求解抛物方程 1.2

作者:周铁军

2019年9月29日

1　抛物方程

题目：

$$\begin{aligned}
&u_t=\alpha(u_{xx}+u_{yy})+f(x,t) \qquad (x,y)\in G=(0,1)\times(0,1),t>0\\
&u(0,y,t)=u(1,y,t)=0, \qquad y\in[0,1],t\geq 0\\
&u(x,0,t)=u(x,1,t)=0, \qquad x\in[0,1],t\geq 0\\
&u(x,y,0)=0, \qquad (x,y)\in[0,1]\times[0,1]
\end{aligned} \tag{1}$$

其中 $f(x,y,t)=sin5\pi tsin2\pi xsin\pi y,\alpha=1$, 网格步长 $h_1=h_2=0.1,0.05,\tau=0.01$. 计算 u 在 $t=0.1,0.2,0.4,0.8$ 的近似值。

2　ADI 法求解

首先，对进行网格剖分，其中 h_1 和 h_2 分别为区间 $[0,1]\times[0,1]$ 上的剖分步长。

其次，利用五点差分离散二阶空间导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, 得到：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{u_{i+1,j}+u_{i-1,j}-2u_{i,j}}{h_1^2}+O(h_1^2)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=\frac{u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-2u_{i,j}}{h_2^2}+O(h_2^2)
\end{aligned} \tag{2}$$

利用向前差分离散一阶时间导数 $\frac{\partial u}{\partial t}$, 得到：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\tau}+O(\tau) \tag{3}$$

其中 $i,j=0,1,...,n$, 于是方程可表示为：

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i,j}^{n}}{\frac{\tau}{2}}=\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h^2}+\frac{u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n}-2u_{i,j}^{n}}{h^2}+f^n(x(i),y(j)),$$

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}}=\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h^2}+\frac{u_{i,j+1}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}}{h^2}+f^n(x(i),y(j)),$$

化简得：

$$-\frac{\tau}{2h^2}(u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}})+(1+\frac{\tau}{h^2})u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{\tau}{2h^2}(u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n})+(1-\frac{\tau}{h^2})2u_{i,j}^{n}+\frac{\tau}{2}f^n(x(i),y(j)),$$

$$-\frac{\tau}{2h^2}(u_{i,j+1}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1})+(1+\frac{\tau}{h^2})u_{i,j}^{n+1}=\frac{\tau}{2h^2}(u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}})+(1-\frac{\tau}{h^2})u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\frac{\tau}{2}f^n(x(i),y(j)),$$

考虑边值条件，有：

$$\begin{aligned}
u(x(0),y,t)=u(x(n),y,t)=0\\
u(x,y(0),t)=u(x,y(n),t)=0
\end{aligned} \tag{4}$$

则只需求解红色区域内的点 (见图 1)：

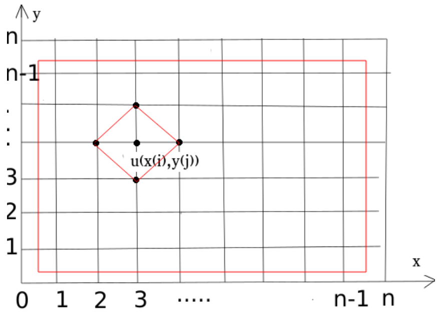

图 1：网格剖分

令 $U^k = (u_{11}^k, u_{12}^k, ..., u_{1,n-1}^k, u_{21}^k, u_{22}^k, ..., u_{2,n-1}^k, ...)^T \quad (U^k\text{为}(n-1)^2 \times 1\text{向量})$

$F^k = (f_{11}^k, f_{12}^k, ..., f_{1,n-1}^k, f_{21}^k, f_{22}^k, ..., f_{2,n-1}^k, ...)^T \quad (F^k\text{为}(n-1)^2 \times 1\text{向量}, f_{i,j}^k = f(x(i), y(j), t(k)) = sin5\pi t_k sin2\pi x_i sin\pi y_j)$，

系数矩阵：

$$A_1 = \begin{bmatrix} B_1 & C & \cdots & 0 \\ C & B_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_1 \end{bmatrix}_{(n-1)^2 \times (n-1)^2}, \tag{5}$$

其中，

$$B_1 = (1 + \frac{\tau}{h^2}) I_{n-1}, \quad C = -\frac{\tau}{2h^2} I_{n-1} \tag{6}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_2 \end{bmatrix}_{(n-1)^2\times(n-1)^2}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1-\frac{\tau}{h^2} & \frac{\tau}{2h^2} & \cdots & 0 \\ \frac{\tau}{2h^2} & 1-\frac{\tau}{h^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\frac{\tau}{h^2} \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \tag{7}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} B_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_3 \end{bmatrix}_{(n-1)^2\times(n-1)^2}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1+\frac{\tau}{h^2} & -\frac{\tau}{2h^2} & \cdots & 0 \\ -\frac{\tau}{2h^2} & 1+\frac{\tau}{h^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+\frac{\tau}{h^2} \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \tag{8}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} B_4 & -C & \cdots & 0 \\ -C & B_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_4 \end{bmatrix}_{(n-1)^2\times(n-1)^2}, \quad B_4 = (1-\frac{\tau}{h^2})I_{n-1} \tag{9}$$

于是得到如下迭代格式：

$$A_1U^{n+\frac{1}{2}} = A_2U^n + \frac{\tau}{2}f^n(x(i), y(j))$$

$$A_3U^{n+1} = A_4U^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2}f^{n+\frac{1}{2}}(x(i), y(j))$$

3 求解结果

不妨令 $tmax = 1$, 则 $t \in [0, tmax]$,

Part I: $h_1 = h_2 = 0.05$ 不同时刻的 u 的近似值的图像。

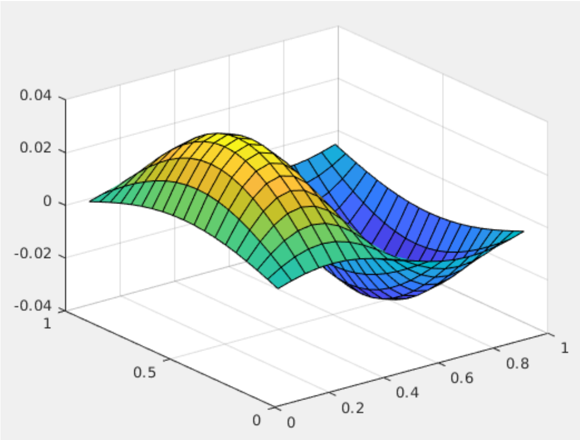

图 2: 0.1 时刻的 u 的近似解.

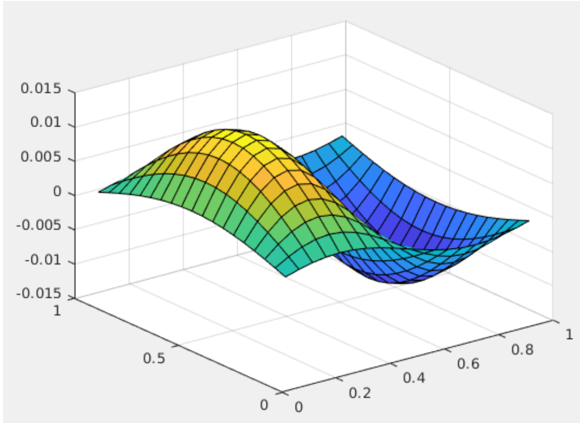

图 3: 0.2 时刻的 u 的近似解.

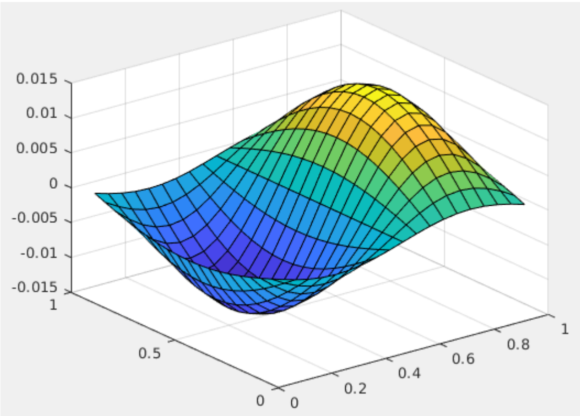

图 4: 0.4 时刻的 u 的近似解.

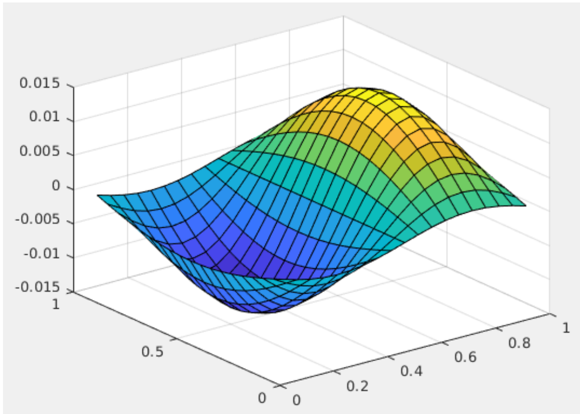

图 5: 0.8 时刻的 u 的近似解.

Part II:$h_1 = h_2 = 0.1$ 不同时刻的 u 的近似值的图像。

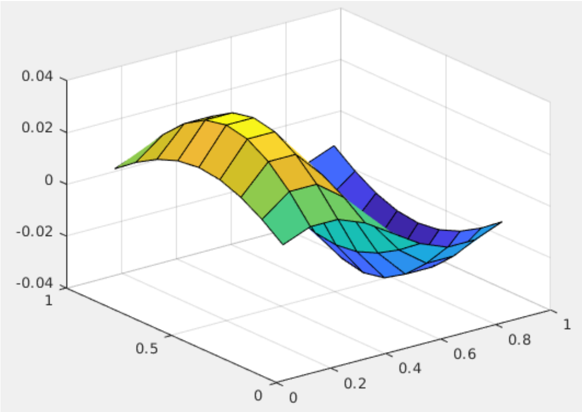

图 6: 0.1 时刻的 u 的近似解.

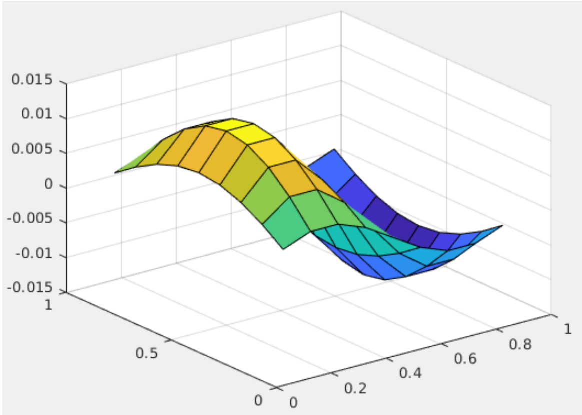

图 7: 0.2 时刻的 u 的近似解.

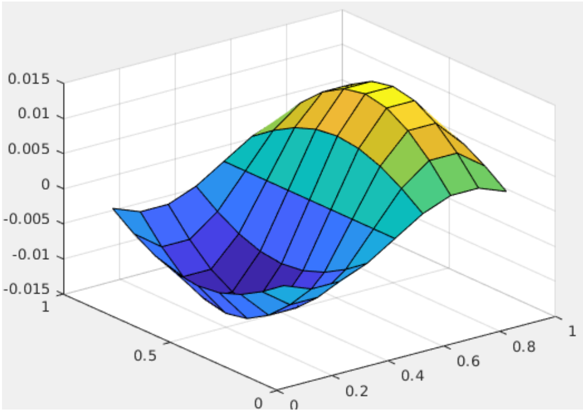

图 8: 0.4 时刻的 u 的近似解.

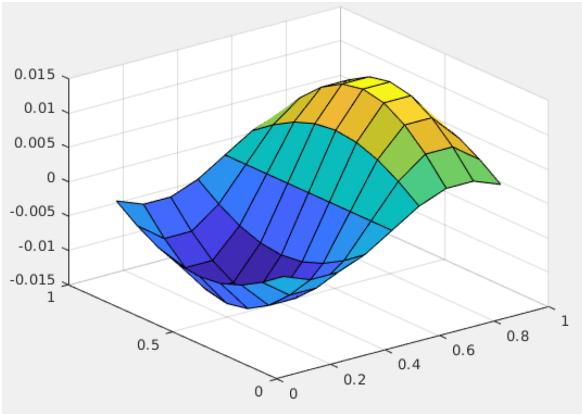

图 9: 0.8 时刻的 u 的近似解.

以上为 u 在 $t = 0.1, 0.2, 0.4, 0.8$ 的近似值。

这一次可以看到,随着迭代次数的不断增加,函数近似值的图像最终区域稳定。

4 误差分析

我们选取如下节点的近似解来分析误差

$$\begin{bmatrix} (0.2,0.2) & (0.4,0.2) & \cdots & (0.8,0.2) \\ (0.2,0.4) & (0.4,0.4) & \cdots & (0.8,0.4) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (0.2,0.8) & (0.4,0.8) & \cdots & (0.8,0.8) \end{bmatrix} \tag{10}$$

如图,"$\times$" 表示的位置

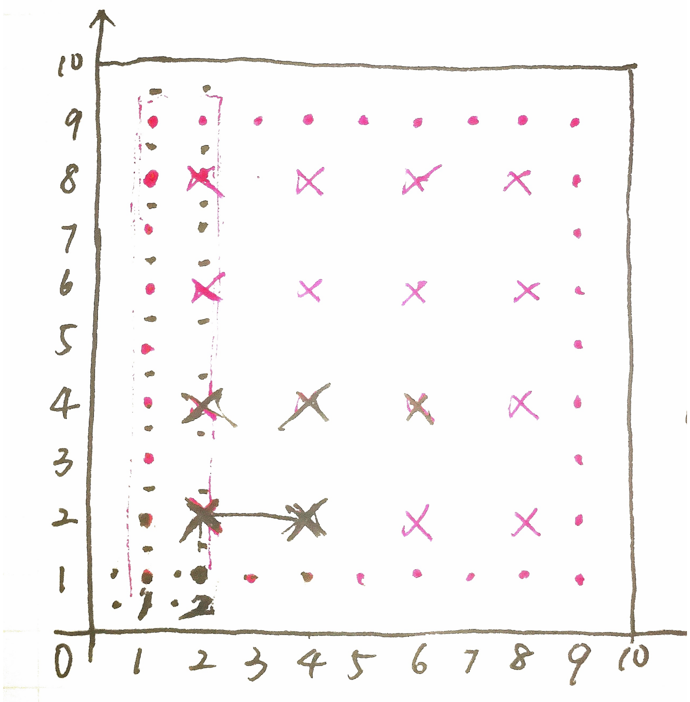

图 10: 节点坐标

作如下四种剖分,剖分步长 h = 0.2,0.1,0.05,0.025;

并将剖分最密者 (即 h = 0.025) 看作精确解。

得到如下误差

表 1: 误差分析

h	max 范数	L_2 范数	max 的阶	L_2 的阶
0.2	1.5467e-4	4.2750e-4	2.1711	2.1711
0.1	3.4344e-5	9.4925e-5	2.3470	2.3470
0.05	6.7503e-6	1.8657e-5		
0.025		看作精确解		