ESPACE EUCLIDIEN ET ESPACE HERMITIEN

1 Espace euclidien

Dans cette section, E designe un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1.1 Produit scalaire et norme

1.1.1 Définition

Soit f une fbs sur E. On dit que f est un produit scalaire sur E si elle est non dégénérée et positive, c-a-d, si $Ker\, f = 0$ et $f(x,x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.
Dans le cas où E est de dimension fini n, f est une produit scalaire si elle a pour signature $(n,0)$.

1.1.2 Proposition

Soit f une fbs positive sur E de fq associé q. Alors

- $\forall x \in E,\ (q(x) = 0 \Rightarrow x \in Ker\, f)$.
- $\forall x, y \in E,\ |f(x,y)| \leq \sqrt{q(x)q(y)}$

1.1.3 Définition

On appelle norme sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ telle que

(i) Si $N(x) = 0$ alors $x = 0$

(ii) $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

(iii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

1.1.4 Proposition

Soit f ue produit scalaire sur E et q la fq associé q. L'application $x \to sqrtq(x)$ est une norme sur E.

1.1.5 Définition

Un espace euclidien est u espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et muni d'un produit scalaire.
Notation: Si E est un espace euclidien, son produit scalaire sera noté $<,>$.
Remarque: Toute espace euclidien admet une base orthonormale.

1.2 Adjoint d'un endomorphisme

1.2.1 Définition

Soit E un espace euclidien et u un endroit (ou opérateur) sur E. On appelle adjoint de u l'endo u^* défini par

$$\forall x, y \in E, < u^*, y >=< x, u(y) > .$$

1.2.2 Proposition

Soit E un espace euclidien et $(a_1, \cdots, a_n$ une base orthonormale de E. Si $M = Mat(u, (a_i))$ et $M^* = Mat(u^*, (a_i)), alors M^* = M^t$.

1.2.3 Proposition

Soit u, v des opérateurs sur E et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a:

(i) $(u^*)^* = u$;

(ii) $(u + v)^* = u^* + v^*$, $(\lambda u)^* = \lambda u^*$;

(iii) $(uv)^* = v^* u^*$.

1.2.4 Définition

Soit E un espace euclidien et u un opérateur sur E. On dit que u est:

- symétrique (ou auto-adjoint) si $u^* = u$;
- orthogonal si u est inversible et $u^* = u^{-1}$.

1.3 Diagonalisation d'un endo symétrique

1.3.1 Proposition

Soit u un endroit symétrique sur E, espace euclidien de dimension n. Alors

(1) u admet n valeurs propres réelles

(2) Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u, alors $Ker(u - \lambda e)$ et $Ker(u - \mu e)$ sont orthogonaux.

1.3.2 Proposition

Soit u un endroit symétrique d'un espace euclidien E de dimension n. Alors il existe une base $(b_1, \cdots, b_n)$ de E telle que les b_i soient des vecteurs propres de u.

1.3.3 Corollaire

Tout endo symétrique d'un espace euclidien E est diagonalisable.

1.3.4 Proposition

Soit u un endroit symétrique d'un espace euclidien E. La forme g définie par

$$\forall x, y \in E, g(x, y) =< u(x), y >$$

est une fbs sur E.

1.3.5 Proposition

Soit g une fbs sur E. Alors il existe un unique endo symétrique u de E tel que

$$\forall x, y \in E, g(x,y) =< u(x), y > .$$

2 Espace hermitien

2.1 Forme sémi-linéaire et forme sesqui-linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$.

2.1.1 Définition

Une forme sémi-linéaire sur E est une application $h : E \to \mathbb{C}$ ayant les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ h(x+y) = h(x) + h(y)$;

(ii) Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C},\ h(\lambda x) = \bar{\lambda}(x)$.

2.1.2 Définition

Une forme sesqui-linéaire sur E est une application $h : E \times F \to \mathbb{C}$ telle que :

(1) Pour tout $y \in F,\ f_{.y}$ est une forme linéaire sur E;

(2) Pour tout $x \in E,\ f_{x.}$ est une forme sémi-linéaire sur F

2.2 Forme hermitienne

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

2.2.1 Définition

Une forme hermitienne sur E est une forme sesqui-linéaire f sur $E \times E$ vérifiant les propriétés suivante:

$$\forall x, y \in E,\ f(x,y) = \overline{f(x,y)}.$$

2.2.2 Définition

Soit f une forme hermitienne sur E. On appelle forme quadratique associée à f l'application $q : E \to \mathbb{R}, x \to q(x) = f(x,x)$.
NB: f et g sont liées par la relation

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\left\{[q(x+y) - q(x-y)] + i[q(x,+iy) - q(x-iy)]\right\}.$$

2.2.3 Définition

On appelle noyau d'une fh f le noyau de l'application sémi-linéaire $\varphi : E \to E^*, y \to \varphi(y) = f_{.y}$.
Autrement dit,

$$Ker\, f = \{y; f(x,y) = 0\ \forall x \in E\}.$$

Remarque: On a également $Ker\, f = \{x; f(x,y) = 0\ \forall y \in E\}$

2.2.4 Définition

On dit qu'une fh f est non dégénérée si $Ker\, f = 0$.

Expression d'une fh

Soit E un $\mathbb{C}$ev de dimension n, $\mathcal{B} = (e_j)$ une base de E, $x = \sum_i x_i e_i$ et $y = \sum_j y_j e_j$ deux vecteurs de E. On a :

$$f(x, y) = \sum_{i,j} f(x_i e_i, y_j e_j) = \sum_{i,j} f(e_i, e_j) x_i \bar{y_j}.$$

En posant $a_{i,j} = f(e_i e_i)$, on a $a_{j,i} = \bar{a_{i,j}}$. La matrice $(a_{i,j})$ est appelée la matrice de f dans la base $\mathbb{B}$. Notons $a_{i,i}$ que est rée l' pour tout i.
Toute fh a donc pour Expression de la forme

$$\sum_i a_i x_i \bar{y_i} + \sum_{i \neq j} a_{i,j} x_i \bar{x_j}$$

et la fq associée a pour expression

$$q(x) = \sum_i a_i |x_i|^2 + \sum_{i \neq j} a_{i,j} x_i \bar{x_j}$$

oû les a_i sont des réels et $a_{j,i} = \bar{a_{i,j}}$ pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$.

2.2.5 Proposition

Une fh d'un $\mathbb{C}$ev de dimension n est non dégénérée SSI sa matrice est de rang n.

2.2.6 Proposition

Soit F un sev d'un $\mathbb{C}$ev E et f une fh sur E. Alors $E = F \oplus F^{\perp}$ ssi la restriction de f à F est non dégénérée.

2.2.7 Proposition

Si $dim\, E = n$ et f une fh de rang R, alors E admet une base f-orthogonale (a_i) telle que $f(a_i, a_i) \neq 0$ pour $i \leq r$ et 0 sinon.

2.2.8 Proposition

Si $dim\, E = n$ et f une fh de rang R, alors il existe un couple unique $(p, p^{'})$ tel que $p + p^{'} = r$ et une base f-orthogonale dans laquelle la fq associée a pour expression

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} |x_i|^2 - \sum_{i=p+1}^{r} |x_i|^2.$$

Le couple $(p, p^{'})$ est appelée signature de f (ou de q).

2.2.9 Définition

On dit qu'une fh (ou fqh associé q) est positive si $q(x) \geq 0$ pour tout x.

2.2.10 Proposition (Inégalité de Schwarz)

Si f est une fh positive , on a $\forall x, y,\ |f(x, y)|^2 \leq f(x, x) f(y, y)$.

2.2.11 Proposition

Si f est une fh positive et q la fqh associée, alors l'application $x \to sqrtq(x)$ est une norme sur E.

2.2.12 Définition

Un espace hermitien est un $\mathbb{C}$ev de dimension finie muni d'un produit scalaire, c-à-d, muni d'une fh non dégénérée positive.

2.2.13 Proposition

Tout espace hermitien admet une base orthonormale.

2.3 Adjoint d'un endo

2.3.1 Définition

Soit E un espace hermitien dont le produit scalaire est noté $(|)$ et soit u un opérateur sur E. On déduit l'adjoint u^* de u comme dans le cas réel par

$$\forall x, y \in E,\ (u^*(x)|y) = (x|u(y)).$$

2.3.2 Proposition

Soit E unespace hermitien, u et v deux opérateurs sur E et $\lambda \in \mathbb{C}$.

a) Si A est la matrice de u dans la base orthonormale, alors $\overline{A^t}$ est la matrice de u^* dans la base orthonormale;

b) On a $(u^*)^* = u,\ (u+v)^* = u^* + v^*,\ (\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^*$ et $(uv)^* = v^* u^*$.

2.3.3 Définition

Un opérateur d'un espace hermitien est dit hermitien s'il est egal à son adjoint.

2.3.4 Proposition

Soit u un opérateur. Alors

$$u \text{ hermitien } \Leftrightarrow \forall x,\ (u(x)|x) \text{ réel}$$

2.3.5 Proposition

Tout opérateur hermitien u d'un espace hermitien E de dimension n admet n valeurs propres réelles et est diagonalisable.