

# EXERCICES D'ALGEBRE 1

## 1 Théorie Naïve des ensemble

### 1.1 Exercice

1. Considérons les ensembles suivants :  $A = \{1, 13, 25\}$ ;  $B = \{\{1, 13\}, 25\}$ ;  $C = \{\{1, 13, 25\}\}$ ;  $D = \{\{1, 13, 25\}\}$ ;  $E = \{25, 1, 13\}$ ;  $F = \{\{1, 13\}, \{25\}\}$ ;  $G = \{\{25\}, \{1, 13\}, 25\}$ ;  $H = \{\{1\}, \{13\}, 25\}$ .
  - (a) Quelles sont les relations (d'égalité ou d'inclusion) qui existent entre ces ensembles ?
  - (b) Déterminer  $A \cap B$ ;  $G \cup H$ ;  $E \setminus G$ ;  $C_D^A$
2. Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois parties d'un ensemble  $E$ :
  - (a) Montrer que :
$$(A \cap B) \cup B^c = A \cup B^c (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cap C) A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$
  - (b) Simplifier :  $(A \cup B)^c \cap (C \cup A^c)^c$ ;  $(A \cap B)^c \cup (C \cap A^c)^c$ .
3. Démontrer la Proposition 1.3.

### 1.2 Exercice

Construisez des applications :

- Injective mais pas surjective ;
- Surjective mais pas injective ;
- Bijective ;
- Ni injective ni surjective.

### 1.3 Exercice

$E = [0, 1]$ ;  $F = [-1, 1]$ ;  $G = [0, 2]$ . Soient  $f$  et  $g$  deux applications définies respectivement par :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \mapsto & G \\ x & \mapsto & 2 - x \end{array}; \quad \begin{array}{rcl} g : F & \mapsto & G \\ x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array}.$$

- (a) Déterminer  $f(\left\{\frac{1}{2}\right\})$ ,  $f^{-1}(\{0\})$ ,  $g([-1, 1])$ ,  $g^{-1}([0, 2])$
- (b) Les applications  $f$  et  $g$  sont-elles bijectives ? Justifier votre réponse.

## 1.4 Exercice

1. Montrer que  $\mathbb{Z}$  est dénombrable.
2. Montrer que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  est dénombrable. En déduire que le produit d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
3. Montrer que  $\mathbb{Q}$  est dénombrable.
4. Soit  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille dénombrable de sous ensembles dénombrables d'un ensemble  $E$ . Montrer que la réunion  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  est dénombrable.
5. Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients entiers est dénombrable. En déduire que l'ensemble des sous-ensembles finis de  $\mathbb{N}$  est dénombrable.
6. On dit qu'un nombre (réel ou complexe) est algébrique s'il est une racine d'un polynôme à coefficients entiers. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
7. Existe-t-il une bijection entre  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  et  $\mathbb{Q} \cap ]0, 1[$  ?

## 1.5 Exercice

1. En s'inspirant de la preuve du théorème 1.19, expliciter une bijection entre les intervalles  $[a, b[$  et  $]a, b[$ .
2. Montrer que l'ensemble  $\mathbb{N}^\mathbb{N}$  des suites d'entiers est équivalent à  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que l'ensemble des parties de  $\mathbb{R}$  n'est ni dénombrable, ni équivalent à  $\mathbb{R}$ .
4. Montrer que l'ensemble  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  n'est ni dénombrable, ni équivalent à  $\mathbb{R}$ .

## 1.6 Exercice

1. Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalences :
  - (i) Le parallélisme sur l'ensemble des droites de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$ ;
  - (ii) Sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$  si et seulement si  $x + y = x' + y'$ .
2. Montrer que les relations suivantes sont des relations d'ordres partiels :
  - (i) L'inclusion sur l'ensemble des parties  $P(E)$  d'un ensemble  $E$  ;
  - (ii) La divisibilité sur l'ensemble des entiers  $\mathbb{Z}$ ;
  - (iii) Sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x, y)\mathcal{T}(x', y')$  si et seulement si  $|x' - x| \leq |y' - y|$ .
3. Soit  $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Considérons la relation binaire  $\mathbb{R}$  sur  $E$  définie comme suit : Pour tout  $a$  et  $b$  dans  $E$ ,  $a\mathcal{R}b$  si et seulement si  $a$  et  $b$  appartiennent à une droite passant par  $(0, 0)$ .
  - (i) Soient  $(x, y)$  et  $(x', y')$  deux éléments de  $E$ . Montrer que  $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$  si et seulement si il existe un nombre réel non nul  $\lambda$  tel que  $(x, y) = \lambda(x', y')$ .
  - (ii) Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
  - (iii) Notons par  $[x, y]$  la classe d'équivalence d'un élément  $(x, y)$  de  $E$ . Vérifier qu'on a  $[x, 1] = [y, 1]$  si et seulement si  $x = y$ .
  - (iv) Montrer qu'on a :  $E/\mathcal{R} = \{[x, 1] : x \in \mathbb{R}\} \cup \{[1, 0]\}$

- (**Important.**) Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  dans un ensemble  $F$ . On sait que la relation  $\mathcal{R}$  définie pour tout  $a$  et  $b$  dans  $E$ , par :

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

est une relation d'équivalence.

- (i) Montrer que l'application  $\bar{f}$  de  $E/\mathcal{R}$  dans  $F$  définie par  $\bar{f}(\dot{a}) = f(a)$  est bien définie et est injective.
- (ii) En déduire qu'on a  $f = \bar{f} \circ g$  où l'application  $g$  est la projection canonique de  $E$  dans  $E/\mathbb{R}$ .
- (iii) Montrer que si  $f$  est surjective, alors il existe une bijection entre  $E/\mathbb{R}$  et  $F$ .

## 2 Equation linéaire et matrice

### 2.1 Exercice

1. (a) Déterminez si le vecteur  $(1, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$  est une combinaison linéaire de  $(0, 1, 0)$ ,  $(1, 4, 1)$  et  $(1, 0, 1)$ .  
 (b) Déterminez si le vecteur  $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$  est une combinaison linéaire de  $(0, 1)$ ,  $(1, 4)$  et  $(1, 0)$ . Dans le cas où la réponse est affirmative, est-ce que la représentation en tant que combinaison linéaire est unique ?
2. Décrivez le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  formé par toutes les combinaisons linéaires des vecteurs  $u = (1, 1, 0)$  et  $v = (0, 1, 1)$ . Trouvez un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de  $u$  et  $v$ .
3. Soient  $u = (\pi, 0)$  et  $v = (0, 2)$ . Décrivez les sous ensembles de  $\mathbb{R}^2$  suivants :
  - (a) .  $\{cu \mid c \in \mathbb{N}\}$ .
  - (b) .  $\{cu \mid c \geq 0\}$ .
  - (c) .  $\{cu + dv \mid c \in \mathbb{N} \text{ et } d \in \mathbb{R}\}$ .
4. Est-ce que le vecteur  $w = (1, 0)$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $u = (2, -1)$  et  $v = (-1, 2)$  ?
5. Si  $u + v = (12, 4, 1)$  et  $u - 2v = (1, 0, 2)$ , calculez  $u$  et  $v$ .
6. Montrez que pour tout vecteur  $u$ ,  $0u = 0$ .
7. Pour deux vecteurs  $u$  et  $v \in \mathbb{R}^2$ , quand est-ce qu'on a l'égalité  $|u \cdot v| = \|u\| \|v\|$  ? l'égalité  $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$  ?
8. Montrez que pour  $z, w \in \mathbb{C}^n$  et  $k \in \mathbb{K}$  on a :
  - (a)  $z \cdot w = w \cdot z$ .
  - (b)  $(kz) \cdot w = z \cdot (kw)$ .
  - (c)  $z \cdot (kw) = k(z \cdot w)$ . (Comparer avec le cas réel).
9. (a) Soient  $u = (a, b)$  et  $v = (c, d)$  deux vecteurs du plan. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que tout élément de  $\mathbb{R}^2$  soit une combinaison linéaire de  $u$  et  $v$ .  
 (b) Trouver quatre vecteurs de  $\mathbb{R}^4$  tels que tout vecteur de  $\mathbb{R}^4$  soit une combinaison linéaire de ces vecteurs.

10. Si  $\|u\| = 5$  et  $\|v\| = 3$ , quelles sont la plus petite et la plus grande valeurs de  $\|u - v\|$ ? Même question pour  $u \cdot v$ .
11. Est-il possible d'avoir trois vecteurs du plan dont les produits scalaires (deux à deux) sont tous strictement négatifs ? Quand est-il dans  $\mathbb{R}^3$  ?
12. Soient  $x, y$  et  $z$  trois nombres réels tels que  $x + y + z = 0$ . Trouver l'angle que les vecteurs  $u = (x, y, z)$  et  $v = (z, x, y)$  font entre eux.

## 2.2 Exercice

Dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire,  $\mathbb{K}$  désignera le corps des nombres réels  $\mathbb{R}$  ou le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$ .

1. Ecrire les deux problèmes suivants sous la forme  $Ax = b$  où  $A$  est une matrice  $2 \times 2$ , puis donner une solution à chaque problème :
  - (a) Alice est deux fois plus jeune que Bob et la somme de leur age est 33 ;
  - (b) Les deux points  $(2, 5)$  et  $(3, 7)$  appartiennent à une droite d'équation  $y = mx + c$ . Trouver  $m$  et  $c$ .
2. Pour chacune des matrices suivantes, trouver le scalaire  $a$  pour que la matrice soit singulière (non inversible) :
 
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ o & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a & a \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$
3. Soit  $A$  une matrice dans  $M_3(\mathbb{K})$  telle qu'il existe un vecteur colonne non nul  $x$  dans  $\mathbb{K}^3$  vérifiant  $Ax = 0$ .
  - (a) Montrer que les vecteurs colonnes de  $A$  forment un plan  $P$  dans  $\mathbb{K}^3$  .
  - (b) Montrer que  $P$  et  $x$  sont perpendiculaires.
4. Soit un système d'équations linéaires dans  $\mathbb{K}^3$ .
  - (a) Montrer que ce système ne peut pas avoir exactement deux solutions.
  - (b) Si  $(x, y, z)$  et  $(u, v, w)$  sont deux solutions du système, pouvez-vous trouver un autre ?
5. Trouver les matrices  $E$  et  $L$  telles que l'on ait :

$$EP_3 = P_2, LP_3 = I_4$$

où

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. considérons les matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 1 & 0 \\ 0 & e & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons que :

$$L = E_1 E_2 E_3 = E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 1 & 0 \\ c & e & F & 1 \end{pmatrix}$$

7. Calculons les inverses des trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer  $4K^{-1}$  et  $7K^{-1}$ .

8. Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de même dimension.

- (a) Montrer que  $A(I + BA) = (I + AB)A$ .
- (b) En déduire que  $I + BA$  est inversible si et seulement si  $I + AB$  l'est aussi.

9. Un sous ensemble de  $M_n(\mathbb{K})$  est appelé un groupe de matrices si pour toutes  $A$  et  $B$  deux matrices de l'ensemble, on a : le produit  $AB$  et l'inverse de chaque élément sont dans l'ensemble.

- (a) Montrer que si  $G$  est un groupe de matrices, la matrice identité  $I_n$  est automatiquement dans  $G$ ;
- (b) Montrer que : l'ensemble des matrices triangulaires inférieures telles que  $a_{ii} = 1$ ; l'ensembles des matrices symétriques ; l'ensemble des matrices de permutations sont des groupes de matrices.
- (c) Donner plus de groupes de matrices.

10. Ecrire une matrice dans  $M_3(\mathbb{K})$  de votre choix.

- (a) Trouver deux matrices  $B$  et  $C$  telles que :  $A = B + C$  et  $B$  et  $C$  soient respectivement symétrique et anti-symétrique.
- (b) Ré-écrire  $B$  et  $C$  en fonction de  $A$  et  $A^T$ .

11. Factoriser les matrices suivantes (de la forme  $A = LU$  ou  $PA = LU$ ) :

### 3 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

#### 3.1 Exercice

1. Donnez un exemple montrant que la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas forcément un espace vectoriel.
2. Soit  $V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  l'ensemble de toutes les suites  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  d'éléments de  $\mathbb{K}$  muni de l'addition par composante et de la multiplication par un scalaire par composante. Vérifiez que  $V$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Notons  $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$  le sous-ensemble des suites à support fini, i.e., les suites dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Montrez que  $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

3. Est-ce que le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  suivant est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ?

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$$

. Expliquez.

4. Décidez, dans chacun des cas suivant, si  $V = \mathbb{R}^2$  muni des lois d'additions et de multiplications par un scalaire données sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  ou non (justifiez en cas de réponse négative) :

- i)  $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$  et  $k(a, b) = (ka, b)$ .
- ii)  $(a, b) + (c, d) = (a + b)$  et  $k(a, b) = (ka, kb)$ .
- iii)  $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$  et  $k(a, b) = (k^2a, k^2b)$ .

5. Considérons le système d'équations linéaires en les inconnus  $x_1, \dots, x_n$  et à coefficients dans  $\mathbb{R}$  suivant :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Un tel système est dit homogène (toutes les monômes ont le même degré, ici 1). Montrez que l'ensemble de toutes les solutions de ce système forme un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Si le système linéaire n'est pas homogène, est-ce que l'ensemble des solutions forme toujours un espace vectoriel ? Si oui, démontrez, si non donnez un contre-exemple.

- 6. Soit  $V = F(E, \mathbb{K})$  comme dans Exemples 3.1.10 avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Montrez que le sous ensemble  $W$  de  $F(E, \mathbb{K})$  des fonctions bornées dans  $V$  est un sous-espace vectoriel. On rappelle qu'une fonction  $f$  à valeur réelle est bornée s'il existe un nombre réel  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $|fx| \leq M$  pour tout  $x \in E$ .
- 7. Donnez un système générateur de  $\mathbb{C}^2$  en tant que  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, puis en tant que  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- 8. Soit  $V = \mathbb{R}^4$  en tant que  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Déterminez si  $v = (3, 9, -4, -2)$  appartient au sous-espace de  $V$  engendré par  $u_1 = (1, -2, 0, 3)$ ,  $u_2 = (2, 3, 0, -1)$  et  $u_3 = (2, -1, 2, 1)$ .
- 9. Décrivez les espaces colonnes des matrices suivantes :

a)  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

c)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

- 10. a) Décrivez un sous-espace de  $M_2(\mathbb{R})$  contenant  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  mais pas  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- b) Si un sous-espace de  $M_2(\mathbb{R})$  contient  $A$  et  $B$ , est-ce que ce sous-espace doit contenir  $I_2$  ?
- c) Décrivez un sous-espace de  $M_2(\mathbb{R})$  ne contenant aucune matrice diagonale non-nulle. Une matrice carée est dite diagonale si tous ses coefficients qui ne sont pas sur la diagonale sont nuls.

11. Vrai ou faux, justifiez votre réponse :

- a) L'ensemble des matrices symétriques de  $M_n(\mathbb{K})$  forme un sous-espace vectoriel.
- b) L'ensemble des matrices antisymétriques de  $M_n(\mathbb{K})$  forme un sous-espace vectoriel.
- c) L'ensemble des matrices de  $M_n(\mathbb{K})$  qui ne sont pas symétriques forme un sous-espace vectoriel.

12. Vrai ou faux, justifiez votre réponse :

- a) Les éléments  $b$  qui ne sont pas dans  $C(A)$  (pour une matrice  $A$ ) forme un sous-espace.
- b) Si  $C(A) = 0$ , alors  $A$  est la matrice nulle.
- c) Soit  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , alors  $C(2A) = C(A)$ .
- d) Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , alors  $C(A - I_n) = C(A)$

## 3.2 Exercice

1. Considérons  $\mathbb{R}^4$  en tant que  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Montrez que les vecteurs suivants sont indépendants :  $(6, 2, 3, 4), (0, 5, -3, 1)$  et  $(0, 0, 7, -2)$ .
2. Montrez que deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si l'un d'entre eux est un multiple de l'autre.
3. Donnez une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V = \{(a, a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ .
4. Soit le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $V = \mathbb{Q}^3$  et  $W \subseteq V$  le sous-espace engendré par  $E = \{(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 5, 7)\}$ . Montrez que  $E$  n'est pas une base de  $V$  mais que  $\{(1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$  en est une.
5. Montrez que l'ensemble suivant est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel :  $V = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} | \exists S \subseteq \mathbb{N} \text{ fini, pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus S, f(n) = 0\}$ . Trouvez une base de  $V$ .

## 4 Théorie des groupes et homomorphisme des groupes

### 4.1 Exercice

1. Pour chacune des opérations binaires sur  $Z$  suivantes laquelle est associative ? laquelle est commutative ? laquelle admet un identité ?
  - i)  $(x, y) \mapsto x - y$ ;
  - ii)  $(x, y) \mapsto xy$ ;
  - iii)  $x * y := xy - x - y + 2$ .
2. Considérons le rectangle  $R$  défini par  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq n; |y| \leq m$  où  $n$  et  $m$  sont des entiers naturels non nuls distincts. Montrer que les quatre symétries de  $R$  suivantes forment un groupe avec la loi de composition des applications :
  - a) L'identité  $e : (x, y) \mapsto (x, y)$ ;
  - b) La réflexion  $r_1 : (x, y) \mapsto (x, -y)$ ;
  - c) La réflexion  $r_2 : (x, y) \mapsto (-x, y)$ ;
  - d) La rotation d'angle  $\pi$  et de centre  $(0, 0)r_3 : (x, y) \mapsto (-x, -y)$ . Ecrire le table de Cayley de ce groupe. Le groupe est-il abélien ?

3. Pour chacune des structures suivantes, déterminer si c'est un groupe ou pas :

- i)  $(\mathbb{Z}, -)$  où l'opération binaire  $-$  désigne la soustraction usuelle sur les nombres ;
- ii)  $(\mathbb{R}, \star)$  où l'opération binaire  $\star$  est définie par :  $x \star y := x + y - 1$ ;
- iii)  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,  $\times$  où  $n$  est un nombre entier naturel non nul ;
- iv)  $(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \times)$  où  $\times$  désigne la multiplication de nombres complexes.

4. Compléter les tables de Cayley des groupes suivants :

$\star$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$		$d$		
$b$	$a$			
$c$				
$d$			$b$	

5. Montrer que les sous-ensembles suivants ne sont pas de sous-groupes de  $(\mathbb{Z}, +)$  : L'ensemble des nombres entiers impairs ; L'ensemble des entiers positifs ; L'ensemble  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$  ; L'ensemble vide.

6. Déterminer les ordres des groupes suivants :  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ ;  $(\mathbb{Z}, +)$ ;  $S_n$ ;  $GL_2(\mathbb{R})$ .

7. Déterminer les ordres des éléments suivants :

- i)  $2 \in (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +)$ ;
- ii)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$
- iii) L'identité dans un groupe ;
- iv)  $\pi \in (\mathbb{R}, +)$ ;

8. Soient  $(G, \star)$  un groupe fini d'identité  $e$  et  $g \in G$ . Montrer qu'il existe deux entiers naturels non nuls distincts  $i$  et  $j$  tels que  $a_i = a_j$ . En déduire qu'il existe un entier naturel non nul  $n$  tel que  $a_n = e$ .

9. Soit  $(G, \star)$  un groupe d'ordre pair. Montrer qu'il existe un élément  $a$  de  $G$  tel que  $a_2 = e$ .

10. Déterminer tout les sous-groupes des groupes suivants :  $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$  et  $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$ .

11. Montrer que les sous-groupes de  $(\mathbb{Z}, +)$  sont de la forme  $n\mathbb{Z}$  où  $n$  est un entier naturel.

12. Soient  $G$  un groupe fini et  $g$  un élément de  $G$ . Montrer que  $|g|$  divise  $|G|$ .

## 4.2 Exercice

1. Pour chacune des applications suivantes, déterminer si c'est un homomorphisme de groupes ou pas :

- i)  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ ,  $a \mapsto \log|a|$ ;
- ii)  $(\mathbb{C}, +) \rightarrow (R, +)$ ,  $x \mapsto |x|$ ;
- iii)  $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ ,  $t \mapsto 5t$ ;
- iv)  $(\mathbb{R}^2, +) \rightarrow (R, +)$ ,  $(x, y) \mapsto xy$ ;
- v)  $(\mathbb{R}^2, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ ,  $(u, v) \mapsto u - v$ .

2. Soient  $(G_1, \star_1)$  et  $(G_2, \star_2)$  deux groupes. Montrer que  $G_1 \times G_2 \simeq G_2 \times G_1$ .
3. Considérons les groupes  $G_1 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$  et  $G_2 = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ . Montrer que  $G_1 \not\simeq G_2$ .
4. Considérons l'homomorphisme de groupes  $f : (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$   $n \mapsto i^n$ , où  $i$  est un élément de  $\mathbb{C}$  tel que  $i^2 = -1$ . Déterminez  $Im(f)$  et  $Ker(f)$  ainsi que  $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/Ker(f)$ . Puis écrire les tables de Cayley des groupes  $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/Ker(f)$  et  $Im(f)$ . Vérifier qu'ils sont bien similaires.
5. Pour chacune des homomorphismes suivantes, déterminer son image et son noyau. Puis écrire le résultat qu'on obtient du premier théorème d'isomorphisme :
  - i)  $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ ,  $m \mapsto 2m$ ;
  - ii)  $(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ ,  $x \mapsto e^{ix}$ ;
  - iii)  $det : (GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times))$ ;
  - iv)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ;
6. Soit  $G$  un groupe abélien fini tel que pour tout élément  $x$  de  $G$ , on a  $x = e$  ou  $x_2 = e$  où  $e$  est l'identité de  $G$ . Montrer que  $|G| = 2n$  où  $n$  est un entier naturel.
7. Soient  $G$  un groupe et  $H$  un sous groupe d'indice 2 de  $G$ . Montrer que  $H$  est un sous groupe normal de  $G$ .

### 4.3 Exercice

1. Pour chacune des permutations suivantes, écrire-la comme composée des cycles:

- i)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ;
- ii)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ ;
- iii)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ .

2. Pour chacune des permutations suivantes, écrire-la en matrice-notation :

- i)  $(1 \ 2 \ 3)(4 \ 6 \ 8)$ ;
- ii)  $(1 \ 6)(4 \ 2)(5 \ 3)$ ;
- iii)  $(1 \ 5 \ 3)$ ;
- iv)  $(1 \ 9 \ 3)(2 \ 6)(7 \ 8)$ ;
- v)  $(2 \ 4)(3 \ 5 \ 7)$ .

3. Pour chacune des cas suivants, calculer  $\sigma\tau$  et  $\tau\sigma$  :

- i) Dans  $S_4$ ,  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\tau = (1 \ 2)(3 \ 4)$ ;
- ii) Dans  $S_5$ ,  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ;
- iii) Dans  $S_6$ ,  $\sigma = (1 \ 2)(5 \ 6)$ ,  $\tau = (1 \ 3 \ 4 \ 6 \ 2)$ . Ecrire les résultats en utilisant les deux notations.

4. Pour chacune des permutations suivantes, déterminer si elle est paire ou impaire :
- i)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ;
  - ii)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ;
  - iii)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .
5. i) Respectivement dans  $S_3$  et  $S_4$ , combien de transpositions a t-on ? Quand est-il des 3-cycles ? des 4-cycles (dans  $S_4$ ) ?
- ii) Soit  $H$  l'ensemble des éléments qui ne sont pas des transpositions, ni des 3-cycles, nides 4-cycles dans  $S_4$ . Le sous-ensemble  $H$  est-il un sous groupe ? Si oui, déterminer sonordre et trouver un groupe usuel (qu'on connaît très bien) qui est isomorphe à  $H$ .
6. Dans chacun des groupes suivants, déterminer le nombre d'éléments d'ordre 2 et le nombre d'éléments d'ordre 3 :  $S_3$ ,  $A_4$ ,  $D_5$  et  $D_6$ .
7. Pour tout  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , déterminer le nombre d'éléments d'ordre  $k$  dans  $A_5$ .
8. Pour chacun des cas suivants, déterminer si le sous-ensemble est un sous-groupe de  $S_4$  ou pas. Dans le cas où le sous-ensemble est un groupe, déterminer si c'est un groupe normal :
- i)  $\{id, (1 3 4), (1 4 3)\}$  ;
  - ii)  $\{id, (1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 4)(2 3)\}$  ;
  - iii)  $\{id, (1 2 3 4), (1 4 3 2), (1 3)(2 4)\}$  ;
  - iv)  $\{id, (1 2 3), (1 3 2), (2 3 4), (2 4 3)\}$ .
9. Considérons l'application  $f : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow S_4$ ,  $(m, n) \mapsto \sigma^n \tau^m$  où  $\sigma = (1 2)(3 4)$  et  $\tau = (1 3)(2 4)$ . Montrer que  $f$  est un homomorphisme de groupes. Expliciter le résultat u premier théorème d'isomorphisme.
10. Notons respectivement par  $\sigma$  et  $\tau$  une rotation et une réflexion dans le groupe diédral  $D_n$ . Montrer que  $\tau^{-1} = \rho \tau \rho$ .
11. Considérons un homomorphisme  $f : S_n \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  où  $n \geq 3$ . Montrer que  $f$  est trivial,i.e, pour tout  $\sigma \in S_3$ , on a  $f(\sigma) = 0$ .
12. i) Montrer que  $S_3 \simeq D_3$ .
- ii) Expliciter tout les éléments de  $D_3$  en forme de matrices, en utilisant le fait qu'il est isomorphe à un sous groupe de  $O_2(\mathbb{R})$ .
13. i) Soit  $(G, \star)$  un groupe d'ordre un nombre premier  $p$ . Montrer que  $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , i.e, à isomorphisme près, il n'existe qu'un seul groupe d'ordre  $p$  où  $p$  un nombre premier.
- ii) Pour tout  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  , trouver les classes d'isomorphismes des groupes d'ordre  $n$ .