

# Travaux Pratiques

Compte Rendu  
Travail en groupe

M1 - EDPMA  
Groupe AlMati

Alice CASTAGNET  
Marine REDONDO  
Tiffanie CARLIER

Encadrant  
M. LEGUÈBE

**13 novembre 2018**

# Introduction : schéma et notations

$\Omega$  : ensemble d'espace associé au problème

$u$  : inconnue du problème

$t$  : variable de temps

$\Delta t$  : pas de temps

$n$  : nombre d'itérations en temps

$x$  : variable d'espace qui peut avoir plusieurs dimensions

$\Delta x$  : pas d'espace en une dimension

$i$  : nombre d'itérations en espace

$c$  : vitesse de  $u$

$K_i$  : volumes de contrôle où  $K_i$  et  $K_j$  sont deux volumes côte à côte

$e$  : arête quelconque

$\epsilon K_i$  : ensemble des arêtes du volume de contrôle  $K_i$

$e_{i,j}$  : arête commune aux volumes  $K_i$  et  $K_j$

$n_{i,j}$  : normale à l'arête  $e_{i,j}$  extérieure à  $K_i$

La Figure 1 ci-dessous est un schéma explicatif précisant les notations énoncées précédemment.

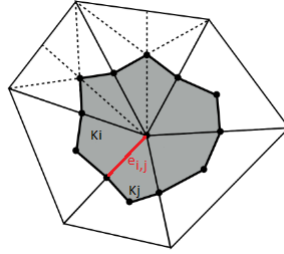


FIGURE 1 – Exemple d'un ensemble d'espace  $\Omega$  divisé en espaces de contrôle  $K_i$

## 1 Première partie : recherche de ressources, documentation

1. Une équation de transport est une équation de la forme :

$$\partial_t u(t, x) + c(t, x, u) \cdot \nabla_x u(t, x) = 0 \quad (1)$$

Elle décrit le comportement d'une quantité  $u$  dépendant du temps  $t$  et d'une autre variable  $x$  appartenant à un domaine  $\Omega$  qui représente généralement un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^n$ . La variable  $x$  peut définir une position, une vitesse, un couple position/vitesse ... Les équations de transport font apparaître une notion de propagation à vitesse finie et sont donc qualifiées d'équations d'hyperboliques.

Il en existe deux formes :

- la forme conservative :

$$\begin{cases} u_t(t, x) + \text{div}_x(c(t, x)u(t, x)) = 0 \\ u(t = 0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (2)$$

- la forme forte :

$$\begin{cases} u_t(t, x) + c(t, x) \nabla_x u(t, x) = d(t, x, u) \\ u(t = 0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (3)$$

Dans notre cas, nous utilisons la forme conservative de l'équation de transport car la divergence du vecteur vitesse  $c$  est nulle. L'intégrale de  $u$  est conservée au cours du temps.

Pour résoudre le problème, il est nécessaire d'imposer une condition initiale à  $t = 0$  :

$$u(t = 0, x) = u_0(x).$$

De plus, si  $\Omega$  possède des bords il faut pour que le problème soit bien posé, ajouter une condition  $u_b$  sur la partie de la frontière où le champ est rentrant ie :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \partial\Omega, \quad c(t, x) \cdot \overrightarrow{n(x)} < 0 \Rightarrow u(t, x) = u_b(t, x) \quad (4)$$

Où  $\overrightarrow{n(x)}$  représente la normale extérieure à  $\Omega$ .

Ceci permet d'éviter au problème d'être sur-déterminé et de vérifier ainsi les trois conditions nécessaires qui définissent un problème bien posé (existence, unicité et stabilité).

Dans le cas 1D ou  $x \in (0, 1)$  et  $t \in (0, T)$  que l'on étudiera par la suite les conditions aux limites se présentent de cette manière :

Si  $c > 0$  alors il est nécessaire d'ajouter sur le bord gauche qui est entrant la condition suivante :

$$u(0, t) = g_0(t)$$

Au contraire si  $c < 0$  alors il est nécessaire d'ajouter sur le bord droit la condition suivante :

$$u(1, t) = g_1(t)$$

2. Dans le cas 1D avec un champ de vitesse constant  $c$  le problème s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + c \partial_x u(t, x) = 0, x \in \mathbb{R} \text{ et } t \in (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (5)$$

Une des méthodes pour résoudre ce type d'équation est la méthode des caractéristiques. On définit les caractéristiques comme les courbes de  $\mathbb{R}^2$  définies par  $(t, X(t))$  où  $X(t)$  est la solution de l'équation différentielle ordinaire  $\partial_t X(t) = c$ . On a alors que  $(t, X(t))$  vérifie :

$$\partial_t u(t, X(t)) = \partial_t X * \partial_x u + \partial_t u = c * \partial_x u + \partial_t u = 0$$

Les solutions sont donc constantes le long des caractéristiques. Considérons  $(t^*, x^*)$  un point du plan avec  $t^* > 0$  ainsi que  $X^*(t)$  la caractéristique passant par ce point. Alors  $X^*$  vérifie :

$$\partial_t X^* = c, \quad X^*(t^*) = x^* \quad (6)$$

$$\Rightarrow X^* = ct + x^* - ct^* \text{ et donc } X^*(0) = x^* - ct^* \quad (7)$$

Finalement au point  $(t^*, x^*)$  sachant que la variable  $t$  ne rentre pas en compte car  $u$  est constante le long des caractéristiques, la solution  $u$  du problème est déterminée par :

$$u(t^*, x^*) = u(0, X^*(0)) = u(0, x^* - ct^*) = u_0(x^* - ct^*) \quad (8)$$

On obtient finalement le critère suivant :

Si  $u_0$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , alors il existe pour le problème de transport en une dimension une unique solution différentiable  $u$  en  $(t, x)$  donnée par :

$$u(t, x) = u_0(x - ct) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \quad (9)$$

Cela signifie que connaissant  $u_0(x_0)$  on peut déterminer  $u(x, t)$  sur toute la demi droite caractéristique issue de  $x_0$  pour tous  $x_0$

3.

### CAS GÉNÉRAL DE LA MÉTHODE DES VOLUMES FINIS :

Pour définir la méthode des volumes finis il est nécessaire de définir la notion de maillage. Un maillage est la discrétisation spatiale d'un milieu continu, ou une modélisation géométrique d'un domaine par des éléments proportionnés finis et bien définis. Un maillage doit vérifier les propriétés suivantes :

Soit  $\Omega$  l'ensemble d'espace associé à notre problème. Les éléments de la suite  $(K_i)_{1 \leq i \leq I}$  sont appelés volumes de contrôle. Cette suite définit un maillage du domaine  $\Omega$  vérifiant :

- $K_i$  un ouvert de  $\Omega$
- $K_i \cap K_j = \emptyset, \forall i \neq j$
- $\bigcup_{i=1}^I \overline{K_i} = \overline{\Omega}$

En voici un exemple dans le cas d'un maillage "cell vertex" : cf photo début

En considérant un maillage défini comme précédemment, le principe des volumes finis est l'intégration de l'équation aux dérivées partielles donc dans notre cas l'équation de transport sur tous les volumes de contrôle. La formule de la divergence nous permet de simplifier le problème qui nous dit :

$$\int_K \operatorname{div} w \, dK = \int_{\partial K} w \cdot n \, d(\partial K) = \sum_{\sigma \in \varepsilon K} \int_{\sigma} \omega_{\sigma} \cdot n_{\sigma} \, d\gamma$$

$\varepsilon K$  l'ensemble des arêtes du volume de contrôle  $K$ ,  $n_{\sigma}$  est la normale à l'extérieur par rapport à l'arête  $\sigma$ , et  $\gamma$  la mesure sur  $\sigma$ .

Ainsi, pour l'équation de transport la méthode des volumes finis donne sur un volume de contrôle  $K_i$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{K_i} u(t, x) dx + \sum_{e_{i,j} \in \partial K_i} \int_{e_{i,j}} (cu) \cdot n_{i,j} \, d\gamma = 0 \quad (10)$$

$$\operatorname{mes}(K_i) \frac{du_i}{dt} = - \sum_{e_{i,j} \in \partial K_i} \int_{e_{i,j}} (cu) \cdot n_{i,j} \, d\gamma \quad (11)$$

Ici,  $\gamma$  est la mesure de  $e_{i,j}$  où  $e_{i,j}$  est l'arête commune aux deux volumes de contrôle  $K_i$  et  $K_j$  et  $n_{i,j}$  est la normale à l'arête  $e_{i,j}$  sortant du volume de contrôle  $K_i$ . Ajouter Figure ?

## APPLICATION AU CAS 1D :

La Figure 5 ci-dessous représente un maillage en 1 dimension. Ici, l'espace  $\Omega$  est le segment  $[AB]$ . On divise ce segment en petits segments délimités par les points  $x_i$  où  $i \in \{1, l\}$  (en vert sur le schéma). On note que ici, tous les  $x_i$  sont strictement à l'intérieur des extrémités  $A$  et  $B$ , le volume de contrôle devant être ouvert. On définit ensuite les  $x_{i \pm \frac{1}{2}}$  (en rouge sur le schéma). Les volumes de contrôle  $K_i$  définis précédemment correspondent aux intervalles ouverts  $]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$  pour  $i \in \{1, l\}$ . Dans le cas ci-dessous, les  $x_i$  sont situés au milieu de  $K_i$  mais il est également possible de choisir les  $x_i$  à l'une ou l'autre des extrémités des  $K_i$ .

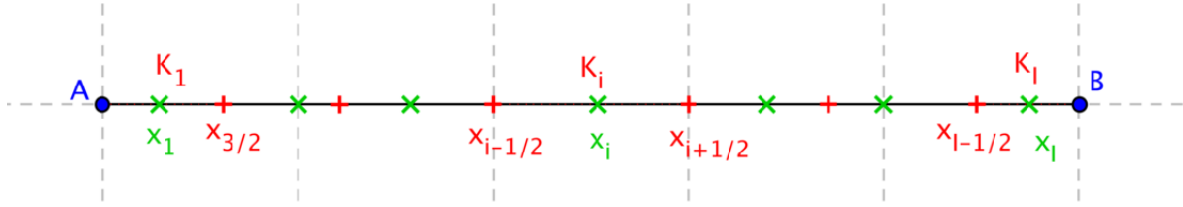


FIGURE 2 – Maillage en 1 dimension

## MÉTHODE DES VOLUMES FINIS EN 1D :

voir informations trouvé sur le poly suivant page 82

<http://www.lmpt.univ-tours.fr/barles/EquationTransport.pdf>

Pour calculer numériquement la solution du problème 1D on introduit une grille qui est cette fois en  $x$  et en  $t$ .

On introduit les notations suivantes :

$x_i = i\Delta x$ ,  $\Delta x$  le pas de la discrétisation en espace

$tn = n\Delta t$ ,  $\Delta t$  le pas de la discrétisation en temps

De plus on note  $u_i^n$  une approximation de  $u(x_i, tn)$

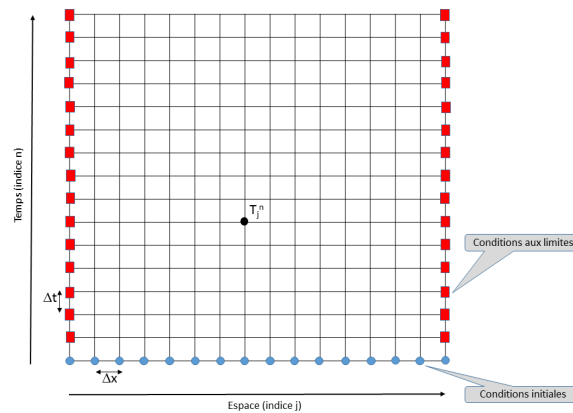


FIGURE 3 – Grille de la discrétisation

On intègre l'équation de transport sur tous les volumes de contrôle donc ici sur une dimension d'espace et sur la discrétisation en temps que l'on a défini précédemment, cela nous donne :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \partial_t u(t, x) dx dt + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \partial_x u(t, x) dx dt = 0 \quad (12)$$

$$= \partial_x (u_k^{n+1} - u_k^n) + c \partial_t (u_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) = 0 \quad (13)$$

Comme dit précédemment, la méthode des volumes finis consiste à intégrer le problème que l'on cherche à résoudre sur les différents volumes de contrôle. Ceci nous permet ainsi d'obtenir autant d'équations que de volumes de contrôles. Il est alors possible grâce par exemple au schéma d'Euler explicite d'obtenir un schéma "Volumes Finis". La méthode d'Euler pour un schéma explicite consiste à associer à une équation différentielle du type :

$$\partial_t u(t, x) = f(t, x) \quad (14)$$

à un schéma avec un pas de temps  $\Delta t$  donné par :

$$u^{n+1} - u^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} (f(s, u(s))) ds \quad (15)$$

En appliquant la méthode d'Euler à l'équation (15), on obtient :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (16)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2} \right) \quad (17)$$

où  $u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_i + u_{i+1}}{2}$  et  $u_{i-\frac{1}{2}} = \frac{u_{i-1} + u_i}{2}$ .

Il s'agit ici du schéma centré de Richardson. Malheureusement, ce schéma est instable car il ne prend pas en compte l'information sur le signe du champ de vecteur vitesse  $c$ . Pour le rendre stable, il faudrait apporter de la diffusion numérique. On peut à la place de ce schéma étudier celui-ci :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n), \text{ si } c > 0 \iff u_i^{n+1} = u_i^n \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) + u_{i-1}^n \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) \quad (18)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n), \text{ si } c < 0 \iff u_i^{n+1} = u_i^n \left(1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) - u_{i+1}^n \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) \quad (19)$$

Il s'agit ici d'un schéma décentré permettant de prendre l'information du bon côté suivant la direction de la caractéristique donné par le signe du champ vitesse  $c$ .

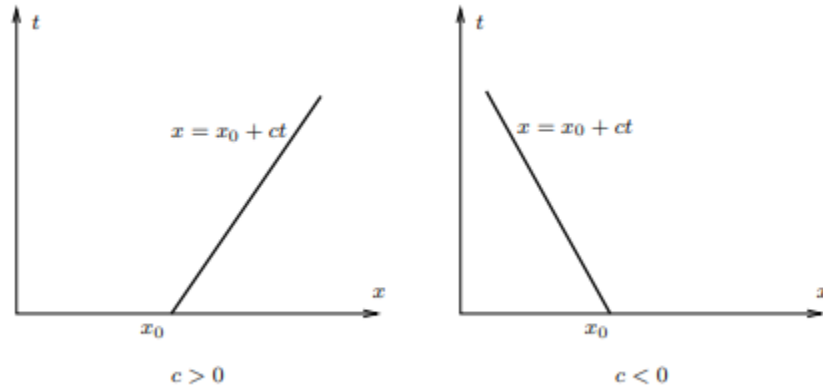


FIGURE 4 – Direction des caractéristiques suivant la valeur de  $c$

D'autres schémas volumes finis sont possibles en voici quelques exemples :

- le schéma de Lax-Wendroff :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (20)$$

- le schéma Euler explicite en aval :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (21)$$

## FLUX NUMÉRIQUES :

La mécanique des fluides numériques est l'étude des mouvements d'un fluide par la résolution numérique des équations décrivant le comportement du fluide. Il s'agit d'un outil essentiel dans de nombreuses branches de la dynamique des fluides : propulsion aérospatiale, météorologie, barrage hydraulique, écoulement d'un fluide dans un tuyau... L'avantage de cette approche est qu'elle donne accès à toutes les informations instantanées (vitesse, pression, concentration...) en chaque point du domaine de calcul, pour un faible coût par rapport aux expériences correspondantes.

La résolution d'un problème de mécanique des fluides numériques comprend trois étapes :

- l'analyse du problème : choix d'une géométrie, d'un maillage discrétisant le domaine de calcul, des méthodes numériques employées ;
- la résolution numérique du problème : exécution d'un programme informatique ;
- l'exploitation des résultats : vérification de la cohérence puis étude des résultats.

Les trois méthodes de discrétisation sont :

- méthode des différences finies
- méthode des volumes finis

- méthode des éléments finis

Cependant, c'est la méthode des volumes finis qui est la plus appropriée et la plus utilisée pour résoudre des problèmes de dynamique des fluides. La méthode des volumes finis est complètement déterminé par son flux numérique

Dans notre cas le flux numérique vérifie deux propriétés :

- la conservation des flux à travers les arêtes
- la consistance des flux

Prenons par exemple le problème suivant :

$$-u''(x) = f(x), x \in ]0, 1[ \quad (22)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (23)$$

En appliquant la méthode des volumes finis à cette équation on obtient le schéma suivant :

$$-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + u'(x_{i-\frac{1}{2}}) = h_i f_i \quad (24)$$

$$\Leftrightarrow F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = h_i f_i \quad (25)$$

$F_{i+\frac{1}{2}}$  est appelé le flux numérique en  $x_{i+\frac{1}{2}}$

Un des principes de la méthode des volumes finis est de pouvoir écrire les flux numériques en fonctions des variables discrètes  $u_i$ . Une approximation de ce flux numérique peut alors être donnée par la notation suivante :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \quad (26)$$

En ce concerne le cas générale on peut définir le flux comme suivant : Le flux à travers l'arête  $e_{i,j}$  est approché par :

$$\int_{e_{i,j}} (cu) \cdot n_{i,j} d\gamma = mes(e_{i,j}) \Phi(u_i, u_j, n_{i,j}) \quad (27)$$

où  $\Phi(u_i, u_j, n_{i,j})$  est le flux numérique à travers l'arête  $e_{i,j}$  entre les volumes de contrôle  $K_i$  et  $K_j$  définit ainsi :

$$\Phi(u_i, u_j, n_{i,j}) = \begin{cases} u_{K_i}(\bar{c} \cdot n_{i,j}) & \text{si } \bar{c} \cdot n_{i,j} > 0 \\ u_{K_j}(\bar{c} \cdot n_{i,j}) & \text{sinon} \end{cases} \quad (28)$$

$$= u_{K_i}(\bar{c} \cdot n_{i,j})^+ + u_{K_j}(\bar{c} \cdot n_{i,j})^- \quad (29)$$

où  $(\bar{c} \cdot n_e)^+ = \max(\bar{c} \cdot n_e, 0)$  et  $(\bar{c} \cdot n_e)^- = \min(\bar{c} \cdot n_e, 0)$  et  $\bar{c}$  est la moyenne de la vitesse  $c$  aux extrémités  $x_1$  et  $x_2$  de l'arête  $e$  :

$$\bar{c} = \frac{c(x_1) + c(x_2)}{2} \quad (30)$$



On utilise donc l'information venant des espaces de contrôle  $K_i$  ou  $K_j$  en fonction de la direction du champ de vitesse  $c$ .

En appliquant le schéma d'Euler à l'équation (11), on obtient un schéma dans le cas général donné par :

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{mes(K_i)} \sum_{e_{i,j} \in \partial K_i} mes(e_{i,j}) \Phi(u_i, u_j, n_{i,j}) \quad (31)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{mes(K_i)} \sum_{e_{i,j} \in \partial K_i} mes(e_{i,j}) (u_{K_i}(\bar{c}.n_{i,j})^+ + u_{K_j}(\bar{c}.n_{i,j})^-) \quad (32)$$

4. Dans le cas 1D, pour écrire un schéma pertinent il faut que le pas de temps  $\Delta t$  soit suffisamment petit pour que le pied de la caractéristique rentre dans le support du schéma, c'est une condition géométrique nécessaire à sa stabilité.

Cela revient à dire que l'on cherche à avoir  $\Delta t$  tel que le cône de dépendance théorique soit inclus dans le cône de dépendance numérique.

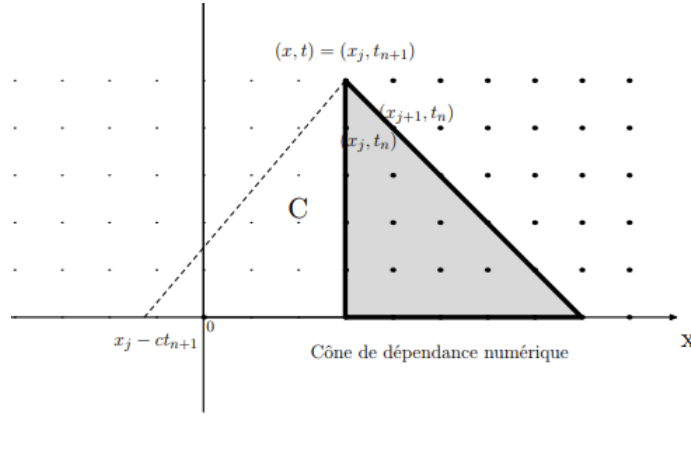


FIGURE 5 – Exemple de cône de dépendance

Numériquement et peu importe la dimension du problème, cette condition est équivalente à la condition de CFL (coefficient de Courant, Fredrichs, Levy). Le schéma est stable si ce coefficient est inférieur à 1 et produira une solution cohérente. La condition de cfl impose au coefficient d'amplification d'être plus petit que 1.

Par exemple sur les schémas à un pas, un schéma numérique est déterminé par la formule suivante :

$$\sum_{j \in J_k} b_j u_{k+j}^{n+1} = \sum_{j \in J_k} c_j u_{k+j}^n \quad (33)$$

Par passage à la transformée de Fourier, on exprime le coefficient d'amplification du schéma par :

$$M(\xi) = \frac{\sum_j c_j e^{i\xi j \Delta x}}{\sum_j b_j e^{i\xi j \Delta x}} \quad (34)$$

Ainsi lorsque que  $|M(\xi)| \leq 1$  cela nous donne la condition de stabilité que l'on appelle cfl.

On peut déterminer par exemple le pas de temps avec la formule suivante :  $\Delta t = \Delta x \times cfl$  ou on fixe au préalable  $cfl < 1$  et un pas d'espace  $\Delta x$ .

On peut parfois se placer à la condition de stabilité où le coefficient de  $cfl$  vaut 1.

En fonction du type de schéma considéré pour l'approximation de l'équation, c'est à dire si un schéma est implicite ou explicite on peut avoir besoin de résoudre un système linéaire. C'est dans le cas où le schéma est implicite c'est à dire lorsque au  $n+1^{me}$  pas de temps, il existe plusieurs pas d'espace pour ce même pas de temps, qu'il sera alors nécessaire de résoudre un système linéaire. Les schémas implicites peuvent parfois être utilisés à la place des schémas explicites pour leur meilleur stabilité. Mais dans le cas où le schéma choisi est explicite, on peut calculer explicitement  $u_k^n$  en fonction des  $u_{k+1}^n$  ou des pas précédents suivant le schéma.

### Exemple d'un schéma centré instable que l'on modifie pour qu'il soit stable

Nous prenons le cas du schéma centré de Richardson qui est le suivant :

$$u_k^{n+1} = u_k^n - c \frac{\delta t}{2\delta x} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) \quad (35)$$

Le coefficient d'amplification de ce schéma est  $M(\xi) = 1 - ic \frac{\delta t}{\delta x} \sin(\xi \delta x)$ .

D'où  $|M(\xi)|^2 = 1 + |c \frac{\delta t}{\delta x} \sin(\xi \delta x)|^2 > 1$ . Donc toujours instable.

Pour le rendre stable, il faut ajouter de la diffusion numérique. On revient donc à résoudre l'équation de transport-diffusion.

5. Le cas d'un système d'équations de transport à coefficients constants correspond à un transport de plusieurs éléments. Par exemple dans un cours d'eau on peut étudier le transport de la terre, de pierres, de différents polluants, etc.

Cela revient à résoudre :

$$\sum_{k=1}^m \partial_t u_k + c_k \partial_x u_k = 0 \quad (36)$$

où  $m$  correspond au nombre de composants transportés, les  $u_k$  deviennent nos différentes inconnues du problème  $c_k$  à leur vitesse respective.

## 2 Programmation dans un cas simplifié

Explication du code et analyse des résultats.  
à rédiger...

### 3 Le cas général

On cherche à généraliser le cas 1D de l'équation de transport à son problème 2D.

Soit  $c$  un vecteur vitesse à deux composantes.

On note  $c_x$  sa première composante et  $c_y$  sa deuxième composante. On peut par exemple considérer  $x$  dans un domaine  $(0, 1)$  et  $y$  dans un domaine  $(0, 1)$ .

Ainsi l'équation de transport en 2 dimensions est donnée par :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x, y) + c \cdot \nabla u = \partial_t u(t, x, y) + c_x \partial_x u(t, x, y) + c_y \partial_y u(t, x, y) \\ u(0, x, y) = u_0(x, y) \text{ condition initiale} \end{cases} \quad (37)$$

### 4 Bibliographie

Lien du sujet : <https://github.com/upici/SaintVenant>

Support de Recherche : <http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/maxime.hauray/enseignement/M2-Transport/Cours2.pdf>

<http://perso.ensta-paristech.fr/becache/COURS-ONDES/Poly-num-0209.pdf>

[http://faccanoni.univ-tln.fr/user/enseignements/2010\\_2011\\_M2.pdf](http://faccanoni.univ-tln.fr/user/enseignements/2010_2011_M2.pdf)

<http://www.lmpa.univ-littoral.fr/sadok/fichiers/cours2b.pdf>

<http://math.univ-lyon1.fr/benzoni/M2AO/Schemas-EDO.pdf>

<https://old.i2m.univ-amu.fr/herbin/PUBLI/anedp.pdf>

Information sur la condition de cfl

<http://www.breves-de-maths.fr/quoi-ma-cfl-quest-ce-quelle-a-ma-cfl/>

Livres BU : Résolution numérique des équations de Saint-Venant par la technique de projection en utilisant une méthode des volumes finis dans un maillage non structuré