

Résolution et Algorithmes

Exercice I : Méthode de Horner (1). Il s'agit d'évaluer efficacement un polynôme en un point. On note $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, on pose $b_0 = P()$ et on écrit :

$$P(X) - b_0 = (X -)Q(X)$$

où :

$$Q(X) = b_n X^{n-1} + \dots + b_2 X + b_1.$$

On calcule alors par ordre décroissant b_n, b_{n-1}, \dots, b_0 .

1. Donner b_n en fonction de a_n puis b_i en fonction de a_i et b_{i+1} pour $i = n-1, n-2, \dots, 1$.
2. Appliquer la méthode ci-dessus pour calculer $P(\alpha)$ pour $P(X) = X^3 + 7X^2 + 7X$ et $\alpha = 16$.
3. Même question pour $P(X) = X^5 + 4X^4 + 3X^3$ et $\alpha = 5$. En déduire l'écriture en base 10 de l'entier s'écrivant 143000 en base

Exercice II : Méthode de Horner (2). Pour calculer tous les coefficients du développement de Taylor du polynôme $P(X)$ en un point, on pose $P_0(X) = P(X)$ et on répète l'algorithme de l'exercice précédent pour calculer successivement les coefficients des polynômes $P_0(X), P_1(X), \dots, P_n(X)$ définis par :

$$\begin{aligned} P_0(X) &= (X - \alpha)P_1(X) + P_0(\alpha) \\ P_1(X) &= (X - \alpha)P_2(X) + P_1(\alpha) \\ &\dots \dots \dots \\ P_{n-1}(X) &= (X - \alpha)P_n(X) + P_{n-1}(\alpha) \end{aligned}$$

jusqu'à ce que l'on obtienne un polynôme de degré zéro, $P_n(X) = \text{const.}$

1. Montrer que $P(X) = (X - \alpha)^n P_n(\alpha) + (X - \alpha)^{n-1} P_{n-1}(\alpha) + \dots + (X - \alpha) P_1(\alpha) + P_0(\alpha)$. Comment sont reliés $P_i(\alpha)$ et la i -ième dérivée $P^{(i)}(\alpha)$ de P au point α ?
2. Utiliser cette méthode pour calculer $P^{(i)}(\alpha), i = 0, 1, 2, 3$, pour $P(X) = X^3 - 2X + 5$ et $\alpha = 39$.

Exercice III : Ecrire l'algorithme de Newton pour une fonction de classe C^1 donné.

Exercice IV : Calcul de $x^{1/4}$. On veut déterminer une valeur approchée de la racine quatrième d'un nombre réel positif. On commence par chercher une valeur approchée de $y = (1 + x)^{1/4}$ pour $x \geq 0$. On suppose que $x = 1$ (donc $y = 2^{1/4}$).

1. Donner un polynôme $P(X)$ de degré 4, à coefficients entiers et tel que $P(y) = 0$. Donner la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ obtenue en appliquant la méthode de Newton à P .
2. Donner une valeur u_0 pour laquelle la suite u_n converge vers y (justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour cette valeur de u_0).
3. Calculer u_4 , en déduire un encadrement de $2^{1/4}$.
4. Peut-on appliquer la même méthode pour $x \geq 0$ quelconque?
5. On suppose que l'on a calculé $2^{1/4}$ à 10^{-16} près.

6. Proposer une méthode permettant de calculer une valeur approchée de $x^{1/4}$ pour $x \geq 0$, en utilisant l'écriture mantisse-exposant de x en base 2 :

$$x = 2^e(1 + m),$$

$$e \in \mathbb{N}, m \in [0, 1[$$

et en utilisant la méthode ci-dessus.

7. Discuter la précision de l'approximation obtenue.

Exercice V : Dans cet exercice, on va résoudre l'équation

$$2x - \ln(x^2 + 1) - 3 = 0, x \in [0, 3] \quad (1)$$

par la méthode du point fixe, puis par la méthode de Newton. On pose :

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)/2 + 3/2$$

1. Calculer f' , f est-elle contractante sur l'intervalle $[0, 3]$?
2. Montrer qu'il existe une unique solution r à l'équation (1) sur $[0, 3]$.
3. Combien de termes de la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ faut-il calculer pour être sûr d'avoir une valeur approchée de r à une précision donnée ε pour tout $u_0 \in [0, 3]$? Donner une valeur approchée de r à $10^{(-8)}$ près.

Exercice VI : On réécrit l'équation (1) sous la forme $g(x) = 0$ où $g(x) = 2x - \ln(x^2 + 1) - 3$.

1. Donner une suite récurrente permettant de résoudre $g(x) = 0$ par la méthode de Newton.
2. Calculer g'' et étudier son signe sur $[0, 3]$.
3. Donner une valeur de u_0 telle que la suite définie ci-dessus converge vers r (on justifiera la convergence en montrant que les hypothèses de l'un des théorèmes du cours s'appliquent).
4. Calculer u_3 pour cette valeur de u_0 , puis donner une majoration de $|u_3 - r|$ en utilisant une valeur approchée de $f(u_3)$.
5. Si on fait le même calcul pour u_4 en précision machine (12 chiffres significatifs), que trouve-t-on pour $f(u_4)$? Peut-on en déduire une majoration de l'erreur $|u_4 - r|$? Expliquez ce phénomène.
6. Refaites le calcul de u_4 à partir de u_0 avec 30 chiffres significatifs, et déduisez-en une majoration de $|u_4 - r|$.

Exercice VII : Soit A une matrice carrée de taille m à coefficients réels. On suppose que A est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont réelles positives, on a donc

$$A = PDP^{-1}$$

avec $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_m)$ (matrice diagonale avec d_1, \dots, d_m sur la diagonale). On appellera racine carrée de D la matrice diagonale

$$\sqrt{D} = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_m})$$

et racine carrée de A la matrice $\sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1}$. Le but de l'exercice est de calculer A sans calculer P en appliquant la méthode de Newton pour résoudre $x^2 = A$.

1. Expliciter la méthode de Newton pour trouver \sqrt{d} lorsque d est un réel positif. Montrer que la méthode converge lorsqu'on prend $u_0 = (1 + d)/2$.
2. Calculer les premiers termes de la suite pour $d = 220.121151781$ et pour $d = 8011.87884822$. Combien de termes faut-il pour stabiliser la suite avec 12 chiffres significatifs ?

3. Soient les suites de matrices (U_n) et (V_n) définies par :

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + AU_{n-1}), U_0 = (I_m + A)/2, V_n = P^{-1}U_nP$$

Déterminer V_0 et la relation de récurrence entre V_{n+1} et V_n .

4. En déduire que la suite V_n est une suite de matrices diagonales qui converge vers D .
5. Montrer que U_n est convergente et calculer sa limite.
6. Calculer le 19ième et 20ième terme en mode approché de la suite U_n pour

$$A = \begin{pmatrix} 7780 & -1324 \\ -1324 & 452 \end{pmatrix}$$

Comparer la vitesse de stabilisation avec celle des suites scalaires pour trouver $\sqrt{d_1}$ et $\sqrt{d_2}$.

7. Soit $f(X) = X^2 - A$ définie pour X matrice carrée de taille m , développer $f(X + H) - f(X)$ et en déduire que la différentielle de f en X appliquée à H vaut $XH + HX$.
8. Donner la suite de la méthode de Newton qui permet de résoudre $x^2 = A$.
9. Expliciter cette suite en supposant que tous les termes de la suite commutent entre eux. Montrer que c'est le cas de la suite (U_n) définie à la question 2 si $U_0 = (I_m + A)/2$ et qu'on effectue les calculs exactement (indication : montrer que tous les termes de la suite sont des matrices fractions rationnelles en A).
10. Expliquer pourquoi la précision est mauvaise à la question 5, comment faudrait-il modifier la récurrence pour améliorer la précision ?

Exercice VIII : On cherche à approcher numériquement une solution du système d'équations suivant

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

On réécrit ce système sous la forme : $f(x_1, x_2) = 0$ où f est une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 qui au vecteur $X = (x_1, x_2)^t$ associe le vecteur $Y = (x_1^2 + x_2^2 - 2, x_1^2 - x_2^2 - 1)^t$. Comme pour le cas de la dimension 1, une méthode de Newton consiste à regarder la solution de l'équation $f(X) = 0$ comme solution de l'équation $F(X) = X$ avec $F(X) = XD_f(X)^{(-1)} \circ f(X)$ où $D_f(X)$ est la matrice jacobienne de f que l'on suppose inversible.

1. Trouver la matrice Jacobienne en X .
2. Expliciter la méthode de Newton pour la fonction f .

Exercice IX : On désire déterminer toutes les solutions du système:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2 = 0 \\ (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 6)^2 = 25 \end{cases}$$

1. Déterminer graphiquement une approximation des solutions de ce système.
2. Améliorer ces approximations à l'aide d'une itération de la méthode de Newton.