

# RÉDUCTION DES MATRICES

February 19, 2026

## 1 Rappels et notations

Dans toute la suite,  $\mathbb{K}$  désigne un corps commutatif.

### 1.1 Définition

Une matrice  $m \times n$  est un tableau  $M$  formé de  $m$  lignes et  $n$  colonnes formées par les éléments de  $\mathbb{K}$ .

Si on note  $a_{i,j}$  le coefficient de la  $i$ -ème ligne et  $j$ -ème colonne de la matrice  $M$ , on note  $M = (a_{i,j})$  pour  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n$ . On désigne par  $M_{m,n}(\mathbb{K})$  la matrice  $m \times n$  à coefficient dans  $\mathbb{K}$ . Muni de l'addition et de la multiplication externe,  $M_{m,n}(\mathbb{K})$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

### 1.2 Définition (Produit de deux matrices)

Soit  $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$  et  $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ . Le produit de  $AB$  n'est définie que si  $n = p$  et dans ce cas  $AB$  est la matrice  $c_{ij} \in M_{m,q}(\mathbb{K})$  définie par: pour tout  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq q$

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j} = (a_{i,1} \ a_{i,2} \ \cdots \ a_{i,n}) \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}$$

Si  $m = n$ , on note  $M_n(\mathbb{K})$  au lieu de  $M_{n,n}(\mathbb{K})$ .

### 1.3 Définition

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est :

- diagonale si  $a_{i,j} = 0$  si  $i \neq j$ ;
- triangulaire supérieur (resp. triangulaire inférieur) si tous les coefficients en dessous (resp. au dessus) du diagonal sont nuls, c-à-d,  $a_{i,j} = 0$  si  $i > j$  (resp.  $i < j$ );
- triangulaire si elle est triangulaire supérieur ou inférieur.

### 1.4 Définition

Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est égale au produit de ses éléments diagonaux.

## 1.5 Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ ev de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  une base de  $E$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Si  $u(b_j) = \sum_{k=1}^n a_{k,j} b_k$  ( $1 \leq j \leq n$ ), la matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  est appelée la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  :  $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$ .

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$  et  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  la base canonique de  $M_{n,1}(\mathbb{K})$ , c-à-d,

$$e_1 = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^t, e_2 = (0 \ 1 \ \dots \ 0)^t, \dots, e_n = (0 \ 0 \ \dots \ 1)^t \text{ où } (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)^t = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Si on  $A_j$  le produit  $Ae_j$ , alors  $A_j$  est la  $j$ -ème vecteurs colonnes de  $A$  et on note  $A = [A_1 A_2 \dots A_n]$

## 2 Résolution de système d'équation linéaire par la méthode de pivot de Gauss

Commençons par un exemple. Résolvons le système d'équation suivant:

$$(S_1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \ (E_1) \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \ (E_2) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \ (E_2) \end{cases}$$

Sous forme matricielle, on a  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Utilisons la méthode par élimination. Commençons par éliminer  $x_3$  par exemple. Gardons l'équation  $(E_1)$ , remplaçons  $(E_2)$  par  $(E_1) + (E_2)$  et  $(E_3)$  par  $2(E_1) + (E_3)$ . On a le système équivalent suivant:

$$(S_2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \ (E_4) \\ 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 5x_4 = 9 \ (E_5) \\ 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 5x_4 = 9 \ (E_6) \end{cases}$$

Sous forme matricielle, on a  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$

Puis éliminons  $x_2$ . Gardons l'équation  $(E_5)$ , remplaçons  $(E_4)$  par  $3(E_4) - (E_5)$  et  $(E_6)$  par  $(E_6) - (E_5)$ . On a le système équivalent suivant :

$$(S_3) \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6 \ (E_7) \\ 5x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 5x_4 = 9 \ (E_8) \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \ (E_9) \end{cases}$$

Sous forme matricielle, on a  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a donc exprimer  $x_2$  et  $x_3$  en fonction de  $x_1$  et  $x_4$ . On a :

$$\begin{cases} 3x_2 = 9 - 5x_1 - 5x_4 \\ 3x_3 = 6 - x_1 - 4x_4 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} x_2 = 3 - 5/3x_1 - 5/3x_4 \\ x_3 = 2 - 1/3x_1 - 4/3x_4 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est appelée une matrice écholonnée réduite de  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

## 2.1 Définition

Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice. On dit qu'un certain coefficient  $a_{i_0,j_0}$  est un pivot de  $A$  si tous les coefficients se trouvant sur la  $j_0$ -ème colonne sont nuls sauf  $a_{i_0,j_0}$  qui est non nul. De plus s'il y a un coefficient non nul se trouvant sur la  $i_0$ -ème ligne possédant la même propriété que  $a_{i_0,j_0}$ , ce coefficient ne peut plus être considéré comme pivot de  $A$ .

## 2.2 Définition

Une matrice  $A$  est dite une matrice échelonnée réduite si chaque ligne non nulle de  $A$  contient un pivot.

**Remarque:**

- Chaque ligne non nulle d'une matrice échelonnée réduite contient un pivot et un seul.
- Chaque colonne d'une matrice échelonnée réduite contient au plus un pivot.
- Le rang d'une matrice échelonnée réduite est le nombre de pivot de cette matrice.

## 2.3 Définition

Échelonner une matrice  $A = (a_{i,j})$  sous forme réduite, c'est la transformer en une matrice échelonnée réduite qui s'obtient par combinaison linéaire (et si nécessaire par permutation) des lignes de  $A$ .

## Méthode pour échelonner une matrice sous forme réduite

Soit  $A = (a_{i,j}^0)$  une matrice.

1. On choisit un coefficient non nul  $a_{i_0,j_0}^0$  de  $A$ ;
2. On transforme  $A$  en une matrice  $A_1 = (a_{i,j}^1)$  comme suit:

$$a_{i_0,j_0}^1 = a_{i_0,j_0}^0 \quad a_{i,j}^1 = a_{i_0,j_0}^0 a_{i_0,j}^0 - a_{i,j_0}^0 a_{i_0,j}^0 \quad (i,j) \neq (i_0,j_0)$$

$a_{i,j}^1$  est un déterminant issu de  $a_{i_0,j_0}^0$

3. Si  $A_1$  contient une ligne non nulle autre que la  $i_0$ -ème ligne, on applique les étapes (1) et (2) à  $A_1$  et on obtient une matrice  $A_2 = (a_{i,j}^2)$ .  
On continue jusqu'à ce qu'on obtienne une matrice échelonnée réduite.

**NB:** À la fin, on peut permuter les lignes pour que le premier pivot le plus à gauche se trouve sur la première ligne, le deuxième pivot le plus à gauche à la deuxième ligne et ainsi de suite. Si c'est nécessaire on rend 1 tous les pivots.

## Application: Recherche de l'inverse d'une matrice inversible

Soit  $A$  une matrice inversible. On échelonne sous forme réduite la matrice  $A|I$  dite matrice augmentée au lieu de  $A$  seulement, où  $I$  est une matrice unité de même ordre que  $A$  (les pivots doivent être dans  $A$ ). En tenant compte de la remarque précédente, on obtient une matrice  $I|B$ . Alors  $B = A^{-1}$ .

**Exemple:** Cherchons la matrice inverse de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\text{On a } A|I &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) \\
&\equiv \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & -3 & 1 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & -3 & 1 \end{array} \right) \\
&\equiv \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
\text{Donc } A^{-1} &= \begin{pmatrix} -8 & -5 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

### 3 Matrices semblables

#### 3.1 Définition

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ . On dit qu'elles sont semblables s'il existe une matrice inversible  $P \in M_n(\mathbb{K})$  telle que  $B = P^{-1}AP$ .

#### 3.2 Proposition

$A$  et  $B$  sont semblables ssi il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{K}^n$  et un endo  $u$  de  $\mathbb{K}^n$  tels que  $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B}_0)$  et  $B = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$ .  $\mathcal{B}_0$  étant la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

#### 3.3 Proposition

Si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors  $A^p$  et  $B^p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) sont également semblables.

#### 3.4 Proposition

Soit  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  une base de  $M_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Si  $Ab_j = \sum_{k=1}^n \beta_{k,j} b_k$  ( $1 \leq j \leq n$ ), alors  $B = (\beta_{i,j})$  est semblable à  $A$ .

*Preuve:*

Soit  $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  la base canonique de  $M_{n,1}(\mathbb{K})$ . Posons  $b_j = \sum_{k=1}^n p_{k,j} e_k$ .

$P = (p_{i,j})$  est la matrice de passage de  $(\mathcal{B})_0$  vers  $\mathcal{B}$ .

Avec la notation précédente on a  $P = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ . On a alors  $APe_j = Ab_j$  pour tout  $j$ .

D'autre part,  $PBe_j = \sum_{i=1}^n (\sum_{k=1}^n p_{i,k} \beta_{k,j}) e_i = \sum_{k=1}^n \beta_{k,j} \sum_{i=1}^n p_{i,k} e_i = \sum_{k=1}^n \beta_{k,j} b_k$ .

Il en résulte que  $APe_j = PBe_j$  pour tout  $j$ . Par suite  $AP = PB$  ou encore  $B = P^{-1}AP$ .

### 4 Polynôme de matrice

#### 4.1 Définition

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  et  $P(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i \in \mathbb{K}[t]$ . On appelle polynôme de  $A$  associée à la polynôme  $P(t)$  la matrice  $P(A) = \sum_{i=0}^n a_i A^i$  où  $A^0 = I$ .

## 4.2 Proposition

Soit  $P(t), Q(t)$  2 polynôme,  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  et  $\lambda$  un scalaire. On a:

1.  $(P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$
2.  $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$
3.  $(\lambda P)(A) = \lambda P(A)$

En d'autres termes, l'application  $\varphi_A : \mathbb{K}(t) \mapsto \mathbb{K}(A), P(t) \mapsto P(A)$  est une morphisme d'algèbres. De plus si  $A \neq 0$ ,  $\text{Ker } \varphi_A$  est un idéal de  $\mathbb{K}[t]$  engendré par un polynôme non constant unitaire  $w_A(t)$ :

$$w_A(A) = 0 \text{ et } \text{ker } \varphi_A = \{P(t) = w_A(t)Q(t)/Q(t) \in \mathbb{K}[t]\}.$$

## 4.3 Définition

Le polynôme unitaire  $w_A(t)$  (c-à-d, le coefficient de plus haut degré est égale à 1) est appelée la polynôme minimal de  $A$ .

## 4.4 Définition

Tout polynôme non nul  $P(t)$  tel que  $P(A) = 0$  est appelée polynome annulateur de  $A$ .

Tout polynôme annulateur de  $A$  est donc divisible par  $w_A(t)$ .

Par exemple,  $t^2 - 1$  est un polynôme annulateur de  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  car  $A^2 - 1 = 0$ , et c'est le polynôme minimal.

# 5 Théorème de décomposition des noyaux

## 5.1 Théorème

Soit  $P, Q$  2 polynôme de  $\mathbb{K}[t]$  premier entre eux et  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Alors

$$\text{Ker } PQ(A) = \text{Ker } PA \oplus \text{Ker } Q(A).$$

Plus généralement, si  $P_1, P_2, \dots, P_m$  sont des polynôme deux à deux premiers entre eux, alors

$$\text{Ker } P_1 P_2 \dots P_m(A) = \text{Ker } P_1(A) \oplus \text{Ker } P_2(A) \oplus \dots \oplus \text{Ker } P_m(A).$$

# 6 Polynôme caractéristique

## 6.1 Définition

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On appelle polynôme caractéristique de  $A$  et on note  $\chi_A(t)$  le déterminant de la matrice  $A - tI_n$  où  $I_n$  est la matrice unité d'ordre  $n$ :

$$\chi_A(t) = |A - tI_n|.$$

## 6.2 Proposition

On a :

- (i) Si  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $\chi_A(t)$  est un polynôme de degré  $n$ . De plus, si  $\chi_A(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i(t^i)$ , alors  $\alpha_n = (-1)^n$ ,  $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{tr}(A)$  et  $\alpha_0 = |A|$  où  $\text{tr}(A)$  est la somme des éléments diagonaux de  $A$  appelée trace de  $A$ .
- (ii) Si  $A$  et  $B$  sont semblables,  $\chi_A(t) = \chi_B(t)$ .

## 7 Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

### 7.1 Définition

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On dit  $\lambda$  est une valeur propre de  $M_n(\mathbb{K})$ , s'il existe un vecteur non nul  $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$  tel que  $AX = \lambda X$ . Un tel vecteur  $X$  est appelé vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$ .

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , on note  $\text{Ker}(A - \lambda I)$  l'ensemble de tous les vecteurs  $X$  tels que  $AX = \lambda X$ .

### 7.2 Théorème

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Alors  $\text{Ker}(A - \lambda I)$  est un *sev* de  $M_{n,1}(\mathbb{K})$  appelé sous espace propre de  $M_{n,1}(\mathbb{K})$  associée à  $\lambda$ . En outre,  $\forall X \in \text{Ker}(A - \lambda I)$ ,  $AX \in \text{Ker}(A - \lambda I)$ .

### 7.3 Théorème

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  ssi  $A - \lambda I$  n'est pas inversible.

### 7.4 Théorème

Soit  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$   $k$  valeurs propres distincts de  $A$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_k$   $k$  vecteurs propres associée respectivement à  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ . Alors ces  $k$  vecteurs sont linéairement indépendants. De plus, si  $E := \text{Ker}(A - \lambda_1 I) + \dots + \text{Ker}(A - \lambda_k I)$ , alors  $E = \text{Ker}(A - \lambda_1 I) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(A - \lambda_k I)$ .

### 7.5 Proposition

$\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , ssi  $\chi_A(\lambda) = 0$ .

### 7.6 Proposition

Si  $A$  est d'ordre  $n$ , alors  $A$  a au plus  $n$  valeurs propres.

### 7.7 Définition

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . On appelle ordre de multiplicité de  $\lambda$  le plus grand entier  $m$  tel que  $(t - \lambda)^m$  divise  $\chi_A(t)$ .

## 7.8 Proposition

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  d'ordre de multiplicité  $m$ . Alors

$$1 \leq \dim \text{Ker}(A - \lambda I) \leq m.$$

## 7.9 Définition

On dit que  $\chi_A$  est scindé dans  $\mathbb{K}$  si  $\chi_A$  a toutes ses racines dans  $\mathbb{K}$ .

# 8 Diagonalisation

## 8.1 Définition

On dit qu'une matrice carrée  $A$  est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale  $B$  semblable à  $A$ .

## 8.2 Théorème

$A$  est diagonalisable ssi,  $\chi_A$  est scindé dans  $\mathbb{K}$  et  $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = m$  pour tout racine  $\lambda$  de  $\chi_A$  d'ordre de multiplicité  $m$ .

## 8.3 Proposition

Soit  $w_A(t)$  un polynôme minimal de  $A$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , alors  $w_A(\lambda) = 0$ .

## 8.4 Théorème

$A$  est diagonalisable ssi,  $w_A$  a toutes ses racines dans  $\mathbb{K}$  et chaque racine est simple.

# 9 Trigonalisation

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$

## 9.1 Définition

On dit que  $A$  est triangularisable (ou Trigonalisable) s'il existe une matrice triangulaire  $B$  semblable à  $A$ .

## 9.2 Théorème

Si  $\chi_A$  est scindé dans  $\mathbb{K}$ , alors  $A$  est triangularisable. De plus, si  $B$  est une matrice triangulaire semblable à  $A$ , alors les éléments diagonaux de  $B$  sont les valeurs propres de  $A$ .

## 9.3 Théorème (Théorème de Cayley Hamilton)

Si  $\chi_A$  est scindé dans  $\mathbb{K}$ , alors  $\chi_A(A) = 0$ .

## 9.4 Corollaire

Pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\chi_A(A) = 0$ .

## 9.5 Corollaire

Si  $\chi_A$  est scindé dans  $\mathbb{K}$  et  $\chi_A(t) = (-1)^n(t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_q)^{m_q}$ , alors

$$M_{n,1}(\mathbb{R}) = \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(A - \lambda_q I)^{m_q}.$$

Dans la section suivante  $A$  est supposé Trigonalisable,  $\lambda$  une valeur propre de  $A \in M_n(\mathbb{R})$  d'ordre de multiplicité  $m$ .

## 10 Recherche d'une base de $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)^m$

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  et  $\lambda$  une valeur propre d'ordre de multiplicité  $m$ .

Notons  $N_i = N_i(\lambda) = \text{Ker}(A - \lambda I)^i$  et  $n_i = \dim N_i$ . Soit  $k$  le plus petit entier tel que  $n_k = m$  ( $k \leq m$ ).

On a  $N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_k = N_m$  et  $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ .

De plus, en posant  $d_1 = n_1$  et  $d_i = n_i - n_{i-1}$  pour  $2 \leq i \leq k$ , on a  $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_k \geq 1$ .

Notons  $F_1 = N_1$  et pour  $2 \leq i \leq k$ , le sous espace supplémentaire de  $N_{i-1}$  dans  $N_i$  :  $N_i = N_{i-1} \oplus F_i$ .

Donc  $E_\lambda = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k$  avec  $\dim F_i = d_i$ .

Ainsi pour avoir une base de  $E_\lambda$ , on cherche une base de  $F_i$ , une base de  $F_2, \dots$ , une base de  $F_k$ .

### 1-ère étape: Recherche d'une base de $F_1$

Pour cela échelonner sous forme réduite (ou pivoter) la matrice augmentée  $(A - \lambda I)^t | I$  où  $I$  est la matrice unité d'ordre  $n$ . On obtient une matrice échelonnée réduite  $\left( \begin{array}{c|c} A_1 & C_1 \\ \hline 0 & B_1 \end{array} \right)$

- aucune ligne de  $A_1$  n'est nulle;
- $0$  est la matrice nulle et  $d_1$  n'est autre que le nombre de ses lignes;
- $B_1$  est une matrice  $d_1 \times n$ .

Notons  $b_1$  la vecteur transpose du premier vecteur ligne de  $B_1$ ,  $b_2$  le vecteur transposé du deuxième ligne de  $B_1$ ,  $\dots$ ,  $b_{d_1}$  le vecteur transposé du dernier vecteur ligne de  $B_1$ . Si  $d_1 = m$ ,  $(b_1, b_2, \dots, b_{d_1})$  est une base de  $E_\lambda$ . Sinon, on passe à l'étape suivante.

### 2-ème étape: Recherche d'une base de $F_2$

Pour cela échelonner sous forme réduite la matrice augmentée  $\left( \begin{array}{c|c|c} A_1 & C_1 & 0 \\ \hline B_1 & 0 & -I_{d_1} \end{array} \right)$ .

On obtient la matrice échelonnée réduite  $\left( \begin{array}{c|c|c} A_2 & C_2 & E_2 \\ \hline 0 & B_2 & D_2 \end{array} \right)$ :

- $d_2$  est égal au nombre de lignes de la matrice nulle  $0$ ;
- $B_2$  est la matrice d'ordre  $d_2 \times n$ .



Soit  $b_{d_1+1}$  le vecteur transposé du premier vecteur ligne de  $B_2$ ,  $\dots$ ,  $b_{d_1+d_2}$  le vecteur transposé du dernier vecteur ligne de  $B_2$ .

Alors ces nouveaux vecteurs forment une base de  $F_2$ .

De plus, si  $D_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,d_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{d_2,1} & \alpha_{d_2,2} & \cdots & \alpha_{d_2,d_1} \end{pmatrix}$ , alors

$$\begin{cases} (A - \lambda I)b_{d_1+1} = \alpha_{1,1}b_1 + \alpha_{1,2}b_2 + \cdots + \alpha_{1,d_1}b_{d_1} \\ (A - \lambda I)b_{d_1+2} = \alpha_{2,1}b_1 + \alpha_{2,2}b_2 + \cdots + \alpha_{2,d_1}b_{d_1} \\ \vdots \\ (A - \lambda I)b_{d_1+d_2} = \alpha_{d_2,1}b_1 + \alpha_{d_2,2}b_2 + \cdots + \alpha_{d_2,d_1}b_{d_1} \end{cases}$$

Si  $d_1 + d_2 = m$ ,  $(b_1, b_2, \dots, b_{d_1+d_2})$  est une base de  $E_\lambda$ . Sinon, on passe à l'étape suivante.

### 3-ème étape: Recherche d'une base de $F_3$

Comme précédemment chelonner sous forme réduite la matrice augmentée  $\left( \begin{array}{c|c|c|c} A_2 & C_2 & E_2 & 0 \\ \hline B_2 & 0 & 0 & -I_{d_2} \end{array} \right)$

On obtient une matrice réduite  $\left( \begin{array}{c|c|c} A_3 & C_3 & E_3 \\ \hline 0 & B_3 & D_3 \end{array} \right)$ :

- $d_3$  est égal au nombre de lignes de la matrice nulle 0,
- $B_3$  est une matrice d'ordre  $d_3 \times n$ .

Soit  $b_{d_1+d_2+1}$  le vecteur transposé du premier vecteur ligne de  $B_3$ ,  $\dots$ ,  $b_{d_1+d_2+d_3}$  le vecteur transposé du dernier vecteur ligne de  $B_3$ .

Alors ces nouveaux vecteurs forment une base de  $F_3$ .

De plus, si  $D_3 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,d_1+d_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{d_3,1} & \alpha_{d_3,2} & \cdots & \alpha_{d_3,d_1+d_2} \end{pmatrix}$ , alors

$$\begin{cases} (A - \lambda I)b_{d_1+d_2+1} = \alpha_{1,1}b_1 + \alpha_{1,2}b_2 + \cdots + \alpha_{1,d_1+d_2}b_{d_1+d_2} \\ (A - \lambda I)b_{d_1+d_2+2} = \alpha_{2,1}b_1 + \alpha_{2,2}b_2 + \cdots + \alpha_{2,d_1+d_2}b_{d_1+d_2} \\ \vdots \\ (A - \lambda I)b_{d_1+d_2+d_3} = \alpha_{d_3,1}b_1 + \alpha_{d_3,2}b_2 + \cdots + \alpha_{d_3,d_1+d_2}b_{d_1+d_2} + d_{d_3} \end{cases}$$

Si  $d_1 + d_2 + d_3 = m$ ,  $(b_1, b_2, \dots, b_{d_1+d_2+d_3})$  est une base de  $E_\lambda$ . Sinon, on continue jusqu'à ce que l'on obtienne au total  $m$  vecteurs qui forment une base de  $E_\lambda$ .

## 11 Recherche d'une matrice triangulaire

Soit  $A$  une matrice triangulaire :  $\chi_A = (-1)^n(t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_p)^{m_p}$ . Par la méthode utilisée à la section précédente, on obtient la base  $(b_1, \dots, b_{m_1})$  de  $E_{\lambda_1}$ , une base  $(b_{m_1+1}, \dots, b_{m_1+m_2})$  de  $E_{\lambda_2}$  et ainsi de suite. On obtient alors la nouvelle base  $(b_1, \dots, b_n)$  de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Grâce à la méthode précédente qui nous permet de calculer  $(A - \lambda I)b_j$  ( $b_j$  étant un vecteur associé à  $\lambda$ ) et en Utilisant la prop 3.4, on obtient une matrice triangulaire semblable à  $A^n$  pour tout  $n$  et également une matrice triangulaire semblable à  $e^A$ .

**NB:** Pour chaque  $\lambda$ , il faut dresser un tableau  $((A - \lambda I)^k b_j)_{k,j}$  sur tous les vecteurs  $b_j$  associé à  $\lambda$ .

## 12 Applications

### 12.1 Calcul de l'exponentielle d'une matrice

#### 12.1.1 Définition

On appelle exponentielle d'une matrice carrée  $A$  la matrice  $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ .

Soit  $A$  la matrice triangulaire dans  $\mathbb{R}$  et  $(b_1, \dots, b_n)$  une base de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  obtenu en utilisant la section 10.

Si  $\lambda$  est la valeur propre associé à  $b_j$ , on a:

$$e^A b_j = e^{(A-\lambda I)+\lambda I} b_j = e^\lambda \sum_k \frac{1}{k!} (A - \lambda I)^k b_j = \sum_k \beta_{k,j} b_k.$$

En posant  $P = [b_1 b_2 \dots b_n]$  et  $B = (\beta_{k,j})$ , alors la prop 3.4 implique que

$$e^A = P B P^{-1}.$$

### 12.2 Résolution d'un système d'equation differentielles linéaires

On constate le système différentiel

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j(t) = x'_i(t) \quad (1 \leq i \leq n)$$

Ce système s'écrit

$$AX(t) = X'(t)$$

où  $A = (a_{i,j})$  et  $X(t) = (x_1(t) x_2(t) \dots x_n(t))^t$ .

#### 12.2.1 Proposition

Le système  $AX(t) = X'(t)$  a pour solution générale  $X(t) = e^{tA} X_0$  où  $X_0$  est un vecteur arbitraire. Si  $A$  est diagonalisable, le calcul de  $e^{tA}$  se fait comme  $e^A$ .