求解抛物方程 (1.3)

作者：周铁军

2019年9月20日

1　抛物方程

题目：

$$\begin{aligned}
&u_t = \tfrac{1}{4}(u_{xx}+u_{yy}) \qquad (x,y)\in G=(0,1)\times(0,1), t>0\\
&u(0,y,t)=u(1,y,t)=0, \qquad y\in(0,1), t\geq 0\\
&u_y(x,0,t)=u_y(x,1,t)=0, \qquad x\in(0,1), t\geq 0\\
&u(x,y,0)=sin\pi x cos\pi y
\end{aligned} \tag{1}$$

其中精确解为 $u=sin\pi x cos\pi y exp(-\frac{\pi}{8}t)$, 要求验证误差阶。

1.1　求解

首先，对进行网格剖分，其中 h_1 和 h_2 分别为区间 $x\in(0,1)$ 和 $y\in(0,1)$ 上的剖分步长。

其次，利用五点差分离散二阶空间导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, 得到：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+1,j}+u_{i-1,j}-2u_{i,j}}{h_1^2}+O(h_1^2)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-2u_{i,j}}{h_2^2}+O(h_2^2)
\end{aligned} \tag{2}$$

利用向前差分离散一阶时间导数 $\frac{\partial u}{\partial t}$, 得到：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\tau}+O(\tau) \tag{3}$$

其中 $i,j=0,1,...,n$, 于是方程可表示为：

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\tau} = \frac{1}{4}(\frac{u_{i+1,j}^n+u_{i-1,j}^n-2u_{i,j}^n}{h_1^2}+\frac{u_{i,j+1}^n+u_{i,j-1}^n-2u_{i,j}^n}{h_2^2}),$$

化简得：

$$u_{i,j}^{n+1}=(1-\frac{\tau}{2h_1^2}-\frac{\tau}{2h_2^2})u_{i,j}^n-\frac{\tau}{4h_1^2}(u_{i+1,j}^n+u_{i-1,j}^n)-\frac{\tau}{4h_2^2}(u_{i,j+1}^n+u_{i,j-1}^n),$$

考虑边值条件，有：

$$\begin{aligned}
u(x(0),y,t)=u(x(n),y,t)=0\\
u_y(x,y(0),t)=u_y(x,y(n),t)=0
\end{aligned} \tag{4}$$

化为矩阵形式：

$$U^{n+1}=AU^n$$

其中 $U^k=(u_{11}^k,u_{12}^k,...,u_{1,n-1}^k,u_{21}^k,u_{22}^k,...,u_{2,n-1}^k,...)^T \quad (U^k为(n-1)^2\times 1向量)$

$F^k=(f_{11}^k,f_{12}^k,...,f_{1,n-1}^k,f_{21}^k,f_{22}^k,...,f_{2,n-1}^k,...)^T$ (F^k为$(n-1)^2\times 1$向量, $f_{i,j}^k=f(x(i),y(j),t(k))=sin5\pi t_k sin2\pi x_i sin\pi y_j$),

系数矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} B & C & \cdots & 0 \\ C & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B \end{bmatrix}_{(n-1)^2\times(n-1)^2}, \tag{5}$$

其中,

$$B=\begin{bmatrix} 1-\frac{\tau}{2h_1^2}-\frac{\tau}{2h_2^2} & \frac{\tau}{4h_2^2} & \cdots & 0 \\ \frac{\tau}{4h_2^2} & 1-\frac{\tau}{2h_1^2}-\frac{\tau}{2h_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\frac{\tau}{2h_1^2}-\frac{\tau}{2h_2^2} \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}, \quad C=-\frac{\tau}{4h_1^2}I_{n-1} \tag{6}$$

1.2 求解

不妨令时间步长 $\tau = 0.01$,$tmax = 1$, 则 $t \in [0, tmax]$,

下面是不同剖分下,最后一步迭代 u 的近似值与精确解误差的图像。

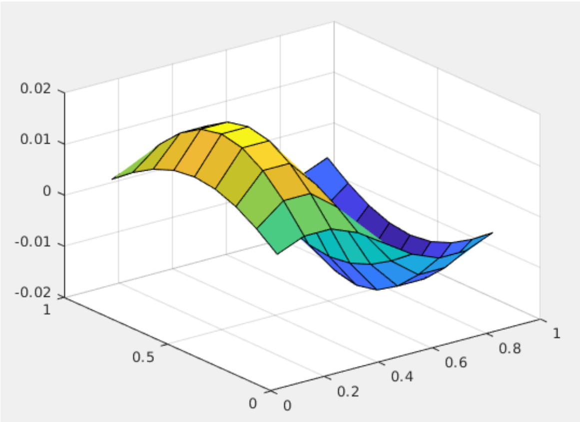

图 1: 0.1 时刻的 u 的近似解.

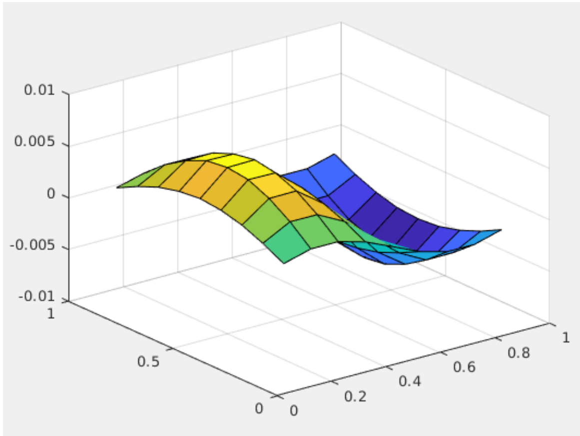

图 2: 0.2 时刻的 u 的近似解.

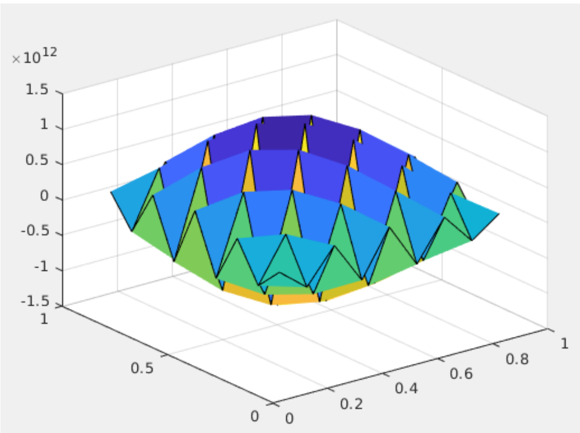

图 3: 0.1 时刻的 u 的近似解.

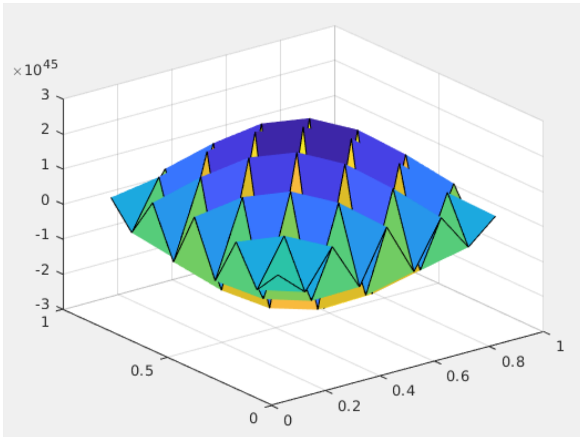

图 4: 0.2 时刻的 u 的近似解.

1.3 问题

由上图的结果分析,迭代过程中,数值的量级发生了剧变,我检查了系数矩阵 A,以及余项 F, 是没有操作上的错误的。

代码见附录。