湘潭大学本科生毕业答辩报告

空间分数阶对流扩散方程的有限差分求解

报告人：周铁军

专　业：信息与计算科学

导　师：文立平 教授

内容纲要

L é vy-Feller 对流—扩散微分方程：

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = aD_\theta^\alpha u(x,t) - b\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{1}$$

其中 a 为正常数，b 为常数，算子 D_θ^α 表示阶数为 α、倾斜度为 θ 的 Riesz-Feller 分数阶导数。

由文献 [5] 中的内容可知：

$$D_\theta^\alpha = -\left[c_+(\alpha,\theta)\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} + c_-(\alpha,\theta)\frac{d^\alpha}{d(-x)^\alpha}\right]$$

其中 $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$ 和 $\frac{d^\alpha}{d(-x)^\alpha}$ 分别为左侧和右侧 Riemann-Liouville 分数阶导数算子。

系数 c+、c-如下：

$$\begin{cases} c_+ = c_+(\alpha,\theta) := \dfrac{\sin((\alpha-\theta)\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)} \\ c_- = c_-(\alpha,\theta) := \dfrac{\sin((\alpha+\theta)\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)} \end{cases}$$

L é vy-Feller 对流-扩散方程的基本解

初边值条件如下：

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x), & (x\in\mathbb{R}) \\ u(\pm\infty,t)=0, & (t>0) \end{cases}$$

的 L é vy-Feller 对流-扩散方程的解析解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty+\infty} e^{-i\kappa\xi}e^{t\left(-a|\kappa|^{\alpha}e^{i(\mathrm{sign}\kappa)\theta\pi/2}+ib\kappa\right)}\varphi(x-\xi)d\kappa d\xi$$

内容纲要

有限区间内的初边值问题的数值解法

给出初边值问题如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = aD_\theta^\alpha u(x,t) - b\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, & 0 < x < R, \quad 0 < t < T \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le R \\ u(0,t) = u(R,t) = 0, & 0 \le t \le T \end{cases} \tag{2}$$

离散空间与时间变量

先进行网格剖分，将空间区间 [0,L] 作 M 等分，时间区间 [0,T] 作 N 等分。其中 h 和 τ 分别表示空间步长和时间步长，M 和 N 为给定正整数。
利用空间网格点

$$x_j = jh, h > 0, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

和时间间隔

$$t_n = n\tau, \tau > 0, n = 0, 1, 2, \ldots$$

离散空间和时间变量。引入 $y_j(t_n)$

$$y_j\left(t_n\right) = \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} u\left(x, t_n\right) dx \approx hu\left(x_j, t_n\right)$$

得到：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{y_j\left(t_{n+1}\right)-y_j\left(t_n\right)}{\tau}+O(t) \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y_j\left(t_n\right)-y_{j-1}\left(t_n\right)}{h}+O(h) \tag{4}$$

以及差分算子 ${}_hD_\theta^\alpha$：

$${}_hD_\theta^\alpha y_j\left(t_n\right)=-\left[c_{+h}D_+^\alpha y_j\left(t_n\right)+c_{-h}D_-^\alpha y_j\left(t_n\right)\right] \tag{5}$$

其中

$${}_hD_\pm^\alpha y_j\left(t_n\right)=\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}y_{j\pm1\mp k}\left(t_n\right) \tag{6}$$

为了分析算子 ${}_hD_\theta^\alpha$ 差分格式的收敛性，引入如下引理。

引理

若函数 $u \in L^1(R)$ 和 $H^{\alpha+1}(R)$,${}_hD_+^\alpha$ 为左侧 Gr ü nwald-Letnikov 分数阶导数算子 (或移位算子) 的离散：

$$ {}_hD_+^\alpha f(x) = \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} f(x-(k-p)h) \tag{7} $$

其中 p 是一个非负的整数 (p=0 对应分数阶导数算子，p>0 对应移位算子)，那么有：当 $h \to 0$ 时，在 $x \in R$ 一致地有：

$$ {}_hD_+^\alpha f(x) = {}_{-\infty}D_x^\alpha f(x) + O(h) \tag{8} $$

于是原方程表示为：

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}=-\frac{a}{h^\alpha}\left[c_+\sum_{k=0}^{j+1}(-1)^k\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix}u_{j+1-k}^n+c_-\sum_{k=0}^{N-j+1}(-1)^k\begin{pmatrix}u\\k\end{pmatrix}u_{j-1-}^n\right.$$

$$-b\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}+O(t+h) \tag{9}$$

利用边界条件 $u_0^n=u_N^n=0$，可确定一个线性系统，矩阵形式如下：

$$U^{n+1}=AU^n$$

其中：

$$U^{n+1}=\begin{pmatrix}u_{N-1}^{n+1} & u_{N-1}^{n+1} & \cdots & u_1^{n+1}\end{pmatrix}^T$$

$$U^n = \begin{pmatrix} u^n_{N-1} & u^n_{N-1} & \cdots & u^n_1 \end{pmatrix}^T$$

而系数矩阵 A=(aij) 为一个 Toeplitz 矩阵,

$$aij = \begin{cases} (-1)^{j-i}\dfrac{a\tau}{h^\alpha}c_-\begin{pmatrix} \alpha \\ j-i+1 \end{pmatrix}, j \geq i+2, i = 1, 2, \ldots, N-3 \\ -\dfrac{aT}{h^\alpha}\left(c_+ + c_-\begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix}\right), j = i+1, i = 1, 2, \ldots, N-2 \\ 1 + \dfrac{a\tau}{h^\alpha}\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}(c_+ + c_-) - \dfrac{b\tau}{h}, j = i = 1, 2, \cdots, N-1 \\ -\dfrac{a\tau}{h^\alpha}\left(c_+\begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix} + c_-\right) + \dfrac{b\tau}{h}, j = i-1, i = 2, 3, \ldots, N-1 \\ (-1)^{i-j}\dfrac{a\tau}{h^\alpha}c_+\begin{pmatrix} \alpha \\ i-j+1 \end{pmatrix}, j \leq i-2, i = 3, 4, \ldots, N-1 \end{cases}$$

内容纲要

数值算例

考虑如下 L é vy-Feller 对流-扩散微分方程初边值问题：

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = aD_\theta^\alpha u(x,t) - b\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, & 0 < x < \pi, \quad 0 < t < T, 1 - \alpha \leq 2, \\
u(x,0) = \varphi(x) = \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\
u(0,t) = u(R,t) = 0, & 0 \leq t \leq T,
\end{cases} \tag{10}
$$

其中 α=1.7, θ=0.3, a=1.5, b=1.0.

Step	Operation	Algorithm
one	网格剖分	$h = \frac{L}{M}, \tau = \frac{T}{N}.$ $x = \mathrm{linspace}(0, L, M + 1$ $t = \mathrm{linspace}(0, T, N + 1)$
two	输入初边值	$u(1 : \mathrm{end}, 1) = \phi(x);$ $u(1, 1 : \mathrm{end}) = \psi_1(x);$ $u(\mathrm{end}, 1 : \mathrm{end}) = \psi_2(x)$
three	计算	$A = \mathrm{Toeplitz}(W, V)$ $\mathrm{for} \quad n = 1 : N$ $u(2 : \mathrm{end} - 1, n + 1) = A * u(2 : \mathrm{e}$ end

数值分析

根据上述算法，我们利用 MATLAB 编程，得到如下图像，并通过 plot() 函数，直观地表现出 u(x,t) 的近似程度。

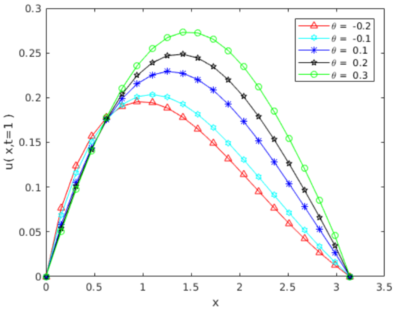

Figure: θ 取不同值，$\alpha = 1.7$ 时，最后一步数值解的图像

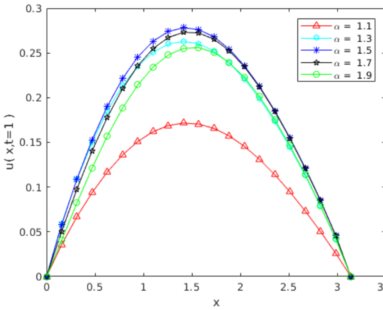

Figure: α 取不同值，$\theta = 0.3$ 时，最后一步数值解的图像

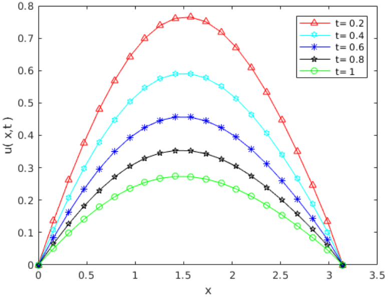

Figure: t 取不同值时，最后一步数值解的图像

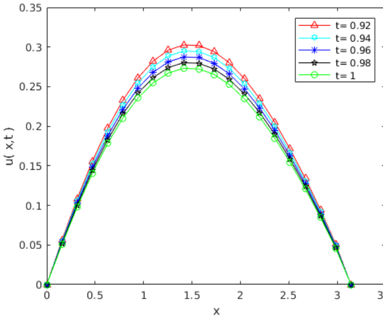

Figure: 细化 t 剖分，t 取不同值时，最后一步数值解的图像

我们给初值条件 sin(x) 加入一个微小干扰，即令 $o(h)=\pi/20$, 考虑初值条件为 sin(x+o(h)) 时的数值解，得到的图象如下：

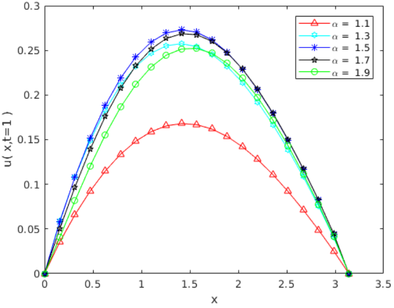

Figure: x+o(h) 后,α 取不同值，$\theta=0.3$ 时，最后一步数值解的图像

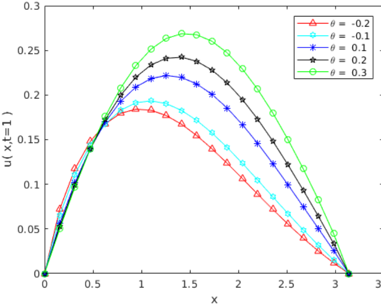

Figure: x+o(h) 后,θ 取不同值，$\alpha=1.7$ 时，最后一步数值解的图像

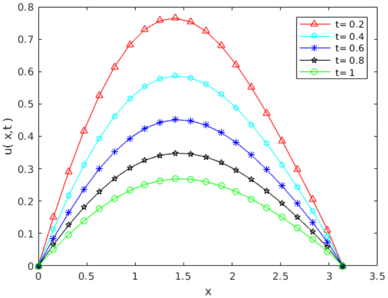

Figure: x+o(h) 后,t 取不同值时，最后一步数值解的图像

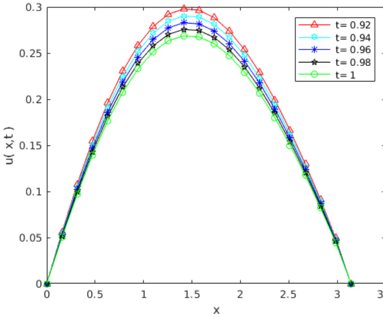

Figure: 细化 t 剖分，t 取不同值时，最后一步数值解的图像

通过与初值条件为 sin(x) 时的图像比较，我们直观地看到其结果的变化是微小的，故我们认为该格式是稳定的。

总结

本文的主要工作是研究的有限区间上的 L é vy-Feller 对流—扩散方程的初边值问题，进过一系列运算与转化，得到离散的有限差分格式，并利用 Matlab 对算法进行数值模拟。
通常对于数值模拟问题，人们大多是去讨论解析解与数值解的误差等，对于解析解难求的问题，则无从下手，本文另辟蹊径，讨论了数值解 u(x,t) 与参数 θ,α 和变量 t 的关系, 即对于不同的 θ,α,t, 方程的解表现出怎样的形式及特点。
其次，通过不断细化剖分和参数的合理选取，根据函数曲线的收敛情况来分析算法的稳定性、有效性，这也是本文的创新点之所在。

内容纲要

参考文献

1. Liu, Q. and Liu, F. and Turner, I. and Anh, V, Approximation of the L é vy–Feller advection–dispersion process by random walk and finite difference method, VOLUME 222 of Journal of Computational PhysicsPAGES 57 – 70,2007.
2. 张贤达, 矩阵分析与应用 [M], 北京：清华大学出版社：179-197,2004.
3. 王朵, 双边空间分数阶对流扩散方程的几种数值解法, 华南理工大学,2016.
4. 林然， 刘发旺, 分数阶常微分方程初值问题的高阶近似 [J], 厦门大学学报 43(1)：25 – 30,2004.
5. 刘青霞, 空间分数阶对流—扩散方程的数值解及其应用, 厦门大学,2007.

参考文献

6. 段艳婷, 二维声波散射正问题的数值解法及应用, 西北大学,2011.
7. 祝家麟, 边界元方法中的奇异性, 土木建筑与环境工程,(2):90-102,1991.
8. 李寿佛, 刚性常微分方程及刚性泛函微分方程数值分析 [M], 湘潭：湘潭大学出版社,2010.
9. 林世敏， 许传炬, 分数阶微分方程的理论和数值方法研究, 计算数学, 38(1):9 – 12,2016.
10. 林世敏， 许传炬, 数值求解 L é vy-Feller 扩散方程 *, 高等学校计算数学学报, 27:239 – 241,2006.
11. 李荣华, 偏微分方程数值解法 [M], 北京：科学出版社,2005.

谢 谢 大 家!