

# RÉSOLUTION D'ÉQUATION NON LINÉAIRE

Le but est de décrire des algo pour résoudre des équations non linéaires de type  $f(x) = 0$ .

## 1 Séparation des zéros

Le premier travail consiste à déterminer des intervalles  $[a_i, b_i]$  tel que  $f$  possède une solution dans chaque intervalle.

La méthode la plus simple est d'utiliser une fonction continue strictement monotone sur  $[a_i; b_i]$  tel que  $f(a_i)f(b_i) < 0$ . (On suppose que  $f$  est continue et dérivable deux fois)

### 1.1 Quelques algo classique

#### 1.1.1 La méthode de dichotomie (ou bisection)

Supposons que l'on a un zéro dans un intervalle  $[a, b]$  (ie  $f(a)f(b) < 0$ ).

- Si  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ , on a trouvé le zéro.
- Sinon le zéro se trouve dans  $[a, \frac{a+b}{2}]$  soit dans  $[\frac{a+b}{2}, b]$ .

Il est clair qu'une répétition de ce procédé donne un encadrement de plus en plus précis du zéro cherché et fournit donc un algo de calcul du zéro.

**Algo** (dichotomie)

Soit  $f : [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{R}$  continue monotone tel que  $f(a_0)f(b_0) < 0$ .

Pour  $m = 0, 1, 2, \dots, N$  faire :

$$m = \frac{a_n + b_n}{2}$$

- Si  $f(a_n)f(m) \leq 0$ ,  $a_{n+1} = a_n$ ,  $b_{n+1} = m$
- Sinon  $a_{n+1} = m$ ,  $b_{n+1} = b_n$

$$\text{On a } a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2}.$$

Soit  $a_n - b_n = \frac{a_0 - b_0}{2^n} \rightarrow 0$  On peut choisir le temps d'arrêt  $N$  pour que :  
 $\frac{a_0 - b_0}{2^N} < \varepsilon$

#### 1.1.2 Méthode de la sécante

Soit  $f$  admettant un zéro dans l'intervalle  $[x_{-1}, x_0]$ . Pour obtenir une première approximation  $x_1$  de ce zéro, l'idée est de remplacer  $f$  par son interpolée linéaire sur  $[x_{-1}, x_0]$ .

Soit par

$$Y(x) = f(x_0) + (x - x_0) * \left( \frac{f(x_0) - f(x_{-1})}{x_0 - x_{-1}} \right)$$

L'approximation  $x_1$  est obtenue en résolvant  $Y(x_1) = 0$  ie

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)(x_0 - x_{-1})}{f(x_0) - f(x_{-1})}$$

Pour trouver une meilleure approximation, il suffit de répéter ce procédé à l'aide des points  $(x_n, x_{n+1})$

**Algo:**

Pour  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

## Critère d'arrêt

Une critère d'arrêt souvent utilisée consiste à choisir une tolérance  $\varepsilon$  à terminer l'algorithme lorsque  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

### 1.1.3 Méthode de Newton

Ici au lieu d'assimiler la courbe  $y = f(x)$  à une sécante, on l'assimile à une tangente en un point  $(x_n, f(x_n))$ , soit la droite d'équation

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

#### Algo

Pour  $n=0,1,2,\dots$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

### 1.1.4 Méthode de point fixe

Elle consiste d'abord à remplacer l'équation  $f(x) = 0$  par une équation  $g(x) = x$  ayant même solution.

#### Algo

Pour  $n=0,1,2,\dots$

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

#### Proposition

Soit  $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$  une fonction continue et  $x_0$  dans  $[a, b]$ . Si  $x_n$  converge vers  $x_\infty$  alors  $x_\infty = g(x_\infty)$ .

## 1.2 Convergence des algo

Soit  $g : [a, b] \mapsto [a, b]$  dérivable et tel que  $|g'(x)| \leq K$ ,  $\forall x \in [a, b]$  avec  $0 \leq K < 1$ , alors pour tout  $x_0 \in [a, b]$ , la suite définie par  $x_{n+1} = g(x_n)$ , pour tout  $n$  converge vers l'unique point fixe de  $g$ .

### 1.2.1 Définition

Soient  $x_n$  une suite convergente vers  $x_\infty$ , s'il existe  $p \in \mathbb{N}$  et  $c \neq 0$  tel que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x_\infty|}{|x_n - x_\infty|} = c$$

On dit que la convergence est d'ordre  $p$ , " $c$ " est appelée constante d'erreur asymptotique.

## 1.3 Méthode de Newton : Le retour

D'après la formule de Taylor d'ordre 2 en supposant  $g$  suffisamment régulière

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_\infty &= g(x_n) - g(x_\infty) \\ x_{n+1} - x_\infty &= g(x_n - x_\infty)g'(x_\infty) + \frac{(x_n - x_\infty)^2 g''(\varepsilon_n)}{2} \end{aligned}$$

avec  $\varepsilon \in [x_n, x_\infty]$ . Pour  $n$  assez grand on a donc  $x_{n+1} - x_\infty \simeq (x_n - x_\infty)g'(x_\infty)$  et vitesse de convergence est d'autant plus grande que  $g'(x_\infty)$  est plus petit. Le cas le plus favorable est lorsque  $g'(x_\infty) = 0$  et si  $M$  est un majorant de  $g''(x)$  sur  $[a, b]$ . On a  $|x_{n+1} - x_\infty| \leq M \frac{|x_n - x_\infty|}{2}$ .

La convergence est alors d'ordre 2. Si on revient à la méthode de Newton, on voit en fait qu'il s'agit d'un algo du point fixe pour la fonction  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ . La dérivée de  $g$  est donnée par  $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$ . Si  $f'(x_\infty) \neq 0$  on a  $g'(x_\infty) = 0$  car  $f(x_\infty) = 0$ . Ceci montre que la méthode de Newton converge de façon quadratique (si elle converge).

## 1.4 Méthode de point fixe : Le retour

Les résultats de ce paragraphe sont une généralisation en dimension 1. La fonction  $g$  à cette fois une fonction  $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  (ici on prend  $n = 2$ ) et la variable  $x \in \mathbb{R}^2$ . Comme précédemment on construit une suite définie par

$$\begin{cases} x^0 & \text{donnée} \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases}$$

Quand tout ce passe bien cette suite converge vers  $\hat{x}$  vérifiant  $\hat{x} = g(\hat{x})$ . On a donc besoin de généraliser la notion de fonction contractante.

### 1.4.1 Définition

Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$ , la fonction  $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  est dite contractante sur  $E$ ,  $\exists \lambda \in [0, 1[$  tel que pour

$$\forall x, y \in E, \text{ on a } \|g(x) - g(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$$

### 1.4.2 Théoreme (point fixe)

Soit  $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  contractante, alors il existe un unique  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\hat{x} = g(\hat{x})$  et la suite (vecteurs) définie par

$$\begin{cases} x^0 & \text{donnée} \\ x^{k+1} = g(x^k) \end{cases}$$

$k \geq 0$  converge vers  $\hat{x}$

### 1.4.3 Définition

Une fonction  $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  est différentiable en  $x$  si  $g$  admet des dérivées partielles en  $x$  et si la matrice Jacobienne  $Dg(x)$  vérifie :

$$g(y) = g(x) + Dg(x)(y - x) + \|y - x\|\varepsilon(y - x)$$

où  $\varepsilon(y - x) \rightarrow 0$  quand  $y \rightarrow x$ .

## 1.5 Méthode de Newton pour 2 équation non linéaire

On cherche à résoudre le système d'équation  $f(x) = 0$ . Comme pour le cas  $n = 1$ , l'idée de la méthode de Newton consiste à considérer l'approximation affine de  $f$  en  $x_k$ . Si  $f$  est différentiable, le développement de Taylor donne :

$$f(x_k + h) = f(x_k) + Df(x_k)h + \|h\|\varepsilon(h)$$

On détermine le vecteur  $h$  tel que

$$\left\| \begin{array}{lcl} f(x_k) + Df(x_k)h & = & 0 \\ x^{k+1} & = & x^k + h \end{array} \right.$$