HOẶC-Ghi chú

J E Beasley

OR-Notes là một loạt các ghi chú giới thiệu về các chủ đề thuộc tiêu đề rộng của lĩnh vực nghiên cứu hoạt động (OR). Chúng ban đầu được tôi sử dụng trong khóa học HOẶC giới thiệu mà tôi tổ chức tại Imperial College. Chúng hiện có sẵn để sử dụng bởi bất kỳ học sinh và giáo viên nào quan tâm đến HOẶC tuân theo các điều kiện sau .

Bạn có thể tìm thấy danh sách đầy đủ các chủ đề có trong OR-Notes tại đây .

Ví dụ về giải pháp lập trình tuyến tính

Ví dụ về lập trình tuyến tính đề thi UG 1997

Một công ty sản xuất hai sản phẩm (X và Y) bằng hai máy (A và B). Mỗi đơn vị X được sản xuất cần thời gian xử lý 50 phút trên máy A và thời gian xử lý 30 phút trên máy B. Mỗi đơn vị Y được sản xuất cần thời gian xử lý 24 phút trên máy A và 33 phút thời gian xử lý trên máy B.

Vào đầu tuần hiện tại, có 30 đơn vị X và 90 đơn vị Y trong kho. Thời gian xử lý có sẵn trên máy A được dự báo là 40 giờ và trên máy B được dự báo là 35 giờ.

Nhu cầu về X trong tuần hiện tại được dự báo là 75 đơn vị và đối với Y được dự báo là 95 đơn vị. Chính sách của công ty là tối đa hóa tổng số đơn vị X và đơn vị Y trong kho vào cuối tuần.

- Hãy xây dựng bài toán quyết định số lượng sản phẩm cần sản xuất trong tuần hiện tại dưới dạng một chương trình tuyến tính.
- Giải chương trình tuyến tính này bằng đồ họa.

Giải pháp

Cho phép

- x là số đơn vị X được sản xuất trong tuần hiện tại
- y là số đơn vị Y được sản xuất trong tuần hiện tại

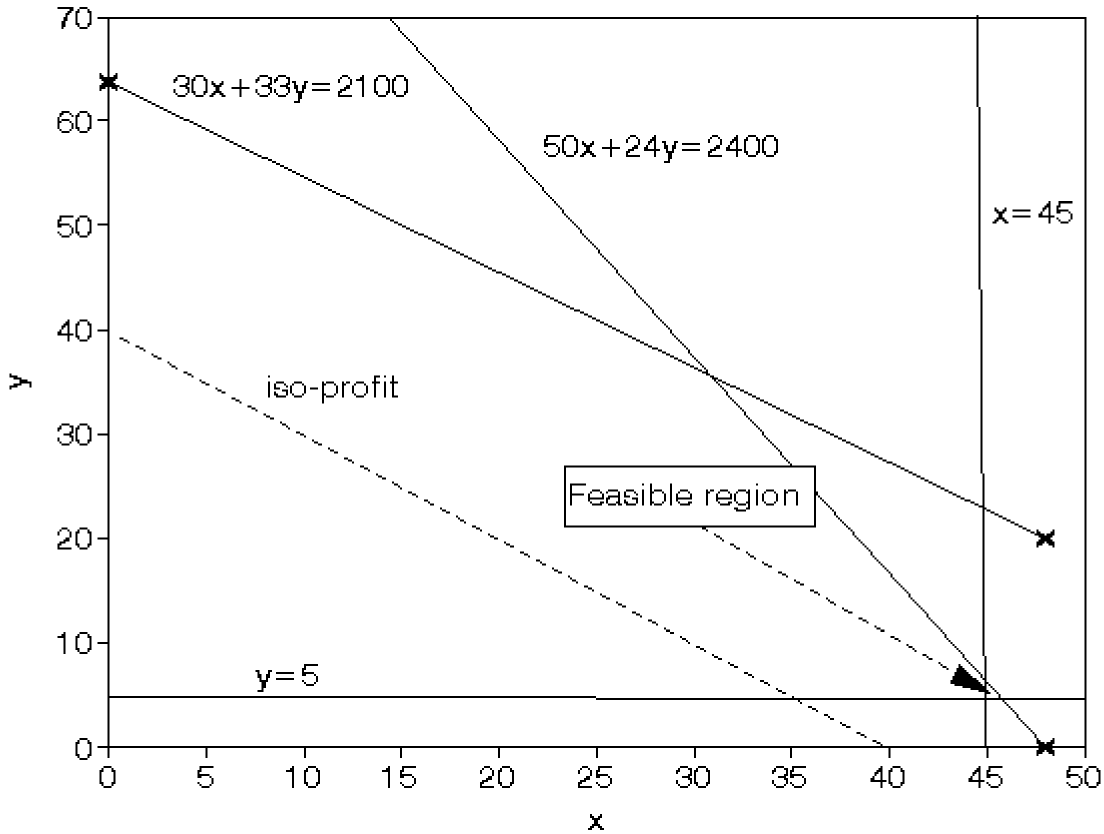
thì các ràng buộc là:

- $50x + 24y <= 40(60)$ máy Một lần
- $30x + 33y <= 35(60)$ máy B lần
- $x >= 75 - 30$
- tức là $x >= 45$ nên sản xuất X >= nhu cầu (75) - tồn kho ban đầu (30), đảm bảo chúng tôi đáp ứng được nhu cầu
- $y >= 95 - 90$

- tức là y >= 5 nên sản xuất Y >= cầu (95) - tồn kho ban đầu (90), đảm bảo chúng tôi đáp ứng được nhu cầu

Mục tiêu là: tối đa hóa (x+30-75) + (y+90-95) = (x+y-50)
tức là tối đa hóa số lượng đơn vị còn lại trong kho vào cuối tuần

Từ biểu đồ bên dưới, rõ ràng là cực đại xảy ra tại giao điểm của x=45 và 50x + 24y = 2400



Giải đồng thời, thay vì đọc các giá trị trên biểu đồ, chúng ta có x=45 và y=6,25 với giá trị của hàm mục tiêu là 1,25

Ví dụ về lập trình tuyến tính đề thi UG 1995

Nhu cầu về hai sản phẩm trong bốn tuần qua được trình bày dưới đây.

	Tuần			
	1	2	3	4
Nhu cầu - sản phẩm 1	23	27	34	40
Nhu cầu - sản phẩm 2	11	13	15	14

Áp dụng phương pháp làm mịn hàm mũ với hằng số làm mịn là 0,7 để đưa ra dự báo về nhu cầu đối với các sản phẩm này trong tuần 5.

Các sản phẩm này được sản xuất bằng hai máy X và Y. Mỗi đơn vị sản phẩm 1 được sản xuất cần 15 phút xử lý trên máy X và 25 phút xử lý trên máy Y. Mỗi đơn vị sản phẩm 2 được sản xuất cần 7 phút xử lý trên máy X và 45 phút xử lý trên máy Y. Thời gian khả dụng trên máy X trong tuần 5 được dự báo là 20 giờ và trên máy Y trong tuần 5 được dự báo là 15 giờ. Mỗi đơn vị sản phẩm 1 được bán trong tuần 5 đóng góp vào lợi nhuận là 10 bảng Anh và mỗi đơn vị sản phẩm 2 được bán trong tuần 5 đóng góp vào lợi nhuận là 4 bảng Anh.

Có thể không sản xuất đủ để đáp ứng nhu cầu dự báo của bạn đối với các sản phẩm này trong tuần thứ 5 và mỗi đơn vị nhu cầu không được đáp ứng đối với sản phẩm 1 có giá £3, mỗi đơn vị nhu cầu không được đáp ứng đối với sản phẩm 2 có giá £1.

- Hãy xây dựng bài toán quyết định số lượng sản phẩm cần sản xuất trong tuần thứ 5 dưới dạng một chương trình tuyến tính.
- Giải chương trình tuyến tính này bằng đồ họa.

Giải pháp

Lưu ý rằng phần đầu tiên của câu hỏi là câu hỏi dự đoán nên nó được giải quyết dưới đây.

Đối với sản phẩm 1 áp dụng làm mịn hàm mũ với hằng số làm mịn là 0,7, chúng ta nhận được:

$M_1 = Y_1 = 23$
$M_2 = 0{,}7Y_2 + 0{,}3M_1 = 0{,}7(27) + 0{,}3(23) = 25{,}80$
$M_3 = 0{,}7Y_3 + 0{,}3M_2 = 0{,}7(34) + 0{,}3(25{,}80) = 31{,}54$
$M_4 = 0{,}7Y_4 + 0{,}3M_3 = 0{,}7(40) + 0{,}3(31{,}54) = 37{,}46$

Dự báo cho tuần thứ năm chỉ là mức trung bình của tuần 4 = M_4 = 37,46 = 31 (vì chúng ta không thể có nhu cầu phân đoạn).

Đối với sản phẩm 2 áp dụng làm mịn hàm mũ với hằng số làm mịn là 0,7, chúng ta nhận được:

$M_1 = Y_1 = 11$
$M_2 = 0{,}7Y_2 + 0{,}3M_1 = 0{,}7(13) + 0{,}3(11) = 12{,}40$
$M_3 = 0{,}7Y_3 + 0{,}3M_2 = 0{,}7(15) + 0{,}3(12{,}40) = 14{,}22$
$M_4 = 0{,}7Y_4 + 0{,}3M_3 = 0{,}7(14) + 0{,}3(14{,}22) = 14{,}07$

Dự báo cho tuần thứ năm chỉ là mức trung bình của tuần 4 = M_4 = 14,07 = 14 (vì chúng ta không thể có nhu cầu phân đoạn).

Bây giờ chúng ta có thể xây dựng LP cho tuần thứ 5 bằng cách sử dụng hai số liệu về nhu cầu (37 cho sản phẩm 1 và 14 cho sản phẩm 2) ở trên.

Cho phép

x_1 là số đơn vị sản phẩm 1 được sản xuất

x_2 là số đơn vị sản phẩm 2 được sản xuất

trong đó x_1 , x_2 >=0

Các hạn chế là:

$15x_1 + 7x_2 <= 20(60)$ máy X

$25x_1 + 45x_2 <= 15(60)$ máy Y

$x_1 <= 37$ nhu cầu về sản phẩm 1

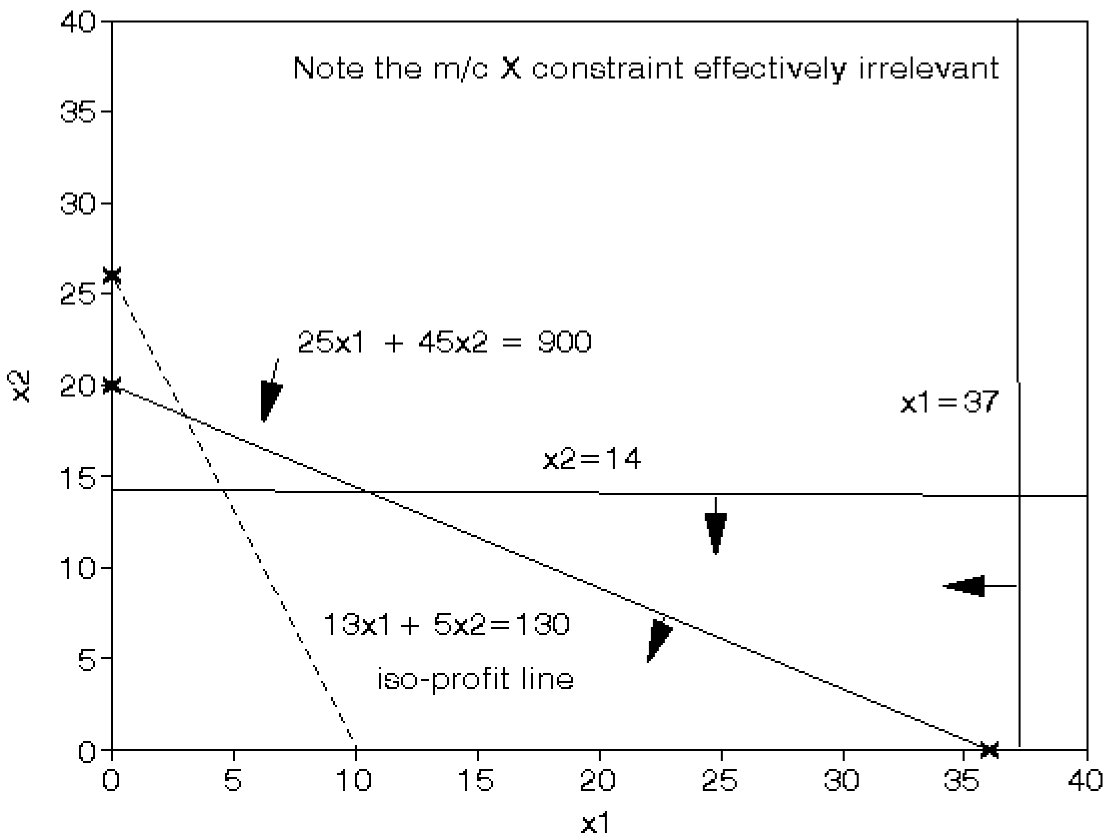
$x_2 <= 14$ nhu cầu về sản phẩm 2

Mục tiêu là tối đa hóa lợi nhuận, tức là

tối đa hóa $10x_1 + 4x_2 - 3(37- x_1) - 1(14-x_2)$

tức là tối đa hóa $13x_1 + 5x_2 - 125$

Biểu đồ được hiển thị bên dưới, từ biểu đồ chúng ta có rằng giải pháp xảy ra trên trục hoành ($x_2 = 0$) tại $x_1 = 36$ tại đó lợi nhuận tối đa là 13(36) + 5(0) - 125 = £ 343



Ví dụ về lập trình tuyến tính đề thi UG 1994

Một công ty tham gia sản xuất hai mặt hàng (X và Y). Nguồn lực cần thiết để sản xuất X và Y gấp đôi, cụ thể là thời gian sử dụng máy để xử lý tự động và thời gian của thợ thủ công để hoàn thiện bằng tay. Bảng dưới đây đưa ra số phút cần thiết cho mỗi hạng mục:

		Thời gian máy móc	Thời gian thợ thủ công
Mục	X	13	20
	Y	19	29

Công ty có 40 giờ làm việc trên máy trong tuần làm việc tiếp theo nhưng chỉ có 35 giờ làm việc của thợ thủ công. Thời gian sử dụng máy được tính là £10 một giờ làm việc và thời gian của thợ thủ công là £2 một giờ làm việc. Cả thời gian nhàn rỗi của máy móc và thợ thủ công đều không phát sinh chi phí. Doanh thu nhận được cho mỗi mặt hàng được sản xuất (tất cả sản phẩm được bán) là £20 cho X và £30 cho Y. Công ty có hợp đồng cụ thể để sản xuất 10 mặt hàng X mỗi tuần cho một khách hàng cụ thể.

- Hãy xây dựng bài toán quyết định sản lượng bao nhiêu mỗi tuần dưới dạng một chương trình tuyến tính.
- Giải chương trình tuyến tính này bằng đồ họa.

Giải pháp

Cho phép

- x là số phần tử của X
- y là số phần tử của Y

thì LP là:

tối đa hóa

- 20x + 30y - 10(thời gian làm việc của máy) - 2(thời gian làm việc của thợ thủ công)

tùy thuộc vào:

- 13x + 19y <= 40(60) thời gian máy
- 20x + 29y <= 35(60) thời gian thợ
- x >= 10 hợp đồng
- x, y >= 0

để hàm mục tiêu trở thành

tối đa hóa

- 20x + 30y - 10(13x + 19y)/60 - 2(20x + 29y)/60

tức là tối đa hóa

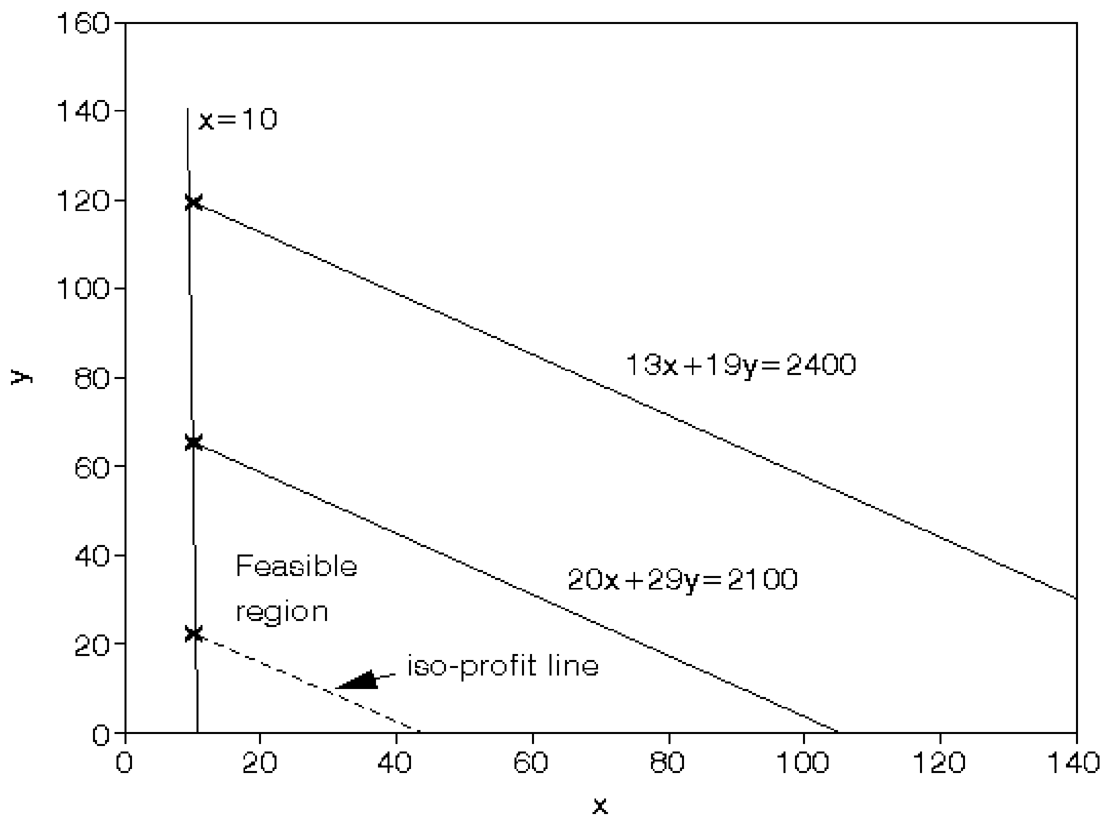
- 17.1667x + 25.8667y

tùy thuộc vào:

- 13x + 19y <= 2400
- 20x + 29y <= 2100
- x >= 10
- x, y >= 0

Từ biểu đồ bên dưới, rõ ràng là cực đại xảy ra tại giao điểm của x=10 và 20x + 29y <= 2100

Giải đồng thời, thay vì đọc các giá trị trên biểu đồ, chúng ta có x=10 và y=65,52 với giá trị của hàm mục tiêu là £1866,5



Ví dụ về lập trình tuyến tính đề thi UG 1992

Một công ty sản xuất hai sản phẩm (A và B) và lợi nhuận trên mỗi đơn vị bán ra lần lượt là £3 và £5. Mỗi sản phẩm phải được lắp ráp trên một máy cụ thể, mỗi sản phẩm A mất 12 phút lắp ráp và mỗi sản phẩm B mất 25 phút. Công ty ước tính máy dùng để lắp ráp có thời gian làm việc hiệu quả chỉ 30 giờ/tuần (do bảo trì/hỏng hóc).

Những hạn chế về công nghệ có nghĩa là cứ năm đơn vị sản phẩm A được sản xuất thì phải sản xuất ít nhất hai đơn vị sản phẩm B.

- Hãy xây dựng bài toán cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm dưới dạng một chương trình tuyến tính.
- Giải chương trình tuyến tính này bằng đồ họa.
- Công ty đã có cơ hội thuê thêm một máy móc, nhờ đó tăng gấp đôi thời gian lắp ráp hiệu quả hiện có. Số tiền *tối đa* bạn sẵn sàng trả (mỗi tuần) cho việc thuê chiếc máy này là bao nhiêu và tại sao?

Giải pháp

Cho phép

x_A = số đơn vị A được sản xuất

x_B = số đơn vị B được sản xuất

thì các ràng buộc là:

$12x_A + 25x_B <= 30(60)$ (thời gian lắp ráp)

$x_B >= 2(x_A/5)$

tức là $x_B - 0,4x_A >= 0$

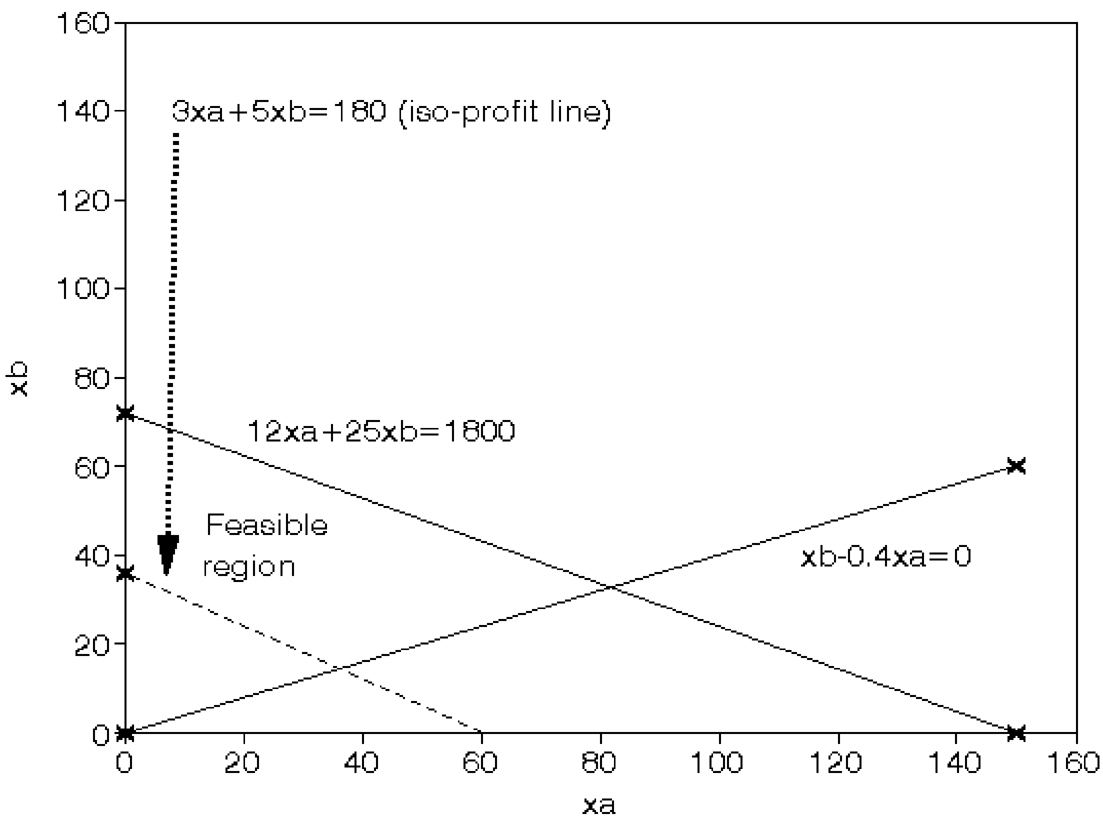
tức là $5x_B >= 2x_A$ (công nghệ)

trong đó $x_A , x_B >= 0$

và mục tiêu là

tối đa hóa $3x_A + 5x_B$

Từ biểu đồ bên dưới, rõ ràng là cực đại xảy ra tại giao điểm của $12x_A + 25x_B = 1800$ và $x_B - 0,4x_A = 0$



Giải đồng thời, thay vì đọc các giá trị trên biểu đồ, chúng ta có:

$x_A = (1800/22) = 81,8$

$x_B = 0,4x_A = 32,7$

với giá trị của hàm mục tiêu là £408,9

Nhân đôi thời gian lắp ráp sẵn có có nghĩa là giới hạn thời gian lắp ráp (hiện tại là $12x_A + 25x_B <= 1800$) trở thành $12x_A + 25x_B <= 2(1800)$ Ràng buộc mới này sẽ song song với ràng buộc thời gian lắp ráp hiện tại sao cho ràng buộc mới này sẽ song song với giới hạn thời gian lắp ráp hiện tại. nghiệm tối ưu sẽ nằm ở giao điểm của $12x_A + 25x_B = 3600$ và $x_B - 0,4x_A = 0$

tức là tại $x_A = (3600/22) = 163,6$

$x_B = 0,4x_A = 65,4$

với giá trị của hàm mục tiêu là £817,8

Do đó, chúng tôi đã kiếm được lợi nhuận bổ sung là £(817,8-408,9) = £408,9 và đây là số tiền *tối đa* chúng tôi sẵn sàng trả cho việc thuê máy để tăng gấp đôi thời gian lắp ráp.

Điều này là do nếu chúng tôi trả nhiều hơn số tiền này thì chúng tôi sẽ giảm lợi nhuận tối đa xuống dưới mức £408,9 mà lẽ ra chúng tôi đã kiếm được nếu không có máy mới.

Ví dụ về lập trình tuyến tính đề thi UG 1988

Gỡ rối

giảm thiểu

$$4a + 5b + 6c$$

tùy thuộc vào

$$a + b >= 11$$

$$a - b <= 5$$

$$c - a - b = 0$$

$$7a >= 35 - 12b$$

$$a >= 0 \quad b >= 0 \quad c >= 0$$

Giải pháp

Để giải LP này, chúng ta sử dụng phương trình cab=0 để đặt c=a+b (>= 0 dưới dạng a >= 0 và b >= 0) và do đó LP giảm xuống còn

giảm thiểu

$$4a + 5b + 6(a + b) = 10a + 11b$$

tùy thuộc vào

$$a + b >= 11$$

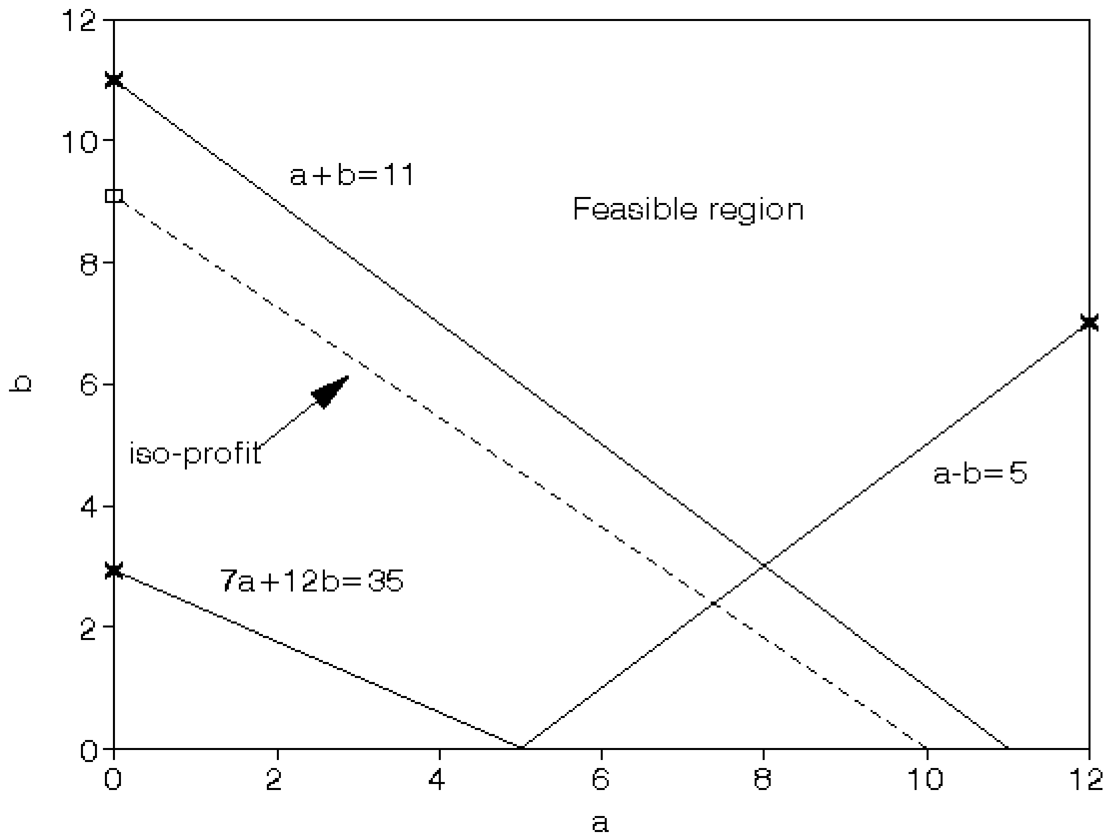
$$a - b <= 5$$

$$7a + 12b >= 35$$

$$a >= 0 \quad b >= 0$$

Từ sơ đồ bên dưới, cực tiểu xảy ra tại giao điểm của a - b = 5 và a + b = 11

tức là a = 8 và b = 3 với c (= a + b) = 11 và giá trị của hàm mục tiêu 10a + 11b = 80 + 33 = 113.



Ví dụ về lập trình tuyến tính đề thi UG 1987

Giải chương trình tuyến tính sau:

tối đa hóa $5x_1 + 6x_2$

tùy thuộc vào

$x_1 + x_2 <= 10$

$x_1 - x_2 >= 3$

$5x_1 + 4x_2 <= 35$

$x_1 >= 0$

$x_2 >= 0$

Giải pháp

Rõ ràng từ biểu đồ dưới đây là cực đại xảy ra tại giao điểm của

$5x_1 + 4x_2 = 35$ và

$x_1 - x_2 = 3$

Giải đồng thời, thay vì đọc các giá trị trên biểu đồ, chúng ta có

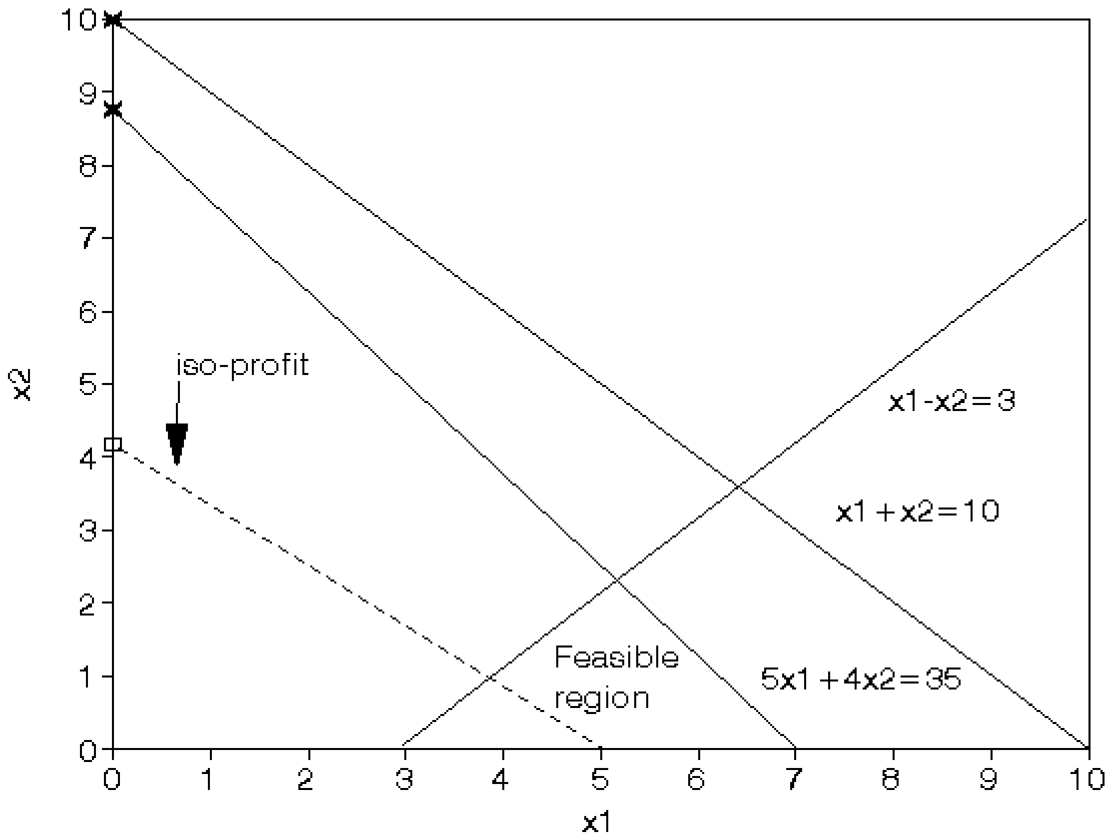
$5(3 + x_2) + 4x_2 = 35$

tức là $15 + 9x_2 = 35$

tức là $x_2 = (20/9) = 2{,}222$ và

$x_1 = 3 + x_2 = (47/9) = 5{,}222$

Giá trị tối đa là $5(47/9) + 6(20/9) = (355/9) = 39{,}444$



Ví dụ về lập trình tuyến tính đề thi UG 1986

Một người thợ mộc làm bàn ghế. Mỗi chiếc bàn có thể được bán với lợi nhuận là 30 bảng và mỗi chiếc ghế có thể được lợi nhuận là 10 bảng. Người thợ mộc có thể dành tới 40 giờ làm việc mỗi tuần và mất sáu giờ để làm một cái bàn và ba giờ để làm một cái ghế. Nhu cầu của khách hàng yêu cầu anh ta sản xuất số ghế ít nhất gấp ba lần số bàn. Bàn chiếm không gian lưu trữ gấp bốn lần so với ghế và chỉ có đủ chỗ cho tối đa bốn bàn mỗi tuần.

Hãy phát biểu bài toán này như một bài toán quy hoạch tuyến tính và giải nó bằng đồ thị.

Giải pháp

Biến

Cho phép

x_T = số bàn làm được mỗi tuần

x_C = số ghế được sản xuất mỗi tuần

Hạn chế

- tổng thời gian làm việc

$6x_T + 3x_C <= 40$

- nhu cầu khách hàng

$x_C >= 3x_T$

- không gian lưu trữ

$(x_C /4) + x_T <= 4$

- tất cả các biến >= 0

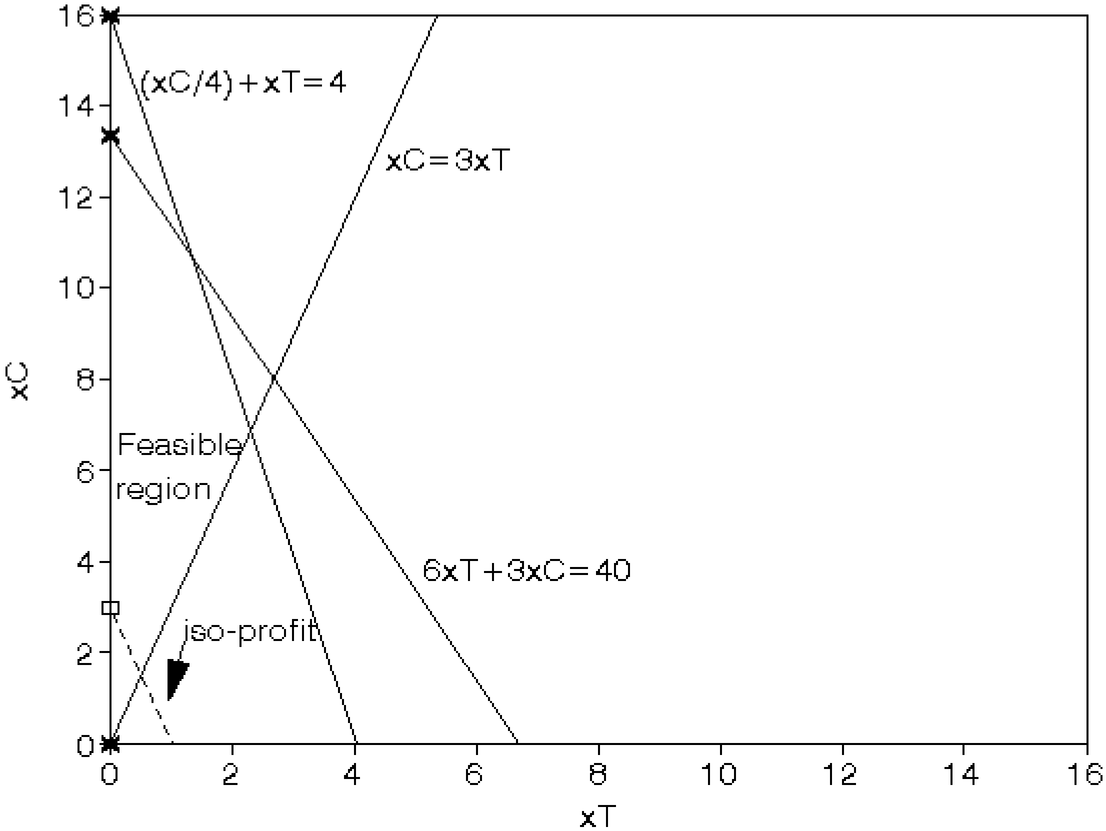
Khách quan

tối đa hóa $30x_T + 10x_C$

Biểu diễn đồ họa của bài toán được đưa ra dưới đây và từ đó ta có nghiệm nằm ở giao điểm của

$(x_C /4) + x_T = 4$ và $6x_T + 3x_C = 40$

Solving these two equations simultaneously we get $x_C = 10.667$, $x_T = 1.333$ and the corresponding profit = £146.667


(xC/4)+xT=4
xC=3xT
6xT+3xC=40
Feasible
region
iso-profit
xC
xT
0
2
4
6
8
10
12
14
16