Université d'Antananarivo — Année Universitaire: 2024-2025
Calcul numérique et algorithmique - MMI — 2 eme Année

Résolution et Algorithmes

Exercice I : Décomposion en LU Soit $A \in Gl_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif. On veut dé composer A sous forme produit $L \cdot U$ avec L et U des matrices triangulaires inférieur et supérieur respectivement. On impose de plus qu'il n'y a que des 1 sur la diagonale de U.

1. Trouver les composantes de L et de U lorsque $n = 4$.
2. Trouver un algorithme pour le cas générale (n est générique).
3. Déterminer graphiquement une approximation des solutions de ce système.
4. Améliorer ces approximations à l'aide dune itération de la méthode de Newton.

Exercice II : Utiliser la méthode de Gram-Schmidt pour orthonormaliser dans $\mathbb{R}^3$ avec son produit scalaire usuel la base $e_1 = (1, 1, -1),\ e_2 = (1, -1, 1)$ et $e_3 = (-1, 1, 1)$. Si $e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}$ est la nouvelle base, montrer que la matrice de passage correspondante est triangulaire.

Exercice III : Pour chaque espace V muni dun produit scalaire ϕ :

a) Appliquer la méthode de Gram-Schmidt à la famille F, afin de produire une base orthonormée pour le sous-espace W engendré par F.

b) Calculer la projection orthogonale de $v \in V$ sur W.

1. $V = \mathbb{R}^4$, ϕ = produit scalaire usuel, $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3), v = (1, 1, 1, 1)$ où $u_1 = (1, 1, 0, 0), u_2 = (1, 0, -1, 1), u_3 = (0, 1, 1, 1)$.
2. $V = \mathbb{R}^3$, $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + 3x_3y_3, \mathcal{F} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0)), v = (0, 0, 1)$.
3. $V = \mathbb{R}[X]^3, \psi(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx, \mathcal{F} = (1, X, X^2), v = X^3$.

Exercice IV : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Montrer que l'application

$$b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto X^t AY$$

est un produit scalaire. Utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt pour trouver une base b-orthonormée.

Exercice V : On se donne un nuage de points $A_i(x_i, y_i, z_i)$ avec $i \in 1, \cdots, n$. On sait qur que ces points sont proches dun plan P dans $\mathbb{R}^3$. Donner l'équation du plan P qui modélise le mieux ces points.

Exercice VI : Gram-Schmit et Décomposition QR Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$ une base de E.

1. Ecrire lalgorithme de Gram-Schmidt qui donne une base orthonormée de E en partant de $\mathcal{B}$.
2. Soit maintenant $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on veut décomposer A sous forme $Q \cdot R$ avec Q une matrice orthogonale ($Q \cdot Q^T = I$) et R une matrice triangulaire supérieur. Comment lorthoginalisation de Gram-Schmidt peut aider ? Ecrire un algortithme.