学习报告

作者:周铁军

2019年7月12日

1 显式欧拉法

欧拉法是常微分方程的数值解法的一种，其基本思想是迭代。其中分为前进的 EULER 法、后退的 EULER 法、改进的 EULER 法。所谓迭代，就是逐次替代，最后求出所要求的解，并达到一定的精度。

向前欧拉形式如下：

$$u_{n+1} = u_n + hf\left(u_n, t_n\right)$$

初始条件：$u(t_0) = u_0$

向后欧拉形式如下：

$$u_{n+1} = u_n + hf\left(u_{n+1}, t_{n+1}\right)$$

初始条件：$u(t_0) = u_0$

1.1 推导过程

对于常微分方程：

$$\frac{du}{dx} = f(x, u)$$
$$u(x_0) = u_0$$

离散变量，用差商近似代替导数：

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\delta x} \qquad x_i\text{为任意一点,} \qquad (i = 0, 1, 2, ...)$$

于是有

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \delta x * f(x_i, u(x_i))$$

结果图像如下：

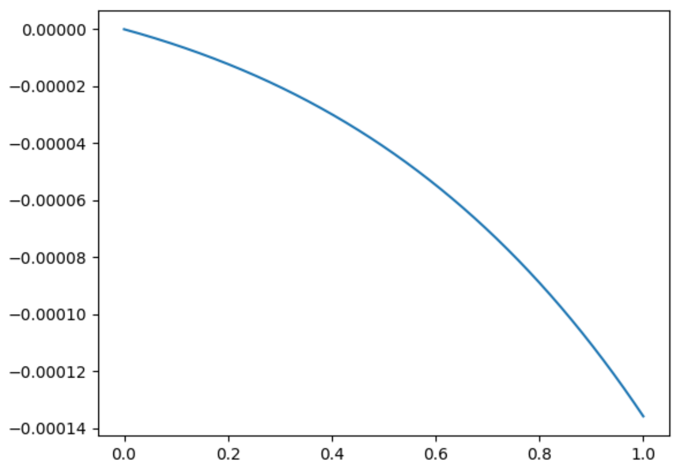

图 1: this is the error

Python 代码

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
N=10000
x=np.linspace(0,1,N+1)
u=np.zeros(N+1)
u[0]=1
uexact=np.exp(x)
step=1/N
def eular(x,u):
    return u
for i in range(0,N):
    [i+1] = u[i] + eular(x[i],u[i])*step
plt.plot(x,u-uexact)
```

2 B 样条插值

2.1 德布尔-考克斯递推公式

B 样条有多种等价定义,这里用到的是德布尔-考克斯递推公式,

$$\begin{cases} \mathrm{N}_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & \text{若 } u_i \leqslant u < u_{i+1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ \mathrm{N}_{i,k}(u) = \dfrac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} \mathrm{N}_{i,k-1}(u) + \dfrac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} \mathrm{N}_{i+1,k-1}(u) \\ \text{规定} \dfrac{0}{0} = 0 \end{cases}$$

图 2

$N_{i,k}(u)$ 表示 k 次样条基函数,下标 i 表示序号。

易知要确定第 i 个 k 次 B 样条 $N_{i,k}(u)$, 需要用到 $u_i, u_{i+1}, ..., u_{i+k+1}$ 共 $k+2$ 个节点。称 $[u_i, u_{n+k+1}]$□$N_{i,k}(u)$ 的支撑区间

对于曲线方程中相应的 $n+1$ 个控制顶点 $d_i(i = 0, 1, 2, ..., n)$, 需要用到 $n+1$ 个 k 次 B 样条基函数，所需要的支撑区间所含节点为这组 B 样条基的节点矢量 $U = [u_0, u_1, ..., u_{n+k+1}]$

下面介绍一个案例的不同控制点的图像

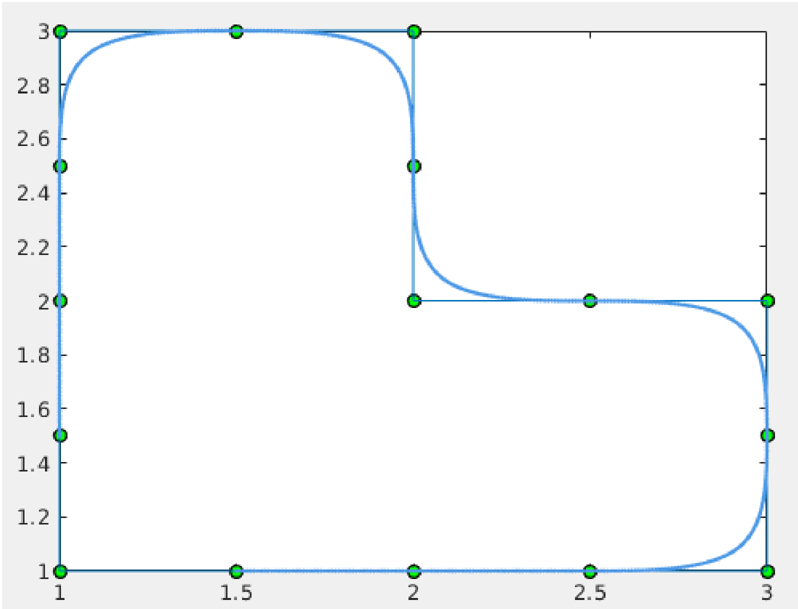

图 3: 用 16 个控制点的得到的 B 样条函数图像

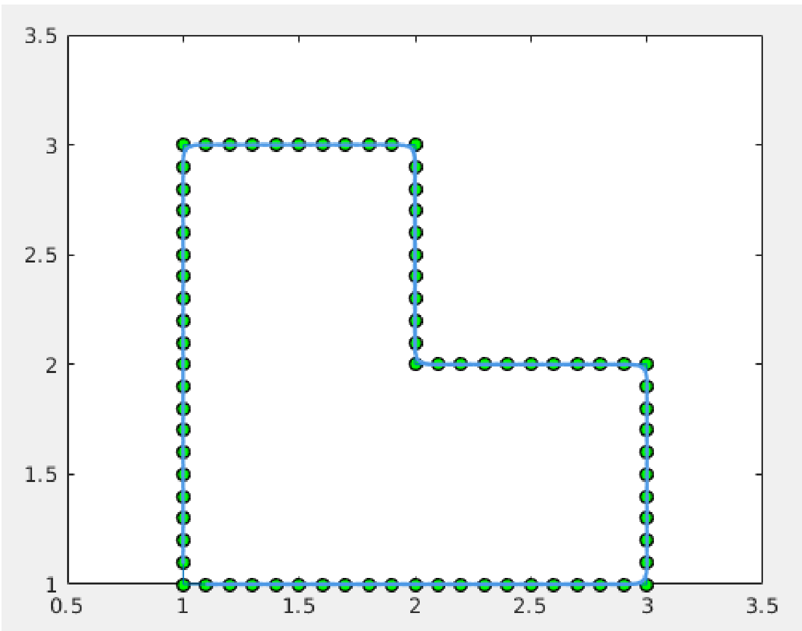

图 4: 用 80 个控制点的得到的 B 样条函数图像