五点差分求解 possion 方程

作者:周铁军

2019年9月20日

1 五点差分

题目:用差分法求解边值问题

$$\begin{aligned}
&-\Delta u = cos3xsin\pi y \qquad (x,y)\in G=(0,\pi)\times(0,1),\\
&u(x,0)=u(x,1)=0, \quad 0\le x\le 1,\\
&u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=0, \quad 0\le y\le 1,
\end{aligned} \tag{1}$$

其中精确解为:$u=(9+\pi^2)^{-1}cos3xsin\pi y$

(1) 依次取 $N=4,8,16,32$,取 6 位小数计算,以步长 $h_1=\frac{\pi}{N}$ 和 $\frac{1}{N}$ 作矩形剖分, 就 $(x_i,y_j)=(\frac{i\pi}{4},\frac{j}{4}),i,j=1,2,3$ 处列出差分解与精确解.

(2) 计算出差分法的误差阶.

1.1 求解

首先,对进行网格剖分,其中 h_1 和 h_2 分别为区间 $[0,\pi]$ 和 $[0,1]$ 上的剖分步长。

其次,利用五点差分离散二阶导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, 得到:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+1,j}+u_{i-1,j}-2u_{i,j}}{h_1^2}+O(h_1^2)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-2u_{i,j}}{h_2^2}+O(h_2^2)
\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $i,j=0,1,...,n$, 于是方程可表示为:

$$-\frac{u_{i+1,j}+u_{i-1,j}-2u_{i,j}}{h_1^2}-\frac{u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-2u_{i,j}}{h_2^2}=cos3x_isin\pi y_j, \quad i,j=0,1,...,n$$

化简得:

$$(\frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2})u_{i,j}-\frac{1}{h_1^2}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})-\frac{1}{h_2^2}(u_{i,j+1}+u_{i,j-1})=cos3x_isin\pi y_j, \quad i,j=0,1,...,n$$

考虑边界条件,有:

$$\begin{aligned}
&u(x,y(0))=u(x,y(n))=0\\
&u(x(0),y)=u(x(1),y),u(x(n-1),y)=u(x(n),y)
\end{aligned} \tag{3}$$

则只需求解红色区域内的点 (见图 1):

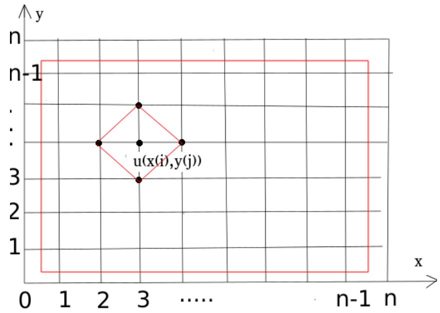

图 1: 网格剖分

化为矩阵形式:

$$AU = F$$

其中 $U = (u_{11}, u_{12}, ..., u_{1,n-1}, u_{21}, u_{22}, ..., u_{2,n-1}, ...)^T \quad (U为(n-1)^2 \times 1向量)$

$F = (f_{11}, f_{12}, ..., f_{1,n-1}, f_{21}, f_{22}, ..., f_{2,n-1}, ...)^T \quad (f(x,y) = cos3xsin\pi y)$

$$A = \begin{bmatrix} B_1 & C & \cdots & 0 \\ C & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_1 \end{bmatrix}_{(n-1)^2 \times (n-1)^2}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2} & -\frac{1}{h_2^2} & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h_2^2} & \frac{1}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2} \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}, \tag{4}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2} & -\frac{1}{h_2^2} & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h_2^2} & \frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2} \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}, \quad C = -\frac{1}{h_1^2} I_{n-1} \tag{5}$$

1.2 结果

下面展示 $N=4$ 时,$(x_i, y_j) = (\frac{i\pi}{4}, \frac{j}{4}), i,j = 1,2,3$ 处的差分解与精确解.

$$差分解:u = \begin{bmatrix} -0.042357 & -0.059903 & -0.042357 \\ -7.598053 \times 10^{-18} & -1.123532 \times 10^{-17} & -8.021530 \times 10^{-18} \\ 0.042357 & 0.059903 & 0.042357 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\text{精确解:}ue = \begin{bmatrix} -0.026498 & -0.037473 & -0.026498 \\ -6.883738 \times 10^{-18} & -9.735075 \times 10^{-18} & -6.883738 \times 10^{-18} \\ 0.026498 & 0.037473 & 0.026498 \end{bmatrix} \quad (7)$$

表 1: 误差分析

N	max 范数	L_2 范数
4	0.0224	0.0449
8	0.0156	0.0509
16	0.0229	0.1105
32	0.0321	0.2681

其他剖分的解暂不列出,下面列出不同剖分下求得的误差范数。

1.3 我的问题

通过数值求解,我得到的误差阶是一阶的,但是该问题本应该是二阶,还请老师,师姐指教,matlab 代码见附件。