极限与连续

1.1.1 可数集与不可数集

·双射函数：单射（每个输入映射到不同的输出）+满射（覆盖了所有可能的输出）
·等势：两集合存在双射关系，则为等势（势对于有限集合来说是集合元素个数）
Eg.
$y=\tan\left(\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$ $x\in(0,1)$可知$(0,1)$与$(-\infty,+\infty)$等势
$Sigmoid(x)=\frac{1}{1+e^{x}}$ $x\in R$ 将R与$(0,1)$联系起来
可数集与不可数集：如果存在正整数集N+到集合A的双射关系，则称为可数集。
可数集：离散的，在数轴上长度为0。无理数集是连续的，是不可数集。

1.1.2数列的极限

（极限定义、数列的上界与下界、单调收敛定理（可以由此得到e））
1.判断方法：定义法、单调收敛定理、夹逼法

1.1.3函数的极限

1.f（x）在x点处趋近极限a的存在条件：去心邻域内所有函数值都等于a。左极限=右极限（夹逼定理）

1.1.4函数的连续性与间断点

间断点：第一类（左右存在但不相等或者不等于函数值）：跳跃间断点、可去间断点
第二类（左右有一个不存在）
介值定理

1.1.6上确界、下确界

上界最小值

1.1.7李普希茨连续性

给定函数f（x），如果对于区间D内任意两点a、b，都存在常数K使得
$|f(a)-f(b)|\le K|a-b|$，则称f（x）在D内满足李普希茨连续
李普希茨常数：满足的K的最小值，即为f（x）曲线斜率最大值的绝对值

1.1.7无穷小量

$f(x)$ 在x_0的某去心邻域有定义且，$\lim_{x\to x_0} f(x)=0$,则称$f(x)$*是*$x\to x_0$*的无穷小量。*

假设$f(x)$和$g(x)$都是$x \to x_0$的无穷小量，两者有三种关系。

在此处键入公式。

$\lim\limits_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0;\infty$；$C$ ，当比值为0时$f(x)$是$g(x)$

高阶无穷小，比值为1时，时等价无穷小。

下面是一些典型的等价无穷小，当 $x \to 0$ 时，有

$\sin(x) \sim x$	$\arcsin(x) \sim x$	$\tan x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$
$e^x - 1 \sim x$	$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$	$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$	$a^x - 1 \sim x \ln a$

2024年1月8日 15:01

1.2.1一阶导数

1.导数定义

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

左导数

$$f'_{-}(x) = \lim_{\Delta x \to 0_{-}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

右导数

$$f'_{+}(x) = \lim_{\Delta x \to 0_{+}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2.左导数=右导数→导数可导→函数连续

$f(x) = |x|$ 在x=0处不可导

3.中心差分公式

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

4.重要公式

基本函数	求导公式
幂函数	$(x^a)' = ax^{a-1}$
指数函数	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
指数函数	$(a^x)' = a^x \ln a$
三角函数	$(\sin x)' = \cos x$
三角函数	$(\cos x)' = -\sin x$
三角函数	$(\tan x)' = \sec^2 x$
三角函数	$(\cot x)' = -\csc^2 x$
对数函数	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
对数函数	$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$
反三角函数	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
反三角函数	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
反三角函数	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

基本运算	求导公式
加法	$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
减法	$(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$
数乘	$(cf(x))' = cf'(x)$
乘法	$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
除法	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
倒数	$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

函数与反函数的导数呈倒数关系$g(y_0)$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

下面计算反三角函数的导数。如果令 $g(y)=\arcsin(y)$，其反函数为 $f(x)=\sin(x)$。因此有

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

令 $g(y)=\arccos(y)$，其反函数为 $f(x)=\cos(x)$。从而有

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(y))} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

令 $g(y)=\arctan(y)$，其反函数为 $f(x)=\tan(x)$。从而有

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(y))}} = \cos^2(\arctan(y)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1+y^2}$$

5.机器学习常用函数

$$\boldsymbol{Sigmoid(x) = \frac{1}{1+e^x}}$$

在机器学习中广泛使用的 logistic 函数（也称为 sigmoid 函数）定义为

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} \tag{1.17}$$

它可以看作是如下函数的复合

$$f(u)=u^{-1}, u=1+\mathrm{e}^v, v=-x$$

根据复合函数与基本函数的求导公式，其导数为

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}(1+\mathrm{e}^{-x})' = -\frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}(\mathrm{e}^{-x})' = -\frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}(\mathrm{e}^{-x})(-x)' = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$$

而

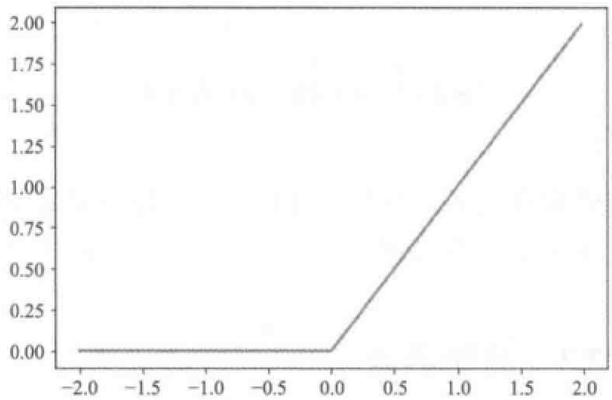
$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\left(1-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)$$

因此

$$f'(x) = f(x)(1-f(x))$$

1.2.2机器学习中的常用函数

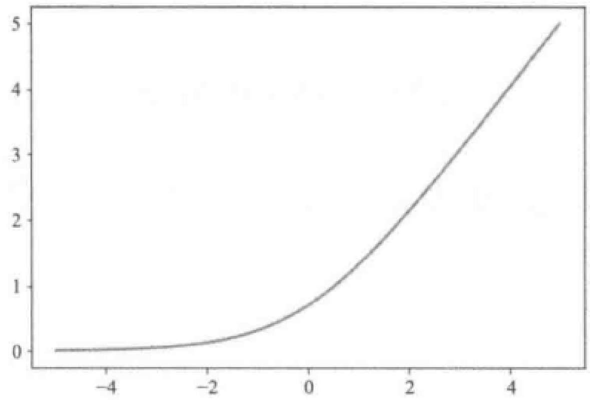
1.ReLU函数



$$f(x)=\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

图 1.13 ReLU 函数的曲线

2.softplus函数，是ReLU函数的光滑近似



$$f(x)=\ln(1+e^{x})$$

图 1.12 softplus 函数的曲线

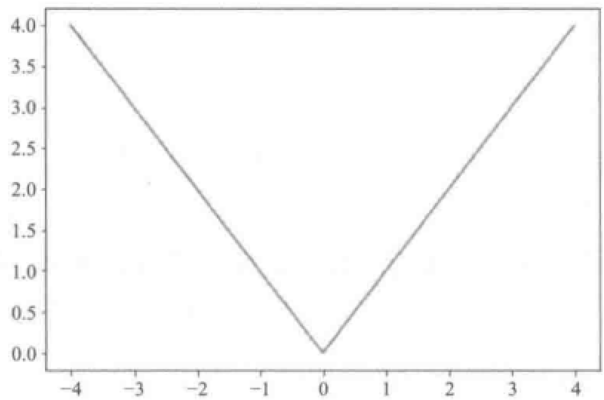


图 1.14 绝对值函数的曲线

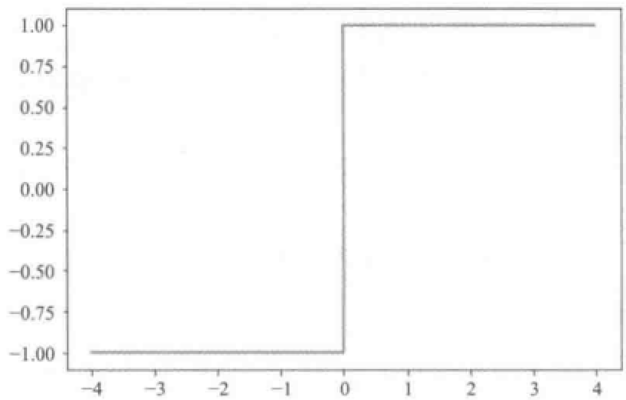


图 1.15 符号函数的曲线

1.2.3高阶导数

在 Python 语言中，符号计算（即计算问题的公式解，也称为解析解）库 sympy 提供了计算各阶导数的功能，由函数 diff 实现。函数的输入值为被求导函数的表达式，要求导的变量，以及导数的阶数（如果不指定，则默认计算一阶导数）；函数的输出值为导数的表达式。下面是示例代码，计算 $\cos(x)$ 的一阶导数。

```
from sympy import *
x = symbols('x')
r = diff(cos(x),x)
print(r)
```

程序运行结果为

```
-sin(x)
```

2. **创建符号变量**:

```python
x = symbols('x')
```

这里，`symbols('x')` 创建了一个名为 `x` 的符号变量。这意味着 `x` 在这个上下文中是一个数学符号，而不是一个具体的数值。

3. **计算导数**:

```python
r = diff(cos(x), x)
```

`diff(cos(x), x)` 计算的是 `cos(x)` 关于 `x` 的导数。在微积分中，余弦函数的导数是负的正弦函数，因此导数是 `-sin(x)`。