

FORME QUADRATIQUE

1 Dual d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

1.1 Définition

On appelle forme linéaire (fl) sur E toute application linéaire f de E vers \mathbb{K} , c-à-d, $f(\alpha X + y) = \alpha f(x) + f(y)$, pour tout $(x, y) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Muni de l'addition des applications et des multiplications par des scalaires, l'ensemble de toutes les formes linéaires sur E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} , appelé dual de E noté E^* . Le dual de E^* est appelé bidual de E noté E^{**} .

Exemple de fl: Soit E l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$.

E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} et l'application φ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)dx$ est une fl sur E .

1.2 Proposition

Soit E de dimension finie n et (b_1, \dots, b_n) une base de E . Pour tout i , l'application $b_i^* : E \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\forall x = \sum_{j=1}^n x_j b_j, \quad b_i^*(x) = x_i$$

est une fl sur E .

De plus, b_1^*, \dots, b_n^* forment une base de E^* .

Démonstration:

(a) Soient $x = \sum_{j=1}^n x_j b_j$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j b_j$ des éléments de E , et $\lambda \in \mathbb{K}$. $\lambda x + y = \sum_{j=1}^n (\lambda x_j + y_j) b_j$, on a $b_i^*(\lambda x + y) = \lambda x_i + y_i = \lambda b_i^*(x) + b_i^*(y)$. Ainsi $b_i^*(\lambda x + y) = \lambda b_i^*(x) + b_i^*(y)$, d'où b_i^* est une forme linéaire.

(b) Montrons que (b_1^*, \dots, b_n^*) est base de E^* .

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda_1 b_1^* + \dots + \lambda_n b_n^* = 0$. On a pour tout i , $(\lambda_1 b_1^* + \dots + \lambda_n b_n^*)(b_i) = \lambda_i = 0$. Ainsi b_1^*, \dots, b_n^* est une base de E^* .

Remarque: Par construction pour tout i et pour tout j , $b_i^*(b_j) = \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j} = 1$ et $i = j$ et 0 sinon.

1.3 Corollaire

Si E est de dimension finie, alors $\dim E = \dim E^*$.

1.4 Proposition

La base (b_1^*, \dots, b_n^*) de E^* définie précédemment est appelée base dual de (b_1, \dots, b_n) .

1.5 Définition

Soit E_1 un sev de E . On appelle orthogonale de E_1 (au sens du dual) le sev E_1^\perp de E^* définie par:

$$\forall f \in E^*, (f \in E_1^\perp \Leftrightarrow \forall x \in E_1, f(x) = 0).$$

Autrement dit, $E_1^\perp = \{f \in E^*; f|_{E_1} = 0\}$.

Exemple: Considérons l'espace $E = \mathbb{R}^3$. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E et E_1 un sev de E engendré par $e_1 + e_2$. Soit $f = x_1 e_1^* + x_2 e_2^* + x_3 e_3^* \in E^*$. On a: $f \in E_1^\perp \Leftrightarrow f(e_1 + e_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow f = x_1(e_1^* - e_2^*) + x_3 e_3^*$.

Donc $E_1^\perp = \langle e_1^* - e_2^*, e_3^* \rangle$.

1.6 Proposition

On a:

- (i) $0^\perp = E^*$ et $E^\perp = 0$;
- (ii) Pour tout sev E_1 et E_2 de E ,
 - Si $E_1 \subset E_2$, alors $E_2^\perp \subset E_1^\perp$;
 - $E_1^\perp + E_2^\perp \subset (E_1 \cap E_2)^\perp$, On a l'égalité si E est de dimension finie.
 - $(E_1 + E_2)^\perp = E_1^\perp \cap E_2^\perp$

1.7 Proposition

Si E est de dimension finie n et F un sev de E , alors

$$\dim F^\perp = n - \dim F.$$

Démonstration:

D'après la proposition précédente, cette proposition est vraie si $F = 0$ ou $F = E$. Supposons que F soit propre et $\dim F = p$ ($1 \leq p \leq n$). Soit (a_1, a_2, \dots, a_n) une base de E tel que (a_1, a_2, \dots, a_p) soit la base de F . Soit $(a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$ la base duale de (a_1, a_2, \dots, a_n) . Pour prouver la proposition, il suffit de montrer que $(a_{p+1}^*, \dots, a_n^*)$ est une base de F^\perp . Pour tout $x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ et $\forall i > p$, $a_i^*(x) = x_1 a_i^*(a_1) + \dots + x_n a_i^*(a_n) = x_i = 0$. Ce qui prouve que $\forall j > p$, on a $a_j^* \in F^\perp$. D'autre part, soit $f \in F^\perp$. Comme (a_1^*, \dots, a_n^*) est une base E^* , f peut s'écrire $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j a_j^*$, on a $\forall i \leq p$, $f(a_i) = \alpha_i = 0$. Donc $(a_{p+1}^*, \dots, a_n^*)$ est une base de F^\perp .

Détermination d'une base duale et de l'orthogonal d'un sev

Soit E un ev de dimension n muni de la base (e_1, e_2, \dots, e_n) et v_1, v_2, \dots, v_p p vecteurs de E linéairement indépendants.

On note $[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ la matrice d'ordre $n \times p$ dont la j -ème colonne est formé par les composantes du vecteur v_j dans la base (e_1, e_2, \dots, e_n) . Pour simplifier, on pose $A = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$.

On échelonne la matrice augmentée $(A|I_n)$ sous forme réduite.

- (i) Si $p = n$, on obtient la matrice augmentée $(I_n|A^{-1})$.
Si $(v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$ est une base dual de (v_1, v_2, \dots, v_n) , alors

$$[v_1^* \ v_2^* \ \dots \ v_n^*] = (A^{-1})^t$$

c-a-d, les coefficients de la j -ème colonne de A^{-1} sont les composantes du vecteur v_j^* dans la base dual $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$.

(ii) Si $p < n$, on obtient la matrice échelonnée réduite de la forme $\left(\begin{array}{c|c} I_p & B_1 \\ \hline 0 & B_2 \end{array} \right)$.

Si $F = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ et si on pose $(B_2)^t = [f_1 f_2, \dots, f_{n-p}]$, alors

$$F^\perp = \langle f_1, f_2, \dots, f_{n-p} \rangle.$$

c-à-d, les composants du vecteur f_j , dans la base duale $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ sont les coefficients de la j -ème colonne de $(B_2)^t$.

2 Forme bilinéaire symétrique

Soit E un ev sur \mathbb{R} et $f : E \times E \mapsto \mathbb{R}$ une application.

Pour tout $x \in E$ (resp. $y \in E$), on note f_x (resp. f_y) l'application de E vers \mathbb{R} définie par $f_x(y) = f(x, y)$ (resp. $f_y(x) = f(x, y)$).

2.1 Définition

f est dite une forme bilinéaire sur E si:

- $\forall x \in E$, f_x est une fl sur E ;
- $\forall y \in E$, f_y est une fl sur E .

On dit que f est symétrique si $\forall (x, y) \in E \times E$, $f(x, y) = f(y, x)$.

Notons que si f est symétrique, alors $f_x = f_{x\cdot}$. Dans ce cas, on écrit simplement f_x .

2.2 Définition (Noyau d'une fbs)

Soit f une fbs sur E . On appelle noyau de f le sev $\text{Ker } f = \{x \in E; f_x = 0\} = \{x \in E; \forall y \in E; f(x, y) = 0\}$.

2.3 Définition

Soit E de dimension n , (b_1, \dots, b_n) une base de E et f une fbs sur E . On appelle matrice f relativement à la base (b_1, \dots, b_n) la matrice $A = (a_{ij})$ où $a_{ij} = f(b_i, b_j)$.

Comme f est symétrique, on a $a_{ij} = a_{ji} \forall (i, j)$.

Expression de $f(x, y)$ dans la base $(b_i)_i$,

Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de f relativement à la base (b_1, \dots, b_n) .

Si $x = \sum_i x_i b_i$ et $y = \sum_j y_j b_j$, alors

$$f(x, y) = \sum_i x_i \sum_j f(b_i, b_j) y_j = \sum_{i,j} f(b_i, b_j) x_i y_j.$$

Ainsi

$$f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j.$$

Sous forme matricielle, on a $f(x, y) = X^t A Y$ où $X = (x_1, \dots, x_n)^t$, $Y = (y_1, \dots, y_n)^t$.

2.4 Définition

Le rang de la matrice A est appelé le rang de f :

$$\text{rang}(f) = \dim E - \dim(\text{Ker } f) = \dim E - \dim(\text{Ker } A).$$

2.5 Proposition

Soit (b_i) et (b'_i) deux bases de E , f une fbs sur E , $A = \text{Mat}(f, (b_i))$ et $A' = \text{Mat}(f, (b'_i))$. Si P est la matrice de passage de b_i vers b'_i , alors

$$A' = P^t A P.$$

2.6 Définition

On dit qu'une fbs est non dégénérée, si $\text{Ker } f = 0$. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est dégénérée.

2.7 Proposition

Si E est de dimension finie, alors f est non dégénérée ssi sa matrice est inversible.

2.8 Définition

On dit que les vecteurs x, y sont orthogonaux relativement à f si $f(x, y) = 0$

2.9 Définition

Soit X une partie non vide de E . On appelle orthogonal de X relativement à f le sev de E formé des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de X , noté X^\perp :

$$X^\perp = \{y \in E / \forall x \in X, f(x, y) = 0\}.$$

On note v^\perp l'orthogonal de $\{v\}$ relativement à f .

2.10 Définition

Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E et f une fbs de E . On dit que \mathcal{B} est une base orthogonale relativement à f ou simplement une base f -orthogonale si $f(b_i, b_j) = 0$ pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$.

On dit qu'elle est f -orthonormale si elle est f -orthogonale et si $f(b_i, b_i) = 1$ pour tout i .

3 Forme quadratique

3.1 Définition

On appelle forme quadratique (fq) sur une \mathbb{R} -ev E toute application $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes:

1. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$;
2. L'application $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$\forall (x, y) \in E \times E, f(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

est une fbs sur E .

f est appelé la forme polaire associée à q , et q la fq associée à f ;

$$\forall x \in E, q(x) = f(x, x).$$

Si $(a_{ij}) = \text{Mat}(f, (b_i))$, dans la base (b_i) , $q(x)$ a pour expression:

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

NB: Si f est une forme polaire de q , $f(x, y)$ se déduit de $q(x)$ en remplaçant $a_i x_i^2$ par $a_i x_i y_i$ pour tout i , et $2a_{ij} x_i x_j$ par $a_{ij} x_i y_j + a_{ji} x_j y_i$ pour tout $i < j$.

3.2 Définition

Une fq positive si $q(x) \geq 0$ pour tout x .

3.3 Proposition

Si q est une fq positive sur E de forme polaire f , alors

$$\forall (x, y) \in E^2, (f(x, y))^2 \leq q(x)q(y).$$

4 Réduction(ou décomposition en carrée) d'une forme quadratique

Soit E un $\mathbb{R}ev$ de dimension n , (e_1, \dots, e_n) une base de E . Soit q une fq non nulle. Dans cette base q est définie par

$$\forall x = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_i, q(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i^2 + 2 \sum_{1 < i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j;$$

4.1 Théorème

Il existe des fl l_1, \dots, l_n linéairement indépendants telle que

$$q(x) = \alpha_1 l_1^2(x) + \dots + \alpha_r l_r^2(x).$$

où $1 \leq r \leq n$ et tous les α_i sont tous non nul.

4.2 Définition

Réduire une fq q , c'est transformer $q(x)$ sous la forme

$$q(x) = \alpha_1 l_1^2(x) + \dots + \alpha_r l_r^2(x).$$

appelé forme réduite de q , les α_i étant tous non nul et les l_i sont linéairement indépendants.

4.3 Proposition

Soit $q(x) = \alpha_1 l_1^2(x) + \dots + \alpha_r l_r^2(x)$ une forme réduite de q . Alors

$$\text{Ker } f = \{x \in E; l_1(x) = \dots = l_r(x) = 0\}$$

4.4 Proposition

Soit $q(x) = \alpha_1 l_1^2(x) + \dots + \alpha_r l_p^2(x)$. une forme réduite de q . Alors $\text{rang}(q) = p$.

4.5 Proposition

Soit f une fbs non nulle sur E de dimension finie. Alors E admet une base f -orthogonale.

4.6 Proposition

Soit f une fbs non nul sur E de dimension n , de fq q et de rang p . Alors il existe une base f -orthogonale et unique couple d'entier (r, s) tels que $r + s = p$ et dans cette base, $q(x) = \sum_{i=1}^r x_i^2 - \sum_{i=r+1}^p x_i^2$.

(r, s) est appelé signature de f ou de q .

4.7 Proposition

Si f est une fbs non dégénérée et positive, alors E admet une base f -orthonormale.

4.8 Proposition

E admet une base f -orthonormale ssi f a pour signature $(n, 0)$, n étant la dimension de E .

4.9 Recherche d'une base f -orthogonale et d'une base de $\text{Ker } f$

Soit f une fbs sur E de dimension n , (e_i) une base de E et q la fq dont la forme réduite est $q(x) = \alpha_1 l_1^2(x) + \dots + \alpha_p l_p^2(x)$.

On résout le système d'équation linéaires $(S) = \begin{cases} l_1(x) = t_1 \\ \vdots \\ l_p(x) = t_p \end{cases}$

où t_1, \dots, t_p sont des variables.

Sous forme matricielle, on a $AX = T$ où A est une matrice d'ordre $p \times n$, $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^t$ et $(t_1 \ t_2 \ \dots \ t_p)^t$ avec $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

On résout (S) par la méthode de pivot de Gauss.

- On échelonne la matrice augmentée $(A|I_p)$ sous forme réduite. On obtient $(B|Q)$.
- Comme (S) devient $BX = QT$, alors on peut exprimer p variables x_{i_1}, \dots, x_{i_p} en fonction de $n - p$ autres variables $x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-p}}$ et des variables t_1, t_2, \dots, t_p . Alors (S) a pour solution

$$X = x_{j_1} b_1 + x_{j_2} b_2 + \dots + x_{j_{n-p}} b_{n-p} + t_1 b_{n-p+1} + \dots + t_p b_n.$$

(b_1, b_2, \dots, b_n) est une base f -orthogonale et $(b_1, b_2, \dots, b_{n-p})$ est une base de $\text{Ker } f$.

Autres méthode de Recherche d'une base f -orthogonale et d'une base de $\text{Ker } f$

Posons $A = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_p]$

On échelonne la matrice augmentée $(A|I_n)$ sous forme réduite.

On obtient une matrice échelonnée réduite de la forme $\left(\begin{array}{c|c} I_p & B_1 \\ \hline 0 & B_2 \end{array} \right)$.

En posant $B_1^t = [b_1 \cdots b_p]$ et $B_2^t = [b_1 \cdots b_n]$, alors (b_1, b_2, \cdots, b_n) est une base f -orthogonale de E et (b_{p+1}, \cdots, b_n) est une base de $\text{Ker } f$.