

湘潭大学本科生毕业答辩报告

空间分数阶对流扩散方程的有限差分求解

报告人: 周铁军

专 业: 信息与计算科学

导 师: 文立平 教授

1 模型的建立

2 有限区间内的初边值问题

3 数值实验

4 参考文献

Lévy-Feller 对流-扩散方程的引入

Lévy-Feller 对流—扩散微分方程：

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a D_{\theta}^{\alpha} u(x, t) - b \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (1)$$

其中 a 为正常数, b 为常数, 算子 D_{θ}^{α} 表示阶数为 α 、倾斜度为 θ 的 Riesz-Feller 分数阶导数。

由文献 [5] 中的内容可知：

$$D_{\theta}^{\alpha} = - \left[c_{+}(\alpha, \theta) \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} + c_{-}(\alpha, \theta) \frac{d^{\alpha}}{d(-x)^{\alpha}} \right]$$

其中 $\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}$ 和 $\frac{d^{\alpha}}{d(-x)^{\alpha}}$ 分别为左侧和右侧 Riemann-Liouville 分数阶导数算子。
系数 c_{+} 、 c_{-} 如下：

$$\begin{cases} c_{+} = c_{+}(\alpha, \theta) := \frac{\sin((\alpha - \theta)\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)} \\ c_{-} = c_{-}(\alpha, \theta) := \frac{\sin((\alpha + \theta)\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)} \end{cases}$$

Lévy-Feller 对流-扩散方程的基本解

初边值条件如下：

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), & (x \in \mathbb{R}) \\ u(\pm\infty, t) = 0, & (t > 0) \end{cases}$$

的 Lévy-Feller 对流-扩散方程的解析解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\kappa\xi} e^{t(-a|\kappa|^\alpha e^{i(\text{sign}\kappa)\theta\pi/2} + ib\kappa)} \varphi(x - \xi) d\kappa d\xi$$

1 模型的建立

2 有限区间内的初边值问题

3 数值实验

4 参考文献

有限区间内的初边值问题的数值解法

给出初边值问题如下:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= aD_{\theta}^{\alpha}u(x,t) - b\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, & 0 < x < R, & \quad 0 < t < T \\ u(x,0) &= \varphi(x), & 0 \leq x \leq R \\ u(0,t) &= u(R,t) = 0, & 0 \leq t \leq T\end{aligned}\tag{2}$$

离散空间与时间变量

先进行网格剖分, 将空间区间 $[0,L]$ 作 M 等分, 时间区间 $[0,T]$ 作 N 等分。
其中 h 和 τ 分别表示空间步长和时间步长, M 和 N 为给定正整数。
利用空间网格点

$$x_j = jh, h > 0, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

和时间间隔

$$t_n = n\tau, \tau > 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

离散空间和时间变量。引入 $y_j(t_n)$

$$y_j(t_n) = \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} u(x, t_n) dx \approx hu(x_j, t_n)$$

得到：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{y_j(t_{n+1}) - y_j(t_n)}{\tau} + O(\tau) \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y_j(t_n) - y_{j-1}(t_n)}{h} + O(h) \quad (4)$$

以及差分算子 ${}_h D_\theta^\alpha$ ：

$${}_h D_\theta^\alpha y_j(t_n) = -[c_{+h} D_+^\alpha y_j(t_n) + c_{-h} D_-^\alpha y_j(t_n)] \quad (5)$$

其中

$${}_h D_\pm^\alpha y_j(t_n) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y_{j \pm 1 \mp k}(t_n) \quad (6)$$

为了分析算子 ${}_hD_\theta^\alpha$ 差分格式的收敛性, 引入如下引理。

引理

若函数 $u \in L^1(\mathbb{R})$ 和 $H^{\alpha+1}(\mathbb{R})$, ${}_hD_+^\alpha$ 为左侧 Grünwald-Letnikov 分数阶导数算子 (或移位算子) 的离散:

$${}_hD_+^\alpha f(x) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - (k-p)h) \quad (7)$$

其中 p 是一个非负的整数 ($p=0$ 对应分数阶导数算子, $p>0$ 对应移位算子), 那么有: 当 $h \rightarrow 0$ 时, 在 $x \in \mathbb{R}$ 一致地有:

$${}_hD_+^\alpha f(x) = {}_{-\infty}D_x^\alpha f(x) + O(h) \quad (8)$$

离散空间与时间变量

于是原方程表示为：

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = & -\frac{a}{h^\alpha} \left[c_+ \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} u_{j+1-k}^n + c_- \sum_{k=0}^{N-j+1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} u_{j-1-k}^n \right. \\ & \left. - b \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} + O(\tau + h) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

利用边界条件 $u_0^n = u_N^n = 0$ ，可确定一个线性系统，矩阵形式如下：

$$U^{n+1} = AU^n$$

其中：

$$U^{n+1} = \begin{pmatrix} u_{N-1}^{n+1} & u_{N-1}^{n+1} & \cdots & u_1^{n+1} \end{pmatrix}^T$$

$$U^n = (u_{N-1}^n \quad u_{N-1}^n \quad \cdots \quad u_1^n)^T$$

而系数矩阵 $A=(a_{ij})$ 为一个 Toeplitz 矩阵,

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j-i} \frac{a\tau}{h^\alpha} c_- \left(\begin{matrix} \alpha \\ j-i+1 \end{matrix} \right), j \geq i+2, i=1,2,\dots,N-3 \\ -\frac{a\tau}{h^\alpha} \left(c_+ + c_- \left(\begin{matrix} \alpha \\ 2 \end{matrix} \right) \right), j=i+1, i=1,2,\dots,N-2 \\ 1 + \frac{a\tau}{h^\alpha} \left(\begin{matrix} \alpha \\ 1 \end{matrix} \right) (c_+ + c_-) - \frac{b\tau}{h}, j=i=1,2,\dots,N-1 \\ -\frac{a\tau}{h^\alpha} \left(c_+ \left(\begin{matrix} \alpha \\ 2 \end{matrix} \right) + c_- \right) + \frac{b\tau}{h}, j=i-1, i=2,3,\dots,N-1 \\ (-1)^{i-j} \frac{a\tau}{h^\alpha} c_+ \left(\begin{matrix} \alpha \\ i-j+1 \end{matrix} \right), j \leq i-2, i=3,4,\dots,N-1 \end{cases}$$

1 模型的建立

2 有限区间内的初边值问题

3 数值实验

4 参考文献

考虑如下 Lévy-Feller 对流-扩散微分方程初边值问题：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= aD_{\theta}^{\alpha}u(x,t) - b\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, & 0 < x < \pi, & \quad 0 < t < T, & \quad 1 - \alpha \leq 2, \\ u(x,0) &= \varphi(x) = \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) &= u(R,t) = 0, & 0 \leq t \leq T,\end{aligned}\tag{10}$$

其中 $\alpha=1.7$, $\theta=0.3$, $a=1.5$, $b=1.0$.

Step	Operation	Algorithm
one	网格剖分	$h = \frac{L}{M}, \tau = \frac{T}{N}.$ $x = \text{linspace}(0, L, M + 1)$ $t = \text{linspace}(0, T, N + 1)$
two	输入初边值	$u(1 : \text{end}, 1) = \phi(x);$ $u(1, 1 : \text{end}) = \psi_1(x);$ $u(\text{end}, 1 : \text{end}) = \psi_2(x)$
three	计算	$A = \text{Toeplitz}(W, V)$ $\text{for } n = 1 : N$ $u(2 : \text{end} - 1, n + 1) = A * u(2 : \text{end} - 1, n)$ end

数值分析

根据上述算法，我们利用 MATLAB 编程，得到如下图像，并通过 `plot()` 函数，直观地表现出 $u(x,t)$ 的近似程度。

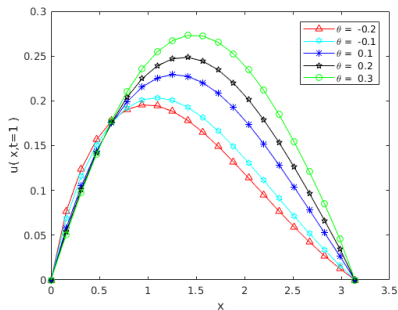


Figure: θ 取不同值, $\alpha = 1.7$ 时, 最后一步数值解的图像

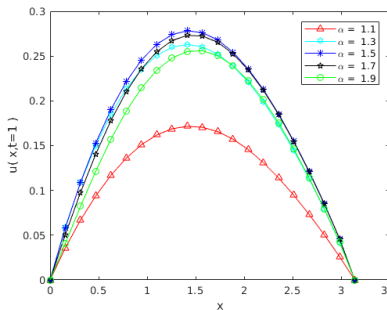


Figure: α 取不同值, $\theta = 0.3$ 时, 最后一步数值解的图像

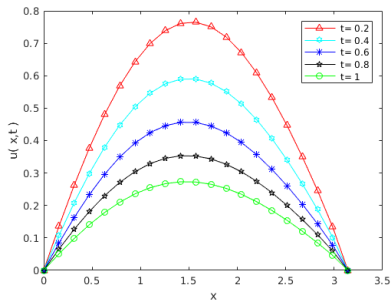


Figure: t 取不同值时，最后一步数值解的图像

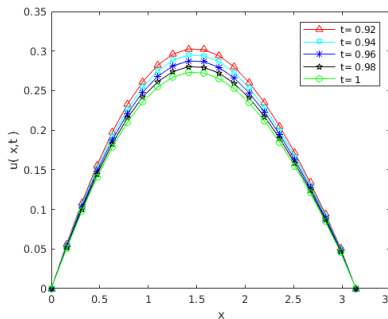


Figure: 细化 t 剖分， t 取不同值时，最后一步数值解的图像

稳定性分析

我们给初值条件 $\sin(x)$ 加入一个微小干扰, 即令 $o(h) = \pi/20$, 考虑初值条件为 $\sin(x+o(h))$ 时的数值解, 得到的图象如下:

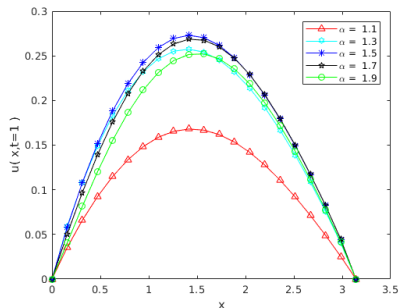


Figure: $x+o(h)$ 后, α 取不同值, $\theta = 0.3$ 时, 最后一步数值解的图像

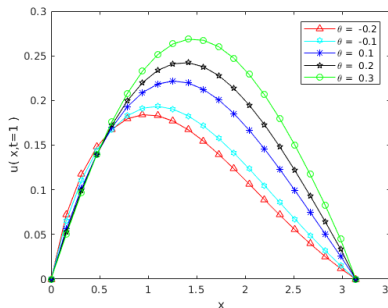


Figure: $x+o(h)$ 后, θ 取不同值, $\alpha = 1.7$ 时, 最后一步数值解的图像

稳定性分析

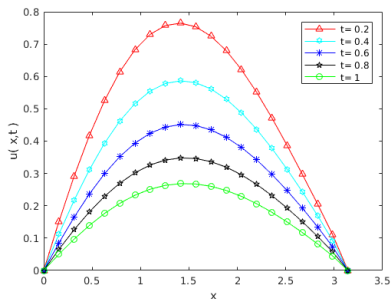


Figure: $x+o(h)$ 后, t 取不同值时, 最后一步数值解的图像

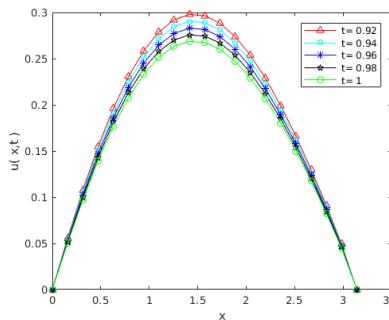


Figure: 细化 t 剖分, t 取不同值时, 最后一步数值解的图像

通过与初值条件为 $\sin(x)$ 时的图像比较, 我们直观地看到其结果的变化是微小的, 故我们认为该格式是稳定的。

本文的主要工作是研究的有限区间上的 Lévy-Feller 对流—扩散方程的初边值问题，经过一系列运算与转化，得到离散的有限差分格式，并利用 Matlab 对算法进行数值模拟。

通常对于数值模拟问题，人们大多是去讨论解析解与数值解的误差等，对于解析解难求的问题，则无从下手，本文另辟蹊径，讨论了数值解 $u(x,t)$ 与参数 θ, α 和变量 t 的关系，即对于不同的 θ, α, t ，方程的解表现出怎样的形式及特点。

其次，通过不断细化剖分和参数的合理选取，根据函数曲线的收敛情况来分析算法的稳定性、有效性，这也是本文的创新点之所在。

- 1 模型的建立
- 2 有限区间内的初边值问题
- 3 数值实验
- 4 参考文献

- ① Liu, Q. and Liu, F. and Turner, I. and Anh, V, Approximation of the Lévy-Feller advection-dispersion process by random walk and finite difference method, VOLUME 222 of Journal of Computational Physics PAGES 57 – 70, 2007.
- ② 张贤达, 矩阵分析与应用 [M], 北京: 清华大学出版社: 179-197, 2004.
- ③ 王朵, 双边空间分数阶对流扩散方程的几种数值解法, 华南理工大学, 2016.
- ④ 林然, 刘发旺, 分数阶常微分方程初值问题的高阶近似 [J], 厦门大学学报 43(1): 25 – 30, 2004.
- ⑤ 刘青霞, 空间分数阶对流-扩散方程的数值解及其应用, 厦门大学, 2007.

- ⑥ 段艳婷, 二维声波散射正问题的数值解法及应用, 西北大学, 2011.
- ⑦ 祝家麟, 边界元方法中的奇异性, 土木建筑与环境工程, (2):90-102, 1991.
- ⑧ 李寿佛, 刚性常微分方程及刚性泛函微分方程数值分析 [M], 湘潭: 湘潭大学出版社, 2010.
- ⑨ 林世敏, 许传炬, 分数阶微分方程的理论和数值方法研究, 计算数学, 38(1):9 - 12, 2016.
- ⑩ 林世敏, 许传炬, 数值求解 Lévy-Feller 扩散方程 *, 高等学校计算数学学报, 27:239 - 241, 2006.
- ⑪ 李荣华, 偏微分方程数值解法 [M], 北京: 科学出版社, 2005.

谢 谢 大 家!