

RÉDUCTION DES MATRICES

February 19, 2026

1 Rappels et notations

Dans toute la suite, \mathbb{K} désigne un corps commutatif.

1.1 Définition

Une matrice $m \times n$ est un tableau M forme de m lignes et n colonnes formées par les éléments de \mathbb{K} .

Si on note $a_{i,j}$ la coefficient de la i -ème ligne et j -ème colonne de la matrice M , on note $M = (a_{i,j})$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. On désigne par $M_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice $m \times n$ à coefficient dans \mathbb{K} . Muni de l'addition et de la multiplication externe, $M_{m,n}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

1.2 Définition(Produit de deux matrices)

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit de AB n'est définie que si $n = p$ et dans ce cas AB est la matrice $c_{ij} \in M_{m,q}(\mathbb{K})$ définie par: pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq q$

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j} = (a_{i,1} \ a_{i,2} \ \cdots \ a_{i,n}) \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}$$

Si $m = n$, on note $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

1.3 Définition

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est :

- diagonale si $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$;
- triangulaire supérieur (resp. triangulaire inférieur) si tous les coefficients en dessous (resp. au dessus) du diagonal sont nuls, c-à-d, $a_{i,j} = 0$ si $i > j$ (resp. $i < j$);
- triangulaire si elle est triangulaire supérieur ou inférieur.

1.4 Définition

Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est égale au produit de ses éléments diagonaux.

1.5 Définition

Soit E un \mathbb{K} -espace de dimension n , $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ une base de E et u un endomorphisme de E . Si $u(b_j) = \sum_{k=1}^n a_{k,j} b_k$ ($1 \leq j \leq n$), la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est appelée la matrice de u dans \mathcal{B} : $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ et (e_1, e_2, \dots, e_n) la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$, c-à-d,

$$e_1 = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)^t, e_2 = (0 \ 1 \ \cdots \ 0)^t, \dots, e_n = (0 \ 0 \ \cdots \ 1)^t \text{ où } (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)^t = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Si on A_j le produit Ae_j , alors A_j est la j -ème vecteur colonnes de A et on note $A = [A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_n]$

2 Résolution de système d'équation linéaire par la méthode de pivot de Gauss

Commençons par un exemple. Résolvons le système d'équation suivant:

$$(S_1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 & (E_1) \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 & (E_2) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 & (E_3) \end{cases}$$

Sous forme matricielle, on a $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Utilisons la méthode par élimination. Commençons par éliminer x_3 par exemple. Gardons l'équation (E_1) , remplaçons (E_2) par $(E_1) + (E_2)$ et (E_3) par $2(E_1) + (E_3)$. On a le système équivalent suivant:

$$(S_2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 & (E_4) \\ 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 5x_4 = 9 & (E_5) \\ 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 5x_4 = 9 & (E_6) \end{cases}$$

Sous forme matricielle, on a $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$

Puis éliminons x_2 . Gardons l'équation (E_5) , remplaçons (E_4) par $3(E_4) - (E_5)$ et (E_6) par $(E_6) - (E_5)$. On a le système équivalent suivant :

$$(S_3) \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6 & (E_7) \\ 5x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 5x_4 = 9 & (E_8) \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 & (E_9) \end{cases}$$

Sous forme matricielle, on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a donc exprimer x_2 et x_3 en fonction de x_1 et x_4 . On a :

$$\begin{cases} 3x_2 = 9 - 5x_1 - 5x_4 \\ 3x_3 = 6 - x_1 - 4x_4 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} x_2 = 3 - 5/3x_1 - 5/3x_4 \\ x_3 = 2 - 1/3x_1 - 4/3x_4 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est appelée une matrice échelonnée réduite de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

2.1 Définition

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice. On dit qu'un certain coefficient a_{i_0,j_0} est un pivot de A si tous les coefficients se trouvant sur la j_0 -ème colonne sont nuls sauf a_{i_0,j_0} qui est non nul. De plus s'il y a une coefficient non nul se trouvant sur la i_0 -ème ligne possédant la même propriété que a_{i_0,j_0} , ce coefficient ne peut plus être considéré comme pivot de A .

2.2 Définition

Une matrice A est dite une matrice échelonnée réduite si chaque ligne non nul de A contient un pivot.

Remarque:

- Chaque ligne non nul d'une matrice échelonnée réduite contient un pivot et un seul.
- Chaque colonne d'une matrice échelonnée réduite contient au plus un pivot.
- Le rang d'une matrice échelonnée réduite est le nombre de pivot de cette matrice.

2.3 Définition

Échelonne une matrice $A = (a_{i,j})$ sous forme réduite, c'est la transformer en un matrice échelonnée réduite qui s'obtient par combinaison linéaire (et si nécessaire par permutation) des lignes de A .

Méthode pour échelonnée une matrice sous forme réduite

Soit $A = (a_{i,j}^0)$ une matrice.

1. On choisit un coefficient non nul a_{i_0,j_0}^0 de A ;
2. On transforme A en une matrice $A_1 = a_{i,j}^1$ comme suit:

$$a_{i_0,j_0}^1 = a_{i_0,j_0}^0 \quad a_{i,j}^1 = a_{i_0,j_0}^0 a_{i_0,j}^0 - a_{i,j_0}^0 a_{i_0,j_0}^0 \quad (i, j) \neq (i_0, j_0)$$

$a_{i,j}^1$ est un déterminant issu de a_{i_0,j_0}^0

3. Si A_1 contient une ligne non nul autre que la i_0 -ème ligne, on applique les étapes (1) et (2) à A_1 et on obtient une matrice $A_2 = a_{i,j}^2$.
On continue jusqu'à ce qu'on obtient une matrice échelonnée réduite.

NB: À la fin, on peut permute les lignes pour que le premier pivot le plus à gauche se trouve sur la première ligne, le deuxième pivot le plus à gauche à la deuxième ligne et ainsi de suite. Si c'est nécessaire on rend tous les pivots.

Application: Recherche de l'inverse d'une matrice inversible

Soit A une matrice inversible. On échelonne sous forme réduite la matrice $A|I$ dite matrice augmentée au lieu de A seulement, où I est une matrice unité de même ordre que A (les pivots doivent être dans A). En tenant compte de la remarque précédente, on obtient une matrice $I|B$. Alors $B = A^{-1}$.

Exemple: Cherchons la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\text{On a } A|I &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) \\
&\equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & -3 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & -3 & 1 \end{array} \right) \\
&\equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
\text{Donc } A^{-1} &= \left(\begin{array}{ccc} -8 & -5 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

3 Matrices semblables

3.1 Définition

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On dit qu'elles sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

3.2 Proposition

A et B sont semblables *ssi* il existe une base \mathcal{B} de \mathbb{K} et un endo u de \mathbb{K}^n tels que $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B}_0)$ et $B = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$. \mathcal{B}_0 étant la base canonique de \mathbb{K}^n .

3.3 Proposition

Si A et B sont semblables, alors A^p et B^p ($p \in \mathbb{N}$) sont également semblables.

3.4 Proposition

Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ une base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si $Ab_j = \sum_{k=1}^n \beta_{k,j} b_k$ ($1 \leq j \leq n$), alors $B = (\beta_{i,j})$ est semblable à A .

Preuve:

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. Posons $b_j = \sum_{k=1}^n p_{k,j} e_k$.

$P = (p_{i,j})$ est la matrice de passage de $(B)_0$ vers \mathcal{B} .

Avec la notation précédente on a $P = [b_1, b_2, \dots, b_n]$. On a alors $APe_j = Ab_j$ pour tout j .

D'autre part, $PBe_j = \sum_{i=1}^n (\sum_{k=1}^n p_{i,k} \beta_{k,j}) e_i = \sum_{k=1}^n \beta_{k,j} \sum_{i=1}^n p_{i,k} e_i = \sum_{k=1}^n \beta_{k,j}^k$.

Il en résulte que $APe_j = PBe_j$ pour tout j . Par suite $AP = PB$ ou encore $B = P^{-1}AP$.

4 Polynôme de matrice

4.1 Définition

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $P(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i \in \mathbb{K}[t]$. On appelle polynôme de A associée à la polynôme $P(t)$ la matrice $P(A) = \sum_{i=0}^n a_i A^i$ où $A^0 = I$.

4.2 Proposition

Soit $P(t), Q(t)$ 2 polynômes, A une matrice carrée d'ordre n et λ un scalaire. On a:

1. $(P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$
2. $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$
3. $(\lambda P)(A) = \lambda P(A)$

En d'autres termes, l'application $\varphi_A : \mathbb{K}(t) \mapsto \mathbb{K}(A)$, $P(t) \mapsto P(A)$ est une morphisme d'algèbres. De plus si $A \neq 0$, $\text{Ker } \varphi_A$ est un idéal de $\mathbb{K}[t]$ engendré par un polynôme non constant unitaire $w_A(t)$:

$$w_A(A) = 0 \text{ et } \text{ker } \varphi_A = \{P(t) = w_A(t)Q(t)/Q(t) \in \mathbb{K}[t]\}.$$

4.3 Définition

Le polynôme unitaire $w_A(t)$ (c-à-d, le coefficient de plus haut degré est égale à 1) est appelée la polynôme minimal de A .

4.4 Définition

Tout polynôme non nul $P(t)$ tel que $P(A) = 0$ est appelée polynôme annulateur de A .

Tout polynôme annulateur de A est donc divisible par $w_A(t)$.

Par exemple, $t^2 - 1$ est un polynôme annulateur de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ car $A^2 - 1 = 0$, et c'est le polynôme minimal.

5 Théorème de décomposition des noyaux

5.1 Théorème

Soit P, Q 2 polynômes de $\mathbb{K}[t]$ premier entre eux et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\text{Ker } PQ(A) = \text{Ker } PA \oplus \text{Ker } Q(A).$$

Plus généralement, si P_1, P_2, \dots, P_m sont des polynômes deux à deux premiers entre eux, alors

$$\text{Ker } P_1 P_2 \cdots P_m(A) = \text{Ker } P_1(A) \oplus \text{Ker } P_2(A) \oplus \cdots \oplus \text{Ker } P_m(A).$$

6 Polynôme caractéristique

6.1 Définition

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A et on note $\chi_A(t)$ le déterminant de la matrice $A - tI_n$ où I_n est la matrice unité d'ordre n :

$$\chi_A(t) = |A - tI_n|.$$

6.2 Proposition

On a :

- (i) Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(t)$ est un polynôme de degré n . De plus, si $\chi_A(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i(t^i)$, alors $\alpha_n = (-1)^n$, $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{tr}(A)$ et $\alpha_0 = |A|$ où $\text{tr}(A)$ est la somme des éléments diagonaux de A appelée trace de A .
- (ii) Si A et B sont semblables, $\chi_A(t) = \chi_B(t)$.

7 Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

7.1 Définition

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit λ est une valeur propre de $M_n(\mathbb{K})$, s'existe un vecteur non nul $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$. Un tel vecteur X est appelé vecteur propre de A associée à λ .

Si λ est une valeur propre de A , on note $\text{Ker}(A - \lambda I)$ l'ensemble de tous les vecteurs X tels que $AX = \lambda X$.

7.2 Théorème

Soit λ une valeur propre de A . Alors $\text{Ker}(A - \lambda I)$ est un *sev* de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ appelé sous espace propre de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ associée à λ . En outre, $\forall X \in \text{Ker}(A - \lambda I)$, $AX \in \text{Ker}(A - \lambda I)$.

7.3 Théorème

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors λ est une valeur propre de A ssi $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

7.4 Théorème

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ k valeurs propres distinctes de A , X_1, X_2, \dots, X_k k vecteurs propres associée respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Alors ces k vecteurs sont linéairement indépendants. De plus, si $E := \text{Ker}(A - \lambda_1 I) + \dots + \text{Ker}(A - \lambda_k I)$, alors $E = \text{Ker}(A - \lambda_1 I) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(A - \lambda_k I)$.

7.5 Proposition

λ est un valeur propre de A , ssi $\chi_A(\lambda) = 0$.

7.6 Proposition

Si A est d'ordre n , alors A a au plus n valeurs propres.

7.7 Définition

Soit λ une valeur propre de A . On appelle ordre de multiplicité de λ le plus grand entier m tel que $(t - \lambda)^m$ divise $\chi_A(t)$.

7.8 Proposition

Soit λ une valeur propre de A d'ordre de multiplicité m . Alors

$$1 \leq \dim \text{Ker}(A - \lambda I) \leq m.$$

7.9 Définition

On dit que χ_A est scindé dans \mathbb{K} si χ_A a toutes ses racines dans \mathbb{K} .

8 Diagonalisation

8.1 Définition

On dit qu'une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale B semblable à A .

8.2 Théorème

A est diagonalisable *ssi*, χ_A est scindé dans \mathbb{K} et $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = m$ pour tout racine λ de χ_A d'ordre de multiplicité m .

8.3 Proposition

Soit $w_A(t)$ un polynôme minimal de A . Si λ est un valeur propre de A , alors $w_A(\lambda) = 0$.

8.4 Théorème

A est diagonalisable *ssi*, w_A a toute ses racines dans \mathbb{K} et chaque racines sont simples.

9 Trigonalisation

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

9.1 Définition

On dit que A est triangulable (ou Trigonalisable) s'il existe un matrice triangulaire B semblable à A .

9.2 Théorème

Si χ_A est scindé dans \mathbb{K} , alors A est triangulable. De plus, si B est une matrice triangulaire semblable à A , alors les éléments diagonaux de B sont les valeurs propres de A .

9.3 Théorème (Théorème de Cayley Hamilton)

Si χ_A est scindé dans \mathbb{K} , alors $\chi_A(A) = 0$.

9.4 Corollaire

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\chi_A(A) = 0$.

9.5 Corollaire

Si χ_A est scindé dans \mathbb{K} et $\chi_A(t) = (-1)^n(t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_q)^{m_q}$, alors

$$M_{n,1}(\mathbb{R}) = \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(A - \lambda_q I)^{m_q}.$$

Dans la section suivante A est supposé Trigonalisable, λ une valeur propre de $A \in M_n(\mathbb{R})$ d'ordre de multiplicité m .

10 Recherche d'une base de $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)^m$

Soit A une matrice carrée d'ordre n et λ une valeur propre d'ordre de multiplicité m .

Notons $N_i = N_i(\lambda) = \text{Ker}(A - \lambda I)$ et $n_i = \dim N_i$. Soit k le plus petit entier tel que $n_k = m$ ($k \leq m$).

On a $N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_k = N_m$ et $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$.

De plus, en posant $d_1 = n_1$ et $d_i = n_i - n_{i-1}$ pour $2 \leq i \leq k$, on a $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_k \geq 1$.

Notons $F_1 = N_1$ et pour $2 \leq i \leq k$, le sous espace supplémentaire de N_{i-1} dans N_i : $N_i = N_{i-1} \oplus F_i$.

Donc $E_\lambda = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k$ avec $\dim F_i = d_i$.

Ainsi pour avoir une base de E_λ , on cherche une base de F_1 , une base de F_2, \dots , une base de F_k .

1-ère étape: Recherche d'une base de F_1

Pour cela échelonner sous forme réduite (ou pivoter) la matrice augmenté $(A - \lambda I)^t | I$ où I est la matrice unité d'ordre n . On obtient une matrice échelonnée réduite $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & C_1 \\ \hline 0 & B_1 \end{array} \right)$

- aucune ligne de A_1 n'est nulle;
- 0 est la matrice nulle et d_1 n'est autre que le nombre de ses lignes;
- B_1 est une matrice $d_1 \times n$.

Notons b_1 le vecteur transposé du premier vecteur ligne de B_1 , b_2 le vecteur transposé du deuxième ligne de B_1 , $\cdots b_{d_1}$ le vecteur transposé du dernier vecteur ligne de B_1 . Si $d_1 = m$, $(b_1, b_2, \dots, b_{d_1})$ est une base de E_λ . Sinon, on passe à l'étape suivante.

2-ème étape: Recherche d'une base de F_2

Pour cela échelonner sous forme réduite la matrice augmenté $\left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & C_1 & 0 \\ \hline B_1 & 0 & -I_{d_1} \end{array} \right)$.

On obtient la matrice échelonnée réduite $\left(\begin{array}{c|c|c} A_2 & C_2 & E_2 \\ \hline 0 & B_2 & D_2 \end{array} \right)$:

- d_2 est égal au nombre de lignes de la matrice nulle 0 ;
- B_2 est la matrice d'ordre $d_2 \times n$.

Soit b_{d_1+1} le vecteur transposé du premier vecteur ligne de $B_2, \dots, b_{d_1+d_2}$ le vecteur transposé du dernier vecteur ligne de B_2 .

Alors ces nouveaux vecteurs forment une base de F_2 .

De plus, si $D_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,d_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{d_2,1} & \alpha_{d_2,2} & \cdots & \alpha_{d_2,d_1} \end{pmatrix}$, alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (A - \lambda I)b_{d_1+1} & = & \alpha_{1,1}b_1 + \alpha_{1,2}b_2 + \cdots + \alpha_{1,d_1}b_{d_1} \\ (A - \lambda I)b_{d_1+2} & = & \alpha_{2,1}b_1 + \alpha_{2,2}b_2 + \cdots + \alpha_{2,d_1}b_{d_1} \\ \vdots & & \vdots \\ (A - \lambda I)b_{d_1+d_2} & = & \alpha_{d_2,1}b_1 + \alpha_{d_2,2}b_2 + \cdots + \alpha_{d_2,d_1}b_{d_1} \end{array} \right.$$

Si $d_1 + d_2 = m$, $(b_1, b_2, \dots, b_{d_1+d_2})$ est une base de E_λ . Sinon, on passe à l'étape suivante.

3-ème étape: Recherche d'une base de F_3

Comme précédemment chelonner sous forme réduite la matrice augmenté $\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_2 & C_2 & E_2 & 0 \\ \hline B_2 & 0 & 0 & -I_{d_2} \end{array} \right)$

On obtient une matrice réduite $\left(\begin{array}{c|c|c} A_3 & C_3 & E_3 \\ \hline 0 & B_3 & D_3 \end{array} \right)$:

- d_3 est égal au nombre de lignes de la matrice nulle 0,
- B_3 est une matrice d'ordre $d_3 \times n$.

Soit $b_{d_1+d_2+d_3+1}$ le vecteur transposé du premier vecteur ligne $B_3, \dots, b_{d_1+d_2+d_3}$ le vecteur transposé du dernier vecteur ligne de B_3 .

Alors ces nouveaux vecteurs forment une base de F_3 .

De plus, si $D_3 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,d_1+d_2+d_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{d_3,1} & \alpha_{d_3,2} & \cdots & \alpha_{d_3,d_2+d_1} \end{pmatrix}$, alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (A - \lambda I)b_{d_1+d_2+d_3+1} & = & \alpha_{1,1}b_1 + \alpha_{1,2}b_2 + \cdots + \alpha_{1,d_1+d_2+d_3}b_{d_1+d_2+d_3} \\ (A - \lambda I)b_{d_1+d_2+d_3+2} & = & \alpha_{2,1}b_1 + \alpha_{2,2}b_2 + \cdots + \alpha_{2,d_1+d_2+d_3}b_{d_1+d_2+d_3} \\ \vdots & & \vdots \\ (A - \lambda I)b_{d_1+d_2+d_3+d_3} & = & \alpha_{d_3,1}b_1 + \alpha_{d_3,2}b_2 + \cdots + \alpha_{d_3,d_2+d_1}b_{d_1} + d_{d_2} \end{array} \right.$$

Si $d_1 + d_2 + d_3 = m$, $(b_1, b_2, \dots, b_{d_1+d_2+d_3})$ est une base de E_λ . Sinon, on continue jusqu'à ce que l'on obtienne au total m vecteurs qui forment une base de E_λ .

11 Recherche d'une matrice triangulaire

Soit A une matrice triangulaire : $\chi_A = (-1)^n(t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_p)^{m_p}$. Par la méthode utilisée à la section précédente, on obtient la base (b_1, \dots, b_{m_1}) de E_{λ_1} , une base $(b_{m_1+1}, \dots, b_{m_1+m_2})$ de E_{λ_2} et ainsi de suite. On obtient alors la nouvelle base (b_1, \dots, b_n) de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Grâce à la méthode précédente qui nous permet de calculer $(A - \lambda I)b_j$ (b_j étant un vecteur associé à λ) et en utilisant la prop 3.4, on obtient une matrice triangulaire semblable à A^n pour tout n et également une matrice triangulaire semblable à e^A .

NB: Pour chaque λ , il faut dresser un tableau $((A - \lambda I)^k b_j)_{k,j}$ sur tous les vecteurs b_j associés à λ .

12 Applications

12.1 Calcul de l'exponentielle d'une matrice

12.1.1 Définition

On appelle exponentielle d'une matrice carrée A la matrice $e^A = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} A^k$.

Soit A la matrice triangulaire dans \mathbb{R} et (b_1, \dots, b_n) une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ obtenu en utilisant la section 10.

Si λ est la valeur propre associé à b_j , on a:

$$e^A b_j = e^{(A - \lambda I) + \lambda I} b_j = e^\lambda \sum_k \frac{1}{k!} (A - \lambda I)^k b_j = \sum_k \beta_{k,j} b_k.$$

En posant $P = [b_1 b_2 \cdots b_n]$ et $B = (\beta_{k,j})$, alors la prop 3.4 implique que

$$e^A = PBP^{-1}.$$

12.2 Résolution d'un système d'équations différentielles linéaires

On constate le système différentiel

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j(t) = x_i'(t) \quad (1 \leq i \leq n)$$

Ce système s'écrit

$$AX(t) = X'(t)$$

où $A = (a_{i,j})$ et $X(t) = (x_1(t) x_2(t) \cdots x_n(t))^t$.

12.2.1 Proposition

Le système $AX(t) = X'(t)$ a pour solution générale $X(t) = e^{tA} X_0$ où X_0 est un vecteur arbitraire.
Si A est diagonalisable, le calcul de e^{tA} se fait comme e^A .