k e_k$

> 可配置的资源等于经济的总资源，相当于各资源在使用上没有限制

定义2.9　帕累托最优(Pareto Opimality)：配置$\{c_k, \forall k\}$是可行的且没有另外占优的可行配置

> 教材p28,例2.5：帕累托最优没有考虑不同参与者相对于不同参与者的福利

帕累托最优配置也叫有效配置，达到帕累托最优配置的市场叫有效市场

第3章 Arrow-Debreu经济

Arrow-Debreu证券市场

定义3.1　状态ω或有要求权就是当状态为ω时支付为1而其他状态下支付为0的证券。也可写为$x(\omega') = 1_\omega(\omega')$，其中$1_\omega(\cdot)$是示性函数，当$\omega' = \omega$时取值为1

对于每个证券，我们可以定义相应的状态或有要求权，总的来看共有Ω个状态或有要求权，这些状态或有要求权/状态或有证券也叫Arrow-Debreu证券

在这个市场中，不同的证券个数等于可能的状态数，即 $N = \Omega$，其支付矩阵/市场结构为：

$$X^{A-D} \equiv \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

状态价格

记ϕ_ω为状态ω或有证券在0期的价格，也叫状态ω的状态价格

状态价格向量记为$\phi \equiv [\phi_1; \cdots; \phi_\omega; \cdots; \phi_\Omega]$

证券的状态价格必须为正（没有免费的午餐）：$\phi \gg 0$

市场的完全性

Arrow-Debreu证券的一个重要性质是为未来融资。设1期的消费计划为$x=[c_{11};\cdots;c_{1\omega};\cdots;c_{1\Omega}]$，考虑如下1期的证券组合：$\theta=[c_{11};\cdots;c_{1\omega};\cdots;c_{1\Omega}]$，使得在1期的支付正好等于消费计划：

$$X\theta=X^{A-D}[c_{11};\cdots;c_{1\omega};\cdots;c_{1\Omega}]=x$$

这个支付的成本是:

$$\phi^T\theta=\sum_{\omega\in\Omega}\phi_\omega c_{1\omega}$$

定义3.2 如果市场的任一有限消费计划都可以通过有限成本的可交易证券来融资，那么称这个证券市场是完全的

参与者的优化

考虑一个参与者，其禀赋为 e，效用函数为 U。给定市场中交易的状态或有证券，我们可以认定参与者的1期禀赋就是他对这些证券的初始持有量

> 例如，在 ω的情况下，参与者在1期获得的或有证券为 $e_{1\omega}$，其他证券都是0

下面组合 $\bar\theta=[e_{11};\cdots;e_{1\omega};\cdots;e_{1\Omega}]$所带来的支付与参与者在1期的禀赋完全一样:

$$X^{A-D}\bar\theta=\bar\theta=e_1=\begin{bmatrix}e_{11}\\ \vdots\\ e_{1\Omega}\end{bmatrix}$$

> $\bar\theta$也称复制组合，它的支付复制了一个给定的支付（参与者在1期的禀赋）

参与者的金融财富（或简单称为“财富”）：

$$\omega=e_0+\phi^Te_1$$

> 参与者初始有的证券加上在1期能保留下来的或有证券

预算约束（现在和将来消费的总成本不能超过总财富）：

$$c_0+\phi^Tc_1=\omega=e_0+\phi^Te_1$$

> ϕ是或有证券的价格，取$\omega=1$时的状态举例，等式为 $c_0+\phi_1c_1=e_0+\phi_1e_1$

为表达简单，定义价格向量 $\hat\phi=[1;\phi]$，规定1单位0期消费的价格为1，则预算约束变为 $\hat\phi^Tc=\hat\phi^Te$

优化问题变为:

$$\begin{gathered}\max_{c\in C}\quad U(c)\\ \text{s.t.}\quad \hat\phi^Tc=\hat\phi^Te\\ c\geq 0\end{gathered}$$

定理3.1 令消费集$C\in R_+^{1+\Omega}$且$U(\cdot)$在C上连续，则上面的优化问题有解

> 证明见书p37。提示：定义在 $R^{1+\Omega}$上的连续函数$U(c)$有界闭集上可以取到最大值（Weierstrass定理）

假设参与者的效用函数可微，那么有不满足公理有：

$$\partial_0D>0,\quad \partial_\omega U>0,\quad \forall\omega\in\Omega$$

其中，∂_0D代表 U对0期消费 c_0的偏导数/边际效用，$\partial_\omega U$代表对1期在状态 ω下消费 $c_{1\omega}$的偏导数/边际效用。向量形式可写为:

$$DU\equiv\begin{bmatrix}\partial_0D\\ \partial_1D\\ \vdots\\ \partial_\Omega D\end{bmatrix}\gg 0$$

定理3.2 （库恩塔克条件）假定$DU\gg 0$，那么优化问题的解满足：

$$\partial_iD=\lambda\phi_i+\mu_i,\quad i=0,1,\cdots,\Omega$$

$$\hat{\phi}^T(e-c)=0$$
$$\mu_i c_i=0,\quad i=0,1,\cdots,\Omega$$

这里 $\lambda>0,\mu>0,\quad i=0,1,\cdots,\Omega$

> 例题
>
> **例 3.3** 考虑"Lucas 树经济"，1 期有两个概率相等的状态 a 和 b。假设 1 期的两个可能状态的状态价格分别为 ϕ_a 和 ϕ_b。考虑一个参与者，他的禀赋为（e_0；e_{1a}；e_{1b}）。他具有如下对数形式的效用函数：
>
> $$U(c_0,c_{1a},c_{1b})=\log c_0+\frac{1}{2}(\log c_{1a}+\log c_{1b})$$
>
> 他的最优消费/组合选择是什么？
>
> 给定状态价格和他的禀赋，他的总财富是 $w=e_0+\phi_a e_{1a}+\phi_b e_{1b}$。他的最优化问题是
>
> $$\begin{aligned}\max_{c_0,c_{1a},c_{1b}}\quad & \log c_0+\frac{1}{2}(\log c_{1a}+\log c_{1b})\\ \text{s.t.}\quad & w-(c_0+\phi_a c_{1a}+\phi_b c_{1b})=0\\ & c_0,c_{1a},c_{1b}\geqslant 0\end{aligned}$$
>
> 其一阶条件为：
>
> $$\begin{aligned}&1/c_0=\lambda+\mu_0\\ &\frac{1}{2}(1/c_{1a})=\lambda\phi_a+\mu_a\\ &\frac{1}{2}(1/c_{1b})=\lambda\phi_b+\mu_b\\ &c_0+\phi_a c_{1a}+\phi_b c_{1b}=w\\ &\mu_i c_i=0,\quad i=0,a,b\end{aligned}$$
>
> 给定效用函数的形式，当消费水平趋近于 0 时，边际效用趋近于无穷。

> 因此，参与者选择的最优消费在每一时期每一状态都严格为正（当然，假设 $\phi \gg 0$，即所有状态价格严格为正）。也就是说，最优消费总是在 $\mathrm{R}^{1+\Omega}$ 的内部而不是边界上，因而非负性约束从不起限制作用。在这种情况下，我们可以在一阶条件中去掉这些约束（以及对应的乘子）而直接求解最优。因此，$\mu_i = 0\ (i = 0, a, b)$。对于 c 我们立即得到如下解：
>
> $$c_0 = \frac{1}{\lambda}, \quad c_{1a} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{2\phi_{1a}}, \quad c_{2b} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{2\phi_{1b}}$$
>
> 把 c 的解代入预算约束，我们可以得到 λ 的解：
>
> $$\lambda = \frac{2}{\omega}$$
>
> 最后，我们有
>
> $$c_0 = \frac{1}{2}w, \quad c_{1a} = \frac{1}{4}\frac{w}{\phi_a}, \quad c_{1b} = \frac{1}{4}\frac{w}{\phi_a}$$
>
> 可以看出，参与者把一半财富用作现在的消费，把另外一半财富作为未来的消费。某一状态下的消费与对应的状态价格负相关。这个结果很直观。状态价格高的状态下的消费更昂贵。结果，参与者在这些状态下选择较低的消费。

内部解：达到最优时非负性约束不起作用
边角解：非负性约束起作用

后续不做声明的情况下都假设解为内部解

假设存在内部解，可以把一阶条件写为 $DU_k(c_k) = \lambda_k \hat{\phi}$，则有 $\partial_0 U_k(c_k) = \lambda_k \phi_0 = \lambda_k$； $\partial_\omega U_k(c_k) = \lambda_k \phi_\omega$，即:

$$\frac{\partial_\omega U_k(c_k)}{\partial_0 U_k(c_k)} = \phi_\omega$$

拓展到多人：

$$\frac{\partial_\omega U_k(c_k)}{\partial_0 U_k(c_k)} = \phi_\omega = \frac{\partial_\omega U_k'(c_k')}{\partial_0 U_k'(c_k')}$$

> 前文提到假设0期消费的价格 ϕ_0为1
> 上式描述了达到最优时，在1期状态 ω下消费的边际效用与0期消费的边际效用之比等于 ω的状态价格
> 类比中微里的 $\frac{U_a'}{U_b'} = \frac{P_a}{P_b}$，只不过这里 $P_b = 1$

市场均衡

定理3.3　对于定义2.5中给出的，存在Arror-Debreu证券市场的经济来说，均衡总是存在的

Arror-Debreu经济均衡是指以下条件成立的价格集合：
1.给定状态价格，每一参与者达到最优化:

$$
\begin{gathered}
c_k(e_k,\phi)=Argmax \quad U_k(c_k) \\
s.t. \quad (1)c_{k,0}+\phi^T c_{k,1}=e_{k,0}+\phi^T e_{k,1} \\
(2)c_k \geq 0
\end{gathered}
$$

2.证券市场出清:

$$
\begin{gathered}
\sum_k c_{k,0}(e_k,\phi)=\sum_k e_{k,0} \\
\sum_k c_{k,1}(e_k,\phi)=\sum_k e_{k,1}
\end{gathered}
$$

> 例题
>
> **例 3.4** 考虑一个经济，在 1 期有两个概率相等的状态 a 和 b。经济中有参与者 1 和 2，他们具有的禀赋分别为：
>
> $$e_1:\quad 100 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right. \qquad e_2:\quad 0 \left\{ \begin{array}{l} 200 \\ 50 \end{array} \right.$$
>
> 两个参与者都具有如下形式的对数效用函数：

$$U(c) = \log c_0 + \frac{1}{2}(\log c_a + \log c_b)$$

在市场上存在一组完全的状态或有证券可以交易。因为有两个状态，因而只有两个状态或有证券。

现在我们开始分析这个经济的均衡。从给定交易证券价格下参与者的最优化问题开始。记 $\phi = [\phi_a;\phi_b]$ 为状态价格（向量），即两个状态或有证券的价格。我们可以定义每个参与者的财富为 $w = \hat{\phi}^{\mathrm{T}} e$，这里 $\hat{\phi} = [1;\phi]$，而 e 是他的禀赋。这时，最优化问题变成了：

$$\begin{aligned} \max_{c} \quad & \log c_0 + \frac{1}{2}(\log c_a + \log c_b) \\ \text{s.t.} \quad & c_0 + \phi_a c_a + \phi_b c_b = w \end{aligned}$$

由例 3.4，我们知道解为

$$c_{k,0} = \frac{1}{2} w_k; \quad c_{k,a} = \frac{1}{4}\frac{w_k}{\phi_a}; \quad c_{k,b} = \frac{1}{4}\frac{w_k}{\phi_b}, \quad k = 1,2$$

这里 $w_1 = 100$ 而 $w_2 = 200\phi_a + 50\phi_b$。

均衡由市场出清决定。有两个交易证券，每一市场都应该出清：

$$c_{1,a} + c_{2,a} = \frac{1}{4}\frac{100}{\phi_a} + \frac{1}{4}\frac{200\phi_a + 50\phi_b}{\phi_a} = 200$$

$$c_{1,b} + c_{2,b} = \frac{1}{4}\frac{100}{\phi_b} + \frac{1}{4}\frac{200\phi_a + 50\phi_b}{\phi_b} = 50$$

均衡价格的解为 $\phi_a = 1/4$ 和 $\phi_b = 1$。参与者 2 的财富为 $w_2 = (200)(1/4) + (50)(1) = 100$。因此，参与者 2 和参与者 1 的财富相同，尽管他们的禀赋非常不同。均衡配置是 $c_1 = c_2 = [50;[100;25]]$。这并不奇怪。给定他们具有相同的偏好和财富，他们的消费计划也应该相同。

现在让我们来看看均衡配置。对于每个参与者，他的相对边际效用为

$$\frac{\partial_\omega U_k(c_k)}{\partial_0 U_k(c_k)} = \frac{\frac{1}{2}(1/c_{k,\omega})}{(1/c_{k,0})} = \frac{c_{k,0}}{2c_{k,\omega}} = \frac{w_k/2}{2w_k/(4\phi_\omega)}$$

$$\{1/4, \quad \omega = a$$

> $$= \phi_\omega = \begin{cases} \cdots \\ 1, & \omega = b \end{cases}$$

定理3.4　对于定义2.5中给出的，存在Arror-Debreu证券市场的经济来说，均衡达到的资源配置是Pareto最优的

> 证明见课本p44。
> 本定理也称为“福利经济学第一定理”，指完全的、无摩擦的市场能达到帕累托最优

第4章 套利和资产定价

一般市场结构

复合证券：在多个状态下有多个不同的支付

证券 n的支付向量: $X_{\cdot,n} = [x_{1,n}; \cdots ; x_{\omega,n}; \cdots ; x_{\Omega,n}]$

市场结构（支付矩阵）:

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} & \cdots & x_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{\omega,1} & \cdots & x_{\omega,n} & \cdots & x_{\omega,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{\Omega,1} & \cdots & x_{\Omega,n} & \cdots & x_{\Omega,N} \end{bmatrix}$$

冗余证券：一个证券的支付可以由其他证券的组合得到

在无摩擦的市场中，有冗余证券和无冗余证券都是等价的市场结构，一般会忽略冗余证券

由于不存在冗余证券，因此市场结构 X 是满秩的，且 $rank(X) = min\{N, \Omega\} = N$

给定具有线性独立支付矩阵 X 的证券集合，我们可以形成 N 个线性独立组合，记为 $\theta_1, \cdots, \theta_N$ ，他们的支付矩阵是:

$$X_\theta \equiv \begin{bmatrix} x_{1,\theta_1} & \cdots & x_{1,\theta_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{\Omega,\theta_1} & \cdots & x_{\Omega,\theta_N} \end{bmatrix} = X[\theta_1, \cdots, \theta_N]$$

> 每个 θ 都是之前N个证券的线性组合向量

令 $H = [\theta_1, \cdots, \theta_N]$，则 H 是$N * N$ 矩阵。易知 X_θ 也是可逆，因此有 $X = X_\theta H^{-1}$，相当于等号右边复制了原始市场结构

如果不存在摩擦，独立组合 $\theta_1, \cdots, \theta_N$ 提供了市场结构的一个等价描述

套利

资产定价关系：支付矩阵X到交易证券的价格向量S的关系

考虑一个交易证券的组合 $\theta = [\theta_1, \cdots, \theta_N]$，它在0期的价值为 $S^T\theta$，在1期的支付向量为 $X\theta$。其中，负的 θ_n代表对证券进行做空，证券可能在未来某状态带来负的支付（也叫责任）。我们称未来支付非负，即$X\theta \geq 0$，也叫有限责任

定义4.1　将满足下面条件的组合θ称为套利或者套利机会：
(1)$S^T\theta \leq 0$
(2)$X\theta \geq 0$
(3)至少有一个不等式严格成立

按照上面定义的套利，可以分为三种类型：
（1）第1类套利：$S^T\theta < 0$且$X\theta = 0$
（2）第2类套利：$S^T\theta = 0$且$X\theta > 0$
（3）第3类套利：$S^T\theta < 0$且$X\theta > 0$

无套利原理

定理4.2　在市场均衡中不存在套利机会

定义4.2　无套利原则：证券市场中不存在套利机会

资产定价基本定理

资产定价关系的形式可以写为 $S = V(x)$，其中 $V(\cdot)$常称为定价算子或估价算子

定理4.3　一价定律：两个具有相同支付的证券（或者组合）的价格必定相等，即：若$x = y$，则$V(x) = V(y)$。推论：$V(0) = 0$

定理4.4　支付为正的证券或组合的价格为正，即:若 $x > 0$，则 $V(x) > 0$

定理4.5　给定两只证券1和2，如果证券1的支付总是大于证券2的，那么证券1的价格必定高于证券2，即：若$x_1 \geq x_2$，则 $V(x_1) \geq V(x_2)$

定理4.6　在一个无摩擦市场中，定价算子是递增的线性算子。即：$\forall x, b \in R, V(ax + by) = aV(x) + bV(y)$，则资产定价算子可以表达为$V(x) = \phi^T x$，其中$\phi$是正向量

定理4.7　资产定价基本定理：证券市场中不存在套利机会的充要条件是 $\exists \phi \gg 0$ 使得 $S = (\phi^T X)^T$

引理4.1　Stiemke引理：令 X 为一个 $m \times n$的矩阵， m 和 n 是任意正整数，$\theta, \phi, S \in R^n$当且仅当 $\exists \phi \gg 0$ 且 $S = (\phi^T X)^T$时，集合$\{\theta : [-S^T\theta; X\theta] > 0\}$是空集

> $-S^T\theta = -(\phi^T X)^T\theta = -X^T\phi\theta > 0$，在 $X\theta > 0$ 的情况下推得 $\phi < 0$，与前文对 ϕ 定义不符合，因此空集的时候是无套利的

定理4.8　在一个完全证券市场中，状态价格向量是唯一的

风险中性定价和鞅

定义一个无风险债券，在1期的确定支付是1，即支付向量 $x_1 = [1; 1; \cdots; 1] = \iota$，价格为 $S_1 = \phi^T \iota = \sum_{\omega \in \Omega} \phi_\omega$

定义1单位无风险证券投资的净支付或收益率也称作无风险利率，记为 r_F，则

$$S_1(1 + r_F) = 1$$

我们可以重新将债券的定价公式写为 $S_1 = \frac{1}{1+r_F}$，即折现。 r_F看作折现率

更一般的，支付为 $x_n = [x_{1,n}; \cdots; x_{\Omega,n}]$的证券n，有 $S_n = \phi^T x_n = \sum_{\omega \in \Omega} \phi_\omega x_{\omega,n}$

定义 $q_\omega \equiv \frac{\phi_\omega}{\sum_{\omega'} \phi_{\omega'}}$，由于 $\sum_\omega q_\omega = 1$，因此可以将 $Q \equiv \{q_\omega, \omega \in \Omega\}$看作一个概率测度，即 $S_n = \frac{E^Q[\tilde{x}_n]}{1+r_F}, n = 1, \cdots, N$（风险中性定价）

这里，我们把证券的支付n当做一个随机变量$\tilde{x}_n$，而 $E^Q[\cdot]$ 代表在概率测度Q下取期望值

> 证券价格就是它在测度Q下的期望支付对无风险利率的折现，Q称为风险中性测试
> 需要注意的是，风险中性定价公式是对新定义的概率测度Q而不是实际概率测度P取期望值

由于无风险债券有 $S_1 = \frac{1}{1+r_F}, \tilde{x}_1 = 1$，因此风险中性定价公式可改写为

$$\frac{S_n}{S_1} = E^Q[\frac{\tilde{x}_n}{\tilde{x}_1}]$$

一般来说，我们记 $\hat{S}_{n,t} \equiv \frac{S_{n,t}}{S_1}$为以无风险债券为单位的、证券n在t期的价格，这里t = 0,1，则有 $\hat{S}_{n,t} = E^Q[\hat{S}_{n,t+1}]$，这里t = 0

> 由于无套利的限制，未来的相对价格之比的期望应该与当下的相对价格之比相等
> 以无风险债券价格为计量单位，证券价格在风险中性测度Q下是鞅，Q也称等价鞅测度

定义4.3　如果一个随机过程, $z_1, z_2, \cdots$ 现在的值恒等于对未来值的条件期望 $z_t = E_t[z_{t+1}]$，则我们称之为鞅