求解抛物方程 1.3

作者:周铁军

2019年9月28日

1 抛物方程

题目：

$$\begin{aligned}
&u_t = \tfrac{1}{4^2}(u_{xx}+u_{yy}) \qquad (x,y)\in G=(0,1)\times(0,1), t>0\\
&u(0,y,t)=u(1,y,t)=0, \qquad y\in(0,1), t\geq 0\\
&u_y(x,0,t)=u_y(x,1,t)=0, \qquad x\in(0,1), t\geq 0\\
&u(x,y,0)=sin\pi x cos\pi y
\end{aligned} \tag{1}$$

其中精确解为：$u=sin\pi x cos\pi y exp(-\frac{\pi^2}{8}t)$，要求验证误差阶。

2 ADI 法求解

首先，对进行网格剖分，其中 h_1 和 h_2 分别为区间 $(0,1)\times(0,1)$ 上的剖分步长。

其次，利用五点差分离散二阶空间导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，得到：

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \tfrac{u_{i+1,j}+u_{i-1,j}-2u_{i,j}}{h_1^2}+O(h_1^2)\\
\tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \tfrac{u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-2u_{i,j}}{h_2^2}+O(h_2^2)
\end{aligned} \tag{2}$$

利用向前差分离散一阶时间导数 $\frac{\partial u}{\partial t}$，得到：

$$\tfrac{\partial u}{\partial t} = \tfrac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\tau}+O(\tau^2) \tag{3}$$

其中 $i,j=0,1,...,n$，于是方程可表示为：

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i,j}^{n}}{\frac{\tau}{2}} = 4^{-2}(\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h^2}+\frac{u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n}-2u_{i,j}^{n}}{h^2}),$$

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} = 4^{-2}(\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h^2}+\frac{u_{i,j+1}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}}{h^2}),$$

化简得：

$$-\frac{\tau}{2h^2}(u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}})+(1+\frac{\tau}{h^2})u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\tau}{2h^2}(u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n})+(1-\frac{\tau}{h^2})2u_{i,j}^{n},$$

$$-\frac{\tau}{2h^2}(u_{i,j+1}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1})+(1+\frac{\tau}{h^2})u_{i,j}^{n+1} = \frac{\tau}{2h^2}(u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}})+(1-\frac{\tau}{h^2})u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}},$$

考虑边值条件，有：

$$\begin{aligned}
&u(x(0),y,t)=u(x(n),y,t)=0\\
&u_y(x,y(0),t)=u_y(x,y(n),t)=0
\end{aligned} \tag{4}$$

则只需求解红色区域内的点 (见图 1)：

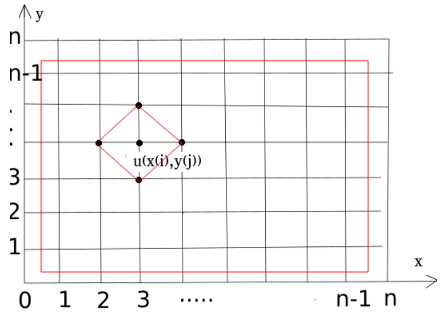

图 1：网格剖分

设 $U^k=(u_{11}^k,u_{12}^k,...,u_{1,n-1}^k,u_{21}^k,u_{22}^k,...,u_{2,n-1}^k,...)^T \quad (U^k\text{为}(n-1)^2\times 1\text{向量})$

$F^k=(f_{11}^k,f_{12}^k,...,f_{1,n-1}^k,f_{21}^k,f_{22}^k,...,f_{2,n-1}^k,...)^T \quad (F^k\text{为}(n-1)^2\times 1\text{向量}, f_{i,j}^k=f(x(i),y(j),t(k))=sin5\pi t_k sin2\pi x_i sin\pi y_j)$,

系数矩阵：

$$A_1=\begin{bmatrix} B_1 & C & \cdots & 0 \\ C & B_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_1 \end{bmatrix}_{(n-1)^2\times(n-1)^2}, \tag{5}$$

其中，

$$B_1=(1+\frac{\tau}{16h^2})I_{n-1}, \quad C=-\frac{\tau}{32h^2}I_{n-1} \tag{6}$$

$$A_2=\begin{bmatrix} B_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & B_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & B_2 \end{bmatrix}_{(n-1)^2\times(n-1)^2}, \quad B_2=\begin{bmatrix} 1-\frac{\tau}{32h^2} & \frac{\tau}{32h^2} & \cdots & 0\\ \frac{\tau}{32h^2} & 1-\frac{\tau}{16h^2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1-\frac{\tau}{32h^2} \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \tag{7}$$

$$A_3=\begin{bmatrix} B_3 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & B_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & B_3 \end{bmatrix}_{(n-1)^2\times(n-1)^2}, \quad B_3=\begin{bmatrix} 1+\frac{\tau}{32h^2} & -\frac{\tau}{32h^2} & \cdots & 0\\ -\frac{\tau}{32h^2} & 1+\frac{\tau}{16h^2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1+\frac{\tau}{32h^2} \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \tag{8}$$

$$A_4=\begin{bmatrix} B_4 & -C & \cdots & 0\\ -C & B_4 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & B_4 \end{bmatrix}_{(n-1)^2\times(n-1)^2}, \quad B_4=(1-\frac{\tau}{32h^2})I_{n-1} \tag{9}$$

于是得到如下迭代格式：

$$A_1U^{n+\frac{1}{2}}=A_2U^n$$

$$A_3U^{n+1}=A_4U^{n+\frac{1}{2}}$$

3 求解结果

不妨令 $tmax=1$, 则 $t\in[0,tmax]$, 时间剖分步长 $\tau=0.01$

以下是不同剖分数 N 下的 u 最后一步的近似值与精确解的误差的图像。

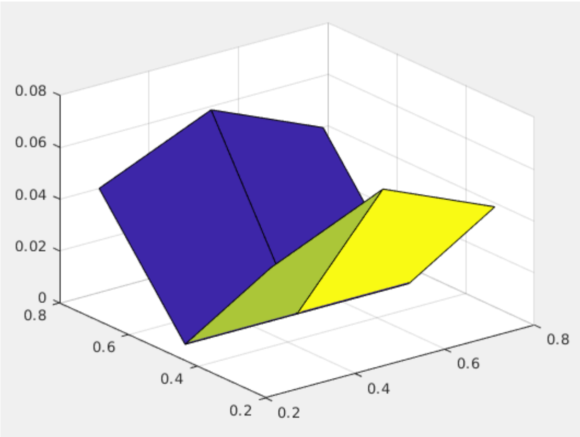

图 2: N=4 时的误差图像.

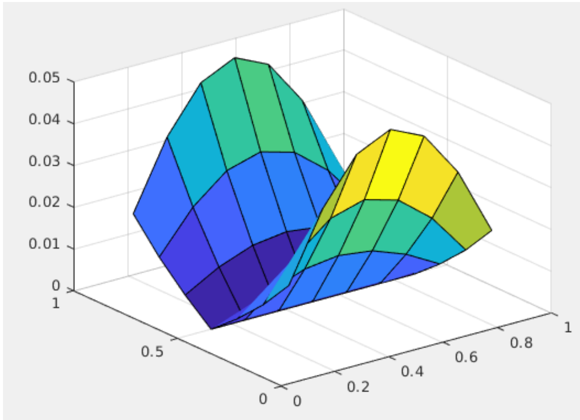

图 3: N=8 时的误差图像.

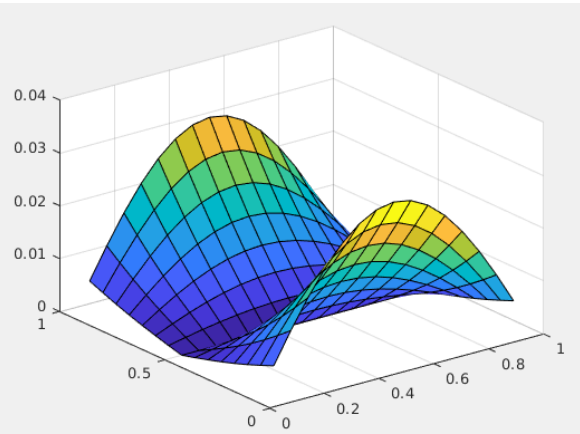

图 4: N=16 时的误差图像.

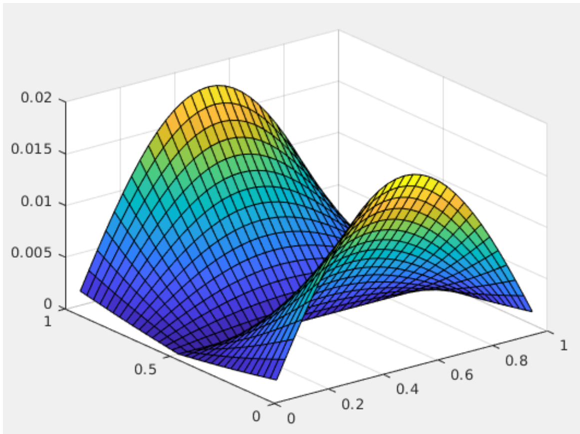

图 5: N=32 时的误差图像.

4 误差及阶

表 1: 误差分析

N	max 范数	L_2 范数	阶
4	0.0634	0.0141	
8	0.0499	0.0035	2.0103
16	0.0308	8.78e-4	1.9951
32	0.0182	2.414e-4	1.8628