

“FAST” 主动反射面调节模型

【摘要】

本题主要考虑观测天体在不同方位角 α 和俯仰角 β ，对理想抛物面方程的推导。结合 FAST 天眼的机理分析，调整天眼 FAST 特定位置的面板达到近似理想抛物面的结果。计算天眼 FAST 调节后馈源舱的接收比，建立最优化模型，得出最优的理想抛物面以及最优调整方案。设计相对应算法以及利用 Matlab 编程求解。

针对问题一，当观测天体位于基准球面正上方时，建立旋转抛物面数学模型。分析建立旋转抛物面位移模型，计算旋转抛物面位移向量 v ，使旋转抛物面的焦点到达小同心球面上 $F(x, y, z) = (x - v_1)^2 + (y - v_2)^2 - 2p(z - v_3) = 0$ 。我们分析天眼 FAST 的机理，在照明区域径向调整调整反射板的位置。我们以最小二乘法衡量反射板调整后与理想抛物面的误差，以误差最小为目标，求解最优理想抛物面方程参数 p 。在照明区域内计算调整后反射板的坐标与理想抛物面的坐标之差，在所有结果中找到误差最大的数值代表该次调整的误差，设置 P 范围遍历求解，找出最优理想抛物面。最优理想抛物面参数 P 值为 181 误差为 0.021 米。将参数 P 和位移向量 v 代入方程 $F(x, y, z)$ 可得： $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 362(z + 250.7) = 0$

针对问题二，观测天体位于方位角 $\alpha = 36.795^\circ$ ，俯仰角 $\beta = 78.169^\circ$ 。我们考虑在基础旋转抛物面上，通过 xyz 三轴旋转的方式把旋转抛物面的对称轴旋转到与天体 S 球心 C 共线 l 。计算位移向量 v 以及旋转角度 $YZY \sim (\psi, \theta, \varphi)$ 使得旋转抛物面焦点位于小同心球与直线 l 交点处。出于简化编程难度，我们考虑使用四元数对基准球面进行旋转。把原照明区域的主节点旋转到以 z 轴对称处，旋转抛物面焦点位移到球心正下方小同心球处。以最小二乘法衡量反射板调整后与理想抛物面的误差。求解最优误差后，还原旋转解得抛物面顶点 $p(-69.677, 0, -292.33)$ ，误差为 0.011 米。

针对于问题三，我们基于问题二的反射面调节方案，使用穷举法作为求解方法来调节相关促动器的伸缩量，使反射面尽量贴近理想抛物面。通过定义适应度函数来衡量调节后馈源舱的接收比，评估调节方案的有效性。基准反射球面的接收比：4%，调整后的基准反射球面的接收比：12%，对比没有调整的基准面提高接受比提高。

关键词：四元数 欧拉角旋转 射电望远镜 球面镜反射 最优化模型

一、问题重述

1.1 引言

射电天文学是通过接收和研究宇宙中的射电波来揭示宇宙的奥秘。传统的射电望远镜受限于天线形状和尺寸，存在灵敏度和分辨率的限制。为了克服这些问题，引入主动反射面技术成为一种解决方案。主动反射面技术通过调整望远镜反射面的形状，可以提高灵敏度、分辨率以及扩大观测范围。在此背景下，中国科学院开展了 FAST 项目，研发了世界上最大的射电望远镜。FAST 采用了主动反射面技术，通过调整面形实现高灵敏度全向观测能力。

本问主要是通过题目给出的条件，由可调节球面的两种状态，通过调整进而计算出理想的抛物面方程，通过不同的反射面调节方案，计算调节后的馈源舱接收比，不同状态下的坐标情况具体如附件所示。

1.2 问题提出

根据题目给出的条件，结合反射面的调节规则和相对应的数据建立优化模型研究以下问题：

- (1) 当观测天体位于基准球面正上方时，结合考虑反射面板的调节因素，确定理想抛物面。
- (2) 当观测天体位于 $\alpha = 36.795^\circ$ ， $F = 78.169^\circ$ 时，建立调节模型，使得反射面尽力贴近理想抛物面，并给出调节方案的数据。
- (3) 基于问题二的调节方案，计算调节后的接收比，并与基准球面做比较。

二、问题分析

根据上述提出的三个问题，我们分别对三个问题进行详细的分析，确定模型的建立方式，以及求解方式，具体如下：

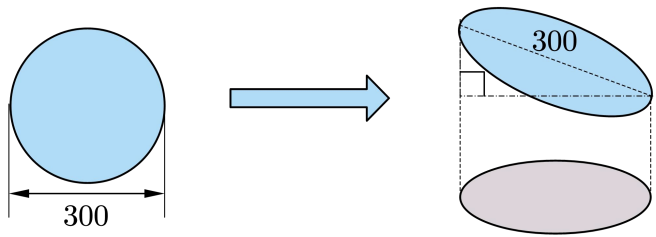
2.1 问题一：确定理想抛物面的问题分析

在问题一中，我们已知焦点 P 的位置，以及对称轴 SC 的坐标，确定理想抛物面的过程中，我们首要目标是确定旋转抛物面顶点的位置，进而确定抛物线方程中的 P 值，因而以基准面上的点到理想抛物面的点之间误差最小为目标，建立优化模型，并对不同 P 值求解的误解分析，在单次循环中取最大值，使最大值最小时，为理想 P 值。

2.2 问题二：反射调节方案的问题分析

基于问题一，当观测天体 S 位移动至 S' 位时，对称轴也随着移动，整个旋转抛物面转为倾斜，使得照射区域的调整点转换为如下图所示，进而在问题一的基础上，我们需要求解到偏转角度，从而求解需要调整的点，以及调整的方位，同

样抛物点间误差距离最小为目标，寻求最优 P 值，并将调整后数值 导入表格中。



图一 调整范围变化图

2.3 问题三：接收比计算的问题分析

针对问题三，我们基于问题二的反射面调节方案，计算反射面的接收比，我们对调整的反射面采用决策变量的方式，并对接收信号进行约束，利用遗传算法作为求解方法调整伸缩量，使得反射面尽量贴近理想抛物面，同时通过计算反射线到达馈源舱的数量与总反射线到达馈源舱的总反射性之比，进而获得所需的接收比。

三、符号说明

符号	描述说明
α_i	第 i 个索点的方位角 α_i
β_i	第 i 个索点的俯仰角 β_i
$\Delta g(\alpha_i, \beta_i)$	调整后基准面上方位角 α_i 俯仰角 β_i 的半径
$g(\alpha_i, \beta_i)$	基准面上方位角 α_i 俯仰角 β_i 的半径
$f(\alpha_i, \beta_i)$	理想抛物面上方位角 α_i 俯仰角 β_i 的半径
$b(x_i, y_i, z_i)$	基准面上第 i 个索点的空间坐标
x_{jn}	第 j 块镜片所反射的第 n 条射线是否被接收
N_{jn}	表示为第 j 块镜片的第 n 点的法向量
p_{2jn}	焦点 p_1 第 j 块镜片的第 n 点的法向量的对称点

四、模型假设

- 1、假设反射面板使用过程中无损坏情况；
- 2、假设反射面反射过程不任何遮挡；
- 3、假设反射面板调整过程中不会出现变形等情况。

五、模型的建立与求解

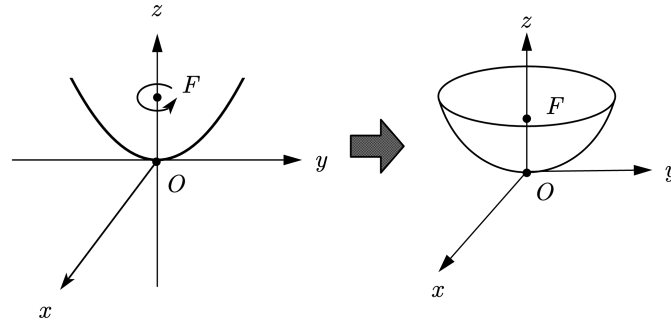
5.1 问题一：确定理想抛物面的模型建立与求解

5.1.1 理想旋转抛物面的公式推导

在二维平面上有一抛物线，抛物线有一焦点 F 。依据焦点参数可得该抛物线的方程，具体公式和坐标图如下所示：

$$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ F\left(0,0,\frac{p}{2}\right) \end{cases}$$

其中， F 为抛物线的焦点； p 为焦点参数。当我们绕一旋转轴旋转抛物线一周可得旋转抛物面，具体如下所示：



图二 旋转抛物面示意图

抛物线旋转时，设抛物面上的点与旋转轴距离为 r 。抛物线旋转后，旋转抛物面上的点与旋转轴距离 r 相等时高度相等，具体推导如下所示：

$$\begin{cases} r^2 = 2pz \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

其中， r 为抛物面上任意一点与旋转轴的距离。为推广旋转抛物面的方程，我们考虑在上述基本的旋转抛物面进行前后上下左右进行平移操作，具体推导如下所示：

(1) 旋转抛物面前后方位平移

现我们考虑基本旋转抛物面的前后方位平移的情况，设 p_1 为旋转抛物面上任意一点，我们对点 p_1 进行前后方位平移 v 后得到新点 p_v ，三点之间的关系如下所示：

$$\begin{cases} p_v = p_1 + v \\ p_1 = (x_1, y_1, z_1) \\ v = (v_1, 0, 0) \\ x_1^2 + y_1^2 = 2pz_1 \end{cases}$$

其中， p_1 为旋转抛物面上一点； v 为前后平移向量； p_v 为 p_1 平移后的点。有了该关系式，则可知道点 p_v 与旋转抛物面的关系，具体如下所示：

$$\begin{cases} p_v = (x, y, z) \\ p_1 = p_v - v \\ x_1^2 + y_1^2 = 2pz_1 \end{cases} \Rightarrow (x - v_1)^2 + y^2 = 2pz$$

(2) 旋转抛物面左右方位平移

同理，设 p_1 为旋转抛物面上任意一点，我们对点 p_1 进行左右方位平移 v 后得到新点 p_v ，三点之间的关系如下所示：

$$\begin{cases} p_v = p_1 + v \\ p_1 = (x_1, y_1, z_1) \\ v = (0, v_2, 0) \\ x_1^2 + y_1^2 = 2pz_1 \end{cases}$$

其中， p_1 为旋转抛物面上一点； v 为左右平移向量； p_v 为 p_1 平移后的点。有了该关系式，则可知道点 p_v 与旋转抛物面的关系，具体如下所示：

$$\begin{cases} p_v = (x, y, z) \\ p_1 = p_v - v \\ x_1^2 + y_1^2 = 2pz_1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (y - v_2)^2 = 2pz$$

(3) 旋转抛物面上下方位平移

同理，设 p_1 为旋转抛物面上任意一点，我们对点 p_1 进行前后方位平移 v 后得到新点 p_v ，三点之间的关系如下所示：

$$\begin{cases} p_v = p_1 + v \\ p_1 = (x_1, y_1, z_1) \\ v = (0, 0, v_3) \\ x_1^2 + y_1^2 = 2pz_1 \end{cases}$$

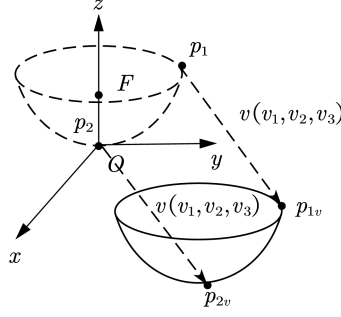
其中， p_1 为旋转抛物面上一点； v 为上下平移向量； p_v 为 p_1 平移后的点。有了该关系式，则可知道点 p_v 与旋转抛物面的关系，具体如下所示：

$$\begin{cases} p_v = (x, y, z) \\ p_1 = p_v - v \\ x_1^2 + y_1^2 = 2pz_1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2p(z - v_3)$$

(4) 旋转抛物面平移

结合上述旋转抛物面对前后左右上下三个方位平移的分析，现设平移向量为 v ，则旋转抛物面上点 p_1 平移后为点 p_v ， p_v 与旋转抛物面的关系如下所示：

$$\begin{cases} p_v(x, y, z) \\ v(v_1, v_2, v_3) \\ p_1 = p_v - v \\ x_1^2 + y_1^2 = 2pz_1 \end{cases} \Rightarrow (x - v_1)^2 + (y - v_2)^2 = 2p(z - v_3)$$



图三 旋转抛物面平移示意图

(5) 理想抛物面推导

由题目可知理想抛物面焦点为同心小球面上的一点，我们考虑让焦点系数为 p 的旋转抛物面经过平移使得焦点在同心小球面上，具体如下所示：

设过球心 C 与天体 S 两点的直线为 L ，直线 L 与同心小球面上焦点为 p_0 ，而在 z 轴上的焦点 F 移动到点 p_0 的方向向量为 v ，具体如下所示：

$$v = p_0 - F$$

由关系式可得 v 的具体值，具体如下：

$$\begin{cases} p_0(x_0, y_0, z_0) \\ F\left(0, 0, \frac{p}{2}\right) \\ v = p_0 - F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(v_1, v_2, v_3) \\ v_1 = x_0 \\ v_2 = y_0 \\ v_3 = z_0 - \frac{p}{2} \end{cases}$$

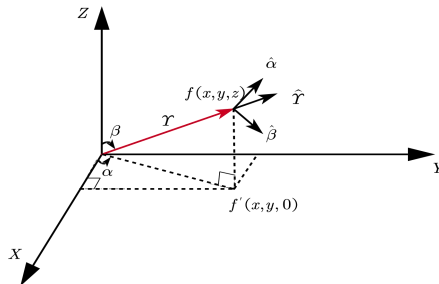
由位移向量 v 可得焦点在同心小球面上的理想旋转抛物面，具体如下所示：

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 2p\left(z - z_0 + \frac{p}{2}\right)$$

5.1.2 球面坐标系下的抛物线方程推导

(1) 直角坐标系与球面坐标系的转换

对于该题附件 1 提供的 2226 个主索节点的位置，结合题目给出主索节点的位置可以通过促动器向径向位移一段距离 $-0.6m \leq \Delta d \leq 0.6m$ ，为跟方便促动器径向伸缩量对基准球面的影响，现将每个主索节点坐标转化为球坐标，对于直角坐标系与球坐标系转化如下：



图四 直角坐标系转球面坐标示意图

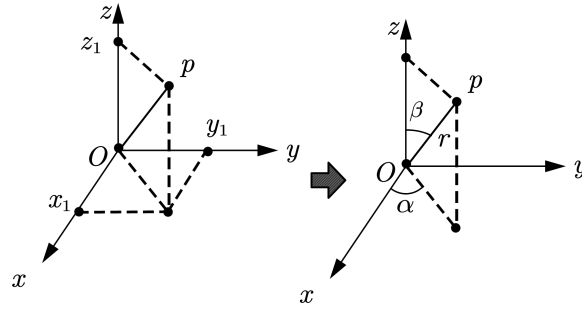
对与空间中的一点 $f(x, y, z)$ 其在 xy 面的投影点 $f'(x, y, 0)$ 其与 x 轴的夹角 α 在球坐标系称为方位角，且满足 $\alpha = \arctan(y/x)$ 。

对与空间中的一点 $f(x, y, z)$ ，从原点到 $f(x, y, z)$ 的距离为 r ，且满足 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

对与空间中的一点 $f(x, y, z)$ ，其在 z 轴的与 r 的夹角 β 在球坐标系称为俯仰角，且满足 $\beta = \arccos(z/r)$ 。

(2) 球坐标系下的抛物线方程

在上述中我们对空间直角坐标系下理想旋转抛物面进行了推导以及讨论了空间直角坐标系与球坐标系的转换关系。为便于调整节点，我们设一函数为 $g(\alpha, \beta)$ 该函数为代入理想旋转抛物面的方位角 α 和俯仰 β 时可得该理想旋转抛物面上的一点与球心 C 的距离 r 。具体如下所示：



图五 球坐标下抛物面方程推导示意图

$$\begin{cases} (x - v_1)^2 + (y - v_2)^2 = 2p(z - v_3) \\ x = r \sin(\beta) \cos(\alpha) \\ y = r \sin(\beta) \sin(\alpha) \\ z = r \cos(\beta) \end{cases}$$

把上述方程组化简可得函数 $g(\alpha, \beta)$ ，具体如下所示：

$$(r \sin(\beta) \cos(\alpha) - v_1)^2 + (r \sin(\beta) \sin(\alpha) - v_2)^2 = 2p(r \cos(\beta) - v_3)$$

$$\begin{cases} g(\alpha, \beta) = \frac{-b(\alpha, \beta) + \sqrt{b(\alpha, \beta)^2 - 4a(\alpha, \beta)c}}{2a(\alpha, \beta)} \\ a(\alpha, \beta) = \sin^2(\beta) \\ b(\alpha, \beta) = -2 \sin(\beta)(v_1 \cos(\alpha) + v_2 \sin(\alpha)) - 2p \cos(\beta) \\ c = v_1^2 + v_2^2 + 2pv_3 \end{cases}$$

5.1.3 目标确定

依据题意，当观测天体在基准面正上方时，此时 $\alpha = 0^\circ$ ， $\beta = 90^\circ$ ，设调整后每一个促动器改变为 $\Delta g(\alpha_j, \beta_j)$ ，在两个相邻的促动器之间的镜面的点 $g(\alpha_i, \beta_i)$ ，

以基准面到理想抛面 $f(\alpha_i, \beta_i)$ 的距离最小为目标，建立以下目标：

$$\text{Min } z = \sum \sqrt{(f(\alpha_i, \beta_i) - g(\alpha_i, \beta_i))^2}$$

其中， $g(\alpha_i, \beta_i)$ 为两个相邻的促动器之间的镜面的离散点， $f(\alpha_i, \beta_i)$ 为理想抛面上的点。

5.1.4 约束条件

(1) 对促动器伸缩量范围的约束

依据题意，为在反射板约束下确立理想抛物面，使最后可以通过调节反射板接近理想抛物面，但促动器在基准时的伸缩量升长不超过 0.6m 减少不超过 0.6m，具体约束如下：

$$-0.6 \leq g(\alpha_j, \beta_j) - \Delta g(\alpha_j, \beta_j) \leq 0.6 \quad j = 1, 2, 3 \dots 2226$$

其中， $g(\alpha_j, \beta_j)$ 为第 j 个促动器的球坐标的经长 r_j ， $\Delta g(\alpha_j, \beta_j)$ 为第 j 个促动器调整后的球坐标的经长 r_j 。

(2) 对反射面板调整范围的约束

依据题意，由于反射板的照明限制当待观察物体在正上方时，反射范围为馈源舱的下方照亮的宽为 300m 的范围，在该范围内调整反射面使其尽可能靠近确立的理想面，那么对每一个促动器的需要其在调整范围才能径向调整，具体约束如下：

$$x_j^2 + y_j^2 \leq 150^2 \quad j = 1, 2, 3 \dots 2226$$

其中， x_j 为第 j 个促动器的 x 坐标， y_j 为第 j 个促动器的 y 坐标。

5.1.5 模型的建立与求解

为了使基准面接近确立理想抛物面，建立以下模型：

$$\begin{aligned} \text{obj. Min } z &= \sum \sqrt{(f(\alpha_i, \beta_i) - g(\alpha_i, \beta_i))^2} \\ \text{s.t. } \begin{cases} -0.6 \leq g(\alpha_j, \beta_j) - \Delta g(\alpha_j, \beta_j) \leq 0.6 & j = 1, 2, 3 \dots 2226 \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \beta = \arccos(z/r) \\ \alpha = \arctan(y/x) \end{cases} \end{aligned}$$

5.1.6 算法的具体描述

根据以上建立的优化模型，利用贪心算法，以局部最优求总体最优的方式，设计相对应的求解算法，具体算法步骤如下：

Step 1: 初始化数据信息并处理。初始化数据信息，并获取附件一的数据，并对附件一中的数据进行球坐标转换，进而获取近似抛物面的球半径 r_1 。

Step 2: 计算理想半径与近似半径的误差。通过对理想方程的推导，并且通

过代入不同的 P 值，求解出理想旋转抛物面的半径 r_2 ，并对需要调整位置中的两个数据作差，求解出数据的误差，使用 *if* 语句判断误差是否在 0.6 中，如果误差在允许范围，则调整误差为 0，否则误差调整降低 0.6。

Step 3：记录 2226 个节点内寻找误差最大的点。在 2226 个节点误差中，获取全部误差中误差最大的数值，代表这一组数据中的误差。

Step 4：循环求解。利用 *for* 循环，循环求解出不同 P 值下的节点最大误差。并放置于误差数组中。

Step 5：获取最大误差数组的最小值对应的 P 值。

具体伪代码如下：

伪代码	
1:	Get 获取近似抛物面的 r1
2:	for p = 0 To 600 //p 的可取值范围
3:	for i = 1 To 2226 //2226 个节点
4:	if //需要调节的点
5:	r2=rCompute(a, F, p) //计算理想抛物面的球半径 r2
6:	if error < 0.6 //误差
7:	error = 0
8:	else
9:	error = abs (r1-r2) -0.6
10:	end
11:	else
12:	error = 0
13:	end
14:	max[] = max(error)
15:	end
16:	end
17:	min(max) //获取误差数组 max 中最小时的 p 值

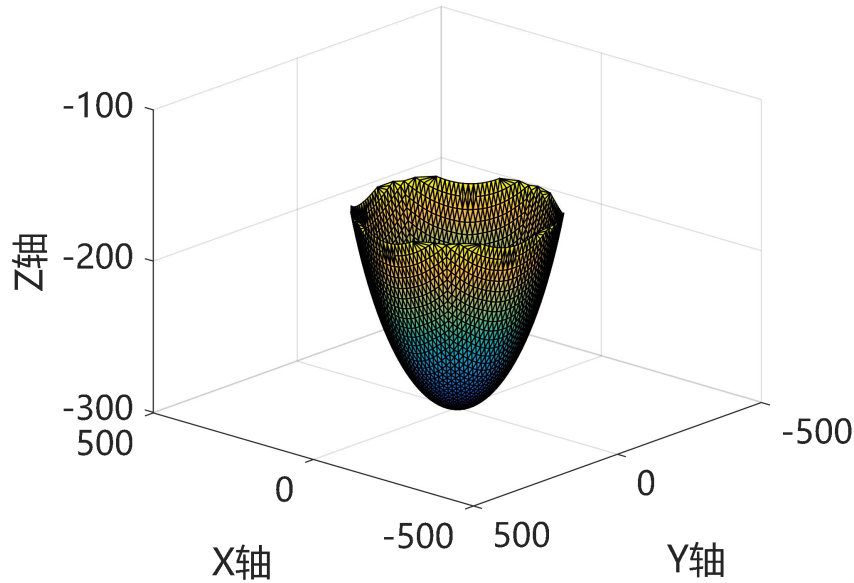
5.1.7 具体结果

(1) 数据处理结果

由附件三的主索节点关系数据，并结合附件一的坐标信息，我们对数据关系进行处理，并对各个节点的名称进行赋值，因而“0-1”变量矩阵 D 具体如下：

$$D_{2226 \times 2226} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

并绘制具体图形如下：



图六 三角平面版图

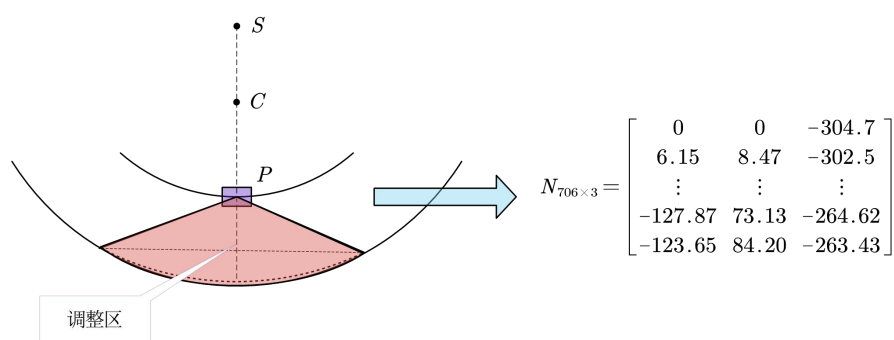
(2) 球坐标系的转换

由5.2.2中直角坐标系与球坐标系的转换，由于调整为径向调整，因而转换为球坐标系运算更为简单，从而根据公式的转换，我们可以获得球坐标系下的 2226×3 的矩阵 $ball$ 的具体数值如下：

$$ball_{2226 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 3.1416 & 300.4 \\ 0.9425 & 3.1070 & 300.4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2.3602 & 2.1770 & 300.4 \\ 2.3191 & 2.1684 & 300.4 \end{bmatrix}$$

(3) 需调整点的坐标矩阵

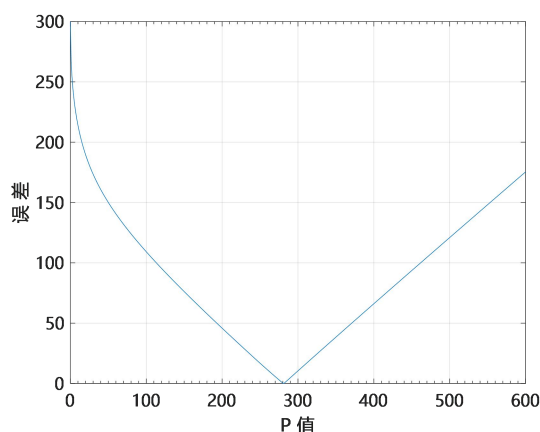
由上述约束条件可知，需要调整的矩阵位于 P 点下方的照明区域，同时我们采用 *Matlab* 编程求解，可得具体的调整点的坐标矩阵 N ，已经调整的位置示意图如下：



图七 调整范围示意图

(4) 不同 p 值下的误差

综上所述，对需调整的点阵进行调整，调整范围为 $[-0.6, 0.6]$ ，在 P 值的可行范围内运动，由于 P 值的取值范围为 $(0, +\infty]$ ，我们取 $[0, 600]$ 的范围进行求解，可得 P 值变化情况下的误差变化，具体图形如下：



图八 P 值在 0~600 变化的误差图

由上图可知，随着 P 值的上升，误差由大变小，再由小变大，因而我们能确定当误差最小的时候， P 值的取值范围大概为 $[276, 286]$ ，我们对 P 值的数据进行细化分析，可得 P 值变化下，误差的具体数值如下表：

表一 不同 P 值下的误差表

P 值	误差	P 值	误差
276.0	2.427	281.2	0
....	281.4	0
280.4	0.066	281.6	0.052
280.6	0
280.8	0	286.0	2.54
281.0	0		

因而我们可知， P 值最佳为 281.0，同时由 5.2.1 可得，抛物线的方程具体为：

$$(x - v_1)^2 + (y - v_2)^2 = 2p(z - v_3)$$

由于偏移量 $v_1 = 0$ ， $v_2 = 0$ ， $v_3 = -((1-k) \times R + p/2) = -300.7$ ，即理想抛物线方程具体如下：

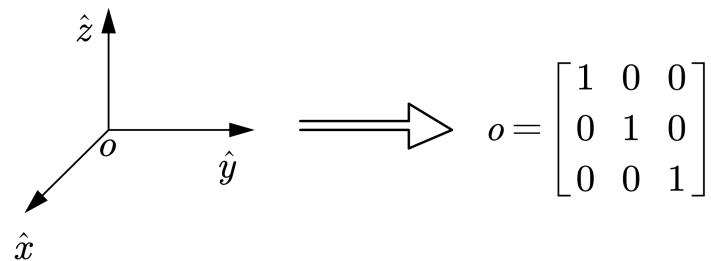
$$x^2 + y^2 = 562z + 168993.4$$

5.2 问题二：反射调节方案模型建立与求解

5.2.1 对空间三维物体的旋转分析

根据题意，我们需要对旋转抛物面进行旋转，已知天体 S 位于 $\alpha = 36.795^\circ$ ， $\beta = 78.169^\circ$ 确定理想抛物面，对原来的理想抛物面进行旋转得到新的旋转抛物面方程，具体操作如下：

空间里单位向量 o



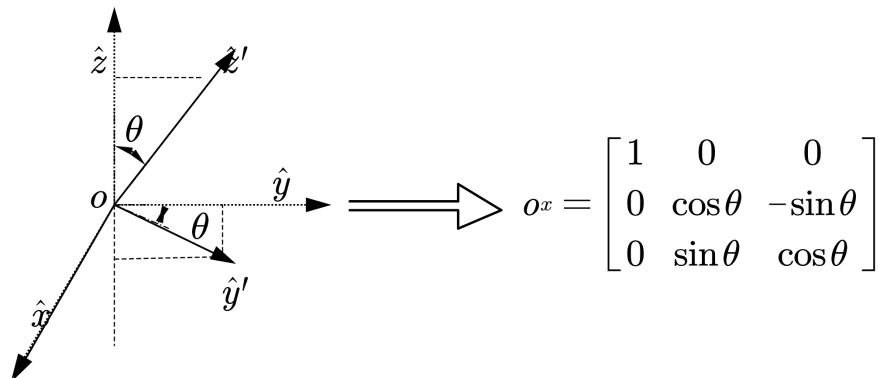
$$o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

图九 初始向量图

依据题意，对于旋转抛物面需要进行以下操作，确定抛物面旋转角度，由基准面的初始坐标及星体所在位置角度，最终确定抛物面旋转角度为：绕 x 轴逆时针旋转 $(90 - 78.169)^\circ$ ，在绕 z 轴逆时针旋转 36.795° 。

对于绕 x 轴逆时针旋转 $(90 - 78.169)^\circ$ 旋转，只需要将抛物面上的点乘以相应的方向矩阵，具体分析如下：

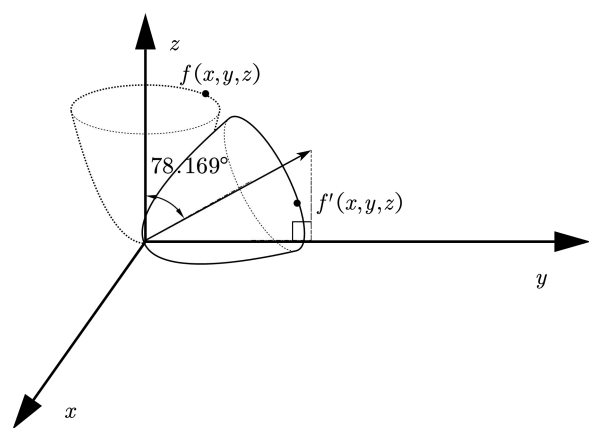
对于空间中的一单位向量 o ，使其绕 x 轴旋转 θ° 后，得到的旋转的单位向量如下：



$$o_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

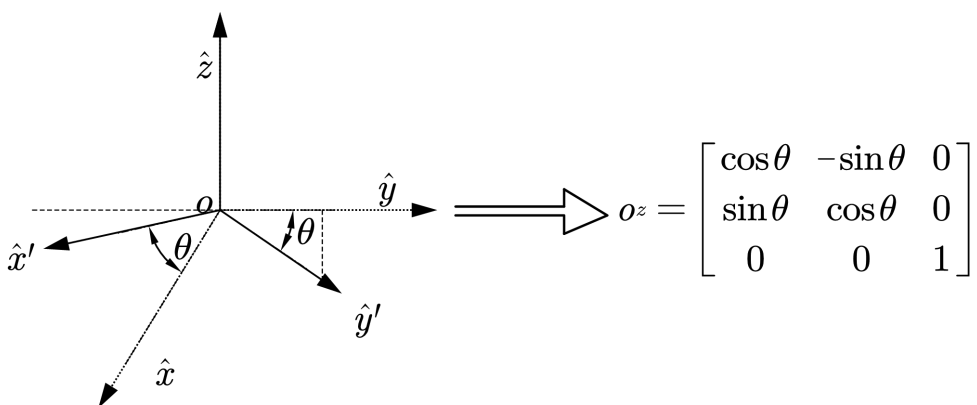
图十 绕 x 轴旋转 θ° 后的向量图

那么对于该抛物面上的点 $f(x, y, z)$ 有 $o \bullet f(x, y, z)$ 得到是旋转后的点 $f'(x, y, z)$ 。



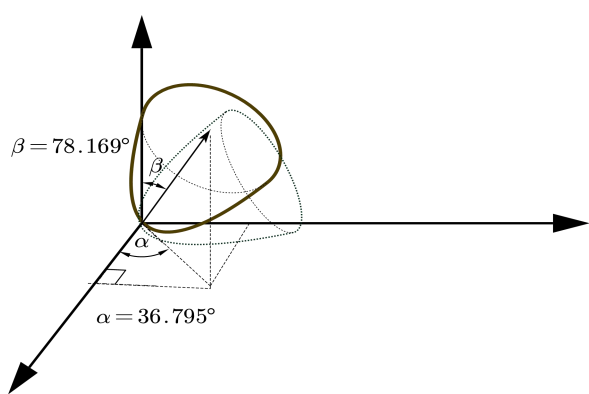
图十一 绕 x 轴旋转 θ° 后旋转抛物面示意图

对于空间中的一单位向量 o ，使其绕 z 轴旋转 θ° 后，得到的旋转的单位向量如下：



图十二 绕 z 轴旋转 θ° 后的向量图

那么对于旋转后抛物面上的点 $f'(x, y, z)$ 有 $o \bullet f'(x, y, z)$ 得到是旋转后的点 $f''(x, y, z)$ 。



图十三 绕 z 轴旋转 θ° 后旋转抛物面示意图

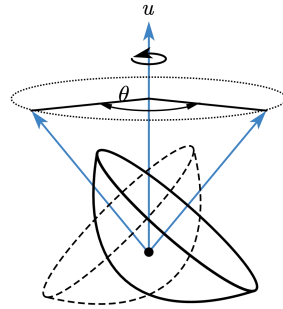
综上所述，对空间中抛物面旋转后有：

$$\begin{cases} f''(x, y, z) = f(x, y, z) \bullet o_z \bullet o_x \\ o_z = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ o_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \end{cases}$$

其中， $f(x, y, z)$ 为抛物面上的点， $f''(x, y, z)$ 为调整后的抛物面， o_z 为旋转对应角度 θ 的单位方向矩阵。

5.2.2 绕旋转轴旋转分析

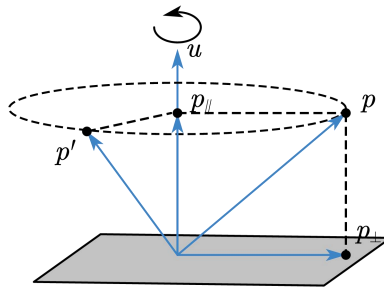
在上述中我们考虑通过 xyz 三坐标轴的旋转图形，使得旋转抛物面旋转到一定方向上。该方法需要计算坐标轴的旋转角度，计算该旋转角度难度较大。现我们考虑构造旋转轴 u ，设置图形绕旋转轴 u 旋转 θ 角度，具体如下所示：



图十四 抛物面绕轴旋转角度的示意图

现设旋转点为 p ，旋转点 p 在旋转轴 u 上的分量为 p_{\parallel} ，以及与旋转轴 u 正交的向量为 p_{\perp} 。旋转点 p 绕旋转轴 u 旋转 θ 角度（右手系）后的点为 p' 。同理点 p' 在旋转轴上的分量为 p'_{\parallel} ，以及与旋转轴 u 正交的向量为 p'_{\perp} 。具体如下所示：

$$\begin{cases} p = p_{\parallel} + p_{\perp} \\ p' = p'_{\parallel} + p'_{\perp} \end{cases}$$



图十五 旋转分量示意图

在绕旋转轴 u 旋转时，向量 p_{\parallel} 保持不变。而向量 p_{\perp} 则会改变，为了描述向

量 p_{\perp} 旋转后的向量 p'_{\perp} 在平面上的位置我们需要在平面上添加一个向量 w ，具体如下所示：

$$\begin{cases} p'_{\parallel} = p_{\parallel} \\ p'_{\perp} = a_1 p_{\perp} + a_2 w \end{cases}$$

其中，向量 p_{\parallel} 为向量 p 在旋转轴向量 u 上的分量；向量 p'_{\parallel} 为向量 p' 在旋转轴向量 u 上的分量；向量 p'_{\perp} 是平面上的向量 p_{\perp} 和向量 w 的线性组合。

(1) 分量分析

在上述中我们分析了向量 p 绕旋转轴 u 旋转后在旋转轴上的分量 p_{\parallel} 即：向量 p 在旋转轴的分量 p_{\parallel} 不变，且分量 p_{\parallel} 本质上是向量 p 在旋转轴的投影，具体如下所示：

$$\begin{aligned} p_{\parallel} &= \text{proj}_u(p) \\ &= \frac{p \cdot u}{\|u\|^2} u \\ &= \frac{p \cdot u}{\|u\|} \frac{u}{\|u\|} \\ &= (p \cdot u) u \quad (\|u\| = 1) \end{aligned}$$

其中，我们设旋转轴 u 的模为 1。

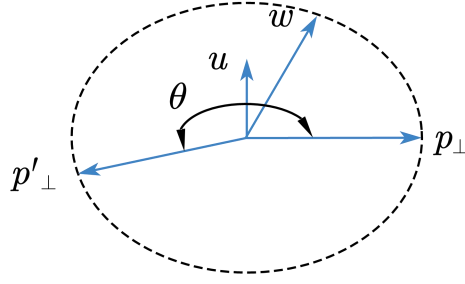
而对于向量 p 的垂直分量 p_{\perp} 可由关系式推出，具体如下：

$$p_{\perp} = p - p_{\parallel}$$

除了我们要计算向量 p 的分量 p_{\parallel} 和分量 p_{\perp} ，更加关键的是计算向量 p 绕旋转轴 u 旋转 θ 角度后的向量 p' 。向量 p' 由分量 p'_{\parallel} 和 p'_{\perp} 组合可得，其中向量 p'_{\parallel} 与向量 p_{\parallel} 相等，而向量 p'_{\perp} 由平面上的向量 p_{\perp} 和向量 w 的线性组合可得。现设向量 w 与向量 u 和向量 p_{\perp} 正交，我们通过叉乘构造向量 w 。具体如下：

$$\begin{cases} p'_{\parallel} = p_{\parallel} \\ p'_{\perp} = a_1 p_{\perp} + a_2 w \\ w = u \times p_{\perp} \end{cases}$$

由于向量 u 为单位向量，且向量 u 与向量 p_{\perp} 正交，故向量 w 的长度与向量 p_{\perp} 的长度相等。而对于向量 p'_{\perp} 的大小也因与向量 p_{\perp} 相等。具体如下所示：



图十六 向量分析示意图

$$\begin{aligned}\|w\| &= \|u\| \|p_{\perp}\| \sin \frac{\pi}{2} \\ &= \|p_{\perp}\| \quad (\|u\|=1)\end{aligned}$$

依据上图，当向量 p 绕旋转轴 u 旋转 θ 角时，向量 p'_{\perp} 系数如下所示：

$$p'_{\perp} = \cos(\theta) p_{\perp} + \sin(\theta) w$$

(2) 绕旋转轴旋转总结

结合上述分析，我们可得向量 p 旋转后的向量 p' ，具体如下所示：

$$\begin{cases} p' = p'_{\parallel} + p'_{\perp} \\ p'_{\parallel} = p_{\parallel} = (p \cdot u)u \\ p_{\perp} = p - p_{\parallel} \\ w = u \times p_{\perp} \\ p'_{\perp} = \cos(\theta) p_{\perp} + \sin(\theta) w \end{cases}$$

其中， p' 为向量 p 绕旋转轴 u 旋转 θ 角后的向量； p'_{\perp} 为 p' 的分量； p'_{\parallel} 为 p' 的分量且与向量 u 平行。将上述化简具体如下：

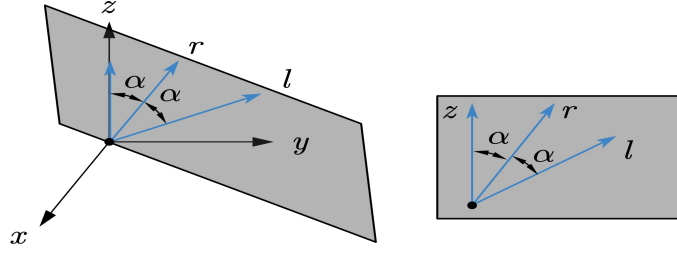
$$\begin{aligned}p' &= p'_{\parallel} + p'_{\perp} \\ &= p_{\parallel} + \cos(\theta) p_{\perp} + \sin(\theta) w \\ &= (p \cdot u)u + \cos(\theta)[p - (p \cdot u)u] + \sin(\theta)u \times p_{\perp} \\ &= \cos(\theta)p + [1 - \cos(\theta)](p \cdot u)u + \sin(\theta)[u \times (p - p_{\parallel})] \\ &= \cos(\theta)p + [1 - \cos(\theta)](p \cdot u)u + \sin(\theta)u \times p\end{aligned}$$

其中， u 为旋转轴单位向量，其大小为 1； p 为待旋转点； θ 为点 p 绕旋转轴 u 旋转（右手系）的角度。

(3) 天眼姿态旋转

在题目中，天体为 S 、球心为 C ，球心与天体连线为 l 。而我们天眼的对称轴为 z 轴。现我们把天眼沿一旋转轴 r 旋转 θ 度，使得天眼新的对称轴为 l 。我们设旋转轴 r 为直线 l 和直线 z 的“夹角平分线”，且旋转轴 r 与直线 l 和直线 z 同

平面。具体如下所示：



图十七 天眼旋转姿态示意图

我们用向量 l_1 表示直线 l 上的一点，设向量 l_1 的 z 坐标大于 0 以及 l_1 的大小为 1。同理取 z 轴上的一向量 z_1 ，设向量 l_1 的 z 坐标大于 0 以及 l_1 的大小为 1。向量 z_1 与向量 l_1 相加可得旋转轴向量 r_1 。具体如下所示：

$$\begin{cases} r_1 = z_1 + l_1 \\ \|z_1\| = \|l_1\| = 1 \end{cases}$$

其中， r_1 为旋转轴向量； z_1 为旋转抛物面的对称轴； l_1 为旋转抛物面绕旋转轴 r_1 旋转 θ 后的对称轴。

由于，旋转轴 r_1 的不一定为单位向量，故我们对旋转轴 r_1 单位化。而对于旋转抛物面绕旋转轴旋转的角度 θ 易得。具体如下：

$$\begin{cases} r_2 = \frac{r_1}{\|r_1\|} \\ \theta = \pi \end{cases}$$

5.2.3 目标确定

依据题意，当观测天体在基准面上方时，此时 $\alpha = 36.795^\circ$ ， $\beta = 78.169^\circ$ ，调整范围为馈源舱下方 300m 范围，设调整后每一个促动器改变为 $\Delta g(\alpha_i, \beta_i)$ ，在两个相邻的促动器之间的镜面的点 $g(\alpha_i, \beta_i)$ ，以基准面到理想抛面 $f(\alpha_i, \beta_i)$ 的距离最小为目标，建立以下目标：

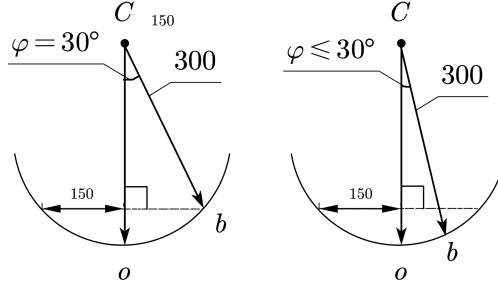
$$\text{Min } z = \sum \sqrt{(f(\alpha_i, \beta_i) - g(\alpha_i, \beta_i))^2}$$

其中， $g(\alpha_i, \beta_i)$ 为两个相邻的促动器之间的镜面的离散点， $f(\alpha_i, \beta_i)$ 为理想抛面上的点。

5.2.4 约束条件

依据题意，对于观测天体 S 在 $\alpha = 36.795^\circ$ ， $\beta = 78.169^\circ$ 时，确立要调整的促动器的数量，由几何关系可以知道馈源舱下方 300m 范围的促动器节点应该满足与观测天体延长线与基准面的夹角小于 30° ，具体约束如下：

$$\arccos \frac{\vec{o} \cdot \overrightarrow{b(x_i, y_i, z_i)}}{|\vec{o}| \cdot |b(x_i, y_i, z_i)|} \leq \frac{\pi}{6} \quad i = 1, 2, \dots, 2226$$



图十八 旋转角度分析

其中， \vec{o} 为原点与观察体 S 延长线与球面的交点 o 到原点的向量， $\overrightarrow{b(x_i, y_i, z_i)}$ 为球面上的点到原点 C 的向量，“ $||$ ”表示为向量的模。

5.2.5 模型的建立与求解

综上所述，建立模型具体如下：

$$\begin{aligned} \text{obj. min } z_2 &= \sum |g(\theta_i, \beta_i) - f(\theta_i, \beta_i)| \\ \text{s.t. } \begin{cases} |g(\theta_i, \beta_i) - \Delta g(\theta_i, \beta_i)| \leq 0.6 & i = 1, 2, \dots, 2226 \\ \frac{\sqrt{\Delta b(x_i, y_i, z_i)^2 + \Delta b(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})^2}}{\sqrt{b(x_i, y_i, z_i)^2 + b(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})^2}} \leq 0.07\% & i = 1, 2, \dots, 2226 \\ \arccos \frac{\vec{o} \cdot \overrightarrow{b(x_i, y_i, z_i)}}{|\vec{o}| \cdot |b(x_i, y_i, z_i)|} \leq \frac{\pi}{6} & i = 1, 2, \dots, 2226 \\ o = (0, 0, -300.4) \end{cases} \end{aligned}$$

5.2.6 算法的具体描述

根据以上建立的优化模型，利用贪心算法，以局部最优求总体最优的方式，设计相对应的求解算法，具体算法步骤如下：

Step 1: 初始化数据信息并处理。初始化数据信息，并获取附件一的数据，并对附件一中的数据进行球坐标转换，进而获取近似抛物面的球半径 r_1 。

Step 2: 计算理想半径与近似半径的误差。通过对理想方程的推导，并且通过代入不同的 P 值，求解出理想旋转抛物面的半径 r_2 。

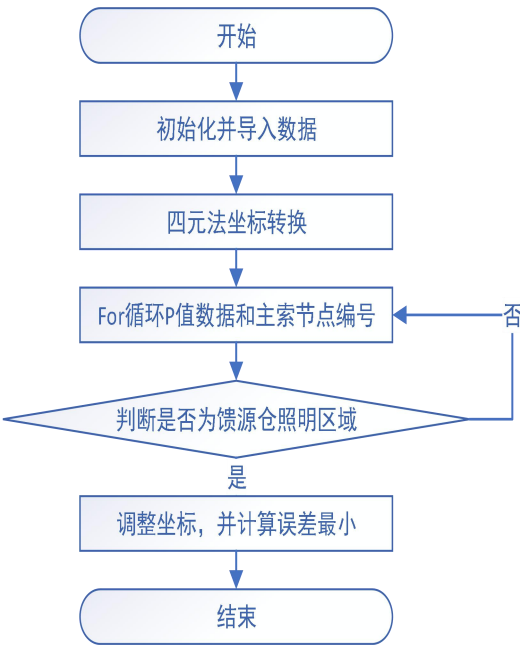
Step 3: 计算调整位置。利用三角函数，使用四元数旋转，将比较困难计算的斜面数据转换为被观测点正下方的数据，并对需要调整位置中的两个数据作差，求解出数据的误差，使用 *if* 语句判断误差是否在 0.6 中，如果误差在允许范围，则调整误差为 0，否则误差调整降低 0.6。

Step 4: 记录 2226 个节点内寻找误差最大的点。在 2226 个节点误差中，获

取全部误差中误差最大的数值，代表这一组数据中的误差。

Step 5：循环求解。利用 *for* 循环，循环求解出不同 *P* 值下的节点最大误差。并放置于误差数组中。

Step 6：获取最大误差数组的最小值对应的 *P* 值。
具体流程图如下：

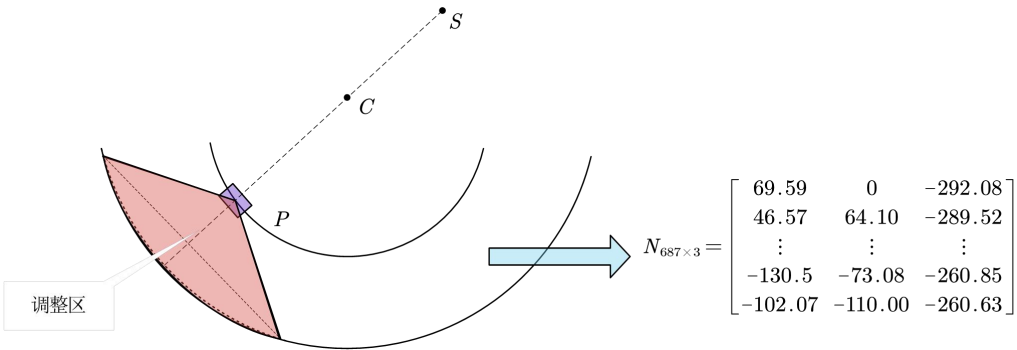


图十九 算法描述流程图

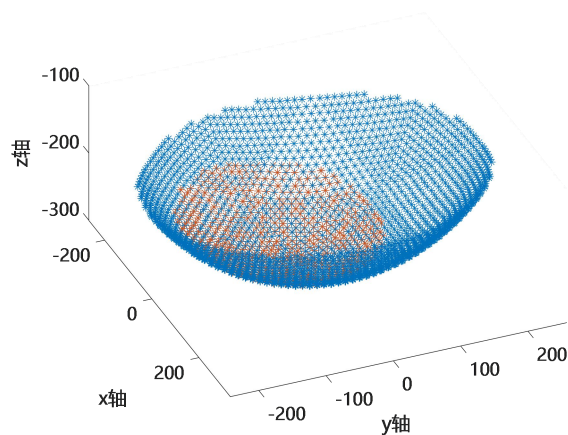
5.2.7 具体结果

(1) 需调整点的坐标矩阵

由上述约束条件可知，需要调整的矩阵位于 *P* 点下方的照明区域，同时我们采用 *Matlab* 编程求解，可得具体的调整点的坐标矩阵 *N*，已经调整的位置示意图如下：



图二十 调整范围示意图



图二十一 调整范围示意图

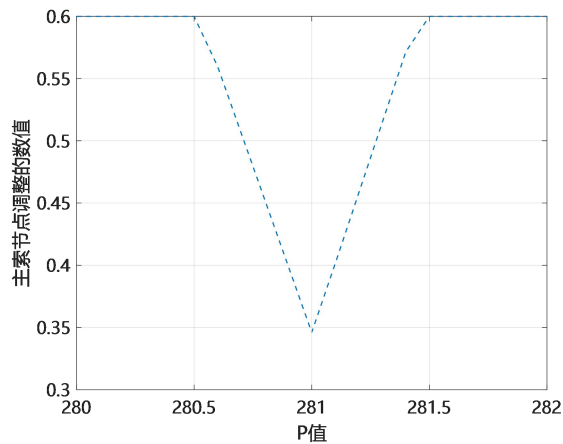
(2) P 值计算

综上所述，对需调整的点阵进行调整，调整数值范围为 $[-0.6, 0.6]$ ，在 P 值的可行范围内运动，由于 P 值的取值范围为 $(0, +\infty]$ ，我们取 $[280, 282]$ 的范围进行求解，可得 P 值变化情况下的调整数值，具体数据如下表

表二 不同 P 值下的调整数值

P 值	主索节点调整的数值
280.0	0.600
....
280.9	0.399
281.0	0.3461
281.1	0.4014
....
281.9	0.600

由上表可绘制图像如下：



图二十二 P 值变化情况下调节数值的变化

因而由 P 值可得，理想抛物面的方程为： $x^2 + y^2 = 562z + 168993.4$ 。

(3) 附件4 部分数据展示

综上所述，我们可以求得顶点坐标为 $(-69.677, 0, -292.433)$ ，同时确定调整后的主索节点编号及坐标，获取的部分数据如下表展示：

表三 主索节点编号及坐标

节点编号	X	Y	Z
$A0$	-69.659	0	-292.357
$B1$	46.645	64.204	-289.961
....
....
$E429$	-173.396	172.027	-174.874
$E430$	-168.273	181.246	-170.512

以及促动器顶端的伸缩量，部分展示如下：

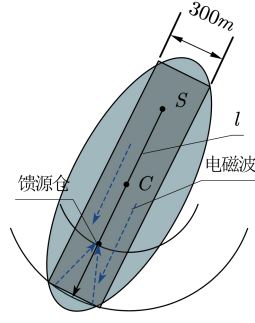
表四 促动器顶端的伸缩量

节点编号	伸缩量
$A0$	0.141
$B1$	0.225
....
$D4$	0.022
$D5$	-0.046
....
$E429$	0
$E430$	0

5.3 问题三：接收比计算的模型建立与求解

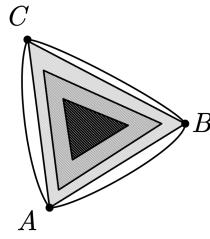
5.3.1 工作抛物面反射电磁波分析

在本问题中，我们需要考虑天体发射电磁波的方向以及电磁波的范围，以及计算电磁波到达工作抛物面后经反射面反射后到达馈源仓的数量。由于反射面主索节点调节后，相邻节点之间的距离发生微小的变化，且变化幅度不超过 0.07% 。出于简化模型的角度考虑，我们忽略反射面相邻节点之间的距离变化。而天体沿天体球心方向 l 发射电磁波，电磁波的范围为距离方向 l 不大于 150 米。具体如下所示：



图二十三 馈源舱电磁波流向示意图

现考虑一小块工作面板，分析其发射电磁波的原理。小工作面版由三主索节点组成，呈带有一定弧度的面板，如图所示：



图二十四 工作面板示意图

在基础球面时小工作面版为球面，其法线指向球心。而在工作模型下小工作面版近似于旋转抛物面，其法向量由理想旋转抛物面求偏导可得。具体如下所示：

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0 \end{cases} \Rightarrow n(F_x, F_y, F_z) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}$$

其中， $F(x, y, z)$ 为曲面方程； n 为曲面在点 $p(x_0, y_0, z_0)$ 的法向量。而在点 p 处的法线方程如下所示：

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

分析法线方程后，现我们分析电磁波的反射线方程。入射电磁波经工作面板反射时，入射线与法线夹角与反射性与法线夹角相等，依据这一特性求得反射线方程。设入射电磁波上一点为 p_1 ，点 p_1 绕法向量 n 旋转角度 π 可得发射线上一点 p_2 。由点 p 和点 p_2 可确定反射线方程。具体如下所示：

$$\begin{cases} u = \frac{n}{\|n\|} \\ p_2 = 2(p_1 \cdot u)u - p_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_0}{x_0 - x_2} = \frac{y - y_0}{y_0 - y_2} = \frac{z - z_0}{z_0 - z_2}$$

设 z_3 为馈源舱的高度坐标，将 $z = z_3$ 代入反射线方程，求得电磁波的坐标，计算该点是否被馈源舱接收。具体如下所示：

$$\begin{cases} \frac{x_4 - x_0}{x_0 - x_2} = \frac{y_4 - y_0}{y_0 - y_2} = \frac{z_3 - z_0}{z_0 - z_2} \\ p_4(x_4, y_4, z_3) \\ p_3(x_3, y_3, z_3) \\ S = \begin{cases} 1 & , \|p_4 - p_3\| \leq 0.5 \\ 0 & , \|p_4 - p_3\| > 0.5 \end{cases} \end{cases}$$

5.3.2 目标确定

依据题意,需要确立调整后的馈源舱上接受的基准面上的信号与馈源舱下的有效300m接收到的信号之比,对该题我们先旋转坐标系,使观测天体在基准面上方时,此时 $\alpha = 36.795^\circ$, $\beta = 78.169^\circ$,让该SC轴与Z轴重合,在该条件下计算调整后基准面上天体S的信号接受率,调整后的接收比应比没有调整的接收比高,表示对基准面的调整可以提高对天体S的观测,反之亦然,以对SC轴所对的687×3块镜片所反射的信号与基准面所反射的信号之比的最大为目标,建立以下目标:

$$\text{Max } z_3 = \frac{\sum_{j=1}^{687} \sum_{n=1}^n x_{jn}}{687 \times 3n}$$

其中, x_{jn} 表示为第 j 块镜片所反射的第 n 条射线是否被馈源舱接收。

5.3.3 约束条件

(1) “0-1” 约束条件

依据题意,由于反射的光线只有被馈源舱接收到才算有用信号,对SC轴所对的300m有效范围的第 j 块镜片所反射的第 n 个信号是否被馈源舱接收进行约束,具体约束如下:

$$x_{jn} \in \{0,1\} \quad j=1,2,\dots,687, n=1,2,\dots,n$$

(2) 对接收信号约束条件

依据题意,由于反射的光线只有被馈源舱接收到才算有用信号,对SC轴所对的第 j 块镜片所反射的第 n 个信号经过计算对称点,通过对称点的 x 坐标与入射信号距离小于0.5m才能被馈源舱接收进行约束,具体约束如下:

$$\begin{cases} p_{2jn} = P(N_{jn}, \pi\pi_1) & j=1,2,\dots,687, n=1,2,\dots,n \\ \sqrt{(h_{jnx} - p_{2jn}(x))^2 + (h_{jny} - p_{2jn}(y))^2} \geq 0.5x_{jn} & j=1,2,\dots,687, n=1,2,\dots,n \end{cases}$$

其中, h_{jnx} 为第 j 块镜片的第 n 个点的 x 坐标, $p_{2jn}(x)$ 为点 p_1 关于第 j 个镜片的第 n 个点的 N_{jn} 旋转 π 后的对称点。

5.3.4 模型的建立与求解

综上所述，建模模型具体如下：

$$\begin{aligned}
 \text{obj. Max } z_3 &= \frac{\sum_{j=1}^{687} \sum_{n=1}^n x_{jn}}{687 \times 3n} \\
 s.t. \begin{cases} N_{jn} = \frac{h_{jnx} - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{h_{jny} - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{h_{jnz} - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)} & j = 1, 2, \dots, 687, n = 1, 2, \dots, n \\ u = \frac{N_{jn}}{|N_{jn}|} & j = 1, 2, \dots, 687, n = 1, 2, \dots, n \\ p_{2jn} = P(N_{jn}, \pi\pi_1) & j = 1, 2, \dots, 687, n = 1, 2, \dots, n \\ \sqrt{(h_{jnx} - p_{2jn}(x))^2 + (h_{jny} - p_{2jn}(y))^2} \geq 0.5x_{jn} & j = 1, 2, \dots, 687, n = 1, 2, \dots, n \\ p_1 = (0, 0, -160.2) \\ x_{jn} \in \{0, 1\} & j = 1, 2, \dots, 687, n = 1, 2, \dots, n \end{cases}
 \end{aligned}$$

5.3.5 算法的具体描述

根据以上建立的优化模型，对每一个三角镜面求在该点的法向量，根据焦点 p 关于法向量的对称点与入射光线的距离小于 $0.5m$ ，设计相对应的求解算法，具体算法步骤如下：

Step 1: 初始化数据信息并处理。初始化数据信息，并获取附件一的数据，并对附件一中的数据进行球坐标转换，进而获取近似抛物面的球半径 r_1 。

Step 2: 计算理想半径与近似半径的误差。通过对理想方程的推导，并且通过代入不同的 P 值，求解出理想旋转抛物面的半径 r_2 。

Step 3: 计算调整位置。利用三角函数，使用四元数旋转，计算焦点 p 关于法向量对称点，计算该入射光线与焦点 p 的对称点的距离，使用 *if* 语句判断距离是否在 0.5 中，如果距离在允许范围，入射光线加一。

Step 4: 记录 687×3 个镜片内寻找入射光线与焦点 p 。在 687×3 个镜片中，获取全部与焦点 p 的对称点的距离的入射光线并计算数量。

Step 5: 循环求解。利用 *for* 循环，循环求解出不同 P 值下的镜片最大入射比。并放置于数组中。

Step 6: 最后挑选合适的接收比下的调整方案。

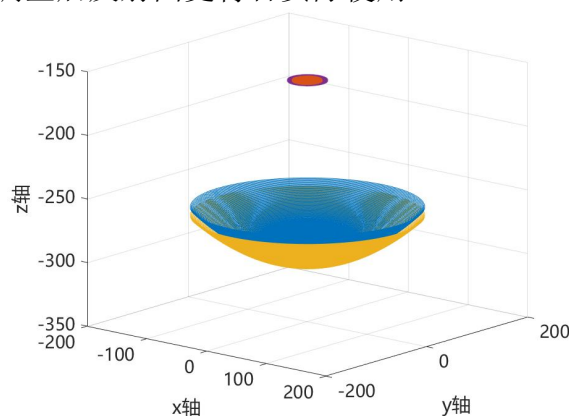
5.3.6 具体结果

综上所述，利用 *Matlab* 编程求解，通过观测点照射的面垂直往下照射，则各个点阵的数据，调整前的基准面具体如下矩阵 $F_{90150 \times 6}$ ，调整后的基准面具体如下矩阵 $H_{90150 \times 6}$ 其中前三列为馈源舱位置，后三列数据为反射面数据。

$$F_{90150 \times 6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -299.99 & 0.06 & -5.70 & -160.20 \\ 0.99 & 0.01 & -299.99 & 0.06 & 7.12 & -160.20 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 149.99 & -1.57 & -259.8 & -22.52 & 0.23 & -160.20 \\ 150.00 & -3.67 & -259.8 & -22.52 & -6.68 & -160.20 \end{bmatrix}$$

$$H_{90150 \times 6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -305.19 & 0.05 & -5.81 & -160.21 \\ 0.99 & 0.01 & -305.19 & 0.05 & 5.23 & -160.21 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 149.99 & -1.57 & -266.41 & -24.67 & 0.25 & -160.21 \\ 150.00 & -3.67 & -266.41 & -24.67 & -5.99 & -160.21 \end{bmatrix}$$

因而可求解得基准球面调整前的接收比为4%，基准球面调整后的接收比为12%，具体绘制图形如下所示，进而可以获得调整后的接收比大于调整前的接收比，因而可以确定调整后反射面更符合实际使用。



图二十五 接收面图像

六、模型评价与推广

6.1 模型的优点

- 1、模型具有可靠的数学基础，科学合理，可信度高；
- 2、通过将反射面离散化求解，使得模型考虑更加全面，加快了运算速度；
- 3、该模型能够很好的与生活联系，具有很好的推广性。

6.2 模型缺点

1. 缺乏考虑促动器的灵敏程度；

6.3 模型的推广

该模型在一定程度上有效地解决了反射光源的优化设计问题，能够计算出不同顶点位置下的理想抛物面方程，并计算出不同的误差以及不同调整位置下的调整数量，调整情况，对于实际的天体观测具有很强的实用价值，为我国的空间宇宙研究提供了作用，具有推广意义。

附录一

(1) 问题一代码

```
% P=@(x)c1*x^a-b/a;% P(ρ)函数定义变量
clear;close all;clc;

get=xlsread('C:\Users\win11\Desktop\建模\8.25-2\A\附件 1.csv','附件
1','B2:D2227');
get2=xlsread('C:\Users\win11\Desktop\建模\8.25-2\A\工作簿
1.xlsx','Sheet1','A1:D2227');
% r1=@(x,y)c1*x^a-b/a;% P(ρ)函数定义变量
ball=[];
rn=0;
for i=1:2226
    rn=sqrt(get(i,1)^2+get(i,2)^2+get(i,3)^2);
%     a = atan(get(i,2)/get(i,1));
    a = atan2(get(i,2),get(i,1));
    b = acos(get(i,3)/rn);
    ball=[ball;a b rn];
%     [R,phi,theta]=sph2rec(get(i,1),get(i,2),get(i,3));
%     ball=[ball;theta phi R];

end

minm=[];

for k=275:0.2:285
%     p=281;% 焦点系数
%     k=abs(2*(k-300.0544));
    p=k;
    m=0;
    num=0;
    rr1=[];
```

```

r1=[];
rb=[];
vn=0;
for i=1:1:2226
    %%
    %调用函数
    x=get(i,1);
    y=get(i,2);
    vn=0;
    if x*x+y*y<=150*150
        r=rCompute(ball(i,1),ball(i,2),p);

        r1=[r1;ball(i,1) ball(i,2) r];
        max_1 = abs(ball(i,3)-r);
        if max_1>0.6
            vn=max_1-0.6;
            rr1=[rr1;vn];
        else
            vn=0;
            rr1=[rr1;vn];
        end

    else
        vn=0;
        rr1=[rr1; vn];
    end
    rb=[rb;ball(i,1) ball(i,2) ball(i,3)+vn];
    %%
end

max1 = max(rr1);
minm = [minm;p max1];%记录下这个时刻调整后的 r 值，应当每次都是
最小
%
    plot3( (:,1), ball(:,2),r1(:,1));
%

```

```

end
% plot(minm(:,1),minm(:,2));
xx=[];
for i=1:2226
    a=rb(i,1);
    b=rb(i,2);
    x=rb(i,3)*sin(b)*cos(a);
    y=rb(i,3)*sin(b)*sin(a);
    z=rb(i,3)*cos(b);
    if isnan(x)
        x=0;
    end
    if isnan(y)
        y=0;
    end
    if isnan(z)
        z=0;
    end

    xx=[xx;x y z ];
end
zh=[];
rx=[1,0,0;
    0,cos(90-78.169),-sin(90-78.169);
    0,sin(90-78.169),cos(90-78.169)];
rz=[cos(36.795),-sin(36.795),0;
    sin(36.795),cos(36.795),0;
    0,0,1];
for i=1:2226
    zh(i,:)=xx(i,:)*rx*rz;
end
% plot3(zh(:,1),zh(:,2),zh(:,3));
hold on
%
```

```

% xy=[];
% xz=[];
% yz=[];
% xy=[xy;xx(:,1) xx(:,2)];
% xz=[xz;xx(:,1) xx(:,3)];
% yz=[yz;xx(:,3) xx(:,3)];
% mesh(xy,xz,yz);
plot3(xx(:,1),xx(:,2),xx(:,3),'b');
hold on
% plot3(get(:,1),get(:,2),get(:,3));
% min = max(minm)

```

```

xr1=[];
for i=1:1:706
    a=r1(i,1);
    b=r1(i,2);
    x=r1(i,3)*sin(b)*cos(a);
    y=r1(i,3)*sin(b)*sin(a);
    z=r1(i,3)*cos(b);
    if isnan(x)
        x=0;
    end
    if isnan(y)
        y=0;
    end
    if isnan(z)
        z=0;
    end
    if i==1
        z=-304.7;
    end
    xr1=[xr1;x y z];
end

```

```
plot3(xr1(:,1),xr1(:,2),xr1(:,3));
```

(2) 问题二代码

```
% P=@(x)c1*x^a-b/a;% P(ρ)函数定义变量
```

```
clear;close all;clc;
```

```
get=xlsread('C:\Users\win11\Desktop\建模\8.25-2\A\附件1.csv','附件1','B2:D2227');
```

```
get2=xlsread('C:\Users\win11\Desktop\建模\8.25-2\A\工作簿1.xlsx','Sheet1','A1:D2227');
```

```
% r1=@(x,y)c1*x^a-b/a;% P(ρ)函数定义变量
```

```
ball=[];
```

```
rn=0;
```

```
zh=[];
```

```
ry = [cos(deg2rad((pi/2)-78.169)), 0, -sin(deg2rad((pi/2)-78.169));  
      0, 1, 0;
```

```
      sin(deg2rad((pi/2)-78.169)), 0, cos(deg2rad((pi/2)-78.169))];
```

```
rz = [cos(deg2rad(36.795)), sin(deg2rad(36.795)), 0;
```

```
      -sin(deg2rad(36.795)), cos(deg2rad(36.795)), 0;
```

```
      0, 0, 1];
```

```
zz=ry*rz;
```

```
zh = zeros(size(get)); % 初始化 zh 矩阵
```

```
for i = 1:size(get, 1)
```

```
    aa = zz * get(i, :);
```

```
    zh(i, 1)=aa(3);
```

```
    zh(i, 2)=aa(2);
```

```
    zh(i, 3)=aa(1);
```

```
end
```

```
for i=1:2226
```

```
    rn=sqrt(zh(i,1)^2+zh(i,2)^2+zh(i,3)^2);
```

```
%    a = atan(zh(i,2)/zh(i,1));
```

```
    a = atan2(get(i,2),get(i,1));
```

```
    b = acos(zh(i,3)/rn);
```

```

        ball=[ball;a b rn];
%      [R, phi, theta]=sph2rec (get (i, 1), get (i, 2), get (i, 3));
%      ball=[ball;theta phi R];

end

minm=[];

for k=281:0.1:281
%      p=281;% 焦点系数
%      k=abs (2*(k-300.0544));
    p=k;
    m=0;
    num=0;
    rr1=[];
    r1=[];
    r2=[];
    rb=[];
    vn=0;
    for i=1:1:2226
        %%
        %调用函数
        x=zh(i, 1);
        y=zh(i, 2);
        z=zh(i, 3);
        if x^2+y^2<=150^2
            %acos((x*(-69.6262)+y*0+z*(-292.2197))/(sqrt((-69.626
2)^2+(-292.2197)^2)*sqrt(x^2+y^2+z^2)))<=pi/6
            r=rCompute(ball(i, 1), ball(i, 2), p);
            r1=[r1;ball(i, 1) ball(i, 2) r];
            r2=[r2;get(i, 1) get(i, 2) get(i, 3)];
            max_1 = ball(i, 3)-r;
            if abs(max_1)>0.6
                if max_1 > 0

```

```

        vn=0.6;
    else
        vn=-0.6;
    end
    rr1=[rr1;vn];
else
    vn=max_1;
    rr1=[rr1;vn];
end

else
    vn=0;
    rr1=[rr1; vn];
end
rb=[rb;ball(i,1) ball(i,2) ball(i,3)+vn];
%%
end
max1 = max(rr1);
minm = [minm;p max1];%记录下这个时刻调整后的 r 值，应当每次都是
最小
% plot3( (:,1), ball(:,2),r1(:,1));
%
end
% plot(minm(:,1),minm(:,2));
xx=[];
for i=1:2226
    a=rb(i,1);
    b=rb(i,2);
    x=rb(i,3)*sin(b)*cos(a);
    y=rb(i,3)*sin(b)*sin(a);
    z=rb(i,3)*cos(b);
    if isnan(x)
        x=0;
    end
end

```



```

        if isnan(y)
            y=0;
        end
        if isnan(z)
            z=0;
        end
        xx=[xx;x y z ];
    end

% plot3(zh(:,1),zh(:,2),zh(:,3));
hold on
    plot3(xx(:,1),xx(:,2),xx(:,3),'b');
% hold on
xlabel('x 轴');
ylabel('y 轴');
zlabel('z 轴');

% plot3(get(:,1),get(:,2),get(:,3),'*');
%
% plot3(r2(:,1),r2(:,2),r2(:,3),'*');
% ball_1=[];

xr1=[];
for i=1:1:687
    a=r1(i,1);
    b=r1(i,2);
    x=r1(i,3)*sin(b)*cos(a);
    y=r1(i,3)*sin(b)*sin(a);
    z=r1(i,3)*cos(b);
    if isnan(x)
        x=0;
    end
    if isnan(y)

```

```

        y=0;
    end
    if isnan(z)
        z=0;
    end
    xr1=[xr1;x y z ];
end
    xzh=[];
    ry = [cos(deg2rad((pi/2)-78.169)), 0, -sin(deg2rad((pi/2)-78.169));
        0, 1, 0;
        sin(deg2rad((pi/2)-78.169)), 0, cos(deg2rad((pi/2)-78.169))];
    rz = [cos(deg2rad(36.795)), sin(deg2rad(36.795)), 0;
        -sin(deg2rad(36.795)), cos(deg2rad(36.795)), 0;
        0, 0, 1];
    zz=ry*rz;
    xzh = zeros(size(xx)); % 初始化 zh 矩阵

for i = 1:size(xx, 1)
    aa = zz * xx(i, :)' ;
    xzh(i, 1)=aa(3);
    xzh(i, 2)=aa(2);
    xzh(i, 3)=aa(1);
end
%%
    xrz1=[]
    ry = [cos(deg2rad((pi/2)-78.169)), 0, -sin(deg2rad((pi/2)-78.169));
        0, 1, 0;
        sin(deg2rad((pi/2)-78.169)), 0, cos(deg2rad((pi/2)-78.169))];
    rz = [cos(deg2rad(36.795)), sin(deg2rad(36.795)), 0;
        -sin(deg2rad(36.795)), cos(deg2rad(36.795)), 0;
        0, 0, 1];
    zz=ry*rz;
    xrz1 = zeros(size(xr1)); % 初始化 zh 矩阵

```

```

for i = 1:size(xr1, 1)
    aa = zz * xr1(i, :)' ;
    xrz1(i, 1)=aa(3);
    xrz1(i, 2)=aa(2);
    xrz1(i, 3)=aa(1);
end
% plot3(xzh(:, 1), xzh(:, 2), xzh(:, 3), 'b');
plot3(xr1(:, 1), xr1(:, 2), xr1(:, 3), '*');

```

(3) 问题三代码

```

%% 问题三接收率
% 计算接收比
p=290;% 旋转抛物面方程参数
N=0;% 全部反射线数
R=1:150;R=R';% 半径
red=0:pi/300:2*pi;red=red';% 角度
Myans=cell(2,2);
Myans{1,2}=0;
Myans{2,2}=0;
dcd1_parabolic_max=0;dcd1_ball_max=0;
for i=1:size(R, 1)
    for j=1:size(red, 1)
        % 曲面上一点
        x=R(i)*cos(red(j));
        y=R(i)*sin(red(j));
        z_ball=-(300^2-x^2-y^2)^0.5;% 基准球坐标
        z_parabolic=zCompute(x, y, p);% 工作面坐标
        z_1=-1;% 入射电磁播
        % 计算法向量
        r_ball=[x, y, z_ball];
        r_parabolic=[x, y, -p];
        % 计算反射线上一点
        p_ball=pointRotate(r_ball, pi, [x, y, z_1]);
        p_parabolic=pointRotate(r_parabolic, pi, [x, y, z_1]);
        % 计算是否被馈源仓接收
    end
end

```

```

k_ball=(-160.2-z_ball)/(z_ball-p_ball(3));

k_parabolic=(-160.2-z_parabolic)/(z_parabolic-p_parabolic(3));
x_ball=x+k_ball*(x-p_ball(1));
x_parabolic=x+k_parabolic*(x-p_parabolic(1));
y_ball=y+k_ball*(y-p_ball(2));
y_parabolic=y+k_parabolic*(y-p_parabolic(2));
% 记录数据
N=N+1;
Myans{1,1}(N,1:3)=[x,y,z_ball];
Myans{1,1}(N,4:6)=[x_ball,y_ball,-160.2];
Myans{2,1}(N,1:3)=[x,y,z_parabolic];
Myans{2,1}(N,4:6)=[x_parabolic,y_parabolic,-160.2];
if linkComputer([0,0,-160.2],Myans{1,1}(N,4:6))<0.5
    Myans{1,2}=Myans{1,2}+1;
else
    if
linkComputer([0,0,-160.2],Myans{1,1}(N,4:6))>dcd1_ball_max

dcd1_ball_max=linkComputer([0,0,-160.2],Myans{1,1}(N,4:6));
    end
end
    if linkComputer([0,0,-160.2],Myans{2,1}(N,4:6))<0.5
        Myans{2,2}=Myans{2,2}+1;
    else
        if
linkComputer([0,0,-160.2],Myans{2,1}(N,4:6))>dcd1_parabolic_max

dcd1_parabolic_max=linkComputer([0,0,-160.2],Myans{2,1}(N,4:6));
        end
    end
end
end
% 接收比

```

```

ball_C=100*Myans{1,2}(1,1)/(2*N);% 基准球面
parabolic_C=100*Myans{2,2}(1,1)/N;% 基准球面
% 画图
% hold on
xlabel('x 轴');
ylabel('y 轴');
zlabel('z 轴');
hold on
plot3(Myans{1,1}(:,1),Myans{1,1}(:,2),Myans{1,1}(:,3))
plot3(Myans{1,1}(:,4),Myans{1,1}(:,5),Myans{1,1}(:,6),'.')
hold on
plot3(Myans{2,1}(:,1),Myans{2,1}(:,2),Myans{2,1}(:,3))
plot3(Myans{2,1}(:,4),Myans{2,1}(:,5),Myans{2,1}(:,6),'.')

```