极限与连续

1.1.1 可数集与不可数集

·双射函数：单射（每个输入映射到不同的输出）+满射（覆盖了所有可能的输出）

·等势：两集合存在双射关系，则为等势（势对于有限集合来说是集合元素个数）

Eg.

$\mathbf{y=\tan\left(\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)}$　$x\in(0,1)$可知$(0,1)$与$(-\infty,+\infty)$等势

$\boldsymbol{Sigmoid(x)=\frac{1}{1+e^{x}}}$　$\boldsymbol{x\in R}$ 将R与$(0,1)$联系起来

可数集与不可数集：如果存在正整数集N+到集合A的双射关系，则称为可数集。

可数集：离散的，在数轴上长度为0。无理数集是连续的，是不可数集。

1.1.2数列的极限

（极限定义、数列的上界与下界、单调收敛定理（可以由此得到e））

1.判断方法：定义法、单调收敛定理、夹逼法

1.1.3函数的极限

1.f（x）在x点处趋近极限a的存在条件：去心邻域内所有函数值都等于a。左极限=右极限（夹逼定理）

1.1.4函数的连续性与间断点

间断点：第一类（左右存在但不相等或者不等于函数值）：跳跃间断点、可去间断点

第二类（左右有一个不存在）

介值定理

1.1.6上确界、下确界

上界最小值

1.1.7李普希茨连续性

给定函数f（x），如果对于区间D内任意两点a、b，都存在常数K使得$|f(a)-f(b)|\le K|a-b|$，则称f（x）在D内满足李普希茨连续

李普希茨常数：满足的K的最小值，即为f（x）曲线斜率最大值的绝对值

1.1.7无穷小量

$f(x)$ 在x_0的某去心邻域有定义且，$\lim_{x\to x_0}f(x)=0$,则称$f(x)$*是*$x\to x_0$*的无穷小量。*

假设$f(x)$和$g(x)$都是$x \to x_0$的无穷小量，两者有三种关系。

在此处键入公式。

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0; \infty$；$C$，当比值为0时$f(x)$是$g(x)$

高阶无穷小，比值为1时，时等价无穷小。

下面是一些典型的等价无穷小，当 $x \to 0$ 时，有

$\sin(x) \sim x$	$\arcsin(x) \sim x$	$\tan x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$
$e^x - 1 \sim x$	$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$	$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$	$a^x - 1 \sim x \ln a$

导数与微分

2024年1月8日 15:01

1.2.1一阶导数

1.导数定义

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

左导数

$$f'_{-}(x) = \lim_{\Delta x \to 0_{-}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

右导数

$$f'_{+}(x) = \lim_{\Delta x \to 0_{+}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2.左导数=右导数→导数可导→函数连续

$f(x) = |x|$ 在x=0处不可导

3.中心差分公式

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

4.重要公式

基本函数	求导公式
幂函数	$(x^a)' = ax^{a-1}$
指数函数	$(e^x)' = e^x$
指数函数	$(a^x)' = a^x \ln a$
三角函数	$(\sin x)' = \cos x$
三角函数	$(\cos x)' = -\sin x$
三角函数	$(\tan x)' = \sec^2 x$
三角函数	$(\cot x)' = -\csc^2 x$
对数函数	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
对数函数	$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$
反三角函数	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
反三角函数	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
反三角函数	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

基本运算	求导公式
加法	$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
减法	$(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$
数乘	$(cf(x))' = cf'(x)$
乘法	$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
除法 $x_0 = g(y_0)$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
倒数	$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

函数与反函数的导数呈倒数关系

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

下面计算反三角函数的导数。如果令 $g(y) = \arcsin(y)$，其反函数为 $f(x) = \sin(x)$。因此有

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

令 $g(y) = \arccos(y)$，其反函数为 $f(x) = \cos(x)$。从而有

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(y))} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

令 $g(y) = \arctan(y)$，其反函数为 $f(x) = \tan(x)$。从而有

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(y))}} = \cos^2(\arctan(y)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1+y^2}$$

5.机器学习常用函数

$$\boldsymbol{Sigmoid(x) = \frac{1}{1+e^x}}$$

在机器学习中广泛使用的 logistic 函数（也称为 sigmoid 函数）定义为

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} \tag{1.17}$$

它可以看作是如下函数的复合

$$f(u) = u^{-1}, u = 1+\mathrm{e}^v, v = -x$$

根据复合函数与基本函数的求导公式，其导数为

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}(1+\mathrm{e}^{-x})' = -\frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}(\mathrm{e}^{-x})' = -\frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}(\mathrm{e}^{-x})(-x)' = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$$

而

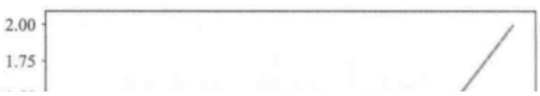
$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\left(1-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)$$

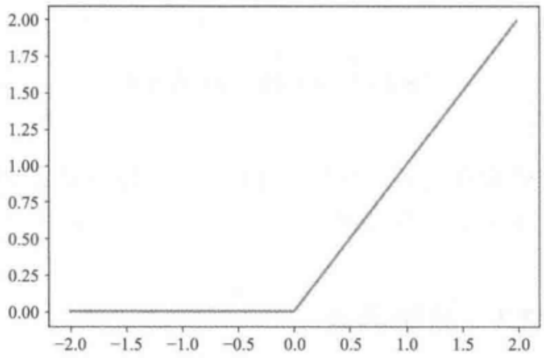
因此

$$f'(x) = f(x)(1-f(x))$$

1.2.2机器学习中的常用函数

1.ReLU函数

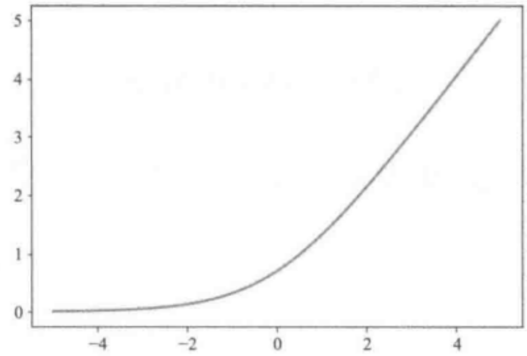




$$f(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

图 1.13　ReLU 函数的曲线

2.softplus函数，是ReLU函数的光滑近似



$$f(x)=\ln(1+\mathrm{e}^x)$$

图 1.12　softplus 函数的曲线

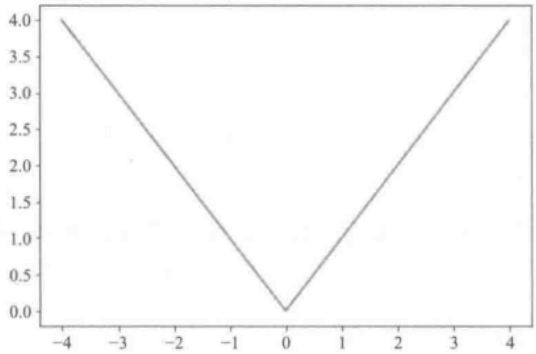


图 1.14　绝对值函数的曲线

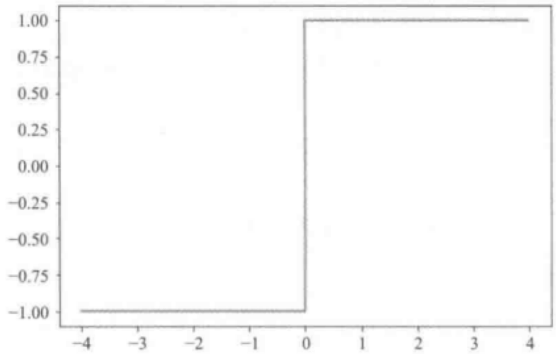


图 1.15　符号函数的曲线

1.2.3高阶导数

在 Python 语言中，符号计算（即计算问题的公式解，也称为解析解）库 sympy 提供了计算各阶导数的功能，由函数 diff 实现。函数的输入值为被求导函数的表达式，要求导的变量，以及导数的阶数（如果不指定，则默认计算一阶导数）；函数的输出值为导数的表达式。下面是示例代码，计算 $\cos(x)$ 的一阶导数。

```
from sympy import *
x = symbols('x')
r = diff(cos(x),x)
print(r)
```

程序运行结果为

```
-sin(x)
```

2. **创建符号变量**:

```python
x = symbols('x')
```

这里，`symbols('x')` 创建了一个名为 `x` 的符号变量。这意味着 `x` 在这个上下文中是一个数学符号，而不是一个具体的数值。

3. **计算导数**:

```python
r = diff(cos(x), x)
```

`diff(cos(x), x)` 计算的是 `cos(x)` 关于 `x` 的导数。在微积分中，余弦函数的导数是负的正弦函数，因此导数是 `-sin(x)`。

1.2.4微分

函数 $y=f(x)$ 在某一区间上有定义，对于区间内的点 x_0，当 x 变为 $x_0+\Delta x$ 时，如果函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示成

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$$

1.2.5导数与函数的单调性

1.2.6极值判别法则

1.费马定理：极值点的导数值为0（导数值为0的点不一定是极值点）

2.利用二阶导数判断x_0的极大极小值情况

情况一：$f''(x_0) > 0$，则 x_0 为函数 $f(x)$ 的严格极小值点。

情况二：$f''(x_0) < 0$，则 x_0 为函数 $f(x)$ 的严格极大值点。

情况三：$f''(x_0) = 0$，则不定，x_0 可能是极值点也可能不是极值点，需作进一步讨论。

下面对第三种情况进一步细分，假设 $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$，且 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$。可分为两种情况。

情况一：如果 n 是偶数，则 x_0 是极值点。当时 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 是 $f(x)$ 的严格极小值点，当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时是 $f(x)$ 的严格极大值点。

情况二：如果 n 是奇数，则 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点。

该充分条件可以用泰勒公式证明，在 1.4 节给出。

下面举例说明。考虑函数

$$f(x) = x^2$$

其一阶导数为

$$f'(x) = 2x$$

令 $f'(x) = 0$ 可以解得其驻点为 $x = 0$。由于 $f''(0) = 2 > 0$，该点是函数的极小值点。

对于函数

$$f(x) = -x^2$$

其一阶导数为

$$f'(x) = -2x$$

令 $f'(x) = 0$ 可以解得其驻点为 $x = 0$。由于 $f''(0) = -2 < 0$，该点是函数的极大值点。

对于函数

$$f(x) = x^3$$

其一阶导数为

$$f'(x) = 3x^2$$

令 $f'(x) = 0$ 可以解得其驻点为 $x = 0$。其二阶导数为 $f''(x) = 6x$，三阶导数为 $f^{(3)}(x) = 6$。由于 $f''(0) = 0$，$f^{(3)}(0) = 6$，因此该点不是极值点。这种情况称为鞍点（Saddle Point），会导致数值优化算法如梯度下降法无法找到真正的极值点，在 3.3.3 节和 4.5.1 节会做更详细的介绍。此

1.2.7导数与函数的凹凸性

•凸函数（下凸函数）（二阶导数大于零）

有两点 x、y，如果对于任意的实数 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ 都满足如下不等式

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leqslant \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

积分中值定理

2024年1月9日 16:52

1.罗尔中值定理

罗尔中值定理（Rolle Mean Value Theorem）是指如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内连续，在开区间 (a,b) 内可导，且在区间的两个端点处的值相等，即 $f(a)=f(b)$，则在区间 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ 使得 $f'(\xi)=0$。图 1.19 为罗尔中值定理的示例。该函数为

$$f(x)=\sin(x)$$

考虑区间 $[0,\pi]$，有 $f(0)=f(\pi)=0$。函数在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处有极大值。显然在该点的导数值为 0。

2.拉格朗日中值定理

拉格朗日中值定理（Lagrange Mean Value Theorem）是指如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内连续，在开区间 (a,b) 内可导，则在区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{1.21}$$

3.柯西中值定理

函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续，在 (a,b) 内可导，且对 $\forall x\in(a,b)$ 有 $g'(x)\neq 0$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

泰勒定理

2024年1月12日 23:35

函数	麦克劳林公式
$\dfrac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$
e^x	$1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$
$\sin x$	$x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+o(x^{2n-1})$
$\cos x$	$1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$
$\ln(1+x)$	$x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+o(x^n)$

泰勒公式证明极值判别法则

利用泰勒公式可以证明 1.2.6 节的极值判别法则。将 $f(x)$ 在 x_0 点处作泰勒展开，如果

$$f^{(i)}(x_0)=0,\ \ i=1,\cdots,n-1$$
$$f^{(n)}(x_0)\neq 0$$

则泰勒展开的结果为

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

如果 n 为偶数，则在 x_0 的去心邻域内忽略高阶无穷小，有

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

由于

$$(x-x_0)^n>0$$

$\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 与 $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ 同号，总为正或者总为负，因此 x_0 是极值点。如果 n 为奇数，则 $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在 x_0 的两侧变号，因此 x_0 不是极值点。

不定积分

2024年1月13日 0:47

1.5.1不定积分定义及性质

下面根据基本函数的积分公式以及式 (1.24) 和式 (1.25) 计算一些不定积分。计算

$$\int \tan^2(x)\mathrm{d}x$$

根据三角函数之间的关系有

$$\int \tan^2(x)\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x - \int 1\mathrm{d}x = \tan(x) - x + C$$

计算

$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}\mathrm{d}x$$

对分式进行拆分，可以得到

$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{a-b}\left(\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x-b}\mathrm{d}x\right)$$
$$= \frac{1}{a-b}(\ln|x-a| + \ln|x-b|) + C$$

1.5.2换元积分法

第一类：凑微分

第二类：变量替换

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

这里的主要困难是 $\sqrt{x}$，因此令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，从而有

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t^2 = \int \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t = 2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$
$$= 2t - 2\ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C$$

计算下面的积分

$$\int \arcsin(x)\mathrm{d}x$$

令 $t=\arcsin(x)$，则 $x=\sin(t)$，从而有

$$\int \arcsin(x)\mathrm{d}x = \int t\mathrm{d}\sin(t) = t\sin(t) - \int \sin(t)\mathrm{d}t$$
$$= t\sin(t) + \cos(t) + C = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

上面第 2 步利用了分部积分法，稍后会介绍。计算下面的不定积分

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$$

令 $x=a\sin(t)$，利用倍角公式有

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2(t)}\mathrm{d}a\sin(t) = a^2\int \cos^2(t)\mathrm{d}t$$
$$= a^2\int \frac{1+\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t = a^2\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin(2t)\right)+C = a^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\sin(t)\cos(t)\right)+C$$
$$= \frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$$

换元法的核心是确定要替换的部分。

1.5.3分步积分法

在 Python 中，符号计算库 sympy 提供了计算不定积分的功能，由函数 integrate 实现。函数的输入值为被积函数的表达式，以及被积分变量，输出值为不定积分的表达式。下面是示例代码，计算余弦函数的不定积分。

```
from sympy import *
x = symbols ('x')
r = integrate (cos (x), x)
print(r)
```

程序运行结果为

```
sin (x)
```

这里忽略了常数 C。

定积分

2024年1月13日 1:11

在 Python 中，符号计算包 sympy 提供了计算定积分的功能，由函数 integrate 实现。函数的输入值为被积函数的表达式、被积变量，以及积分下限和上限，输出值为定积分的值。下面是示例代码，计算余弦函数在区间 $[-\pi,\pi]$ 内的定积分。

```
from sympy import *
x = symbols ('x')
r = integrate (cos (x), (x, -pi, pi))
print(r)
```

程序运行结果为

```
0
```

第一类换元法、凑微分法：积分上下限指的是x的范围，不是指的x^2的范围

第一类换元法通过凑微分而得到原函数，在计算定积分时，直接将积分下限和上限代入原函数中即可得到结果。用第一类换元法计算如下的定积分

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\mathrm{e}-\frac{1}{2}$$

第二类换元法：积分上下限指的是t的范围

用换元法计算下面的定积分

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

如果令 $x=\sin(t)$，则有

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\mathrm{d}\sin(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin(2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

重要结论

下面证明一个重要结论，这个结论在 4.8.2 节的欧拉-拉格朗日方程推导中将会被使用。假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内连续，函数 $\eta(x)$ 满足端点值约束条件 $\eta(a)=\eta(b)=0$，如果对任意的 $\eta(x)$ 都有

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\mathrm{d}x=0 \tag{1.34}$$

则 $f(x)\equiv 0$。下面用反证法证明。假设 $f(x)$ 不恒为 0，由于 $\eta(x)$ 是满足端点值约束条件的任意函数，可以令

$$\eta(x)=-f(x)(x-a)(x-b)$$

显然此函数满足端点值约束条件，且在 (a,b) 内

$$-(x-a)(x-b)>0$$

因此有

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\mathrm{d}x=\int_a^b -f(x)f(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x>0$$

这与式 (1.34) 矛盾，因此结论成立。

变上限积分

变上限积分函数是以积分上限为自变量的定积分对应的函数。假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内可积，$x\in[a,b]$，则变上限积分定义为

$$F(x)=\int_a^x f(u)\mathrm{d}u \tag{1.35}$$

如果 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，根据牛顿-莱布尼茨公式有

$$F(x)=G(x)-G(a)$$

$f(x)$变上限积分的导数是$f(x)$

如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内连续，则变上限积分是可导的，且其导数为

$$F'(x)=\left(\int_a^x f(u)\mathrm{d}u\right)'=f(x)$$

下面给出证明。假设 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\left(\int_a^x f(u)\mathrm{d}u\right)'=(G(x)-G(a))'=f(x)$$

复合函数的变上限积分

下面考虑变上限积分的复合函数，对于如下的变上限积分函数

$$\int_a^{g(x)} f(u)\mathrm{d}u$$

根据复合函数的求导公式，其导数为

$$\left(\int_a^{g(x)} f(u)\mathrm{d}u\right)'=f(g(x))g'(x)$$

计算下面的变上限积分的导数值

$$\int_a^{x^2} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$$

根据上面的公式有

$$\left(\int_a^{x^2} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)'=\mathrm{e}^{(x^2)^2}(x^2)'=2x\mathrm{e}^{x^4}$$

定积分求曲线长

接下来介绍如何利用定积分计算曲线的长度。首先考虑直角坐标系的情况。计算 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内的弧长。这可以通过折线逼近函数曲线、累加折线的长度得到，如图 1.23 所示。其中实线为要计算长度的曲线，虚线是用折线对曲线进行近似的结果。当划分得足够细的时候，这些折线的长度之和的极限就是曲线的弧长。用点 $a=x_0,x_1,\cdots,x_n=b$ 对区间 $[a,b]$ 进行划分，区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 内的折线长度为

$$\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i\approx\sqrt{1+y'^2}\Delta x_i$$

令点 $M_i=(x_i,y_i)$，则曲线的弧长为如下的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}|M_{i-1}M_i|=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+y'^2}\Delta x_i$$

由此得到曲线在区间 $[a,b]$ 内的弧长为如下的定积分

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x \tag{1.39}$$

接下来考虑参数方程的情况。曲线的参数方程为

$$x=\varphi(t)\qquad y=\psi(t)$$

其中 $t\in[\alpha,\beta]$。假设 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在该区间上连续可导，则弧长元为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$$

从而得到弧长的计算公式为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t \tag{1.40}$$

下面来看一个实际例子。计算星形线的弧长，其参数方程为

$$x=a\cos^3 t\qquad y=a\sin^3 t$$

其形状如图 1.24 所示。

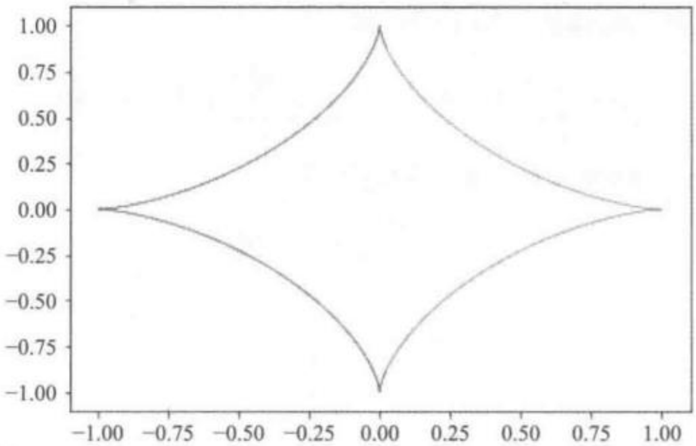


图 1.24　星形线的形状

由于星形线的形状是对称的，只用计算第一象限的曲线弧长，然后乘以 4 即可得到整个星形线的弧长。根据式 (1.40) 有

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\mathrm{d}t=4\times\frac{3}{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\mathrm{d}t=6a$$

广义积分

广义积分（Improper Integral）是定积分的推广，用于积分区间为无限或积分区间有限但被积分函数无界的情况，也称为反常积分。前者称为无穷限广义积分，或称无穷积分；后者称为无界函数的广义积分，或称瑕积分。

下面考虑函数值为无限的情况。函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 内有定义且连续，$F(x)$ 是其原函数，如果下面的极限存在

$$\lim_{x\to b^-}F(x)=F(b^-)$$

则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b^-)-F(a)=F(x)|_a^b \tag{1.42}$$

函数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的曲线如图 1.26 所示。

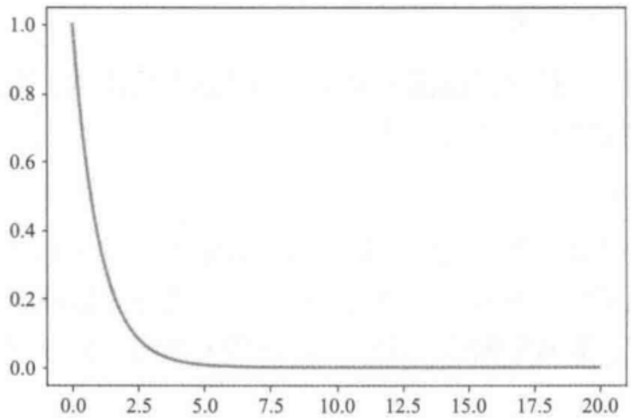


图 1.25　e^{-x} 的曲线

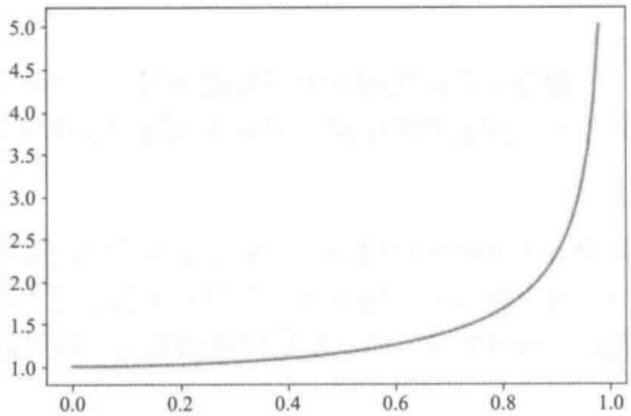


图 1.26　$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的曲线

计算下面的广义积分

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

常微分方程

2024年1月15日 11:45

一阶线性微分方程

下面来看更复杂的情况。对于如下的方程

$$y' + a(x)y = b(x)$$

这是一阶线性微分方程。将方程两边同乘以 $\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}$ 可得

$$y'\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x} + a(x)y\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x} = b(x)\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}$$

即

$$(\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}y)' = b(x)\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}$$

因此

$$\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}y = \int \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}b(x)\mathrm{d}x + C$$

从而可以解得

$$y = \mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}b(x)\mathrm{d}x + C\right)$$

这些方程的求解都利用了指数函数求导的优良性质，方程两边同乘以指数函数之后，利用乘积的求导公式，将方程左侧的两项求和转为某两个函数相乘的导数。