Universidad de las Fuerzas Armadas
Ecuaciones Diferenciales

Actividad **1**

Apellidos: Corrección
Nombres: ______________________ **Firma:** ______________________
NRC: ____________ **Cédula:** ______________________

Usted debe realizar la actividad en estas hojas **a mano** y una vez concluida escanearla asegurándose de que el archivo electrónico resultante sea legible. El formato de entrega es PDF, con el nombre del archivo **A1.Apellido.Nombre.EDO.pdf**. Si incumple estas reglas tendrá una penalización de dos puntos en su trabajo.

Debe utilizar esfero o un lápiz que permita leer con facilidad el procedimiento realizado.

Se requiere que usted demuestre su trabajo y esfuerzo en esta actividad. Considere los siguientes lineamientos:

- **Organice su trabajo**, de una manera coherente y ordenada en el espacio disponible, en caso de requerir mayor espacio puede continuar el desarrollo en hojas adicionales que serán colocadas en el orden como se presentan los ejercicios.
- **Si envía solo la respuesta**, su calificación será de cero.
- **Si envía la respuesta y parte del desarrollo**, recibirá una rebaja de puntaje.
- **El procedimiento**, en todos los ejercicios debe estar completo y justificado para obtener la calificación completa en cada pregunta.

Ejercicios

1. Verifique que la función dada es una solución de la ecuación diferencial.

   (a) $y'' - 6y' + 13y = 0, \qquad y = e^{3x}\cos(2x)$

$$y' = 3e^{3x}\cos(2x) - 2e^{3x}\operatorname{sen}(2x) = e^{3x}(3\cos 2x - 2\operatorname{sen} 2x)$$

$$y'' = 3e^{3x}(3\cos 2x - 2\operatorname{sen} 2x) + e^{3x}(-6\operatorname{sen} 2x - 4\cos 2x)$$

$$\begin{aligned} &3e^{3x}(3\cos 2x - 2\operatorname{sen} 2x) + e^{3x}(-6\operatorname{sen} 2x - 4\cos 2x) \\ &-6e^{3x}(3\cos 2x - 2\operatorname{sen} 2x) + 13e^{3x}\cos 2x \end{aligned} = 0$$

$$e^{3x}\left(\cos(2x)(\cancel{9-4}\cancel{-18+13}) + \operatorname{sen}(2x)(\cancel{-6-6+12})\right) = 0$$

$$e^{3x}(\cos(2x)(0) + \operatorname{sen}(2x)(0)) = 0$$

$$0 = 0$$

(b) $y'' + y = \tan(x)$, $\quad y = -\cos(x)\ln(\sec(x) + \tan(x))$

$$* \quad y' = +\operatorname{sen}(x)\ln(\sec(x)+\tan(x)) - \cos(x)\left(\frac{\sec(x)\tan(x)+\sec^2(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\right)$$

$$y' = +\operatorname{sen}(x)\ln(\sec(x)+\tan(x)) - \cancel{\frac{\tan(x)+\sec(x)}{\sec(x)+\tan(x)}}$$

$$y' = +\operatorname{sen}(x)\ln(\sec(x)+\tan(x))$$

$$* \quad y'' = +\cos(x)\ln(\sec(x)+\tan(x)) + \operatorname{sen}(x)\left(\frac{\sec(x)\tan(x)+\sec^2(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\right)$$

$$* \quad y''+y = \tan(x)$$

$$\boxed{\cos(x)\ln(\sec(x)+\tan(x)) + \operatorname{sen}(x)\left(\frac{\sec(x)\tan(x)+\sec^2(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\right) - \cos(x)\ln(\sec(x)+\tan(x)) = \tan(x)}$$

$$\cancel{(\cos(x)-\cos(x))}^{0}\ln(\sec(x)+\tan(x)) + \operatorname{sen}(x)\sec(x) = \tan(x)$$

$$+\operatorname{sen}(x)\frac{1}{\cos(x)} = \tan(x) \Rightarrow \boxed{\tan(x) = \tan(x)}$$

2. Encuentre la ecuación diferencial ordinaria que representa a la familia de parábolas con eje de simetría $y = 0$ y vértice en (1,0).

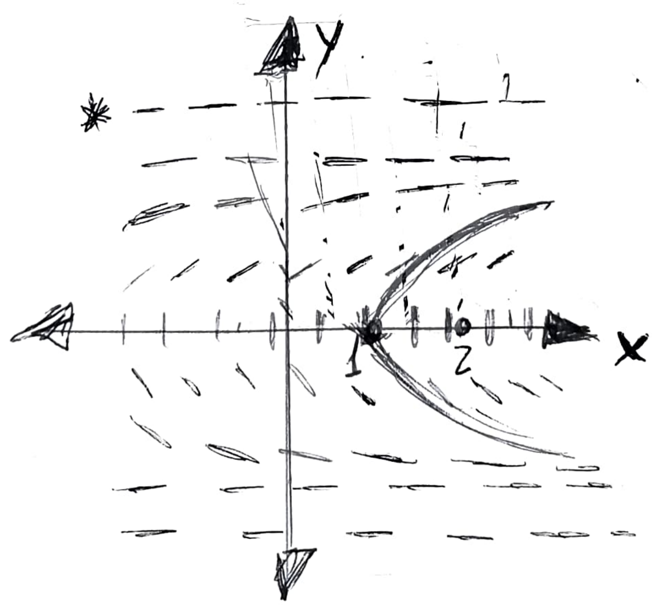
Familia de parábolas simetría $y=0$ y $v(1,0)$ $\Rightarrow$

$$(y-k)^2 = \lambda(x-h)$$

$$y^2 = \lambda(x-1)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \lambda$$

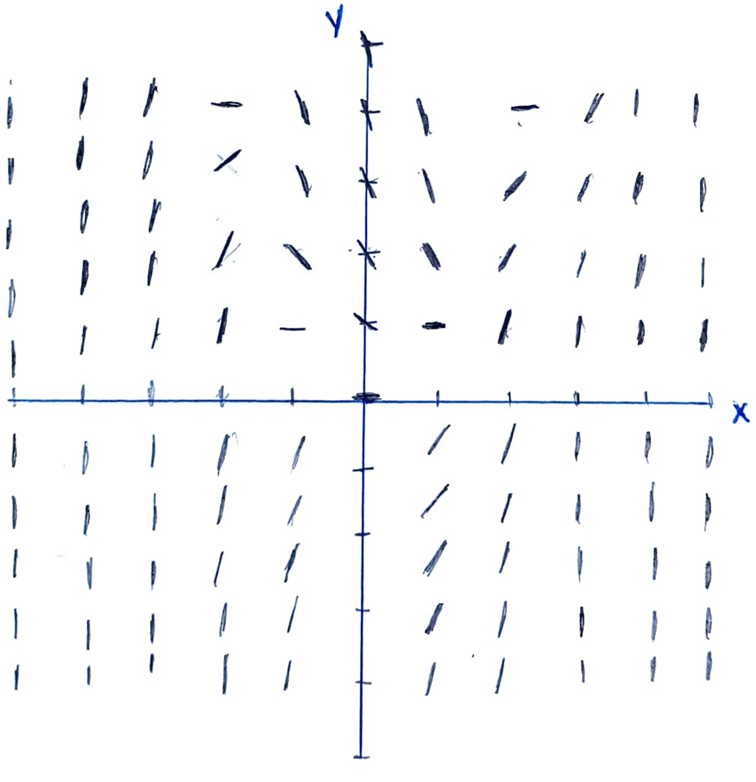
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1}{y}$$



Nombre: Firma:

3. Dibuje el campo de direcciones de la ecuación diferencial dada en la región (-5,5)x(-5,5) con Geogebra. Interprete el gráfico e indique la lista de puntos en los que la pendiente es cero.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y$$

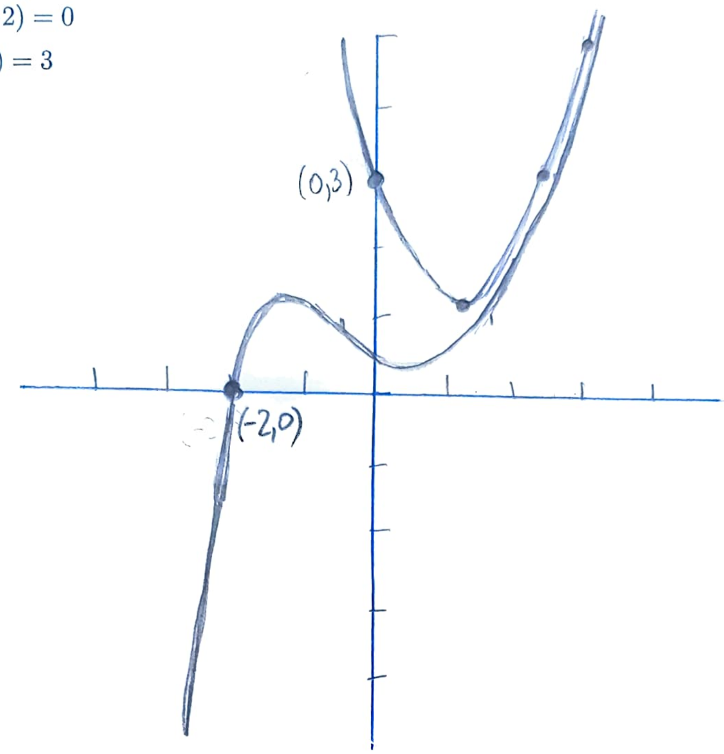


x	y	$\frac{dy}{dx}$
1	1	0
2	4	0
0	0	0
-1	1	0
-2	4	0

Encuentra solución aproximada que pase por cada uno de los puntos, de forma manual o en Geogebra. Interprete cada curva solución.

(a) $y(-2) = 0$

(b) $y(0) = 3$



4. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales en cada literal como el método solicitado, así mismo, justifique porque utiliza dicho método.

(a) **Ecuación separable**

$$(e^x - e^{-x})\frac{dy}{dx} = y^2$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{1}{e^x - e^{-x}}\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}\ln(e^x+1) + \frac{1}{2}\ln(e^x-1) + C$$

$$-\frac{1}{y} = \ln\left(\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,C\right)$$

$$\frac{1}{y} = \ln\left(\sqrt{\frac{e^x+1}{e^x-1}}\,C\right)$$

$$y = \ln^{-1}\left(\sqrt{\frac{e^x+1}{e^x-1}}\,C\right)$$

$$\int \frac{1}{e^x - \frac{1}{e^x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx$$

$u = e^x$

$du = e^x dx$

$$= \int \frac{dx}{u^2-1}$$

$$= \int \frac{du}{(u+1)(u-1)}$$

$$= \int \left(-\frac{1}{2(u+1)} + \frac{1}{2(u-1)}\right) du$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(u+1) + \frac{1}{2}\ln(u-1)$$

(b) **Ecuación Homogénea**

ED: $-y\,dx + (x + \sqrt{xy})\,dy = 0$

$M(x,y) = -y \quad M(\lambda x, \lambda y) = \lambda(-y)$
$N(x,y) = x + \sqrt{xy} \quad M(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \sqrt{\lambda x \lambda y} = \lambda(x + \sqrt{xy})$ } Si es homogénea.

$\mu = \frac{y}{x}$; $y = \mu x$, $dy = \mu dx + x d\mu$

ED: $-\mu x dx + (x + \sqrt{\mu x^2})(\mu dx + x d\mu) = 0$

$\cancel{-\mu x dx} + \cancel{\mu x dx} + x^2 d\mu + \mu^{3/2} x dx + \mu^{1/2} x^2 d\mu = 0$

$(1 + \mu^{1/2}) x^2 d\mu + \mu^{3/2} x dx = 0.$

$\frac{(1+\mu^{1/2})}{\mu^{3/2}} d\mu = -\frac{1}{x} dx$

$\int (\mu^{-3/2} + \frac{1}{\mu}) d\mu = \int -\frac{1}{x} dx$

$-2\mu^{-1/2} + \ln \mu = -\ln(x) + C$ $\quad \boxed{-2\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln y = C}$

$-2\sqrt{x/y} + \ln y - \ln x = -\ln x + C$

(c) **Ecuación Exacta**

$$(x - y^3 + y^2 \operatorname{sen}(x))\,dx = (3xy^2 + 2y\cos(x))\,dy$$

$M(x,y) = x - y^3 + y^2 sen(x)$, $\frac{\partial M}{\partial y} = -3y^2 + 2y sen(x)$
$N(x,y) = -3xy^2 - 2y\cos(x)$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -3y^2 + 2y sen(x)$ } Si es EDO exacta.

$\frac{\partial F}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = N$

$\frac{\partial F}{\partial x} = M \Rightarrow F = \int M \partial x = \int (x - y^3 + y^2 sen(x)) \partial x = \frac{x^2}{2} - xy^3 - y^2\cos(x) + f(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = N \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} - xy^3 - y^2\cos(x) + f(y)\right) = N$

$\cancel{-3xy^2} \cancel{- 2y\cos(x)} + f'(y) = \cancel{-3xy^2} \cancel{- 2y\cos(x)}$

$f'(y) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial f(y)}{\partial y} = 0$, $\partial f(y) = 0 \partial y$, $\int \partial f(y) = \int 0 \partial y$, $f(y) = f(x) = C.$

Solución: $\boxed{F = \frac{x^2}{2} - xy^3 - y^2\cos(x) + C = 0}$

Nombre: ______________________ Firma: ______________________

(d) **Factor integrante**

$$(y^2 + xy^3)\,dx + (5y^2 - xy + y^3\,\mathrm{sen}(y))\,dy = 0$$

$M(x,y) = y^2 + xy^3$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y + 3xy^2$

$N(x,y) = 5y^2 - xy + y^3 \mathrm{sen}(y)$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -y$

EDO no exacta

Factor Integrante $f(y) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-y - 2y - 3xy^2}{y^2 + xy^3} = \frac{-3y\cancel{(1+xy)}}{y^2\cancel{(1+xy)}}$

$f(y) = -\frac{3}{y}$

$e^{-\int 3/y\,dy} = e^{-3\ln y} = y^{-3}$

ED $*$ y^{-3}:

$\left(\frac{1}{y} + x\right)dx + \left(\frac{5}{y} - \frac{x}{y^2} + \mathrm{sen}(y)\right)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$

$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$

ED es exacta.

$\frac{\partial F}{\partial x} = M$, $F = \int M \partial x = \int \left(\frac{1}{y} + x\right)\partial x$

$F = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + f(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = N$, $-\cancel{\frac{x}{y^2}} + f'(y) = \frac{5}{y} - \cancel{\frac{x}{y^2}} + \mathrm{sen}(y)$

$f'(y) = \frac{5}{y} + \mathrm{sen}(y)$, $f(y) = \int \left(\frac{5}{y} + \mathrm{sen}(y)\right)dy$

$f(y) = 5\ln(y) - \cos(y) + C$

Solución

$$\boxed{F = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + 5\ln(y) - \cos(y) + C = 0}$$

(e) **Sustitución**

$$(5x^2 - 2y^2)\,dx - xy\,dy = 0$$

$M(x,y) = 5x^2 - 2y^2$, $M(\lambda x, \lambda y) = 5\lambda^2 x^2 - 2\lambda^2 y^2$, $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2(5x^2 - 2y^2)$ Homog.

$N(x,y) = -xy$, $N(\lambda x, \lambda y) = -\lambda x \lambda y$, $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2(-xy)$ Homog.

Sustitución: $u = \frac{y}{x}$, $y = ux$, $dy = u\,dx + x\,du$

ED: $(5x^2 - 2u^2x^2)dx - ux^2(u\,dx + x\,du) = 0$

$5x^2dx - 2u^2x^2dx - u^2x^2dx - ux^3du = 0$

$5x^2dx - 3u^2x^2dx - ux^3du = 0$

$x^2(5 - 3u^2)dx - ux^3du = 0$

$ux^3du = x^2(5 - 3u^2)dx$

$\int \frac{u}{5 - 3u^2}du = \int \frac{1}{x}dx$

$v = u^2$

$dv = 2u\,du$

$\frac{1}{2}\int \frac{dv}{5 - 3v} = \ln x + C$

$-\frac{1}{6}\ln(5 - 3v) = \ln x + C$

$-\frac{1}{6}\ln(5 - 3u^2) = \ln x + C$

$\ln(5 - 3u^2) = \ln Cx^{-6}$

$5 - 3u^2 = Cx^{-6}$

$5 - 3\frac{y^2}{x^2} = Cx^{-6}$

$-\frac{3y^2}{x^2} = \frac{C}{x^6} - 5$

$$\boxed{y^2 = \frac{\frac{C}{x^6} + 5}{3}x^2}$$

Nombre: ______________________ Firma: ______________________

5. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial. En cada problema debe indicar el método utilizado para resolver.

(a) $y\,dx + x(\ln x - \ln y - 1)\,dy = 0, \qquad y(1) = e$

$y\,dx + x\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 1\right)dy = 0$

$M(x,y) = y\ ,\ M(\lambda x, \lambda y) = \lambda y$

$N(x,y) = x\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)-1\right),\ N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)-1\right)$

Homogéneos.

$v = \frac{x}{y},\ x = vy,\ dx = v\,dy + y\,dv$

ED: $\frac{1}{y}\left(y\,dx + x\left(\ln\frac{x}{y} - 1\right)dy = 0\right)$

$dx + \frac{x}{y}\left(\ln\frac{x}{y} - 1\right)dy = 0$

$v\,dy + y\,dv + v(\ln v - 1)dy = 0$

$v\,dy + v(\ln v - 1)\,dy = y\,dv$

$v(1 + \ln v - 1)\,dy = y\,dv$

$v\ln v\,dy = y\,dv$

$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{v\ln v}dv$

(*) $\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{v\ln v}dv$

$\int \frac{1}{v\ln v}dv = \int \frac{1}{u}du = \ln u = \ln(\ln v)$

$u = \ln v$
$du = \frac{1}{v}dv$

en (*) $\ln y = \ln(\ln v) + C$

$\ln y = \ln(C\ln v)$

$y = C\ln v$

$y = C\ln\left(\frac{x}{y}\right)$

Si $y(1) = e$:

$e = C\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

$e = C(-1)$

$C = -e$

$\Rightarrow \boxed{y = -e\ln\left(\frac{x}{y}\right)}$

(b) $\underbrace{(y^2\cos(x) - 3x^2y - 2x)}_{M(x,y)}\,dx + \underbrace{(2y\,\mathrm{sen}(x) - x^3 + \ln(y))}_{N(x,y)}\,dy, \qquad y(0) = e$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y\cos(x) - 3x^2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y\cos(x) - 3x^2 \quad \Rightarrow$ E.D. exacta.

Al ser una ED. exacta se tiene que $\frac{\partial F}{\partial y} = M$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = N$, se busca F.

$F = \int M\,dx = \int(y^2\cos(x) - 3x^2y - 2x)\,\partial x$

$F = y^2\,\mathrm{sen}(x) - x^3y - x^2 + f(y)$

Si $\frac{\partial F}{\partial y} = N \Rightarrow \cancel{2y\,\mathrm{sen}(x)} - \cancel{x^3} + f'(y) = \cancel{2y\,\mathrm{sen}(x)} - \cancel{x^3} + \ln(y)$

$f'(y) = \ln y$

$f(y) = \int \ln y\,dy$

$u = \ln y \quad du = \frac{1}{y}dy$
$dv = dy \quad v = y$
$\int \ln y\,dy = y\ln y - y$

$f(y) = y\ln y - y + C$

$\boxed{F = y^2\,\mathrm{sen}(x) - x^3y - x^2 + y\ln y - y = C}$

Si $y(0) = e \Rightarrow \cancel{e^2\,\mathrm{sen}(0)} - \cancel{0^3 e} - \cancel{0^2} + e\ln e - e = C$

$e - e = C$

$\boxed{0 = C}$

Nombre: ______________________ Firma: ______________________

(c) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 1, \qquad y(0) = \frac{5}{2}$

$$\int \frac{dy}{1-2y} = \int dx$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1-2y) = x + C$$

$$\ln\sqrt{\frac{1}{1-2y}} = x + C$$

$$\frac{1}{1-2y} = ce^{x}$$

$$1-2y = ce^{-x}$$

$$-2y = ce^{-x} - 1$$

$$\boxed{y = \frac{1-ce^{-x}}{2}}$$

Si $y(0) = \frac{5}{2}$

$$\frac{5}{2} = \frac{1-ce^{0}}{2}$$

$$5 = 1 - C$$

$$4 = -C$$

$$C = -4$$

$$\boxed{y = \frac{1+4e^{-x}}{2}}$$

(d) $x^2\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3y^2, \qquad y(1) = \frac{1}{2}$

$$x^2\frac{dy}{dx} - (2xy + 3y^2) = 0$$

$$\underbrace{(-2xy - 3y^2)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{x^2}_{N(x,y)}dy = 0$$

$$M(\lambda x, \lambda y) = -2\lambda^2 xy - 3\lambda^2 y^2$$

$$= \lambda^2(-2xy - 3y^2)$$

$$= \lambda^2 M(x,y)$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 = \lambda^2 N(x,y)$$

M y N son homogéneas.

$\mu = \frac{y}{x}$, $y = \mu x$, $dy = \mu dx + x d\mu$

ED: $(-2xy - 3y^2)dx + x^2 dy = 0$

$$(-2x^2\mu - 3x^2\mu^2)dx + x^2(\mu dx + x d\mu) = 0$$

$$-x^2(2\mu + 3\mu^2)dx + x^2\mu\, dx + x d\mu = 0$$

$$-x^2(2\mu + 3\mu^2 - \mu)dx = -x d\mu$$

$$x^2(\mu + 3\mu^2)dx = x d\mu$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{\mu(1+3\mu)}d\mu$$

$$c + \ln(x) = \ln\left(\frac{\mu}{1+3\mu}\right)$$

$$cx = \frac{\mu}{1+3\mu}$$

$$cx = \frac{y}{x+3y}$$

Condición inicial:

$$c = \frac{1/2}{1+3/2} \Rightarrow c = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{\frac{1}{5}x = \frac{y}{x+3y}}$$

Nombre: ________ Firma: ________

(e) $\cos(x)\,dx + ydy = 0, \qquad y(0) = 1$

$$\int \cos(x)\,dx = \int -y\,dy$$

$$\operatorname{sen}(x) + C = -\frac{y^2}{2}$$

$$\boxed{\sqrt{-2\operatorname{sen}(x) + C} = y}$$

$$\sqrt{C} = 1$$

$$C = 1$$

$$\boxed{y = \sqrt{1 - 2\operatorname{sen}(x)}}$$

6. Una aplicación clásica de las ecuaciones diferenciales son los problemas de decaimiento radioactivo y sus resultados son muy utilizados por ejemplo en el cálculo de la edad de fósiles y de esta manera se ha logrado estimar hace cuanto murieron. Un ejemplo de decaimiento radioactivo puede redactarse así:
   El isótopo radioactivo del C-14 (Carbono-14), decae con una razón proporcional a la cantidad Q presente en el tiempo t, se tiene que la ecuación diferencial que satisface este problema es:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ$$

   Resuelva la ecuación diferencial con $Q(0) = Q_0$, e interprete el resultado.

$$\frac{dQ}{dt} = kQ$$

$$\int \frac{dQ}{Q} = \int k\,dt$$

$$\ln Q = kt + C$$

$$Q = Ce^{kt}$$

Condición inicial $Q(0) = Q_0$

$$Q_0 = Ce^0$$

$$Q_0 = C$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = Q_0 e^{kt}}$$