

EXERCICES D'ALGEBRE 1

1 Théorie Naïve des ensemble

1.1 Exercice

1. Considérons les ensembles suivants : $A = \{1, 13, 25\}$; $B = \{\{1, 13\}, 25\}$; $C = \{\{1, 13, 25\}\}$; $D = \{\{1, 13, 25\}\}$; $E = \{25, 1, 13\}$; $F = \{\{1, 13\}, \{25\}\}$; $G = \{\{25\}, \{1, 13\}, 25\}$; $H = \{\{1\}, \{13\}, 25\}$.

(a) Quelles sont les relations (d'égalité ou d'inclusion) qui existent entre ces ensembles ?

(b) Déterminer $A \cap B$; $G \cup H$; $E \setminus G$; C_D^A

2. Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E :

(a) Montrer que :

$$(A \cap B) \cup B^c = A \cup B^c \quad (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cap C) \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

(b) Simplifier : $(A \cup B)^c \cap (C \cup A^c)^c$; $(A \cap B)^c \cup (C \cap A^c)^c$.

3. Démontrer la Proposition 1.3.

1.2 Exercice

Construisez des applications :

- Injective mais pas surjective ;
- Surjective mais pas injective ;
- Bijective ;
- Ni injective ni surjective.

1.3 Exercice

$E = [0, 1]$; $F = [-1, 1]$; $G = [0, 2]$. Soient f et g deux applications définies respectivement par :

$$\begin{array}{ccc} f : E & \mapsto & G \\ x & \mapsto & 2 - x \end{array} ; \quad \begin{array}{ccc} g : F & \mapsto & G \\ x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array} .$$

(a) Déterminer $f(\{\frac{1}{2}\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $g([1, -1])$, $g^{-1}([0, 2])$

(b) Les applications f et g sont-elles bijectives ? Justifier votre réponse.

1.4 Exercice

1. Montrer que \mathbb{Z} est dénombrable.
2. Montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. En déduire que le produit d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
3. Montrer que \mathbb{Q} est dénombrable.
4. Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de sous ensembles dénombrables d'un ensemble E . Montrer que la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ est dénombrable.
5. Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients entiers est dénombrable. En déduire que l'ensemble des sous-ensembles finis de \mathbb{N} est dénombrable.
6. On dit qu'un nombre (réel ou complexe) est algébrique s'il est une racine d'un polynôme à coefficients entiers. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
7. Existe-il une bijection entre $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ et $\mathbb{Q} \cap]0, 1[$?

1.5 Exercice

1. En s'inspirant de la preuve du théorème 1.19, expliciter une bijection entre les intervalles $[a, b[$ et $]a, b[$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites d'entiers est équipotent à \mathbb{R} .
3. Montrer que l'ensemble des parties de \mathbb{R} n'est ni dénombrable, ni équipotent à \mathbb{R} .
4. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est ni dénombrable, ni équipotent à \mathbb{R} .

1.6 Exercice

1. Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalences :
 - (i) Le parallélisme sur l'ensemble des droites de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^3 ;
 - (ii) Sur \mathbb{R}^2 , $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ si et seulement si $x + y = x' + y'$.
2. Montrer que les relations suivantes sont des relations d'ordres partiels :
 - (i) L'inclusion sur l'ensemble des parties $P(E)$ d'un ensemble E ;
 - (ii) La divisibilité sur l'ensemble des entiers \mathbb{Z} ;
 - (iii) Sur \mathbb{R}^2 , $(x, y)\mathcal{T}(x', y')$ si et seulement si $|x' - x| \leq y' - y$.
3. Soit $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Considérons la relation binaire \mathcal{R} sur E définie comme suit : Pour tout a et b dans E , $a\mathcal{R}b$ si et seulement si a et b appartiennent à une droite passant par $(0, 0)$.
 - (i) Soient (x, y) et (x', y') deux éléments de E . Montrer que $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ si et seulement si il existe un nombre réel non nul λ tel que $(x, y) = \lambda(x', y')$.
 - (ii) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
 - (iii) Notons par $[x, y]$ la classe d'équivalence d'un élément (x, y) de E . Vérifier qu'on a $[x, 1] = [y, 1]$ si et seulement si $x = y$.
 - (iv) Montrer qu'on a : $E/\mathcal{R} = \{[x, 1] : x \in \mathbb{R}\} \cup \{[1, 0]\}$

- **(Important.)** Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F . On sait que la relation \mathcal{R} définie pour tout a et b dans E , par :

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

est une relation d'équivalence.

- Montrer que l'application \bar{f} de E/\mathcal{R} dans F définie par $\bar{f}(\bar{a}) = f(a)$ est bien définie et est injective.
- En déduire qu'on a $f = \bar{f} \circ g$ où l'application g est la projection canonique de E dans E/\mathcal{R} .
- Montrer que si f est surjective, alors il existe une bijection entre E/\mathcal{R} et F .

2 Equation linéaire et matrice

2.1 Exercice

- Déterminez si le vecteur $(1, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire de $(0, 1, 0)$, $(1, 4, 1)$ et $(1, 0, 1)$.
 - Déterminez si le vecteur $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ est une combinaison linéaire de $(0, 1)$, $(1, 4)$ et $(1, 0)$. Dans le cas où la réponse est affirmative, est-ce que la représentation en tant que combinaison linéaire est unique ?
- Décrivez le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 formé par toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $u = (1, 1, 0)$ et $v = (0, 1, 1)$. Trouvez un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de u et v .
- Soient $u = (\pi, 0)$ et $v = (0, 2)$. Décrivez les sous ensembles de \mathbb{R}^2 suivants :
 - $\{cu | c \in \mathbb{N}\}$.
 - $\{cu | c \geq 0\}$.
 - $\{cu + dv | c \in \mathbb{N} \text{ et } d \in \mathbb{R}\}$.
- Est-ce que le vecteur $w = (1, 0)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $u = (2, -1)$ et $v = (-1, 2)$?
- Si $u + v = (12, 4, 1)$ et $u - 2v = (1, 0, 2)$, calculez u et v .
- Montrez que pour tout vecteur u , $0u = 0$.
- Pour deux vecteurs u et $v \in \mathbb{R}^2$, quand est-ce qu'on a l'égalité $|u \cdot v| = \|u\|\|v\|$? l'égalité $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$?
- Montrez que pour $z, w \in \mathbb{C}^n$ et $k \in \mathbb{K}$ on a :
 - $z \cdot w = w \cdot z$.
 - $(kz) \cdot w = z \cdot (kw)$.
 - $z \cdot (kw) = k(z \cdot w)$. (Comparer avec le cas réel).
- Soient $u = (a, b)$ et $v = (c, d)$ deux vecteurs du plan. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que tout élément de \mathbb{R}^2 soit une combinaison linéaire de u et v .
 - Trouver quatre vecteurs de \mathbb{R}^4 tels que tout vecteur de \mathbb{R}^4 soit une combinaison linéaire de ces vecteurs.

10. Si $\|u\| = 5$ et $\|v\| = 3$, quelles sont la plus petite et la plus grande valeurs de $\|u - v\|$?
Même question pour $u \cdot v$.
11. Est-il possible d'avoir trois vecteurs du plan dont les produits scalaires (deux à deux) sont tous strictement négatifs ? Quand est-il dans \mathbb{R}^3 ?
12. Soient x, y et z trois nombres réels tels que $x + y + z = 0$. Trouver l'angle que les vecteurs $u = (x, y, z)$ et $v = (z, x, y)$ font entre eux.

2.2 Exercice

Dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire, \mathbb{K} désignera le corps des nombres réels \mathbb{R} ou le corps des nombres complexes \mathbb{C} .

1. Ecrire les deux problèmes suivants sous la forme $Ax = b$ où A est une matrice 2×2 , puis donner une solution à chaque problème :

- (a) Alice est deux fois plus jeune que Bob et la somme de leur âge est 33 ;
- (b) Les deux points $(2, 5)$ et $(3, 7)$ appartiennent à une droite d'équation $y = mx + c$.
Trouver m et c .

2. Pour chacune des matrices suivantes, trouver le scalaire a pour que la matrice soit singulière (non inversible) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a & a \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Soit A une matrice dans $M_3(\mathbb{K})$ telle qu'il existe un vecteur colonne non nul x dans \mathbb{K}^3 vérifiant $Ax = 0$.

- (a) Montrer que les vecteurs colonnes de A forment un plan P dans \mathbb{K}^3 .
- (b) Montrer que P et x sont perpendiculaires.

4. Soit un système d'équations linéaires dans \mathbb{K}^3 .

- (a) Montrer que ce système ne peut pas avoir exactement deux solutions.
- (b) Si (x, y, z) et (u, v, w) sont deux solutions du système, pouvez vous trouver un autre ?

5. Trouver les matrices E et L telles que l'on ait :

$$EP_3 = P_2, LP_3 = I_4$$

où

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. considérons les matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 1 & 0 \\ 0 & e & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons que ;

$$L = E_1 E_2 E_3 = E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 1 & 0 \\ c & e & F & 1 \end{pmatrix}$$

7. Calculons les inverses des trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $4K^{-1}$ et $7K^{-1}$.

8. Soit A et B deux matrices carrées de même dimension.

(a) Montrer que $A(I + BA) = (I + AB)A$.

(b) En déduire que $I + BA$ est inversible si et seulement si $I + AB$ l'est aussi.

9. Un sous ensemble de $M_n(\mathbb{K})$ est appelé un groupe de matrices si pour toutes A et B deux matrices de l'ensemble, on a : le produit AB et l'inverse de chaque élément sont dans l'ensemble.

(a) Montrer que si G est un groupe de matrices, la matrice identité I_n est automatiquement dans G ;

(b) Montrer que : l'ensemble des matrices triangulaires inférieures telles que $a_{ii} = 1$; l'ensembles des matrices symétriques ; l'ensemble des matrices de permutations sont des groupes de matrices.

(c) Donner plus de groupes de matrices.

10. Ecrire une matrice dans $M_3(\mathbb{K})$ de votre choix.

(a) Trouver deux matrices B et C telles que : $A = B + C$ et B et C soient respectivement symétrique et anti-symétrique.

(b) Ré-écrire B et C en fonction de A et A^T .

11. Factoriser les matrices suivantes (de la forme $A = LU$ ou $PA = LU$) :

3 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

3.1 Exercice

- Donnez un exemple montrant que la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas forcément un espace vectoriel.
- Soit $V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les suites (a_1, a_2, a_3, \dots) d'éléments de \mathbb{K} muni de l'addition par composante et de la multiplication par un scalaire par composante. Vérifiez que V est un \mathbb{K} -espace vectoriel. Notons $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ le sous-ensemble des suites à support fini, i.e., les suites dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Montrez que $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

3. Est-ce que le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 suivant est un espace vectoriel sur \mathbb{R} ?

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$$

. Expliquez.

4. Décidez, dans chacun des cas suivant, si $V = \mathbb{R}^2$ muni des lois d'additions et de multiplications par un scalaire données sont des espaces vectoriels sur \mathbb{R} ou non (justifiez en cas de réponse négative) :

i) $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ et $k(a, b) = (ka, b)$.

ii) $(a, b) + (c, d) = (a + b)$ et $k(a, b) = (ka, kb)$.

iii) $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ et $k(a, b) = (k^2a, k^2b)$.

5. Considérons le système d'équations linéaires en les inconnus x_1, \dots, x_n et à coefficients dans \mathbb{R} suivant :

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0\end{aligned}$$

Un tel système est dit homogène (toutes les monômes ont le même degré, ici 1). Montrez que l'ensemble de toutes les solutions de ce système forme un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Si le système linéaire n'est pas homogène, est-ce que l'ensemble des solutions forme toujours un espace vectoriel ? Si oui, démontrez, si non donnez un contre-exemple.

6. Soit $V = F(E, \mathbb{K})$ comme dans Exemples 3.1.10 avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrez que le sous ensemble W de $F(E, \mathbb{K})$ des fonctions bornées dans V est un sous-espace vectoriel. On rappelle qu'une fonction f à valeur réelle est bornée s'il existe un nombre réel $M \in \mathbb{R}$ tel que $|fx| \leq M$ pour tout $x \in E$.

7. Donnez un système générateur de \mathbb{C}^2 en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel, puis en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel.

8. Soit $V = \mathbb{R}^4$ en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel. Déterminez si $v = (3, 9, -4, -2)$ appartient au sous-espace de V engendré par $u_1 = (1, -2, 0, 3)$, $u_2 = (2, 3, 0, -1)$ et $u_3 = (2, -1, 2, 1)$.

9. Décrivez les espaces colonnes des matrices suivantes :

a) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

10. a) Décrivez un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$ contenant $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais pas $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Si un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$ contient A et B , est-ce que ce sous-espace doit contenir I_2 ?

c) Décrivez un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$ ne contenant aucune matrice diagonale non-nulle. Une matrice carrée est dite diagonale si tous ses coefficients qui ne sont pas sur la diagonale sont nuls.

11. Vrai ou faux, justifiez votre réponse :

- a) L'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{K})$ forme un sous-espace vectoriel.
- b) L'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{K})$ forme un sous-espace vectoriel.
- c) L'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui ne sont pas symétriques forme un sous-espace vectoriel.

12. Vrai ou faux, justifiez votre réponse :

- a) Les éléments b qui ne sont pas dans $C(A)$ (pour une matrice A) forme un sous-espace.
- b) Si $C(A) = 0$, alors A est la matrice nulle.
- c) Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, alors $C(2A) = C(A)$.
- d) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $C(A - I_n) = C(A)$

3.2 Exercice

1. Considérons \mathbb{R}^4 en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel. Montrez que les vecteurs suivants sont indépendants : $(6, 2, 3, 4)$, $(0, 5, -3, 1)$ et $(0, 0, 7, -2)$.
2. Montrez que deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si l'un d'entre eux est un multiple de l'autre.
3. Donnez une base du \mathbb{R} -espace vectoriel $V = \{(a, a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$.
4. Soit le \mathbb{Q} -espace vectoriel $V = \mathbb{Q}^3$ et $W \subseteq V$ le sous-espace engendré par $E = \{(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 5, 7)\}$. Montrez que E n'est pas une base de V mais que $\{(1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$ en est une.
5. Montrez que l'ensemble suivant est un \mathbb{R} -espace vectoriel : $V = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} | \exists S \subseteq \mathbb{N} \text{ fini, pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus S, f(n) = 0\}$. Trouvez une base de V .

4 Théorie des groupes et homomorphisme des groupes

4.1 Exercice

1. Pour chacune des opérations binaires sur \mathbb{Z} suivantes laquelle est associative ? laquelle est commutative ? laquelle admet un identité ?
 - i) $(x, y) \mapsto x - y$;
 - ii) $(x, y) \mapsto xy$;
 - iii) $x \star y := xy - x - y + 2$.
2. Considérons le rectangle R défini par $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq n; |y| \leq m$ où n et m sont des entiers naturels non nuls distincts. Montrer que les quatre symétries de R suivantes forment un groupe avec la loi de composition des applications :
 - a) L'identité $e : (x, y) \mapsto (x, y)$;
 - b) La réflexion $r_1 : (x, y) \mapsto (x, -y)$;
 - c) La réflexion $r_2 : (x, y) \mapsto (-x, y)$;
 - d) La rotation d'angle π et de centre $(0, 0)$ $r_3 : (x, y) \mapsto (-x, -y)$. Ecrire le table de Cayley de ce groupe. Le groupe est-il abélien ?

3. Pour chacune des structures suivantes, déterminer si c'est un groupe ou pas :
- i) $(\mathbb{Z}, -)$ où l'opération binaire $-$ désigne la soustraction usuelle sur les nombres ;
 - ii) (\mathbb{R}, \star) où l'opération binaire \star est définie par : $x \star y := x + y - 1$;
 - iii) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \times$ où n est un nombre entier naturel non nul ;
 - iv) $(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \times)$ où \times désigne la multiplication de nombres complexes.

4. Compléter les tables de Cayley des groupes suivants :

\star	e	a	b
e		a	
a			
b			

\star	a	b	c	d
a		d		
b	a			
c				
d			b	

5. Montrer que les sous-ensembles suivants ne sont pas de sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$: L'ensemble des nombres entiers impairs ; L'ensemble des entiers positifs ; L'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$; L'ensemble vide.
6. Déterminer les ordres des groupes suivants : $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{Z}, +)$; S_n ; $GL_2(\mathbb{R})$.
7. Déterminer les ordres des éléments suivants :
- i) $2 \in (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +)$;
 - ii) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$
 - iii) L'identité dans un groupe ;
 - iv) $\pi \in (\mathbb{R}, +)$;
8. Soient (G, \star) un groupe fini d'identité e et $g \in G$. Montrer qu'ils existent deux entiers naturels non nuls distincts i et j tels que $a_i = a_j$. En déduire qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $a_n = e$.
9. Soit (G, \star) un groupe d'ordre pair. Montrer qu'il existe un élément a de G tel que $a_2 = e$.
10. Déterminer tout les sous-groupes des groupes suivants : $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.
11. Montrer que les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$ où n est un entier naturel.
12. Soient G un groupe fini et g un élément de G . Montrer que $|g|$ divise $|G|$.

4.2 Exercice

1. Pour chacune des applications suivantes, déterminer si c'est un homomorphisme de groupes ou pas :
- i) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times) \rightarrow (\mathbb{R}, +), a \mapsto \log|a|$;
 - ii) $(\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +), x \mapsto |x|$;
 - iii) $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +), t \mapsto 5t$;
 - iv) $(\mathbb{R}^2, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +), (x, y) \mapsto xy$;
 - v) $(\mathbb{R}^2, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +), (u, v) \mapsto u - v$.

2. Soient (G_1, \star_1) et (G_2, \star_2) deux groupes. Montrer que $G_1 \times G_2 \simeq G_2 \times G_1$.
3. Considérons les groupes $G_1 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ et $G_2 = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$. Montrer que $G_1 \not\simeq G_2$.
4. Considérons l'homomorphisme de groupes $f : (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^\star, \times)$ $n \mapsto i^n$, où i est un élément de \mathbb{C} tel que $i^2 = -1$. Déterminez $Im(f)$ et $Ker(f)$ ainsi que $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/Ker(f)$. Puis écrire les tables de Cayley des groupes $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/Ker(f)$ et $Im(f)$. Vérifier qu'ils sont bien similaires.
5. Pour chacune des homomorphismes suivantes, déterminer son image et son noyau. Puis écrire le résultat qu'on obtient du premier théorème d'isomorphisme :
 - i) $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +), m \mapsto 2m$;
 - ii) $(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^\star, \times), x \mapsto e^{ix}$;
 - iii) $det : (GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{C}^\star, \times))$;
 - iv) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;
6. Soit G un groupe abélien fini tel que pour tout élément x de G , on a $x = e$ ou $x^2 = e$ où e est l'identité de G . Montrer que $|G| = 2n$ où n est un entier naturel.
7. Soient G un groupe et H un sous groupe d'indice 2 de G . Montrer que H est un sous groupe normal de G .

4.3 Exercice

1. Pour chacune des permutations suivantes, écrire-la comme composée des cycles:
 - i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;
 - ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$;
 - iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Pour chacune des permutations suivantes, écrire-la en matrice-notation :
 - i) $(1\ 2\ 3)(4\ 6\ 8)$;
 - ii) $(1\ 6)(4\ 2)(5\ 3)$;
 - iii) $(1\ 5\ 3)$;
 - iv) $(1\ 9\ 3)(2\ 6)(7\ 8)$;
 - v) $(2\ 4)(3\ 5\ 7)$.
3. Pour chacune des cas suivants, calculer $\sigma\tau$ et $\tau\sigma$:
 - i) Dans S_4 , $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = (1\ 2)(3\ 4)$;
 - ii) Dans S_5 , $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;
 - iii) Dans S_6 , $\sigma = (1\ 2)(5\ 6)$, $\tau = (1\ 3\ 4\ 6\ 2)$. Ecrire les résultats en utilisant les deux notations.

4. Pour chacune des permutations suivantes, déterminer si elle est paire ou impaire :

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix};$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix};$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

5. i) Respectivement dans S_3 et S_4 , combien de transpositions a-t-on ? Quand est-il des 3-cycles ? des 4-cycles (dans S_4) ?

ii) Soit H l'ensemble des éléments qui ne sont pas des transpositions, ni des 3-cycles, ni des 4-cycles dans S_4 . Le sous-ensemble H est-il un sous-groupe ? Si oui, déterminer son ordre et trouver un groupe usuel (qu'on connaît très bien) qui est isomorphe à H .

6. Dans chacun des groupes suivants, déterminer le nombre d'éléments d'ordre 2 et le nombre d'éléments d'ordre 3 : S_3 , A_4 , D_5 et D_6 .

7. Pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, déterminer le nombre d'éléments d'ordre k dans A_5 .

8. Pour chacun des cas suivants, déterminer si le sous-ensemble est un sous-groupe de S_4 ou pas. Dans le cas où le sous-ensemble est un groupe, déterminer si c'est un groupe normal :

i) $\{id, (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3)\}$;

ii) $\{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$;

iii) $\{id, (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3\ 2), (1\ 3)(2\ 4)\}$;

iv) $\{id, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}.$

9. Considérons l'application $f : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow S_4$, $(m, n) \mapsto \sigma^n \tau^m$ où $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$ et $\tau = (1\ 3)(2\ 4)$. Montrer que f est un homomorphisme de groupes. Expliciter le résultat du premier théorème d'isomorphisme.

10. Notons respectivement par σ et τ une rotation et une réflexion dans le groupe diédral D_n . Montrer que $\tau^{-1} = \rho \tau \rho$.

11. Considérons un homomorphisme $f : S_n \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ où $n \geq 3$. Montrer que f est trivial, i.e, pour tout $\sigma \in S_3$, on a $f(\sigma) = 0$.

12. i) Montrer que $S_3 \simeq D_3$.

ii) Expliciter tous les éléments de D_3 en forme de matrices, en utilisant le fait qu'il est isomorphe à un sous-groupe de $O_2(\mathbb{R})$.

13. i) Soit (G, \star) un groupe d'ordre un nombre premier p . Montrer que $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, i.e, à isomorphisme près, il n'existe qu'un seul groupe d'ordre p où p un nombre premier.

ii) Pour tout $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, trouver les classes d'isomorphismes des groupes d'ordre n .