Université d'Antananarivo — Année Universitaire: 2024-2025

Calcul numérique et algorithmique - MMI — 2 eme Année

1: Interpolation, Integration et Algorithmes

Exercice I : Base de Lagrange Soit $(l_i), i = 0, \cdots, n, n+1$ fonctions polynomailes $\in \mathbb{R}[x]^n$ véerifiant $l_i(x_j) = \delta_{ij}$. Montrer que (li) est une base de $\mathbb{R}[x]^n$.

Exercice II : Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange pour les points d'appui d'abscisses : $2, 1, 0, 1, 2$. Ensuite discuter l'erreur dinterpolation.

Exercice III :

1. Ecrire le système linéaire qui défnit le polynôme dinterpolation de degré 3 passant par les points de coordonnées $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

2. Calculer le déterminant de la matrice V de ce système linéaire La matrice V est appelée matrice de Vandermonde.

3. Calculer dans le cas général (i.e. en dimension quelconque) le déterminant dune matrice de Vandermonde.

Exercice IV : On veut interpoler $f(x) = \ln(x)$ par un polynôme aux points $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$ et $x_4 = 5$.

1. Trouver une expression algébrique de ce polynôme en utilisant la méthode de Newton.

2. Estimer la valeur de $f(6.32)$ avec le polynôme trouvé en 1 puis calculer l'erreur absolue.

Exercice V : Interpolation d'Hermite Soient $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Montrer qu'il existe un unique polynome P de degré ≤ 3 tel que: $P(x_0) = f(x_0), f^{'}(x_0) = P^{'}(x_0), f(x_1) = P(x_1), f^{'}(x_1) = P^{'}(x_1)$.

2. En s'inspirant du cours, monter que si f est de classe C^4, et si $x \in (x_0, x_1)$, alors, il existe $\epsilon \in (x_0, x_1)$ tel que:
$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\epsilon)}{4} \prod_{i=0}^{1} (x - x_i)^2$$

3. Trouver les polynomes $A_0, A_1, B_0, B_1 \in \mathbb{R}^3[x]$ tel que $p(x) = f(x_0)A_0(x) + f^{'}(x_0)A_1(x) + f(x_1)B_0(x) + f^{'}(x_1)B_1(x)$, puis trouver une forme de P faisant interventir les polynmes de Lagrange.

4. Proposez une généralisation de l'exercice, puis le résoudre.

Exercice VI : Prise en main C++

1. Opérateurs : Écrivez un programme qui effectue des opérations arithmétiques de base (addition, soustraction, multiplication, division) sur deux nombres entiers. Affichez les résultats.

2. Conditions : Écrivez un programme qui demande à l'utilisateur dentrer un nombre entier. Utilisez une instruction if pour déterminer si le nombre est positif, négatif ou nul. Affichez le résultat.

3. Boucles : Écrivez un programme qui utilise une boucle for pour afficher les nombres de 1 à 10. Ensuite, utilisez une boucle while pour afficher les nombres de 10 à 1.

Exercice VII : C++ simples

1. Tableaux : Écrivez un programme qui crée un tableau de 10 nombres entiers. Remplissez le tableau avec des valeurs aléatoires, puis affichez le contenu du tableau.

2. Fonctions : Écrivez une fonction qui prend deux nombres entiers en argument et retourne leur somme. Appelez cette fonction depuis votre programme principal et affichez le résultat.

3. Structures : Créez une structure pour représenter un livre (avec les champs titre, auteur, ISBN). Déclarez une variable de type structure et remplissez-la avec des informations sur un livre. Affichez les informations du livre.

4. Classes : Créez une classe Personne avec les attributs nom, âge et adresse. Ajoutez des méthodes pour afficher les informations de la personne et pour modifier lâge. Créez un objet de type Personne et utilisez les méthodes.

5. Reprendre la question précedente en faisant une programmation dynamique (créer une bibliothèque)

6. Pointeurs : Écrivez un programme qui utilise des pointeurs pour manipuler des variables et des tableaux.

7. Allocation dynamique de mémoire : Écrivez un programme qui alloue dynamiquement de la mémoire pour un tableau dentiers. Utilisez lopérateur new pour allouer la mémoire et lopérateur delete pour la libérer.

8. Fichiers : Écrivez un programme qui lit le contenu dun fichier texte et laffiche à l'écran. Ensuite, écrivez un programme qui écrit du texte dans un fichier.

Exercice VIII : Classe nombres complexes

1. Créez une structure nommée Complexe pour représenter un nombre complexe. Cette structure devra contenir deux membres :reel (de type double) , pour la partie réelle du nombre complexe, imaginaire (de type double) pour la partie imaginaire du nombre complexe.

2. Écrivez des fonctions pour effectuer les opérations suivantes sur les nombres complexes :

   a) addition(Complexe a, Complexe b) : retourne la somme de deux nombres complexes.
   b) soustraction(Complexe a, Complexe b) : retourne la différence de deux nombres complexes.
   c) multiplication(Complexe a, Complexe b) : retourne le produit de deux nombres complexes.
   d) division(Complexe a, Complexe b) : retourne le quotient de deux nombres complexes.

3. Écrivez des fonctions pour calculer :

a) le module(Complexe z) : retourne le module (ou valeur absolue) dun nombre complexe. Vous pouvez utiliser la bibliothèque $< cmath >$ pour cela.

b) l argument(Complexe z) : retourne largument (ou phase) d'un nombre complexe. Vous pouvez utiliser la fonction $std :: atan2$ de la bibliothèque $< cmath >$.

4. Écrivez une fonction afficher(Complexe z) qui affiche un nombre complexe sous la forme $a + bi$ ou $a - bi$ (selon le signe de la partie imaginaire).

Exercice IX : L'algèbre des quaternions Reprendre l'exercice précédente mais cette fois ci aves l'algèbre des quaternions $\mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ avec $i^2 = j^2 = k^2 = 1, ij = k, jk = i, ki = j$

Exercice X : Méthodes des trapèzes Estimer $\int_0^{5/2} f(t)dt$ à partir des donnés suivantes:

x	0	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$
$f(x)$	$3/2$	2	2	$5/2$	$5/4$	$11/9$

(1)

en utilisant la méthode des trapèzes

Exercice XI : Soit $f \in C^1([0, 1])$. On considère la formule de quadrature élémentaire pour approcher $\int_0^1 f(t)dt$:

$$J(f) = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(\epsilon) + \lambda_2 f'(0),$$

où $\epsilon \in]0, 1[$ et $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ sont des réels. On pose $E(f) = I(f)J(f)$

1. Déterminer les paramètres $\lambda_0, \lambda_1, \lambda 2$ et ϵ pour que le formule de quadrature soit exacte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

2. Les paramètres $\epsilon, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ ainsi déterminés, calculer $E(x \to x^4)$ et en déduire l'ordre de la méthode.

3. Trouver une expression de lerreur $E(f)$ lorsque $f \in C^4([0, 1])$.

4. À laide d'un changement de variable, construire une méthode de quadrature élémentaire sur un intervalle [a, b] et donner la valeur de lerreur pour la formule composée.