ÉSPACES QUOTIENTS

1 Généralité

Soit A, B, C trois ensembles et $f : A \to B, g : A \to C$ deux applications.
Le problème qui se pose est de savoir si on peut trouver une application $h : C \to B$ tel que $f = h \circ g$.
Pour cela, on considère la condition

$$\forall x, y \in A,\ (g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)). \tag{1}$$

On a la propposition suivante

1.1 Proposition

Si f et g verifie la condition (1), alors h existe et vice-versa.

Demonstration :
Supposons que (1) soit verifiee. Soit $t \in C$.
Si t est egale a un certain $g(x)$ avec $x \in A$, necessairement $h(t) = h(g(x)) = f(x)$. Montrons que $h(t)$ ne depend pas de x choisie. Soit $y \in A$ tel que $t = g(y)$. Par hypothese, $h(t) = h(g(y)) = f(y) = f(x)$. Donc $h(t)$ est bien definie si $t \in g(A)$. Supposons maintenant que $t \notin g(A)$. Choisissons un element $b \in B$ et posons $h(t) = b$. h est ainsi defini est bien une application de C vers B verifiant $h \circ g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.
Supposons maintenant que h existe et montrons que f et g vereifient la condition (1). Soit $x, y \in A$ tel que $g(x) = g(y)$. On a $h(g(x)) = h(g(y))$ ou encore $f(x) = f(y)$.
D'ou (1).

1.2 Corollaire

Si f et g verifient (1) et g surjective, h est unique.

1.3 Proposition

Supposons que f et g vérifient la condition (1)

$$\forall x, y \in A,\ (g(x) = g(y) \Leftrightarrow f(x) = f(y)). \tag{2}$$

Soit i l'injection canonique de $f(A)$ vers B, c-à-d, pour tout $u \in f(A)$, $i(u) = u$. Alors, il existe une bijection $\bar{h}$ de $g(A)$ vers $f(A)$ et une seule telle que $f = i \circ \bar{h} \circ g$.

Démonstration :
Considerons les applications $f_1 : A \mapsto f(A), x \mapsto f_1(x) = f(x)$ et $g_1 : A \mapsto f(A), x \mapsto g_1(x) = g(x)$.
Soit $x, y \in A$ tels que $g_1(x) = g(y)$. On a $g(x) = g(y)$. D'apres l'hypothese, $f(x) = f(y)$

et par suite, $f_1(x) = f_1(y)$. f_1 et g_1 verifient donc la condition (1). Ainsi, d'apres prop 1.1, il existe une application $h_1 : g(A) \mapsto f(A)$ telle que $f_1 = h_1 \circ g_1$. Comme $f = i \circ f_1$, alors $\forall x \in A, f(x) = i \circ h_1 \circ g_1 = i \circ h_1 \circ g(x)$, ou encore $f = i \circ h_1 \circ g$. De plus, comme g_1 est surjective, le corollaire 1.2 implique que h_1 est unique.
Montrons enfin que h_1 est bijective.

- Soit $u \in f(A)$. $\exists x \in A$ tel que $u = f(x)$. Posons $t = g(x)$. On a $h_1(t) = f(x) = u$. Donc h_1 est surjective.
- D'autre part, soit $t, t' \in g(A)$ tels que $h_1(t) = h_1(t')$. Soit $x, x' \in A$ tel que $t = g(x)$ et $t' = g(x')$. D'apres ce qui precede, $f(x) = h_1(t)$ et $f(x') = h_1(t')$. Donc $f(x) = f(x')$. D'apres $(2), g(x) = g(x')$ ou encore $t = t'$. h_1 est donc injective. Donc $\bar{h} = h_1$.

2 Quotient d'un groupe par un sous groupe

Soit G un groupe (suppose additif) non nécessairement abélien et H un sous groupe de G. On définit une rélation $\equiv$ sur G par

$$\forall x, y \in G,\ x \equiv y\ \Leftrightarrow -x + y \in H$$

. **Remarque**: Si la loi utilisée est multiplicative, $\equiv$ est défini par

$$\forall x, y \in G, x \equiv y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

.

2.1 Proposition

$\equiv$ est une rélation d'équivalence ayant les propriétés suivantes :

(1) $\bar{x} = x + H{:=}\{x + h \mid h \in H\}$;

(2) Pour tout $x, y \in G$, $(x + y) + H\ =\ x + (y + H)$;

(3) Pour tout $h \in H,\ h + H = H$

On note G/H l'ensembles des classes d'équivalences de $\equiv$.

Démonstration:
Montrons d'abord que $\equiv$ est une rélation d'équivalence.
$\forall\ x \in G,\ ona - x\ +\ x = 0 \in H$. donc $x \equiv x$.
D'autre part, soit $x, y \in G$ tels que $x \equiv y$. On a $-x\ +\ y \in H$.
Par suite $-(-x\ +\ y) = -y\ +\ y \in H$ tels que $x \equiv y$, c-a-d, $y \equiv x$.
Enfin, soit$x, y, z \in G$ tel que $x \equiv y$ et $y \equiv x$. Alors $-x + z = (-x + y) - (y - z) \in H$ ou encore $x \equiv z$.
On en conclut que $\equiv$ est une relation d'equivalence.

Soit maintenant $x, y \in G$. Alors

$$y \in \bar{x} \Leftrightarrow x \equiv y \Leftrightarrow -x + y \in H \Leftrightarrow \exists h \in H, -x + y = h \Leftrightarrow y \in x + H.$$

D'où $\bar{x} = x + H$.
De plus, pour tout z,

$$\begin{array}{rcl} z \in (x+y)+H & \Leftrightarrow & -(x+y)+z \in H \Leftrightarrow (-y-x)+z \in H \\ & \Leftrightarrow & -y+(-x+z) \in H \Leftrightarrow -x+z \in y+H \\ & \Leftrightarrow & z \in x+(y+H). \end{array}$$

Enfin, soit $h \in H$. Pour tout w,

$$w \in H \Leftrightarrow -h+w \in H \Leftrightarrow w \in h+H.$$

Ce qui prouve que $h + H = H$.

2.2 Définition

Une rélation d'équivalence R est compatible avec la loi de G si

$$\forall x, y, x^{'}, y^{'} \in G, (xRy \; et \; x^{'}Ry^{'} \Rightarrow (x+x^{'})R(y+y^{'}))$$

.

2.3 Définition

On dit que H est distingué dans G si $\forall x \in G, x+H-x \subset H$.
En particulier, tout sous groupes d'un groupe abélien est distingué.

2.4 Lemme

Soit A et B 2 partie (non nécessairement des sous groupes) de G et $x \in G$. Alors

$$A \subset B \Leftrightarrow x+A \subset x+B \Leftrightarrow A+x \subset B+x$$

.

Démonstration :
L'implication $A \subset B \Rightarrow x+A \subset x+B$ est évidente. Supposons que $x+A \subset x+B$ et soit $a \in A$. Alors il existe $b \in B$ tel que $x+A = x+B$. En ajoutant à gauche par $-x$, on a $a = b$. Donc $A \subset B$. Ce qui nous donne la premier équivalence. On fait de même pour $A \subset B \Rightarrow A+x \subset B+x$.

2.5 Proposition

$\equiv$ est compatible avec la loi de G *ssi* H est distingué.

Démonstration :
Supposons que $\equiv$ soit compatible avec la loi de G. Soit $x \in G$ et $y \in x+H-x$. On a $y+x \in x+H$ ou encore $y+x \equiv x$. Comme $-x \equiv -x$, alors $y+x-x \equiv x-x$. donc $y \equiv 0$, c-à-d, $y \in H$.
Reciproquement, supposons que H soit distingué. Soit $x, y, x^{'}, y^{'} \in G$ tel que $x \equiv y$ et $x^{'} \equiv y^{'}$. On a $y+y^{'} \in (x+H)+(x^{'}+H) = (x+(x^{'}+H))+H = (x+x^{'})+H$.
Donc $y+y^{'} \equiv x+x^{'}$.

2.6 Proposition

On a les équivalence:

$$H \text{ distingué } dans\ G \Leftrightarrow \forall x \in G, x+H = H+x \Leftrightarrow \forall x \in G, x+H-x = H$$

. *Démonstration :* En appliquant le lemme, on a:

$$\begin{array}{rcl} H \text{ distingué } dans\ G & \Leftrightarrow & \forall x \in G, x+H-x \subset \ et\ -x+H+x \subset H \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in G, x+H \subset H+x\ et\ H+x \subset x+H \\ & \Leftrightarrow & \forall H+x = x+H \\ & \Leftrightarrow & \forall H = x+H-x \end{array}$$

2.7 Proposition

Si H est distingué, la loi défini par $\forall x, y \in G, \bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$ est bien définie sur G/H appelée loi quotient. Muni de cette loi quotient, G/H a une structure de groupe appelée groupe quotient.

Démonstration :
Soit $x, y, x^{'}.y^{'} \in G$ tels que $\bar{x} = \bar{x^{'}}$ et $\bar{y} = \bar{y^{'}}$. Pour que la loi soit définie, il faut que $\overline{x^{'} + y^{'}} = \overline{x+y}$. Or, d'après la propposition précèdente, $\equiv$ est compatible avec la loi de G. Donc $x^{'} + y' \equiv x+y$, c-a-d, $\overline{x' + y'} = \overline{x+y}$.
On peut vérifier facilement que G/H muni de cette loi est un groupe.

2.8 Définition

Soit G et $G^{'}$ deux groupes et f une application de G vers $G^{'}$. On dit que f est un morphisme de groupe si $\forall x, y \in G, f(x+y) = f(x) + f(y)$. Si de plus f est bijective, on dit que f est une isomorphisme de groupes. Si un tel isomorphisme existe, on dit que G et $G^{'}$ sont isomorphismes.

2.9 Proposition

Si H est un sous groupe distingué de G, alors l'application $\pi : G \mapsto G/H, x \mapsto \bar{x} = x + H$ est un morphisme de groupe appelée surjection canonique.

2.10 Proposition

Soit f un morphisme du groupe G vers un groupe $G^{'}$, alors $G/HKer\, f$ et $Im\, f$ sont isomorphisme.

Démonstration :
D'abord, comme $Ker\, f$ est un sous groupe distingué de G, alors $G/Ker\, f$ est un sous groupe. Considérons alors la surjection canonique π de G sur $G/Ker\, f$. Soit $x, y \in G$. On a :

$$\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow -x+y \in Ker\, f \Leftrightarrow f(-x+y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

. D'après la prop 1.3, il existe une bijection $\bar{f}$ de $\pi(G) = G/Ker\, f$ sur $Im\, f$, définie par

$$\forall \bar{x} \in G/Ker\, f, \bar{f}(\bar{x}) = f(x)$$

. De plus, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in G/Ker\, f$,

$$\bar{f}(\bar{x} + \bar{y}) = \bar{f}(\overline{x+y}) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \bar{f}(\bar{x}) + \bar{f}(\bar{y})$$

. Donc $\bar{f}$ est un isomorphisme de groupes car $Im\, f$ est un sous groupe de $G^{'}$.

3 Quotient d'un anneau par un idéal

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et I un sous groupe de $(A, +)$. Puisque $(A, +)$ est abélien, I est distingué dans A et on peut donc considérée la groupe quotient $A/I = \{\bar{a} = a + I; a \in A\}$ muni de la loi quotient $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$.

3.1 Définition

On dit que I est un idéal à gauche (resp. à droite) de A si $\forall a \in A, aI \subset I\,(resp. Ia \subset I)$. C'est un idéal bilatère s'il est à la fois idéal à gauche et idéal à droite.

3.2 Définition

Si I est un idéal bilatère, la loi défini par $\forall x, y \in A, \bar{x}.\bar{y} = \overline{xy}$ est bien défini sur A/I appelée produit quotient. De plus $(A/I, +, \cdot)$ est un anneau appelée anneau quotient.

3.3 Définition

Soit A et $A^{'}$ deux anneaux et f une application de A vers $A^{'}$. On dit que f est un morphisme d'anneaux si

$$\forall x, y \in A, f(x) + f(y) = f(x + y) \; et \; f(x)f(y) = f(xy)$$

.

3.4 Proposition

Si f est un idéal bilatère de A, alors l'application $\pi : A \mapsto A/I, x \mapsto \bar{x} = x + I$ est un morphisme d'anneaux appelée surjection canonique.
Si f est un morphisme d'anneaux de A vers $A^{'}$, on peut vérifier facilement que $Ker\, f$ est idéal bilatère de A.

3.5 Proposition

Soit $f : A \mapsto A^{'}$ un morphisme d'anneaux. Alors il existe un isomorphisme d'anneaux f : $A/Ker\, f \mapsto Im\, f$. En d'autres termes, les anneaux $A/Ker\, f \; et \; Im\, f$ sont isomorphes.

4 Quotient d'un éspace véctoriel par un sous éspace véctoriel

Considérons un éspace véctoriel $(E, +, \times)$ sur un corps $\mathbb{K}$ et F un sous groupe de $(E, +)$, F étant un sous groupe distingué du groupe abélien $(E, +)$, on peut considérée le groupe quotient $E/F = \bar{x} = x + F;\; x \in E$ muni de la loi quotient $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$.

4.1 Proposition

Si F est un sous éspace véctoriel de E, la loi défini par $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda \times \bar{x} = \overline{\lambda \times x}$ est bien une loi externe sue E/F. De plus, $(E/F, +, \times)$ est bien un éspace véctoriel sur $\mathbb{K}$ appelée éspace véctoriel quotient.

4.2 Définition

On suppose E de dimension n et F un sev de E. On appelle codimension de F l'entier $codim\, F = n - dim\, F$.

4.3 Proposition

Si E est de dimension finie, $dim(E/F) = codim\, F$.

4.4 Proposition

Soit E et F deux $\mathbb{K}ev$ et f une application linéaire de E vers F. L'application $f : E/Ker\, f \mapsto Im\, f, \bar{x} \mapsto f(x)$ est un isomorphisme d'ev.

5 Morphismes d'algèbre

5.1 Définition

Une $\mathbb{K} - algebre$ est quadruplet $(A, +, \cdot, \times)$ tel que

- $(A, +, \cdot)$ est un anneau;
- $(A, +, \times)$ est $\mathbb{K}$ev.

Soit A et A' deux algèbres et f un morphisme d'algèbre de A vers A', c-à-d,

$$\forall x, y, z \in A, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(xy + \lambda z) = f(x)f(y) + \lambda f(z).$$

Comme dans les sections précèdentes, on a la propriété suivante

5.2 Proposition

L'application $\bar{f} : A/Ker\, f \mapsto Im\, f, \bar{x} \mapsto f(x)$ est un isomorphisme d'algèbre vérifiant la rélation $f = i \circ \bar{f} \circ \pi$ où π est la surjection canonique de A sur $A/ker\, f$ et i l'injection canonique de $Im\, f$ dans A'.

6 Quotient par un polynôme

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes de var X. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, de dégré d (d $>$ 0). L'ensemble $(P) = P\mathbb{K}[X]$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Donc $\mathbb{K}[X]/(P)$ noté tout simplement $\mathbb{K}[X]/P$ est un anneau quotient. En notant $\bar{A}$ la classe d'un polynôme A, on a

$$\bar{A} = \bar{B} \Leftrightarrow P|(A - B)$$

6.1 Proposition

$\mathbb{K}[X]/P$ est une $\mathbb{K}-algebre$ de dimension d de base canonique $(1, \bar{X}, \cdots, X^{\bar{d}-1})$. On a en particulier $\mathbb{K}[X]/P \simeq \mathbb{K}^d$.

Démonstration :
Soit $\bar{A} \in \mathbb{K}[X]/P$ et $R = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{d-1} X^{d-1}$ le reste de la division euclidienne de A par P.

On a $\bar{A} = \bar{R} = a_0\bar{1} + a_1\bar{X} + \cdots + a_{d-1}\overline{X^{d-1}}$. Ce qui prouve que $\bar{1}, \bar{X}, \cdots, \overline{X^{d-1}}$ engedre $\mathbb{K}[X]/P$. D'autre part, soit $a_0\bar{1} + a_1\bar{X} + \cdots + a_{d-1}\overline{X^{d-1}} = 0$. Alors P divise $a_0 + a_1X + \cdots + a_{d-1}x^{d-1}$. Comme deg$P$=d, alors $a_0 + a_1X + \cdots + a_{d-1}X^{d-1} = 0$. Par consequent, $a_i = 0$ pour tout i. Ainsi $(\bar{1}, \bar{X}, \cdots, \overline{X^{d-1}})$ est une base de $\mathbb{K}[X]/P$.