Résolution du système d'équations de Saint-Venant

Compte Rendu
Travail en groupe

M1 - EDPMA
Groupe AlMati

Alice Castagnet
Marine Redondo
Tiffanie CARLIER

Encadrant
M. Leguèbe

14 novembre 2018

Table des matières

1 Introduction

Dans le cadre de l'approximation des grands lacs (à détailler ?), les équations de Saint-Venant permettent de modéliser la hauteur et la quantité de mouvement des étendues d'eau pour calculer par exemple l'écoulement d'une rivière ou son débordement.

Ses équations s'écrivent sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles non linéaire. Dans un premier temps, nous simplifierons le problème en nous intéressant à l'équation de transport scalaire :

$$\partial_t u + div(cu) = 0 \quad \text{dans un ouvert } \Omega$$

où c est le champ de vecteur vitesse avec $div(c) = 0$.

La méthode des volumes finis est la plus adaptée à ce type d'équation. Notre objectif est donc de résoudre une rupture de barrage pour les équations de Saint-Venant en utilisant la méthode des volumes finis.

2 Notations

Ω : ensemble d'espace associé au problème
u : inconnue du problème
t : variable de temps
Δt : pas de temps
n : nombre d'itérations en temps
x : variable d'espace qui peut avoir plusieurs dimensions
Δx : pas d'espace en une dimension
i : nombre d'itérations en espace
c : vitesse de u
K_i : volumes de contrôle où K_i et K_j sont deux volumes côte à côte
e : arête quelconque
ϵK_i : ensemble des arêtes du volume de contrôle K_i
$e_{i,j}$: arête commune aux volumes K_i et K_j
$n_{i,j}$: normale à l'arête $e_{i,j}$ extérieure à K_i

3 Recherche de ressources, documentation

3.1 L'équation de transport

1. Une équation de transport est une équation de la forme :

$$\partial_t u(t,x) + c(t,x,u).\nabla_x u(t,x) = 0$$

Elle décrit le comportement d'une quantité u dépendant du temps t et d'une autre variable x appartenant à un domaine Ω qui représente généralement un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$. La variable x peut définir une position, une vitesse, un couple position/vitesse...

Les équations de transport font apparaître une notion de propagation à vitesse finie et sont donc qualifiées d'équations d'hyperboliques.

Il en existe deux formes :

- la forme conservative :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(t,x) + div_x(c(t,x)u(t,x)) = 0 \\ u(t=0,x) = u_0(x) \end{array} \right.$$

- la forme forte :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(t,x) + c(t,x)\nabla_x u(t,x) = d(t,x,u) \\ u(t=0,x) = u_0(x) \end{array} \right.$$

Dans notre cas, nous utiliserons la forme conservative de l'équation de transport car la divergence du vecteur vitesse c sera nulle. Ceci nous permet ainsi de dire que l'intégrale de u sera conservée au cours du temps.

Pour résoudre le problème, il est nécessaire d'imposer une condition initiale à $t = 0$:
$u(t = 0, x) = u_0(x)$.
De plus, si Ω possède des bords il faut pour que le problème soit bien posé, ajouter une condition u_b sur la partie de la frontière où le champ est rentrant, c'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \partial\Omega, \quad c(t,x).\overrightarrow{n(x)} < 0 \Rightarrow u(t,x) = u_b(t,x)$$

où $\overrightarrow{n(x)}$ représente la normale extérieure à Ω.
Ceci permet d'éviter au problème d'être sur-déterminé et de vérifier ainsi les trois conditions nécessaires qui définissent un problème bien posé (existence, unicité et stabilité).

Dans le cas 1D où $x \in (0,1)$ et $t \in (0,T)$ que l'on étudiera par la suite, les conditions aux limites se présentent de cette manière :
Si $c > 0$ alors il est nécessaire d'ajouter sur le bord gauche qui est entrant la condition suivante :
$u(0,t) = g_0(t)$
Au contraire si $c < 0$ alors il est nécessaire d'ajouter sur le bord droit la condition suivante :
$u(1,t) = g_1(t)$

3.2 Résolution du problème 1D

3.2.1 Résolution par la méthode des caractéristiques

Dans le cas 1D avec un champ de vitesse constant c le problème s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u(t,x) + c\partial_x u(t,x) = 0, x \in \mathbb{R} \text{ et } t \in (0,T) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{array} \right.$$

Une des méthodes pour résoudre ce type d'équation est la méthode des caractéristiques. On définit les caractéristiques comme les courbes de $\mathbb{R}^2$ définies par $(t, X(t))$ où $X(t)$ est la solution de l'équation différentielle ordinaire $\partial_t X(t) = c$. On a alors que $(t, X(t))$ vérifie :

$$\partial_t u(t, X(t)) = \partial_t X.\partial_x u + \partial_t u = c.\partial_x u + \partial_t u = 0$$

Les solutions sont donc constantes le long des caractéristiques. Considérons (t^*, x^*) un point du plan avec $t^* > 0$ ainsi que $X^*(t)$ la caractéristique passant par ce point. Alors X^* vérifie :

$$\partial_t X^* = c\ ,\ X^*(t^*) = x^* \Rightarrow\ X^* = ct + x^* - ct^* \text{ et donc } X^*(0) = x * -ct^*$$

Finalement au point (t^*, x^*) sachant que la variable t ne rentre pas en compte car u est constante le long des caractéristiques, la solution u du problème est déterminée par :

$$u(t^*, x^*) = u(0, X^*(0)) = u(0, x^* - ct^*) = u_0(x^* - ct^*)$$

On obtient finalement le critère suivant :
Si u_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors il existe pour le problème de transport en une dimension une unique solution différentiable u en (t, x) donnée par :

$$u(t, x) = u_0(x - ct) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0$$

Cela signifie que connaissant $u_0(x_0)$ on peut déterminer u(x,t) sur toute la demi droite caractéristique issue de x_0 pour tout x_0

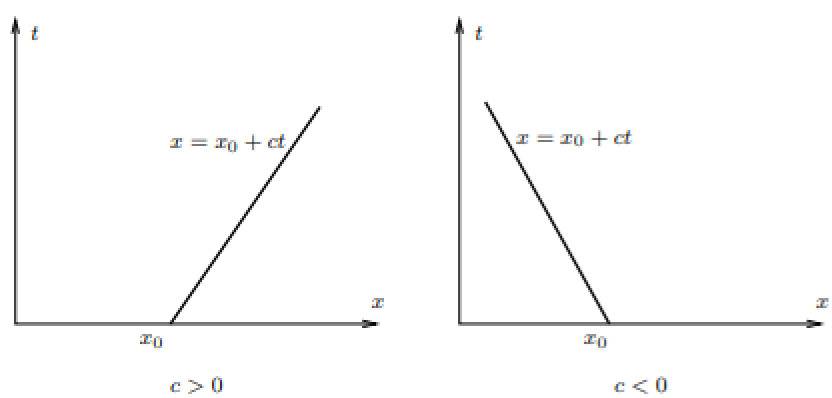

FIGURE 1 – Direction des caractéristiques suivant la valeur de c

3.2.2 Application

Considérons l'exemple d'un tube dans lequel coule de l'eau à une vitesse c que l'on choisit positive telle que l'eau présente des traces d'un certain polluant. Ainsi d'après ce que l'on a prouvé précédemment, la distribution du polluant à l'instant $t = 0$ est inchangée pour un temps $t_1 > 0$ à une translation près de ct_1.

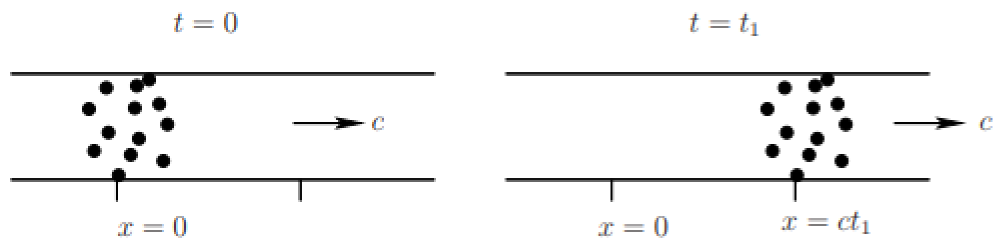

FIGURE 2 – Transport d'un polluant

3.3 Méthodes des volumes finis

3.3.1 Notion de maillage et de discrétisation

Pour définir la méthode des volumes finis il est nécessaire de définir la notion de maillage. Un maillage est la discrétisation spatiale d'un milieu continu, ou une modélisation géométrique d'un domaine par des éléments proportionnés finis et bien définis. Un maillage doit vérifier les propriétés suivantes :
Soit Ω l'ensemble d'espace associé à notre problème. Les éléments de la suite $(K_i)_{1\leq i\leq I}$ sont appelés volumes de contrôle. Cette suite définie un maillage du domaine Ω vérifiant :
K_i un ouvert de Ω
$K_i \cap K_j = \varnothing, \forall i \neq j$
$\cup_{i=1}^{I} \overline{K_i} = \overline{\Omega}$
En voici un exemple dans le cas d'un maillage "cell vertex" :

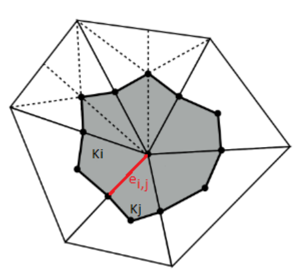

FIGURE 3 – Exemple d'un ensemble d'espace Ω divisé en espaces de contrôle K_i

3.3.2 Volumes finis en dimension quelconque

En considérant un maillage défini comme précédemment, le principe des volumes finis est l'intégration de l'équation aux dérivées partielles donc dans notre cas l'équation de transport sur tous les volumes de contrôle. La formule de la divergence nous permet de simplifier le problème qui nous dit :

$$\int_K div\, w\; dK = \int_{\partial K} w.n\; d(\partial K) = \sum_{\sigma \in \varepsilon K} \int_\sigma \omega_\sigma . n_\sigma\; d\gamma$$

où εK est l'ensemble des arêtes du volume de contrôle K, n_σ est la normale à l'extérieur par rapport à l'arête σ, et γ la mesure sur σ.

Ainsi, pour l'équation de transport la méthode des volumes finis donne sur un volume de contrôle K_i :

$$\frac{d}{dt}\int_{K_i} u(t,x)dx + \sum_{e_{i,j}\in\partial K_i} \int_{e_{i,j}} (cu).n_{i,j}\; d\gamma = 0 \tag{1}$$

$$mes(K_i)\frac{d\,u_i}{dt} = -\sum_{e_{i,j}\in\partial K_i} \int_{e_{i,j}} (cu).n_{i,j}\; d\gamma \tag{2}$$

Ici, γ est la mesure de $e_{i,j}$ où $e_{i,j}$ est l'arête commune aux deux volumes de contrôle K_i et K_j et $n_{i,j}$ est la normale à l'arête $e_{i,j}$ sortant du volume de contrôle K_i. Ajouter Figure ?

3.3.3 Méthode des volumes finis cas 1D

Méthode générale : La Figure ci-dessous représente un maillage en 1 dimension. Ici, l'espace Ω est le segment $[AB]$. On divise ce segment en petits segments délimités par les points x_i où $i \in \{1, l\}$ (en vert sur le schéma). On note que ici, tous les x_i sont strictement à l'intérieur des extrémités A et B, le volume de contrôle devant être ouvert. On définit ensuite les $x_{i\pm\frac{1}{2}}$ (en rouge sur le schéma). Les volumes de contrôle K_i définis précédemment correspondent aux intervalles ouverts $]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ pour $i \in \{1, l\}$.
Dans le cas ci-dessous, les x_i sont situés au milieu de K_i mais il est également possible de choisir les x_i à l'une ou l'autre des extrémités des K_i.

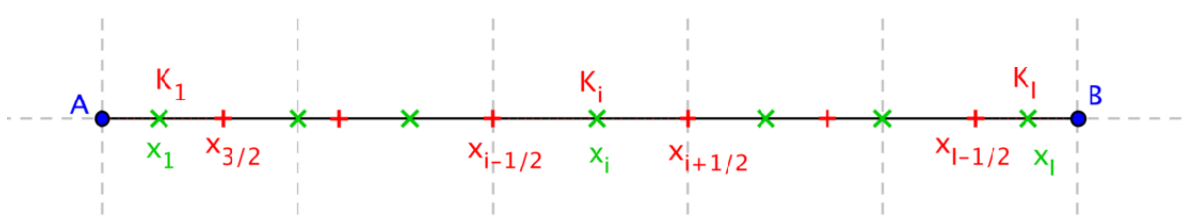

Figure 4 – Maillage en 1 dimension

Pour calculer numériquement la solution du problème 1D on introduit une grille qui est cette fois en x et en t.

On introduit les notations suivantes :
$x_i = i\Delta x, \Delta x$ le pas de la discrétisation en espace
${}_t n = n\Delta t, \Delta t$ le pas de la discrétisation en temps
De plus on note u_i^n une approximation de $u(x_i, tn)$

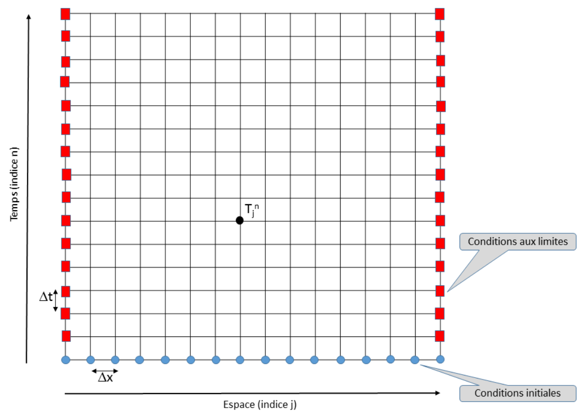

FIGURE 5 – Grille de la discrétisation

On intègre l'équation de transport sur tous les volumes de contrôle donc ici sur une dimension d'espace et sur la discrétisation en temps que l'on a défini précédemment, cela nous donne :

$$\int_t^{t+\partial t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \partial_t u(t,x) dx dt + \int_{n\partial t}^{(n+1)\partial t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \partial_x u(t,x) dx dt = 0$$
$$\Leftrightarrow \partial_x (u_k^{n+1} - u_k^n) + c\partial_t \left(u_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) = 0$$

Comme dit précédemment, la méthode des volumes finis consiste à intégrer le problème que l'on cherche à résoudre sur les différents volumes de contrôle. Ceci nous permet ainsi d'obtenir autant d'équations que de volumes de contrôles.

3.3.4 Exemples de schémas numériques dans le cas 1D

Il est alors possible grâce par exemple au schéma d'Euler explicite d'obtenir un schéma "Volumes Finis". La méthode d'Euler pour un schéma explicite consiste à associer à une équation différentielle du type :

$$\partial u_t(t,x) = f(t,x)$$

à un schéma avec un pas de temps Δt donné par :

$$u^{n+1} - u^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \big(f(s, u(s))\big) ds \tag{3}$$

En appliquant la méthode d'Euler à l'équation (3), on obtient :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + c\,\frac{\Delta t}{\Delta x}(u^n_{i+\frac{1}{2}} - u^n_{i-\frac{1}{2}})$$
$$u_i^{n+1} = u_i^n + c\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{u^n_{i+1} - u^n_{i-1}}{2}\right)$$

où $u_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{u_i + u_{i+1}}{2}$ et $u_{i-\frac{1}{2}} = \dfrac{u_{i-1} - u_i}{2}$.

Il s'agit ici du schéma centré de Richardson. Malheureusement, ce schéma est instable car il ne prend pas en compte l'information sur le signe du champ de vecteur vitesse c. Pour le rendre stable, il faudrait apporter de la diffusion numérique. D'autres schéma existent, quelques uns sont listés ci-dessous.

- Les schémas décentrés (upwind)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n) \text{ , si c>0} \iff u_i^{n+1} = u_i^n(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}) + u_{i-1}^n(\frac{c\Delta t}{\Delta x})$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n) \text{ , si c<0} \iff u_i^{n+1} = u_i^n(1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x}) - u_{i+1}^n(\frac{c\Delta t}{\Delta x})$$

Il s'agit ici d'un schéma décentré permettant de prendre l'information du bon côté suivant la direction de la caractéristique donné par le signe du champ vitesse c i.e que le décentrement tient compte de la direction de la propagation.
On constatera par la suite qu'il s'agit du meilleur schéma dans le cas 1D tel que la convergence est assuré peu importe la valeur du vecteur c. Il est tout de même important de préciser que la condition de cfl inférieur à un est toujours une obligation.

- Le schéma de Lax-Wendroff :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

- Le schéma Euler explicite en aval :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n)$$

3.4 Flux numérique

3.4.1 La mécanique des fluides

La mécanique des fluides numériques est l'étude des mouvements d'un fluide par la résolution numérique des équations décrivant le comportement du fluide. Il s'agit d'un outil essentiel dans de nombreuses branches de la dynamique des fluides : propulsion aérospatiale, météorologie, barrage hydraulique, écoulement d'un fluide dans un tuyau... L'avantage de cette approche est qu'elle donne accès à toutes les informations instantanées (vitesse, pression, concentration...) en chaque point du domaine de calcul, pour un faible coût par rapport aux expériences correspondantes.

La résolution d'un problème de mécanique des fluides numériques comprend trois étapes :
- l'analyse du problème : choix d'une géométrie, d'un maillage discrétisant le domaine de calcul, des méthodes numériques employées ;
- la résolution numérique du problème : exécution d'un programme informatique ;
- l'exploitation des résultats : vérification de la cohérence puis étude des résultats.

Les trois méthodes de discrétisation sont :
- méthode des différences finies
- méthode des volumes finis
- méthode des éléments finis

Cependant, c'est la méthode des volumes finis qui est la plus appropriée et la plus utilisée pour résoudre des problèmes de dynamique des fluides. La méthode des volumes finis est complètement déterminée par son flux numérique.

Dans notre cas le flux numérique vérifie deux propriétés :
- la conservation des flux à travers les arêtes
- la consistance des flux

3.4.2 Exemple de flux numérique

Prenons le problème suivant :

$$\begin{aligned} -u''(x) = f(x), x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{aligned}$$

En appliquant la méthode des volumes finis à cette équation on obtient le schéma suivant :

$$\begin{aligned} -u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + u'(x_{i-\frac{1}{2}}) = h_i f_i \\ \Leftrightarrow F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = h_i f_i \end{aligned}$$

$F_{i+\frac{1}{2}}$ est appelé le flux numérique en $x_{i+\frac{1}{2}}$.
Un des principes de la méthode des volumes finis est de pouvoir écrire les flux numériques en fonction des variables discrètes u_i. Une approximation de ce flux numérique peut alors être donnée par la notation suivante :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

En ce qui concerne le cas général on peut définir le flux comme suivant : le flux à travers l'arête $e_{i,j}$ est approché par

$$\int_{e_{i,j}} (cu).n_{i,j}\, d\gamma = mes(e_{i,j})\Phi(u_i, u_j, n_{i,j})$$

où $\Phi(u_i, u_j, n_{i,j})$ est le flux numérique à travers l'arête $e_{i,j}$ entre les volumes de contrôle K_i et K_j définit ainsi :

$$\Phi(u_i, u_j, n_{i,j}) = \begin{cases} u_{K_i}(\bar{c}.n_{i,j}) \text{ si } \bar{c}.n_{i,j} > 0 \\ u_{K_j}(\bar{c}.n_{i,j}) \text{ sinon} \end{cases}$$

$$= u_{K_i}(\bar{c}.n_{i,j})^+ + u_{K_j}(\bar{c}.n_{i,j})^-$$

où $(\bar{c}.n_e)^+ = \max(\bar{c}.n_e, 0)$, $(\bar{c}.n_e)^- = \min(\bar{c}.n_e, 0)$ et $\bar{c}$ est la moyenne de la vitesse c aux extrémités x_1 et x_2 de l'arête e :

$$\bar{c} = \frac{c(x_1) + c(x_2)}{2}$$

On utilise donc l'information venant des espaces de contrôle K_i ou K_j en fonction de la direction du champ de vitesse c.

3.4.3 Schéma numérique général

En appliquant le schéma d'Euler à l'équation (2), on obtient un schéma dans le cas général donné par :

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{mes(K_i)} \sum_{e_{i,j} \in \partial K_i} mes(e_{i,j})\Phi(u_i, u_j, n_{i,j})$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{mes(K_i)} \sum_{e_{i,j} \in \partial K_i} mes(e_{i,j})(u_{K_i}(\bar{c}.n_{i,j})^+ + u_{K_j}(\bar{c}.n_{i,j})^-)$$

3.5 Contraintes sur la méthode

3.5.1 Condition de CFL et pas de temp

Dans le cas 1D, pour écrire un schéma pertinent il faut que le pas de temps Δt soit suffisamment petit pour que le pied de la caractéristique rentre dans le support du schéma, c'est une condition géométrique nécessaire à sa stabilité.
Cela revient à dire que l'on cherche à avoir Δt tel que le cône de dépendance théorique soit inclus dans le cône de dépendance numérique.

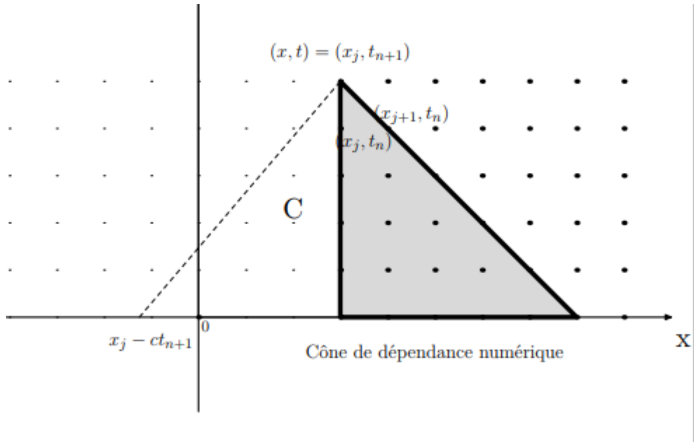

FIGURE 6 – Exemple de cône de dépendance

Numériquement et peu importe la dimension du problème, cette condition est équivalente à la condition de CFL (coefficient de Courant, Fredrichs, Lewy). Le schéma est stable si ce coefficient est inférieur à 1 et produira une solution cohérente. La condition de CFL impose au coefficient d'amplification d'être plus petit que 1.
Par exemple sur les schémas à un pas, un schéma numérique est déterminé par la formule suivante :

$$\sum_{j \in J_k} b_j u_{k+j}^{n+1} = \sum_{j \in J_k} c_j u_{k+j}^{n}$$

Par passage à la transformée de Fourier, on exprime le coefficient d'amplification du schéma par :

$$M(\xi) = \frac{\sum_j c_j e^{i\xi j \Delta_x}}{\sum_j b_j e^{i\xi j \Delta_x}}$$

Ainsi lorsque que $|M(\xi)| \leq 1$ cela nous donne la condition de stabilité que l'on appelle CFL.

On peut déterminer par exemple le pas de temps avec la formule suivante : $\Delta t = \Delta x \times CFL$
ou on fixe au préalable $CFL < 1$ et un pas d'espace Δx.
On peut parfois se placer à la condition de stabilité où le coefficient de CFL vaut 1.

3.5.2 Méthode avec résolution de système linéaire

En fonction du type de schéma considéré pour l'approximation de l'équation, c'est-à-dire si un schéma est implicite ou explicite on peut avoir besoin de résoudre un système linéaire. C'est dans le cas où le schéma est implicite c'est-à-dire lorsqu'au $n+1^{ime}$ pas de temps, il existe plusieurs pas d'espace pour ce même pas de temps, qu'il sera alors nécessaire de résoudre un système linéaire. Les schémas implicites peuvent parfois être utilisés à la place des schémas explicites pour leur meilleure stabilité. Mais dans le cas où le schéma choisi est explicite, on peut calculer explicitement u_k^n en fonction des u_{k+1}^n ou des pas précédents sans avoir à résoudre un système linéaire.
Pour obtenir un schéma implicite on peut pour cela changer la discrétisation de l'élément ∂_x en le discrétisant au pas de temps n+1. Un résultat possible est alors le schéma suivant :

$$u_k^{n+1} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} u_k^{n+1} - \frac{c\Delta t}{\Delta x} u_{k-1}^{n+1} = u_k^n$$

Matriciellement cela vient à résoudre le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & .. & .. & 0 \\ \frac{-c\Delta t}{\Delta x} & 1+\frac{c\Delta t}{\Delta x} & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & \frac{-c\Delta t}{\Delta x} & 1+\frac{c\Delta t}{\Delta x} & 0 & .. & : \\ : & 0 & . & & .. & : \\ : & & . & & .. & 0 \\ 0 & . & . & 0 & \frac{-c\Delta t}{\Delta x} & 1+\frac{c\Delta t}{\Delta x} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ .. \\ .. \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ .. \\ .. \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}^{n}$$

On parle alors de résolution implicite.

3.5.3 Méthode de stabilisation d'un schéma instable

Nous prenons le cas du schéma centré de Richardson qui est le suivant :

$$u_k^{n+1} = u_k^n - c\,\frac{\delta t}{2\delta x}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n)$$

Le coefficient d'amplification de ce schéma est $M(\xi) = 1 - ic\,\frac{\delta t}{\delta x} sin(\xi \delta x)$.
D'où $|M(\xi)|^2 = 1 + \mid c\frac{\delta t}{\delta x} sin(\xi\delta x) \mid^2 > 1$. Donc toujours instable.

Pour le rendre stable, il faut ajouter de la diffusion numérique. Nous pouvons réécrire le schéma décentré comme suit :

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\delta t} + c\frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\delta x} - c\frac{\delta x}{2}(\frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n}{\delta x^2}) = 0 \text{ si c>0} \tag{4}$$

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\delta t} + c\frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\delta x} + c\frac{\delta x}{2}(\frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n}{\delta x^2}) = 0 \text{ si c<0} \tag{5}$$

Le terme supplémentaire correspond à la discrétisation centrée au second ordre de $-|c|\frac{\delta x}{2}\partial_{x^2}^2 u$ qui est un terme de diffusion de coefficient $\gamma = |c|\frac{\delta x}{2}$. On revient donc à résoudre l'équation de transport-diffusion :

$$\partial_t\, u + c\,\partial_x u - \gamma\,\partial_{x^2}^2\, u = 0 \text{ avec } \gamma \xrightarrow{\delta x \to 0} 0$$

à lire
http ://www.iecl.univ-lorraine.fr/ Jean-Francois.Scheid/Enseignement/polyM2IMOI.pdf

3.5.4 Système d'équation de transport

Le cas d'un système d'équations de transport à coefficients constants correspond à un transport de plusieurs éléments. Par exemple dans un cours d'eau on peut étudier le transport de la terre, de pierres, de différents polluants, etc.
Cela revient à résoudre la même "quation que précédemment mais l'inconnu U est un vecteur de

plusieurs composantes tel que u_1,u_2,u_3,.. i.e.

$$\partial_t U + C\partial_x U = 0$$
$$= \partial_t \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ .. \\ .. \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ .. \\ .. \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ .. \\ .. \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = 0$$

Les u_k deviennent nos différentes inconnues du problème avec c_k leur vitesse respective.La méthode reste la même que dans le cas 1D vu précédemment mais la solution approchée sera sous forme d'un vecteur.

4 Programmation dans un cas simplifié

4.1 Explication de l'implémentation de la méthode

Explication du code et analyse des résultats. à rédiger...

4.2 Exemples concrets de solutions exactes

à rédiger...

4.3 Tests de validation

à rédiger...

5 Le cas général

5.1 Généralisation à la dimension 2

On cherche à généraliser le cas 1D de l'équation de transport à son problème 2D toujours dans le cas linéaire.
Soit c un vecteur vitesse à deux composantes.
On note c_x sa première composante et c_y sa seconde. On peut par exemple considérer x et y dans un domaine $(0, 1)$.
Ainsi l'équation de transport en 2 dimensions est donnée par :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x,y) + c.\nabla u = \partial_t u(t,x,y) + c_x \partial_x u(t,x,y) + c_y \partial_y u(t,x,y) = 0 \\ u(0,x,y) = u_0(x,y) \text{ condition initiale} \end{cases}$$

Dans le cas 1D un des schémas possible était le suivant :
- le schéma décentré amont et aval :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n) \text{ , si c>0 } \iff u_i^{n+1} = u_i^n \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) + u_{i-1}^n \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)$$
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n) \text{ , si c<0 } \iff u_i^{n+1} = u_i^n \left(1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) - u_{i+1}^n \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)$$

Si on cherche maintenant à généraliser ce résultat pour une discrétisation 2D on obtient :

$$\text{si c>0 : } \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{c_x}{\Delta x}(u_{i-1,j}^n - u_{i,j}^n) + \frac{c_y}{\Delta y}(u_{i,j-1}^n - u_{i,j}^n)$$
$$\text{si c<0 : } \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{c_x}{\Delta x}(u_{i,j}^n - u_{i+1,j}^n) + \frac{c_y}{\Delta y}(u_{i,j}^n - u_{i,j+1}^n)$$

On note $P_{i,j}$=$(i\Delta x, j\Delta y)$ où i,j $\in \mathbb{Z}$, les noeuds du maillage de $\mathbb{R}^2$ $u_{i,j}$=$u(i\Delta x, j\Delta y)$ est une approximation de la solution exacte aux noeuds $P_{i,j}$ à l'instant $n\Delta t$.
On pourra choisir un maillage non uniforme i.e un maillage où le pas d'espace en la variable x n'est pas le même que le pas d'espace en la variable y. Ainsi la principale différence entre le problème 1D et le problème 2D et l'ajout de nouvelles variables qui imposent à l'inconnu u que l'on cherche à identifier d'être représenté sous forme d'une matrice ou x agit sur les lignes et y sur les colonnes.

5.2 Application à un exemple

Soit le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x,y) + c.\nabla u = \partial_t u(t,x,y) + 3\partial_x u(t,x,y) + 2\partial_y u(t,x,y) = 0 \\ u(0,x,y) = sin(2\pi x) sin(2\pi y) \text{ condition initiale} \\ u(0,y,t) = u(1,y,t) \\ u(x,0,t) = u(x,1,t) \end{cases}$$

On choisi des conditions aux limites périodiques que l'on initialises connaissant la valeur de cette fonction pour cette équation qui est $u(x,y,t) = sin(2\pi(x - c_x t)) sin(2\pi(y - c_y t))$, ou c_x=3 et $c_y = 2$. Connaissant la solution exacte on pourra par la suite calculer l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée pour voir la pertinence du schéma utilisé et du code produit.
On utilise le schéma définit précédemment pour le cas 2D. On obtient alors une représentation de la solution qui est de la forme suivante :

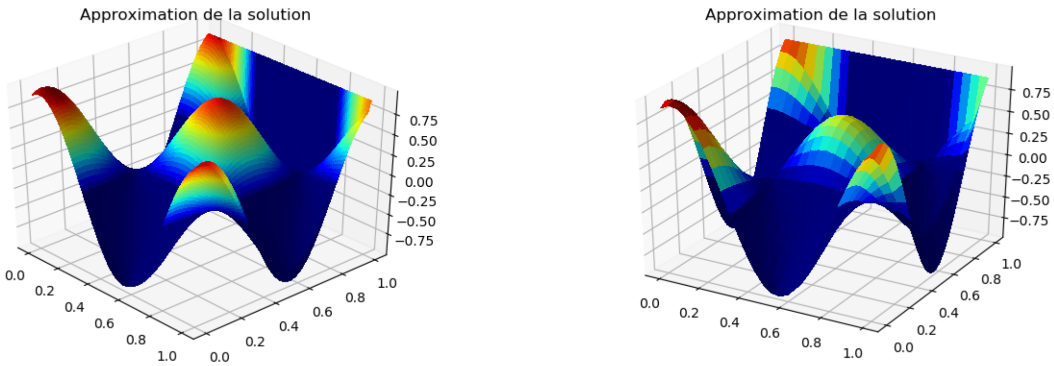

FIGURE 7 – $\Delta x = \Delta y$ Discrétisation par 100 et 25

5.3 Résolution du problème de rupture de barrage des équations de Saint Venant

5.3.1 Les équations de Saint-Venant

à rédiger...

5.3.2 Résolution du systéme d'équation de Saint Venant

à rédiger...

6 Bibliographie

creer une reelle bibliograpgie avec un fichier .bib exterieur Lien du sujet : https ://github.com/upici/SaintVe

Support de Recherche : *http : //www.i2m.univ−amu.fr/perso/maxime.hauray/enseignement/M2−Transport/Cours2.pdf*
http : //perso.ensta − paristech.fr/ becache/COURS − ONDES/Poly − num − 0209*.pdf*
*http : //faccanoni.univ − tln.fr/user/enseignements/*2010$_2$011$_M$2*.pdf*
http : //www.lmpa.univ − littoral.fr/ sadok/fichiers/cours2b.pdf
http : //math.univ − lyon1.fr/ benzoni/M2AO/Schemas − EDO.pdf
https : //old.i2m.univ − amu.fr// herbin/PUBLI/anedp.pdf
Volume en dimension quelconque
http : //www.iecl.univ−lorraine.fr/ Jean−Francois.Scheid/Enseignement/polyM2IMOI.pdf
Information sur la condition de cfl
http : //www.breves − de − maths.fr/quoi − ma − cfl − quest − ce − quelle − a − ma − cfl/
http : //perso.eleves.ens − rennes.fr/ tpier758/cours/edph.pdf
https : //math.unice.fr/ frapetti/TD5.pdf voir pour schema
Livres BU : Résolution numérique des équations de Saint-Venant par la technique de projection en utilisant une méthode des volumes finis dans un maillage non structuré