Mathématiques inversées : Axiomes, arithmétisation et théorème de Cantor-Bendixson

Thibaut Kouptchinsky

Projet personnel et séminaire de master 1

Mars 2022

Programme

The main question: Quels sont les axiomes appropriés au développement des mathématiques ?

> *Fondations of mathematics is the study of the most basic concepts and logical structure of mathematics, with an eye to the unity of human knowledge*
>
> ---
>
> *Stephen G. Simpson*
> *SSOA (second edition)*

The main question: Quels sont les axiomes appropriés au développement des mathématiques ?

> *Fondations of mathematics is the study of the most basic concepts and logical structure of mathematics, with an eye to the unity of human knowledge*
>
> *Stephen G. Simpson*
> *SSOA (second edition)*

Aristote, Euclide, Descartes, Cauchy, Weierstraß, Dedekind, Peano, Frege, Russell, Cantor, Hilbert, Brouwer, Weyl, von Neumann, Skolem, Tarski, Heyting, Gödel, . . .

Quelques définitions classiques

Espace polonais

Soit X, un ensemble, X est dit **polonais** s'il est

1. Un espace métrique complet ;
2. Séparable.

Quelques définitions classiques

Espace polonais

Soit X, un ensemble, X est dit **polonais** s'il est

1. Un espace métrique complet ;
2. Séparable.

Ensemble dénombrable

Un ensemble X est **dénombrable** s'il existe une injection $i : X \hookrightarrow \mathbb{N}$. On peut alors identifier X à $i(X) \subseteq \mathbb{N}$.

Quelques définitions classiques

Espace polonais

Soit X, un ensemble, X est dit **polonais** s'il est

1. Un espace métrique complet ;
2. Séparable.

Ensemble dénombrable

Un ensemble X est **dénombrable** s'il existe une injection $i : X \hookrightarrow \mathbb{N}$. On peut alors identifier X à $i(X) \subseteq \mathbb{N}$.

Ensemble parfait

Un sous-ensemble $F \subseteq X$, fermé, d'un espace polonais est **parfait** s'il ne possède pas de points isolés.

Un théorème des mathématiques ordinaires

Théorème (Cantor-Bendixson)

Soit X, un espace polonais et un fermé $F \subseteq X$ alors il existe une **unique décomposition**

$$F = P \cup N,$$

où P est **parfait**, N est **dénombrable** et $P \cap N = \emptyset$.

Le langage de l'arithmétique du second ordre

$$M = (|M|, \mathcal{S}_M, +_M, \cdot_M, 0_M, 1_M, <_M)$$

Le langage de l'arithmétique du second ordre

$$M = (|M|, \mathcal{S}_M, +_M, \cdot_M, 0_M, 1_M, <_M)$$

- Les **mots** sont de deux types
  - Les variables numériques ($\mathbb{N}$) ;
  - Les variables d'ensembles ($\mathcal{P}(\mathbb{N})$).

Le langage de l'arithmétique du second ordre

$$M = (|M|, \mathcal{S}_M, +_M, \cdot_M, 0_M, 1_M, <_M)$$

- Les **mots** sont de deux types
  - Les variables numériques ($\mathbb{N}$) ;
  - Les variables d'ensembles ($\mathcal{P}(\mathbb{N})$).
- On construit des **termes** numériques à l'aide de constantes et de fonctions ;

Le langage de l'arithmétique du second ordre

$$M = (|M|, \mathcal{S}_M, +_M, \cdot_M, 0_M, 1_M, <_M)$$

- Les **mots** sont de deux types
  - Les variables numériques ($\mathbb{N}$) ;
  - Les variables d'ensembles ($\mathcal{P}(\mathbb{N})$).
- On construit des **termes** numériques à l'aide de constantes et de fonctions ;
- Les **phrases** sont
  - Les formules atomiques $t_1 = t_2$, $t_1 < t_2$, $t_1 \in X$;
  - Les combinaisons et quantifications de celles-ci.

Et quels axiomes ?

Ceux que vous connaissez déjà :

Et quels axiomes ?

Ceux que vous connaissez déjà :

- $\forall n \quad n + 1 \neq 0;$

Et quels axiomes ?

Ceux que vous connaissez déjà :

- $\forall n \quad n+1 \neq 0;$
- $\forall m, n \quad m+1 = n+1 \implies m = n;$
- $\ldots$

Et quels axiomes ?

Ceux que vous connaissez déjà :

- $\forall n \quad n+1 \neq 0;$
- $\forall m, n \quad m+1 = n+1 \implies m = n;$
- $\ldots$
- $(0 \in X \wedge \forall n \quad (n \in X \implies n+1 \in X) \implies \forall n \quad (n \in X)).$

Et quels axiomes ?

Ceux que vous connaissez déjà :

- $\forall n \quad n+1 \neq 0;$
- $\forall m, n \quad m+1 = n+1 \implies m = n;$
- $\ldots$
- $(0 \in X \wedge \forall n \quad (n \in X \implies n+1 \in X) \implies \forall n \quad (n \in X)).$

Et un axiome de compréhension :

$$\exists X \; \forall n \quad (n \in X \iff \phi(n)).$$

Une première restriction ; la compréhension arithmétique

$$\exists X \ (n \in X \iff \theta(n)),$$

où θ est une formule **arithmétique**.

Une première restriction ; la compréhension arithmétique

$$\exists X \ (n \in X \Longleftrightarrow \theta(n)),$$

où θ est une formule **arithmétique**.

Exemple

On peut parler de l'ensemble des nombres premiers
$n \in P \Longleftrightarrow \theta(n) := \forall m \forall k \ (n = m \cdot k \longrightarrow m = 1 \vee k = 1) \wedge n > 1.$

Arithmétisation

Fonction de couplage

Un outil de **codage** vers notre langage

$$\begin{aligned} p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\hookrightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) &\mapsto (m+n)^2 + m \end{aligned}$$

Arithmétisation

Fonction de couplage

Un outil de **codage** vers notre langage

$$\begin{aligned} p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\hookrightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) &\mapsto (m+n)^2 + m \end{aligned}$$

Code pour un espace polonais $\bar{A}$

- Une ensemble non vide $A \subseteq \mathbb{N}$;
- Une distance $d : A \times A \to \mathbb{Q}$. $(d \subseteq A \times A \times \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{N})$

Arithmétisation

Code pour un ouvert de $\bar{A}$

Avec notre **intuition**

- Un ouvert $U \subseteq \bar{A}$;

Avec notre **langage**

- Un code $U^c \subseteq A \times \mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{N}$;

Arithmétisation

Code pour un ouvert de $\bar{A}$

Avec notre **intuition**

- Un ouvert $U \subseteq \bar{A}$;
- $U = \bigcup_{(a,r)\in U^c} B(a,r)$;

Avec notre **langage**

- Un code $U^c \subseteq A \times \mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{N}$;
- $U^c = \{(a,r) \mid a \in U \cap A \text{ et } B(a,r) \subseteq U\}$;

Arithmétisation

Code pour un ouvert de $\bar{A}$

Avec notre **intuition**

- Un ouvert $U \subseteq \bar{A}$;
- $U = \bigcup_{(a,r)\in U^c} B(a,r)$;
- $x \in U$.

Avec notre **langage**

- Un code $U^c \subseteq A \times \mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{N}$;
- $U^c = \{(a,r) \mid a \in U \cap A$ et $B(a,r) \subseteq U\}$;
- $\lim_n d(x_n, a) < r$ pour un certain $(a,r) \in U^c$.

Arbre binaires et chemins infinis

Arbre binaire

On note $2^{<\mathbb{N}} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} 2^k$ et on dit que $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ est un **arbre binaire** si chaque segment initial d'un élément de T est encore un élément de T.

Arbre binaires et chemins infinis

Arbre binaire

On note $2^{<\mathbb{N}} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} 2^k$ et on dit que $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ est un **arbre binaire** si chaque segment initial d'un élément de T est encore un élément de T.

L'espace de Cantor $2^{\mathbb{N}}$

- L'espace de Cantor est **polonais**.

Arbre binaires et chemins infinis

Arbre binaire

On note $2^{<\mathbb{N}} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} 2^k$ et on dit que $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ est un **arbre binaire** si chaque segment initial d'un élément de T est encore un élément de T.

L'espace de Cantor $2^{\mathbb{N}}$

- L'espace de Cantor est **polonais**.
- Pour $\tau \in 2^{<\mathbb{N}}$ de longueur k,

$$\Omega_\tau := \{f \in 2^{\mathbb{N}} \mid f_{|k} = \tau\}.$$

Arbre binaires et chemins infinis

Proposition

L'ensemble des chemins d'un arbre binaire T, noté $[T] \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ est un **fermé** de l'espace de Cantor.

Petite illustration

arbre imag.png

Arbre binaires et chemins infinis

Proposition

L'ensemble des chemins d'un arbre binaire T, noté $[T] \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ est un **fermé** de l'espace de Cantor.

Arbre binaires et chemins infinis

Proposition

L'ensemble des chemins d'un arbre binaire T, noté $[T] \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ est un **fermé** de l'espace de Cantor.

Arbre parfait

Un arbre binaire T est **parfait** ssi pour tout $\tau \in T$, il existe deux extensions incompatibles de τ dans T.

Correspondance entre arbre et ensemble parfait

Lemme du codage par chemins

Soit $C \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, un **fermé**, il existe un **arbre** $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ tel que

$$\forall f (f \in C \iff f \text{ est un chemin dans } T).$$

L'arbre T est parfait ssi C aussi.

Un axiome plus fort ; compréhension Π^1_1

$$\exists X \ (n \in X \iff \phi(n)),$$

où ϕ est une Π^1_1-**formule** i.e. il existe une formule **arithmétique** $\theta(n, X)$ telle que

$$\phi(n) \iff \forall Y \ \theta(n, Y).$$

Un théorème équivalent à l'axiome Π^1_1

Théorème (Cantor-Bendixson pour les arbres binaires)

Soit $T \subset 2^{<\mathbb{N}}$, un arbre, le **noyau parfait** P de T existe. De plus, l'ensemble des chemins de T qui ne sont pas des chemins dans P est **dénombrable**.

Un théorème équivalent à l'axiome Π^1_1

Théorème (Cantor-Bendixson pour les arbres binaires)

Soit $T \subset 2^{<\mathbb{N}}$, un arbre, le **noyau parfait** P de T existe. De plus, l'ensemble des chemins de T qui ne sont pas des chemins dans P est **dénombrable**.

On utilise bien la compréhension Π^1_1

Le noyau parfait est défini par

$$\tau \in P \iff \exists\ P' \text{ un sous-arbre parfait non vide de } T_\tau,$$

où T_τ est l'ensemble des segments initiaux et des extensions de τ dans T.

Conclusion

Théorème (Cantor-Bendixson pour l'espace de Cantor)

Soit $C \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, un **fermé** de l'espace de Cantor, la compréhension Π^1_1 prouve qu'il existe une unique décomposition

$$C = P \cup N,$$

où P est parfait, N est dénombrable et $P \cap N = \emptyset$.

Conclusion

Théorème (Cantor-Bendixson pour l'espace de Cantor)

Soit $C \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, un **fermé** de l'espace de Cantor, la compréhension Π^1_1 prouve qu'il existe une unique décomposition

$$C = P \cup N,$$

où P est parfait, N est dénombrable et $P \cap N = \emptyset$.

Et l'axiome de compréhension Π^1_1 est le bon système d'axiomes pour le prouver !

The Main Question

Les "Big Five"

The Main Question

Les "Big Five"

- ACA (prédicativisme) ; Supremum, Boule unité compacte, tout $\mathbb{Q}$-e.v. dénombrable a une base, ...

The Main Question

Les "Big Five"

- ACA (prédicativisme) ; Supremum, Boule unité compacte, tout $\mathbb{Q}$-e.v. dénombrable a une base, ...
- $\Pi_1^1 - CA$ (imprédicativisme) ; Cantor-Bendixson, tout groupe abélien dénombrable est la somme directe d'un divisible et d'un réduit, ...

The Main Question

Les "Big Five"

- RCA (constructivisme) ; Intervalles emboîtés, valeur intermédiaire, $\mathbb{R}$ indénombrable, ...
- ACA (prédicativisme) ; Supremum, Boule unité compacte, tout $\mathbb{Q}$-e.v. dénombrable a une base, ...
- $\Pi_1^1 - CA$ (imprédicativisme) ; Cantor-Bendixson, tout groupe abélien dénombrable est la somme directe d'un divisible et d'un réduit, ...

The Main Question

Les "Big Five"

- RCA (constructivisme) ; Intervalles emboîtés, valeur intermédiaire, $\mathbb{R}$ indénombrable, ...
- ...
- ACA (prédicativisme) ; Supremum, Boule unité compacte, tout $\mathbb{Q}$-e.v. dénombrable a une base, ...
- ...
- $\Pi_1^1 - CA$ (imprédicativisme) ; Cantor-Bendixson, tout groupe abélien dénombrable est la somme directe d'un divisible et d'un réduit, ...