

# Résolution du système d'équations de Saint-Venant

Compte Rendu  
Travail en groupe

M1 - EDPMA  
Groupe AlMaTi

Alice CASTAGNET  
Marine REDONDO  
Tiffany CARLIER

Encadrant  
M. LEGUÈBE

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Notations</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Recherche de ressources et documentation</b>	<b>2</b>
3.1	L'équation de transport . . . . .	2
3.2	Résolution du problème 1D . . . . .	3
3.2.1	Résolution par la méthode des caractéristiques . . . . .	3
3.2.2	Application . . . . .	5
3.3	Méthodes des volumes finis . . . . .	5
3.3.1	Notion de maillage et de discrétisation . . . . .	5
3.3.2	Volumes finis en dimension quelconque . . . . .	6
3.3.3	Méthode des volumes finis cas 1D . . . . .	6
3.3.4	Exemples de schémas numériques dans le cas 1D . . . . .	7
3.4	Flux numérique . . . . .	9
3.4.1	La mécanique des fluides . . . . .	9
3.4.2	Exemple de flux numérique . . . . .	9
3.4.3	Schéma numérique général . . . . .	10
3.5	Contraintes sur la méthode . . . . .	10
3.5.1	Condition de CFL et pas de temps . . . . .	10
3.5.2	Méthode avec résolution de système linéaire . . . . .	11
3.5.3	Méthode de stabilisation d'un schéma instable . . . . .	12
3.5.4	Système d'équation de transport . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Programmation dans un cas simplifié</b>	<b>13</b>
4.1	Explication de l'implémentation de la méthode . . . . .	13
4.1.1	Explication du code et analyse des résultats . . . . .	13
4.2	Exemples concrets de solutions exactes . . . . .	14
4.2.1	schéma upwind . . . . .	14
4.2.2	schéma de Richardson . . . . .	15
4.2.3	schéma de Lax Wendroff . . . . .	16
4.2.4	schéma Lax Friedrichs . . . . .	17
4.3	Tests de validation . . . . .	19
4.3.1	Explication . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Le cas général</b>	<b>21</b>
5.1	Généralisation à la dimension 2 . . . . .	21
5.2	Application à un exemple . . . . .	22
5.3	Résolution du problème de rupture de barrage des équations de Saint Venant . . . . .	22
5.3.1	Les équations de Saint-Venant . . . . .	22
5.3.2	Résolution du système d'équation de Saint Venant . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>24</b>

# 1 Introduction

Dans le cadre de l'approximation des grands lacs ( à détailler ?), les équations de Saint-Venant permettent de modéliser la hauteur et la quantité de mouvement des étendues d'eau pour calculer par exemple l'écoulement d'une rivière ou son débordement.

Ses équations s'écrivent sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles non linéaire. Dans un premier temps, nous simplifierons le problème en nous intéressant à l'équation de transport scalaire :

$$\partial_t u + \operatorname{div}(cu) = 0 \quad \text{dans un ouvert } \Omega$$

où  $c$  est le champ de vecteur vitesse avec  $\operatorname{div}(c) = 0$ .

La méthode des volumes finis est la plus adaptée à ce type d'équation. Notre objectif est donc de résoudre une rupture de barrage pour les équations de Saint-Venant [1] en utilisant la méthode des volumes finis.

## 2 Notations

$\Omega$  : ensemble d'espace associé au problème

$u$  : inconnue du problème

$t$  : variable de temps

$\Delta t$  : pas de temps

$n$  : nombre d'itérations en temps

$x$  : variable d'espace qui peut avoir plusieurs dimensions

$\Delta x$  : pas d'espace en une dimension

$i$  : nombre d'itérations en espace

$c$  : vitesse de  $u$

$K_i$  : volumes de contrôle où  $K_i$  et  $K_j$  sont deux volumes côte à côte

$e$  : arête quelconque

$\epsilon K_i$  : ensemble des arêtes du volume de contrôle  $K_i$

$e_{i,j}$  : arête commune aux volumes  $K_i$  et  $K_j$

$n_{i,j}$  : normale à l'arête  $e_{i,j}$  extérieure à  $K_i$

## 3 Recherche de ressources et documentation

### 3.1 L'équation de transport

1. Une équation de transport est une équation de la forme :

$$\partial_t u(t, x) + c(t, x, u) \cdot \nabla_x u(t, x) = 0$$

Elle décrit le comportement d'une quantité  $u$  dépendant du temps  $t$  et d'une autre variable  $x$  appartenant à un domaine  $\Omega$  qui représente généralement un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^n$ . La variable  $x$  peut définir une position, une vitesse, un couple position/vitesse...

Les équations de transport font apparaître une notion de propagation à vitesse finie et sont donc qualifiées d'équations d'hyperboliques.

Il en existe deux formes :

- la forme conservative :

$$\begin{cases} u_t(t, x) + \operatorname{div}_x(c(t, x)u(t, x)) = 0 \\ u(t = 0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

- la forme forte :

$$\begin{cases} u_t(t, x) + c(t, x)\nabla_x u(t, x) = d(t, x, u) \\ u(t = 0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

Dans notre cas, nous utiliserons la forme conservative de l'équation de transport car la divergence du vecteur vitesse  $c$  sera nulle. Ceci nous permet ainsi de dire que l'intégrale de  $u$  sera conservée au cours du temps.

Pour résoudre le problème, il est nécessaire d'imposer une condition initiale à  $t = 0$  :

$$u(t = 0, x) = u_0(x).$$

De plus, si  $\Omega$  possède des bords il faut pour que le problème soit bien posé, ajouter une condition  $u_b$  sur la partie de la frontière où le champ est rentrant, c'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \partial\Omega, \quad c(t, x) \cdot \overrightarrow{n(x)} < 0 \Rightarrow u(t, x) = u_b(t, x)$$

où  $\overrightarrow{n(x)}$  représente la normale extérieure à  $\Omega$ .

Ceci permet d'éviter au problème d'être sur-déterminé et de vérifier ainsi les trois conditions nécessaires qui définissent un problème bien posé (existence, unicité et stabilité).

Dans le cas 1D où  $x \in (0, 1)$  et  $t \in (0, T)$  que l'on étudiera par la suite, les conditions aux limites se présentent de cette manière :

Si  $c > 0$  alors il est nécessaire d'ajouter sur le bord gauche qui est entrant la condition suivante :  $u(0, t) = g_0(t)$

Au contraire si  $c < 0$  alors il est nécessaire d'ajouter sur le bord droit la condition suivante :  $u(1, t) = g_1(t)$

## 3.2 Résolution du problème 1D

### 3.2.1 Résolution par la méthode des caractéristiques

Dans le cas 1D avec un champ de vitesse constant  $c$  le problème s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + c \partial_x u(t, x) = 0, x \in \mathbb{R} \text{ et } t \in (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

Une des méthodes pour résoudre ce type d'équation est la méthode des caractéristiques [2]. On définit les caractéristiques comme les courbes de  $\mathbb{R}^2$  définies par  $(t, X(t))$  où  $X(t)$  est la solution de l'équation différentielle ordinaire  $\partial_t X(t) = c$ . On a alors que  $(t, X(t))$  vérifie :

$$\partial_t u(t, X(t)) = \partial_t X \cdot \partial_x u + \partial_t u = c \cdot \partial_x u + \partial_t u = 0$$

Les solutions sont donc constantes le long des caractéristiques. Considérons  $(t^*, x^*)$  un point du plan avec  $t^* > 0$  ainsi que  $X^*(t)$  la caractéristique passant par ce point. Alors  $X^*$  vérifie :

$$\partial_t X^* = c, X^*(t^*) = x^* \Rightarrow X^* = ct + x^* - ct^* \text{ et donc } X^*(0) = x^* - ct^*$$

Finalement au point  $(t^*, x^*)$  sachant que la variable  $t$  ne rentre pas en compte car  $u$  est constante le long des caractéristiques, la solution  $u$  du problème est déterminée par :

$$u(t^*, x^*) = u(0, X^*(0)) = u(0, x^* - ct^*) = u_0(x^* - ct^*)$$

On obtient finalement le critère suivant :

Si  $u_0$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , alors il existe pour le problème de transport en une dimension une unique solution différentiable  $u$  en  $(t, x)$  donnée par :

$$u(t, x) = u_0(x - ct) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0$$

Cela signifie que connaissant  $u_0(x_0)$  on peut déterminer  $u(x, t)$  sur toute la demi droite caractéristique issue de  $x_0$  pour tout  $x_0$

A l'aide cette méthode il est facile de voir le critère de condition aux limites. Lorsque le pied de la caractéristique touche le bord du domaine il n'y a plus d'information pour calculer la partie restante (en violet ou en bleu sur la figure suivante).

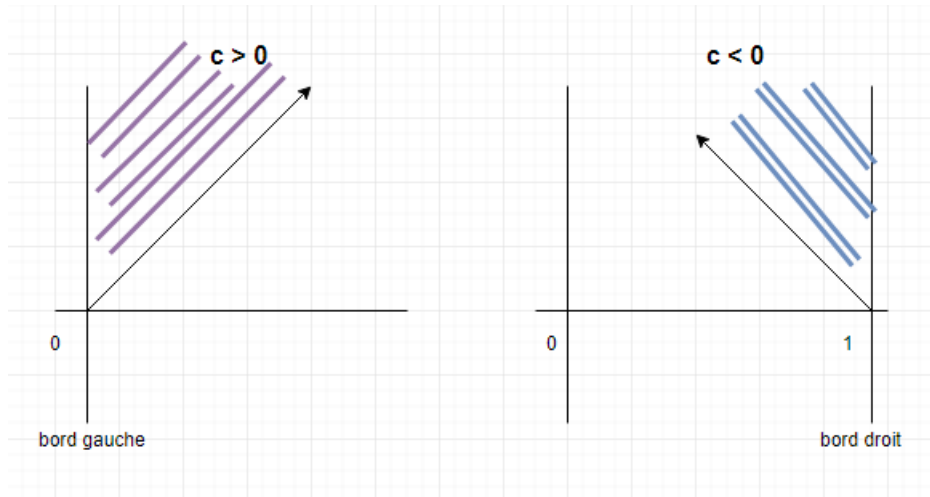


FIGURE 1 – Conditions aux bords

Ainsi suivant la valeur du vecteur vitesse pour avoir une approximation pertinente il est nécessaire d'ajouter ces conditions.

### 3.2.2 Application

Considérons l'exemple d'un tube dans lequel coule de l'eau à une vitesse  $c$  que l'on choisit positive telle que l'eau présente des traces d'un certain polluant. Ainsi d'après ce que l'on a prouvé précédemment, la distribution du polluant à l'instant  $t = 0$  est inchangée pour un temps  $t_1 > 0$  à une translation près de  $ct_1$  (en considérant le diamètre du tube relativement petit).

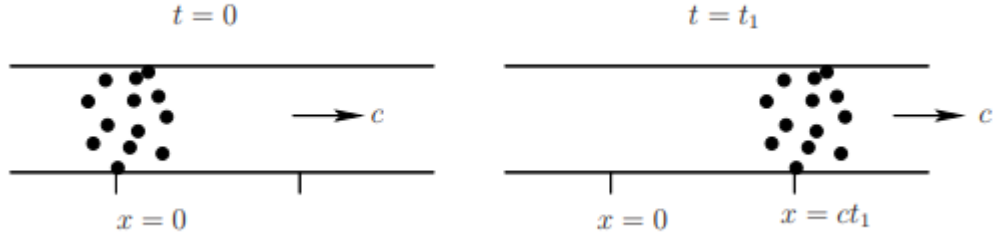


FIGURE 2 – Transport d'un polluant

## 3.3 Méthodes des volumes finis

### 3.3.1 Notion de maillage et de discrétisation

Pour définir la méthode des volumes finis il est nécessaire de définir la notion de maillage [3]. Un maillage est la discrétisation spatiale d'un milieu continu, ou une modélisation géométrique d'un domaine par des éléments proportionnés finis et bien définis. Un maillage doit vérifier les propriétés suivantes :

Soit  $\Omega$  l'ensemble d'espace associé à notre problème. Les éléments de la suite  $(K_i)_{1 \leq i \leq I}$  sont appelés volumes de contrôle. Cette suite définit un maillage du domaine  $\Omega$  vérifiant :

$K_i$  un ouvert de  $\Omega$

$K_i \cap K_j = \emptyset, \forall i \neq j$

$\cup_{i=1}^I \overline{K_i} = \overline{\Omega}$

En voici un exemple dans le cas d'un maillage "cell vertex" :

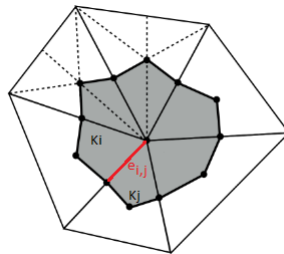


FIGURE 3 – Exemple d'un ensemble d'espace  $\Omega$  divisé en espaces de contrôle  $K_i$

### 3.3.2 Volumes finis en dimension quelconque

En considérant un maillage défini comme précédemment, le principe des volumes finis [4] est l'intégration de l'équation aux dérivées partielles donc dans notre cas l'équation de transport sur tous les volumes de contrôle. La formule de la divergence nous permet de simplifier le problème qui nous dit :

$$\int_K \operatorname{div} w \, dK = \int_{\partial K} w \cdot n \, d(\partial K) = \sum_{\sigma \in \varepsilon K} \int_{\sigma} \omega_{\sigma} \cdot n_{\sigma} \, d\gamma$$

où  $\varepsilon K$  est l'ensemble des arêtes du volume de contrôle  $K$ ,  $n_{\sigma}$  est la normale à l'extérieur par rapport à l'arête  $\sigma$ , et  $\gamma$  la mesure sur  $\sigma$ .

Ainsi, pour l'équation de transport la méthode des volumes finis donne sur un volume de contrôle  $K_i$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{K_i} u(t, x) dx + \sum_{e_{i,j} \in \partial K_i} \int_{e_{i,j}} (cu) \cdot n_{i,j} \, d\gamma = 0 \quad (1)$$

$$\operatorname{mes}(K_i) \frac{du_i}{dt} = - \sum_{e_{i,j} \in \partial K_i} \int_{e_{i,j}} (cu) \cdot n_{i,j} \, d\gamma \quad (2)$$

Ici,  $\gamma$  est la mesure de  $e_{i,j}$  où  $e_{i,j}$  est l'arête commune aux deux volumes de contrôle  $K_i$  et  $K_j$  et  $n_{i,j}$  est la normale à l'arête  $e_{i,j}$  sortant du volume de contrôle  $K_i$ . Sur la figure suivante l'arête de contrôle est défini par la surface bleu.

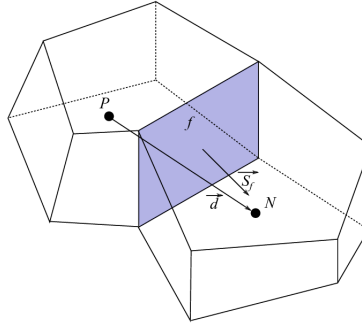


FIGURE 4 – Exemple d'une arête définissant la frontière entre deux volumes de contrôle

### 3.3.3 Méthode des volumes finis cas 1D

**Méthode générale :** La Figure ci-dessous représente un maillage en 1 dimension. Ici, l'espace  $\Omega$  est le segment  $[AB]$ . On divise ce segment en petits segments délimités par les points  $x_i$  où  $i \in \{1, l\}$  (en vert sur le schéma). On note que ici, tous les  $x_i$  sont strictement à l'intérieur des extrémités  $A$  et  $B$ , le volume de contrôle devant être ouvert. On définit ensuite les  $x_{i \pm \frac{1}{2}}$  (en rouge sur le schéma). Les volumes de contrôle  $K_i$  définis précédemment correspondent aux intervalles ouverts  $]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$  pour  $i \in \{1, l\}$ .

Dans le cas ci-dessous, les  $x_i$  sont situés au milieu de  $K_i$  mais il est également possible de choisir les  $x_i$  à l'une ou l'autre des extrémités des  $K_i$ .

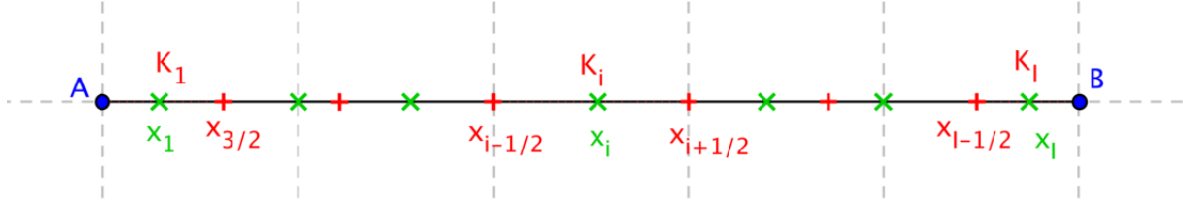


FIGURE 5 – Maillage en 1 dimension

Pour calculer numériquement la solution du problème 1D on introduit une grille qui est cette fois en  $x$  et en  $t$ . On introduit les notations suivantes :

$x_i = i\Delta x$ ,  $\Delta x$  le pas de la discrétisation en espace

$t^n = n\Delta t$ ,  $\Delta t$  le pas de la discrétisation en temps

De plus on note  $u_i^n$  une approximation de  $u(x_i, t^n)$

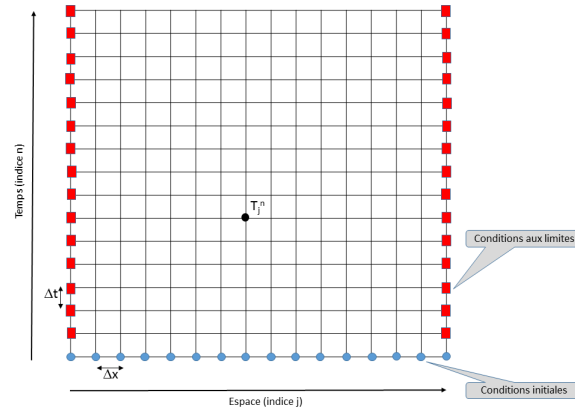


FIGURE 6 – Grille de la discrétisation

On intègre l'équation de transport sur tous les volumes de contrôle donc ici sur une dimension d'espace et sur la discrétisation en temps que l'on a défini précédemment, cela nous donne :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \partial_t u(t, x) dx dt + \int_n^{n+1} \Delta t \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \partial_x u(t, x) dx dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \partial_x (u_k^{n+1} - u_k^n) + c \partial_t \left( u_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) = 0$$

Comme dit précédemment, la méthode des volumes finis consiste à intégrer le problème que l'on cherche à résoudre sur les différents volumes de contrôle. Ceci nous permet ainsi d'obtenir autant d'équations que de volumes de contrôles.

### 3.3.4 Exemples de schémas numériques dans le cas 1D

Il est alors possible grâce par exemple au schéma d'Euler explicite d'obtenir un schéma "Volumes Finis". La méthode d'Euler pour un schéma explicite consiste à associer à une équation différentielle du type :

$$\partial_t u(t, x) = f(t, x)$$



à un schéma avec un pas de temps  $\Delta t$  donné par :

$$u^{n+1} - u^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} (f(s, u(s))) ds \quad (3)$$

En appliquant la méthode d'Euler à l'équation (3), on obtient :

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n + c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^n) \\ u_i^{n+1} &= u_i^n + c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2} \right) \end{aligned}$$

où  $u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_i + u_{i+1}}{2}$  et  $u_{i-\frac{1}{2}} = \frac{u_{i-1} + u_i}{2}$ .

Il s'agit ici du schéma centré de Richardson. Malheureusement, ce schéma est instable car il ne prend pas en compte l'information sur le signe du champ de vecteur vitesse  $c$ . Pour le rendre stable, il faudrait apporter de la diffusion numérique. D'autres schémas existent, quelques uns sont listés ci-dessous [5].

- Les schémas décentrés (upwind)

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n), \text{ si } c > 0 \iff u_i^{n+1} = u_i^n \left( 1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right) + u_{i-1}^n \left( \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right) \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n), \text{ si } c < 0 \iff u_i^{n+1} = u_i^n \left( 1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right) - u_{i+1}^n \left( \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right) \end{aligned}$$

Il s'agit ici d'un schéma décentré permettant de prendre l'information du bon côté suivant la direction de la caractéristique donné par le signe du champ vitesse  $c$  i.e que le décentrement tient compte de la direction de la propagation.

On constatera par la suite qu'il s'agit du bon schéma dans le cas 1D tel que la convergence soit assurée suivant la valeur du vecteur  $c$ . Il est tout de même important de préciser que la condition de CFL inférieure ou égale à 1 est toujours une obligation. Pour ce schéma la cfl est défini par  $|1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}| - |\frac{c\Delta t}{\Delta x}| \leq 1$  L'ordre global avec ce schéma est en  $O(\Delta t + \Delta x)$ .

- Le schéma de Lax-Wendroff :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

C'est un schéma stable du  $2^{nd}$  ordre en temp et en espace, il peut être vu comme une modification de schéma de Lax Friedrichs. La condition de cfl est défini par  $|c| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$

- Le schéma Euler explicite en aval :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

## 3.4 Flux numérique

### 3.4.1 La mécanique des fluides

La mécanique des fluides numériques est l'étude des mouvements d'un fluide par la résolution numérique des équations décrivant le comportement du fluide. Il s'agit d'un outil essentiel dans de nombreuses branches de la dynamique des fluides : propulsion aérospatiale, météorologie, barrage hydraulique, écoulement d'un fluide dans un tuyau... L'avantage de cette approche est qu'elle donne accès à toutes les informations instantanées (vitesse, pression, concentration...) en chaque point du domaine de calcul, pour un faible coût par rapport aux expériences correspondantes.

La résolution d'un problème de mécanique des fluides numériques comprend trois étapes :

- l'analyse du problème : choix d'une géométrie, d'un maillage discrétisant le domaine de calcul, des méthodes numériques employées ;
- la résolution numérique du problème : exécution d'un programme informatique ;
- l'exploitation des résultats : vérification de la cohérence puis étude des résultats.

Les trois méthodes de discrétisation sont :

- méthode des différences finies
- méthode des volumes finis
- méthode des éléments finis

Cependant, c'est la méthode des volumes finis qui est la plus appropriée et la plus utilisée pour résoudre des problèmes de dynamique des fluides. La méthode des volumes finis est complètement déterminée par son flux numérique.

Dans notre cas le flux numérique vérifie deux propriétés :

- la conservation des flux à travers les arêtes
- la consistance des flux

### 3.4.2 Exemple de flux numérique

Prenons le problème suivant :

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), x \in ]0, 1[ \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

En appliquant la méthode des volumes finis à cette équation on obtient le schéma suivant :

$$-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + u'(x_{i-\frac{1}{2}}) = h_i f_i$$

$$\Leftrightarrow F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = h_i f_i$$

$F_{i+\frac{1}{2}}$  est appelé le flux numérique en  $x_{i+\frac{1}{2}}$ .

Un des principes de la méthode des volumes finis est de pouvoir écrire les flux numériques en fonction des variables discrètes  $u_i$ . Une approximation de ce flux numérique peut alors être donnée par la notation suivante :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

En ce qui concerne le cas général on peut définir le flux comme suivant : le flux à travers l'arête  $e_{i,j}$  est approché par

$$\int_{e_{i,j}} (cu).n_{i,j} d\gamma = mes(e_{i,j})\Phi(u_i, u_j, n_{i,j})$$

où  $\Phi(u_i, u_j, n_{i,j})$  est le flux numérique à travers l'arête  $e_{i,j}$  entre les volumes de contrôle  $K_i$  et  $K_j$  définit ainsi :

$$\begin{aligned}\Phi(u_i, u_j, n_{i,j}) &= \begin{cases} u_{K_i}(\bar{c}.n_{i,j}) & \text{si } \bar{c}.n_{i,j} > 0 \\ u_{K_j}(\bar{c}.n_{i,j}) & \text{sinon} \end{cases} \\ &= u_{K_i}(\bar{c}.n_{i,j})^+ + u_{K_j}(\bar{c}.n_{i,j})^- \end{aligned}$$

où  $(\bar{c}.n_e)^+ = \max(\bar{c}.n_e, 0)$ ,  $(\bar{c}.n_e)^- = \min(\bar{c}.n_e, 0)$  et  $\bar{c}$  est la moyenne de la vitesse  $c$  aux extrémités  $x_1$  et  $x_2$  de l'arête  $e$  :

$$\bar{c} = \frac{c(x_1) + c(x_2)}{2}$$

On utilise donc l'information venant des espaces de contrôle  $K_i$  ou  $K_j$  en fonction de la direction du champ de vitesse  $c$ .

### 3.4.3 Schéma numérique général

En appliquant le schéma d'Euler [6] à l'équation (2), on obtient un schéma dans le cas général donné par :

$$\begin{aligned}\frac{du_i}{dt} &= -\frac{1}{mes(K_i)} \sum_{e_{i,j} \in \partial K_i} mes(e_{i,j})\Phi(u_i, u_j, n_{i,j}) \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{mes(K_i)} \sum_{e_{i,j} \in \partial K_i} mes(e_{i,j})(u_{K_i}(\bar{c}.n_{i,j})^+ + u_{K_j}(\bar{c}.n_{i,j})^-) \end{aligned}$$

## 3.5 Contraintes sur la méthode

### 3.5.1 Condition de CFL et pas de temps

Dans le cas 1D, pour écrire un schéma pertinent il faut que le pas de temps  $\Delta t$  soit suffisamment petit pour que le pied de la caractéristique rentre dans le support du schéma, c'est une condition géométrique nécessaire à sa stabilité.

Cela revient à dire que l'on cherche à avoir  $\Delta t$  tel que le cône de dépendance théorique soit inclus dans le cône de dépendance numérique.

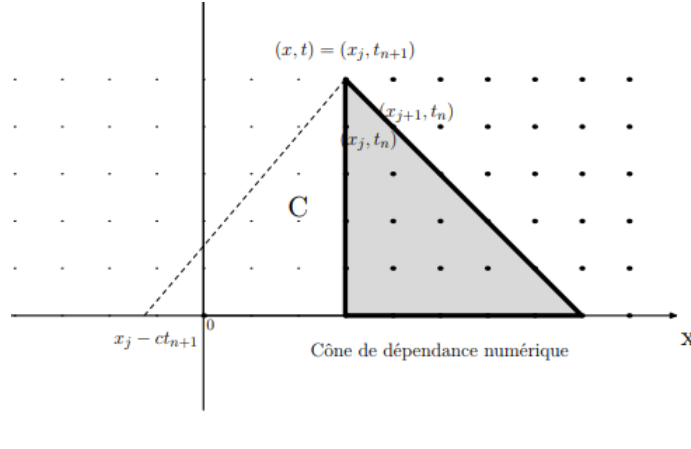


FIGURE 7 – Exemple de cône de dépendance

Numériquement et peu importe la dimension du problème, cette condition est équivalente à la condition de CFL [7] (coefficient de Courant, Fredrichs, Lewy). Le schéma est stable si ce coefficient est inférieur ou égal à 1 et produira une solution cohérente. La condition de CFL impose au coefficient d'amplification d'être plus petit que 1. Une des manières pour exprimer la condition de cfl dans le cas 1D est de passer à la transformée de fourier sur du problème.

Par exemple sur les schémas à un pas de temps, un schéma numérique est déterminé par la formule suivante :

$$\sum_{j \in J_k} b_j u_{k+j}^{n+1} = \sum_{j \in J_k} c_j u_{k+j}^n$$

Par passage à la transformée de Fourier, on exprime le coefficient d'amplification du schéma par :

$$M(\xi) = \frac{\sum_j c_j e^{i\xi j \Delta x}}{\sum_j b_j e^{i\xi j \Delta x}}$$

Ainsi lorsque que  $|M(\xi)| \leq 1$  cela nous donne la condition de stabilité que l'on appelle CFL. Si par exemple le schéma possède plusieurs pas de temps alors on peut réécrire le problème en passant toujours à la transformée de Fourier mais cette fois on réécrit le problème sous forme matricielle et les valeurs propres de cette matrice devront toutes vérifier la condition d'être plus petit en norme que 1.

On peut déterminer par exemple le pas de temps avec la formule suivante :  $\Delta t = \Delta x \times CFL$  ou on fixe au préalable  $CFL < 1$  et un pas d'espace  $\Delta x$ .

On peut parfois se placer à la condition de stabilité où le coefficient de  $CFL$  vaut 1.

Pour l'implémentation de notre méthode nous utiliserons ce critère.

### 3.5.2 Méthode avec résolution de système linéaire

En fonction du type de schéma considéré pour l'approximation de l'équation, c'est-à-dire si un schéma est implicite ou explicite on peut avoir besoin de résoudre un système linéaire. C'est dans

le cas où le schéma est implicite c'est-à-dire lorsqu'au  $n + 1^{ime}$  pas de temps, il existe plusieurs pas d'espace pour ce même pas de temps, qu'il sera alors nécessaire de résoudre un système linéaire. Les schémas implicites peuvent parfois être utilisés à la place des schémas explicites pour leur meilleure stabilité. Mais dans le cas où le schéma choisi est explicite, on peut calculer explicitement  $u_k^n$  en fonction des  $u_{k+1}^n$  ou des pas précédents sans avoir à résoudre un système linéaire.

Pour obtenir un schéma implicite on peut pour cela changer la discrétisation de l'élément  $\partial_x$  en le discrétisant au pas de temps  $n+1$ . Un résultat possible est alors le schéma suivant :

$$u_k^{n+1} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} u_k^{n+1} - \frac{c\Delta t}{\Delta x} u_{k-1}^{n+1} = u_k^n$$

Matriciellement cela vient à résoudre le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{-c\Delta t}{\Delta x} & 1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{-c\Delta t}{\Delta x} & 1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & \frac{-c\Delta t}{\Delta x} & 1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}^n$$

On parle alors de résolution implicite.

### 3.5.3 Méthode de stabilisation d'un schéma instable

Nous prenons le cas du schéma centré de Richardson qui est le suivant :

$$u_k^{n+1} = u_k^n - c \frac{\delta t}{2\delta x} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n)$$

Le coefficient d'amplification de ce schéma est  $M(\xi) = 1 - ic \frac{\delta t}{\delta x} \sin(\xi\delta x)$ .

D'où  $|M(\xi)|^2 = 1 + |c \frac{\delta t}{\delta x} \sin(\xi\delta x)|^2 > 1$ . Donc toujours instable.

Pour le rendre stable, il faut ajouter de la diffusion numérique. Nous pouvons réécrire le schéma décentré comme suit :

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\delta t} + c \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\delta x} \begin{cases} -c \frac{\delta x}{2} \left( \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\delta x^2} \right) = 0 \text{ si } c > 0 \\ +c \frac{\delta x}{2} \left( \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\delta x^2} \right) = 0 \text{ si } c < 0 \end{cases}$$

Le terme supplémentaire correspond à la discrétisation centrée au second ordre de  $-|c| \frac{\delta x}{2} \partial_{x^2}^2 u$  qui est un terme de diffusion de coefficient  $\gamma = |c| \frac{\delta x}{2}$ . On revient donc à résoudre l'équation de transport-diffusion [8]

$$\partial_t u + c \partial_x u - \gamma \partial_{x^2}^2 u = 0 \text{ avec } \gamma \xrightarrow{\delta x \rightarrow 0} 0$$

### 3.5.4 Système d'équation de transport

Le cas d'un système d'équations de transport à coefficients constants correspond à un transport de plusieurs éléments. Par exemple dans un cours d'eau on peut étudier le transport de la terre, de pierres, de différents polluants, etc.

Cela revient à résoudre la même équation que précédemment mais l'inconnu  $U$  est un vecteur de plusieurs composantes tel que  $u_1, u_2, u_3, \dots$  i.e.

$$\partial_t U + C \partial_x U = 0$$
$$\Leftrightarrow \partial_t \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = 0$$

Les  $u_k$  deviennent nos différentes inconnues du problème avec  $c_k$  leur vitesse respective. La méthode reste la même que dans le cas 1D vu précédemment mais la solution approchée sera sous forme d'un vecteur.

## 4 Programmation dans un cas simplifié

### 4.1 Explication de l'implémentation de la méthode

#### 4.1.1 Explication du code et analyse des résultats

On va dans cette section détailler l'implémentation du problème 1D. On a choisi de travailler avec différents schémas dont on explicitera les résultats. Le problème 1D est conçu de façon à modéliser suivant le schéma demandé une approximation de u solution exacte du problème de transport 1D sur  $[0; 1]$ . Les schémas sont disponibles dans un fichier séparé et il est possible d'utiliser les schéma suivant :

schéma upwind  
schéma centré de Richardson  
schéma de Lax Wendroff  
schéma de Lax-Friedrichs

Pour ce faire nous avons décidé de définir le pas de temps en fonction de la condition de CFL et du pas d'espace défini par  $\frac{1}{N}$  où  $N$  est le nombre de mailles que l'on décide de demander à l'utilisateur, ainsi on peut facilement comparer le résultat obtenu en fonction de différentes discrétisations en espace.

La partie principale du code nous permet d'afficher 2 figures. La première affiche pour certains pas de temps la comparaison entre la solution exacte et la solution calculée. L'autre figure affiche seulement la comparaison au dernier pas de temps et on peut aussi voir sur le terminale l'erreur maximale de la méthode à la fin du calcul. Comme test de validation un autre fichier est disponible

”*calcule – erreurs – schema*” qui lui affichera l’erreur entre la solution exacte et l’approximation en échelle logarithmique.

## 4.2 Exemples concrets de solutions exactes

On va considéré seulement pour montrer quelques résultats possible une vitesse constante  $c = 1$  et une discrétisation en espace de 5000 points. On choisi aussi de poser la condition de cfl à 0.05 mais une simple modification du code permet d’étudier des résultats avec une condition de cfl différentes.

### 4.2.1 schéma upwind

Première condition initiale :  $\cos(2\pi x)$

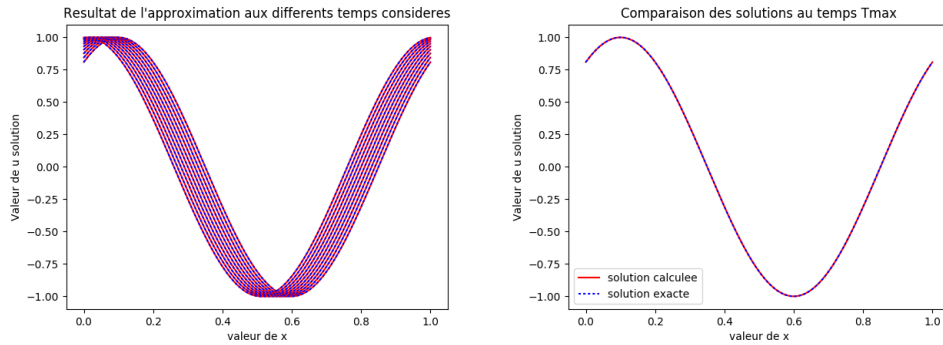


FIGURE 8 – Approximation, discretisation de 5000 et visulation au temps max

Erreur max = 0.017672

Deuxième condition initiale :  $-\frac{2}{\pi} \arctan(100(x - 0.5))$

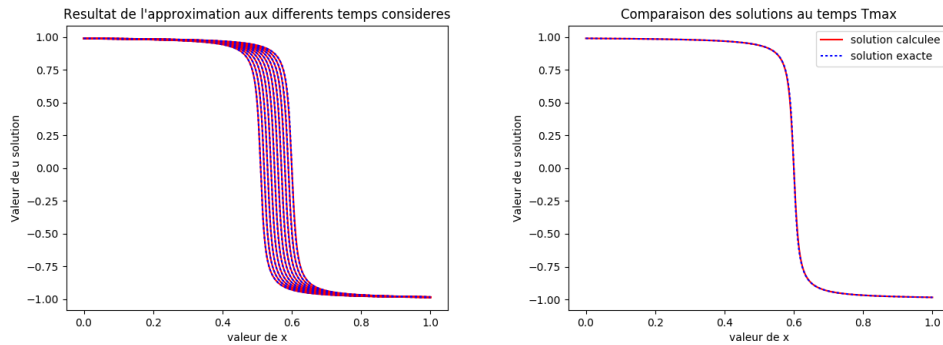


FIGURE 9 – Approximation, discretisation de 5000 et visulation au temps max

Erreur max = 0.337537

Troisième condition initiale :  $1. * (x < 0.2)$

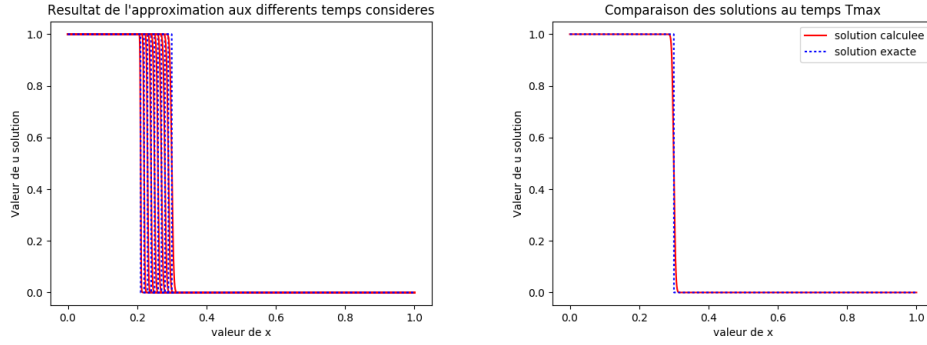


FIGURE 10 – Approximation, discretisation de 5000 et visulation au temps max

Erreur max = 2.261373

#### 4.2.2 schéma de Richardson

Première condition initiale :  $\cos(2\pi x)$

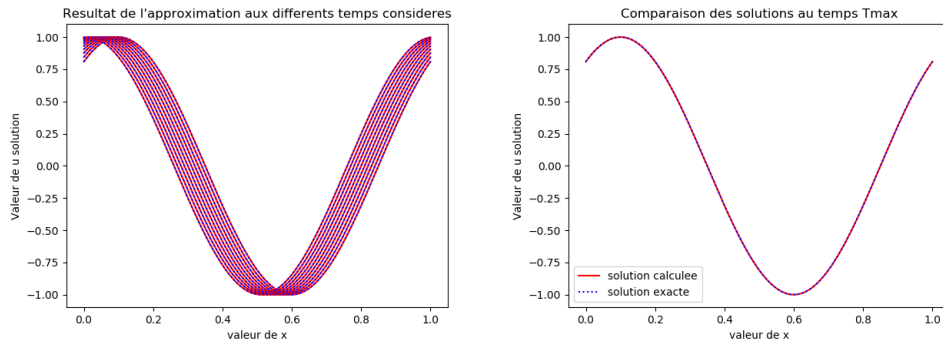


FIGURE 11 – Approximation, discretisation de 5000 et visulation au temps max

Erreur max = 0.001108

Deuxième condition initiale :  $-\frac{2}{\pi} \arctan(100(x - 0.5))$

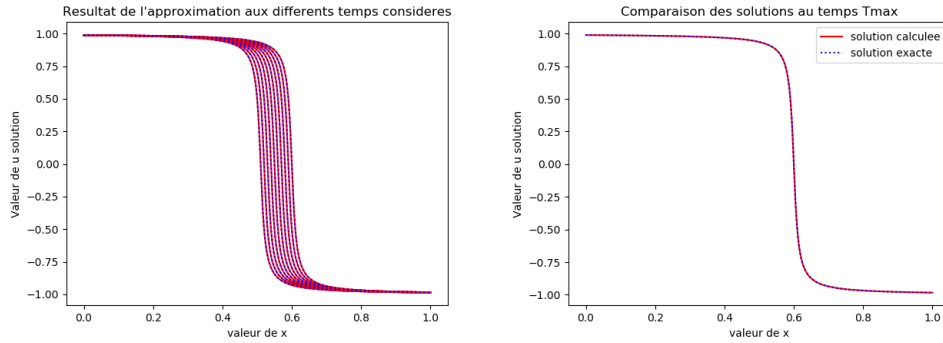


FIGURE 12 – Approximation, discretisation de 5000 et visulation au temps max

Erreur max = 0.020776

Troisième condition initiale :  $1. * (x < 0.2)$



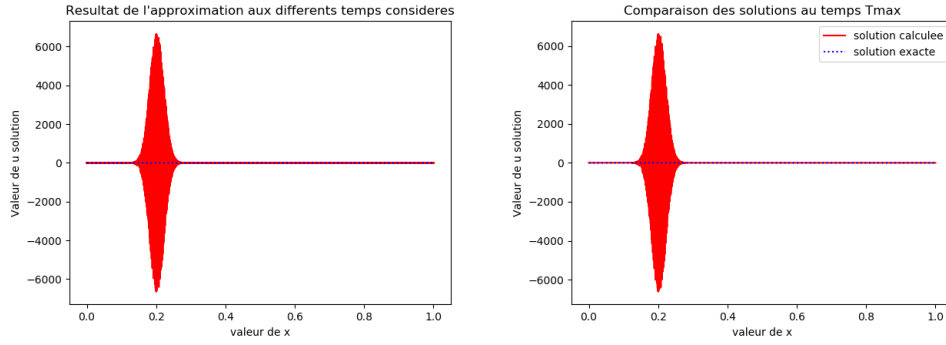


FIGURE 13 – Approximation, discretisation de 5000 et visulation au temps max

Erreur max = 63883.495253 L'erreur maximale enregistrée pour ce schéma est très importante cela est du au fait que c'est un schéma inconditionnellement instable.

#### 4.2.3 schema de Lax Wendroff

Première condition initiale :  $\cos(2\pi x)$

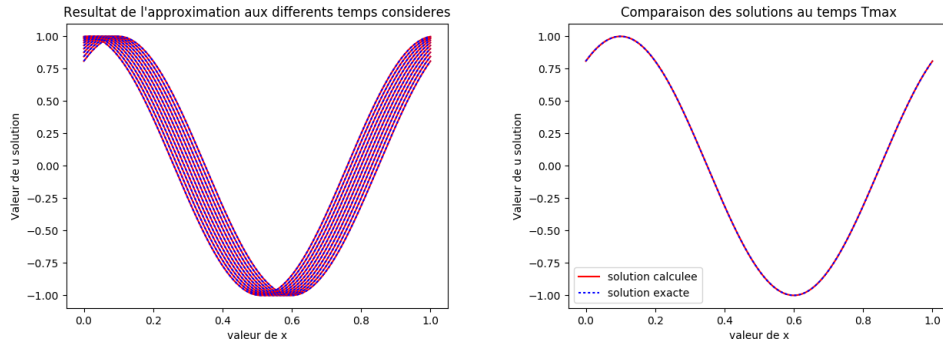


FIGURE 14 – Approximation, discretisation de 5000 et visulation au temps max

Erreur max = 0.000936

Deuxième condition initiale :  $-\frac{2}{\pi} \arctan(100(x - 0.5))$

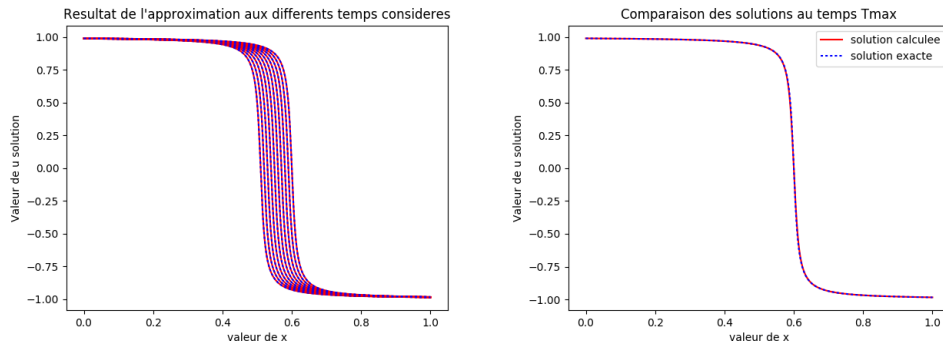


FIGURE 15 – Approximation, discretisation de 5000 et visulation au temps max

Erreur max = 0.020306

Troisième condition initiale :  $1. * (x < 0.2)$

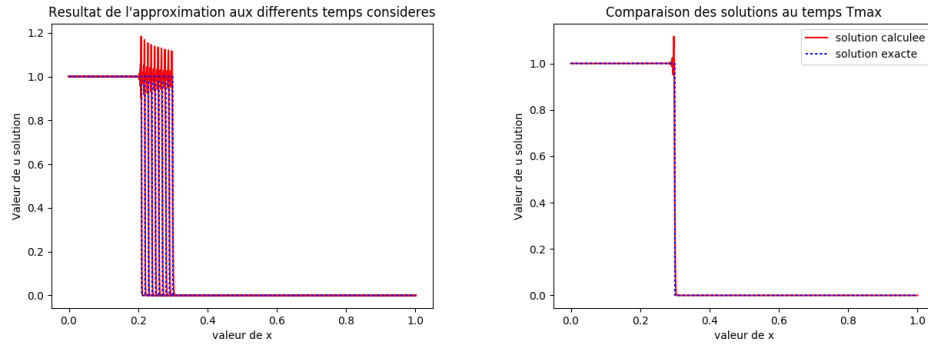


FIGURE 16 – Approximation, discretisation de 5000 et visulation au temps max

Erreur max = 1.430819

#### 4.2.4 schéma Lax Friedrichs

Première condition initiale :  $\cos(2\pi x)$

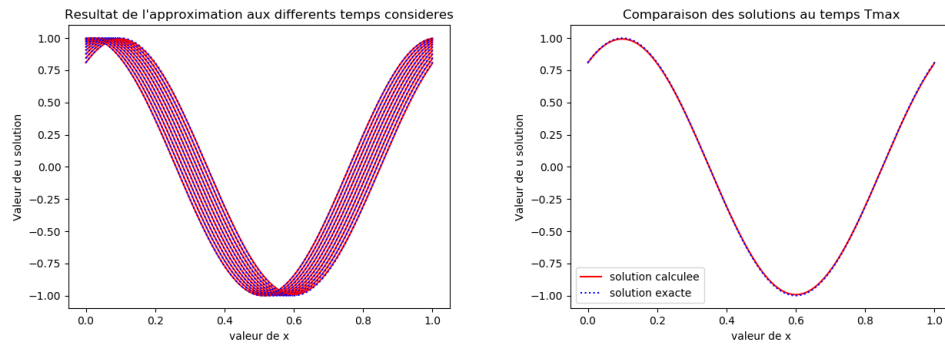


FIGURE 17 – Approximation, discretisation de 5000 et visulation au temps max

Erreur max = 0.367573 Deuxième condition initiale :  $-\frac{2}{\pi} \arctan(100(x - 0.5))$

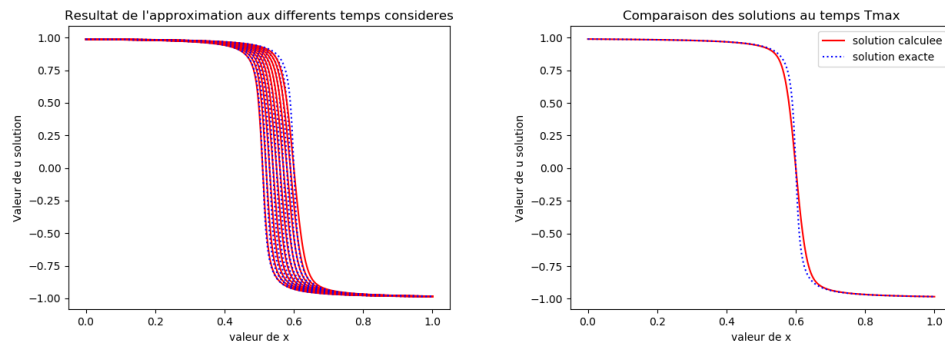


FIGURE 18 – Approximation, discretisation de 5000 et visulation au temps max

Erreur max = 3.411704

Troisième condition initiale :  $1. * (x < 0.2)$

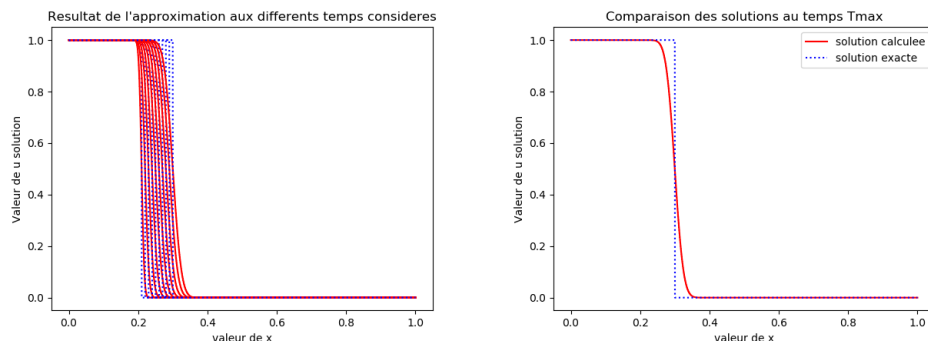


FIGURE 19 – Approximation, discretisation de 5000 et visulation au temps max

Erreur max = 4.831524

Nous avons aussi implémenter un calcul d'approximation avec un affichage en 3 dimensions pour le problème 1D. Ou on représente la solution en fonction de la valeur du pas de temps  $\Delta t$ , de la valeur du pas d'espace  $\Delta x$  et de l'approximation calculée par le schéma. En voici un exemple juste pour montrer la différence d'affiche par rapport à celui en deux dimensions. On choisi ici le schéma upwind avec un vecteur vitesse constant  $c$  égale à 1 et une condition de cfl de 0.5.

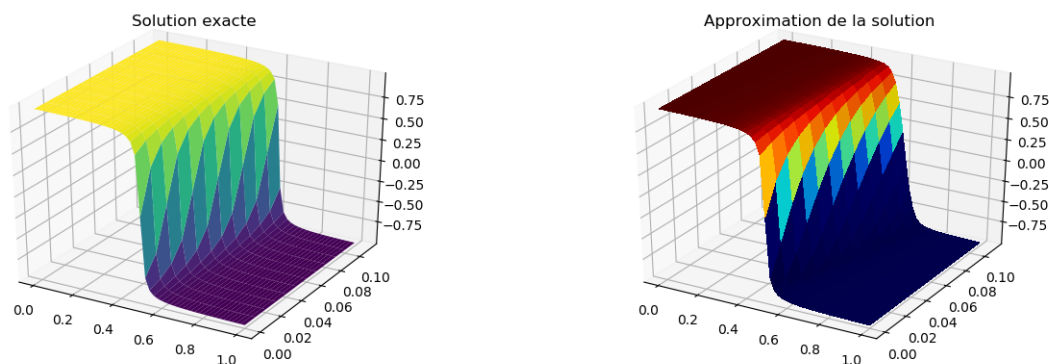


FIGURE 20 – Solution exacte et Approximation pour une discretisation de 50 en x

Le problème de cette affichage et qu'il rend compliqué la comparaison entre la solution exacte et la solution calculée.

En ce qui concerne les exemples montré précédemment on peut clairement voir sans l'étude préalable de l'erreur (section suivante) que le choix du schéma influence beaucoup sur le résultat de l'approximation. Dans notre cas on remarque que le schéma upwind et le schéma de Lax Wendroff donne de très bon résultat pour notre problème.

## 4.3 Tests de validation

### 4.3.1 Explication

Comme test de validation de notre méthode calcul nous avons essayé de tester le code produit pour différentes conditions initiales (voir paragraphe précédent), de plus pour savoir si l'approximation produite est bonne nous avons créé une méthode de calcul d'erreur qui représente en échelle logarithmique l'erreur entre la solution calculée et la solution exacte que nous connaissons pour toute condition initiale d'après ce que nous avons dit précédemment sur la méthode des droites caractéristiques (voir première partie).

Première condition initiale :  $\cos(2\pi x)$

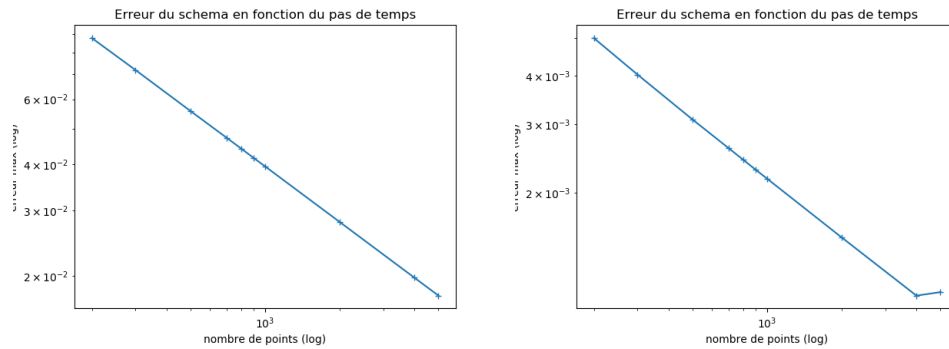


FIGURE 21 – upwind et Richardson

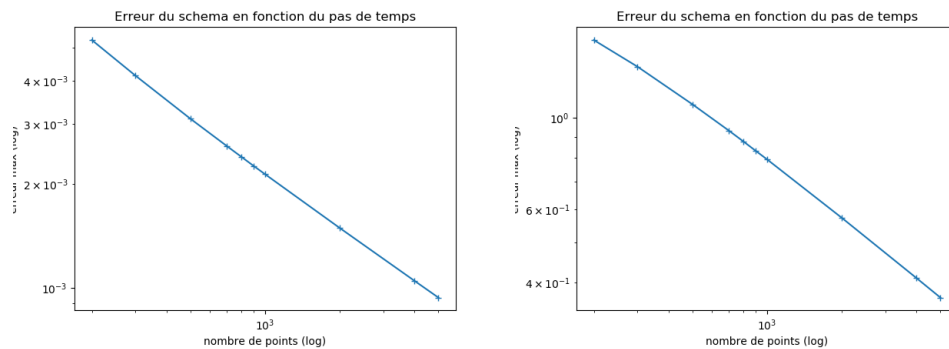


FIGURE 22 – Lax Wendroff et Lax Friedrichs

Dans le cas de la première condition initiale choisi le schéma de Lax Wendroff est à celui ayant la plus petite erreur.

Deuxième condition initiale :  $-\frac{2}{\pi} \arctan(100(x - 0.5))$

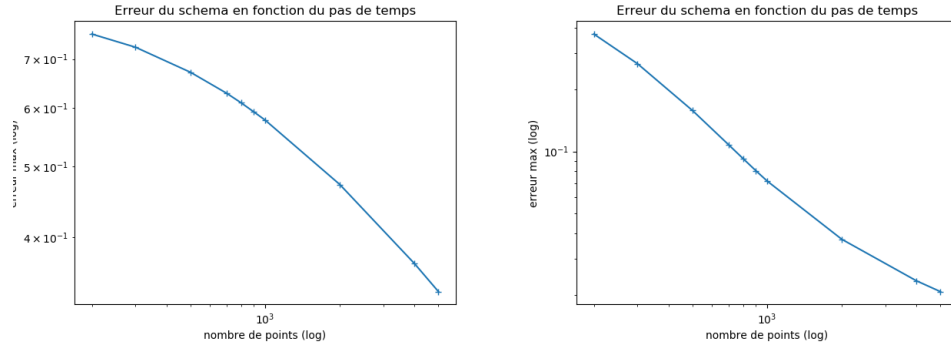


FIGURE 23 – upwind et Richardson

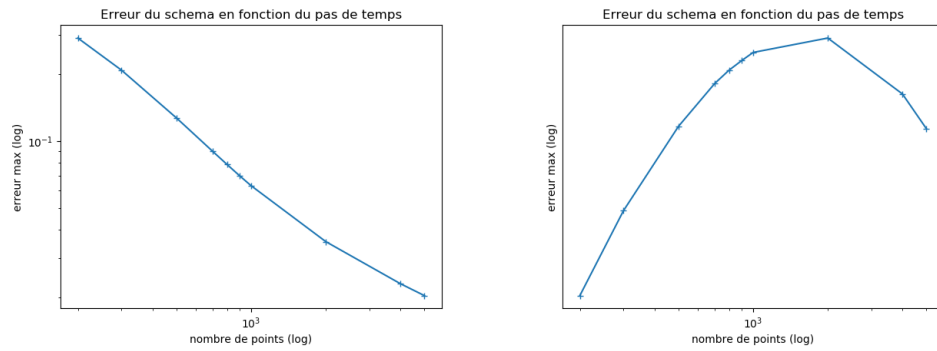


FIGURE 24 – Lax Wendroff et Lax Friedrichs

Dans le cas de la deuxième condition initiale là encore le schéma de Lax Wendroff est celui montrant les meilleurs résultats.

Troisième condition initiale :  $1. * (x < 0.2)$

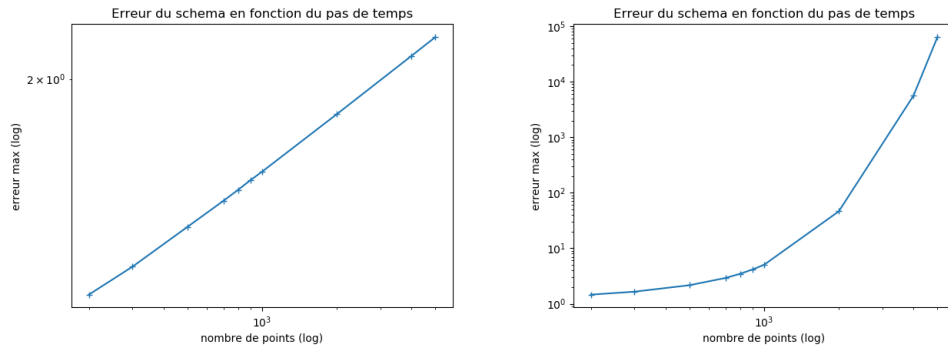


FIGURE 25 – upwind et Richardson

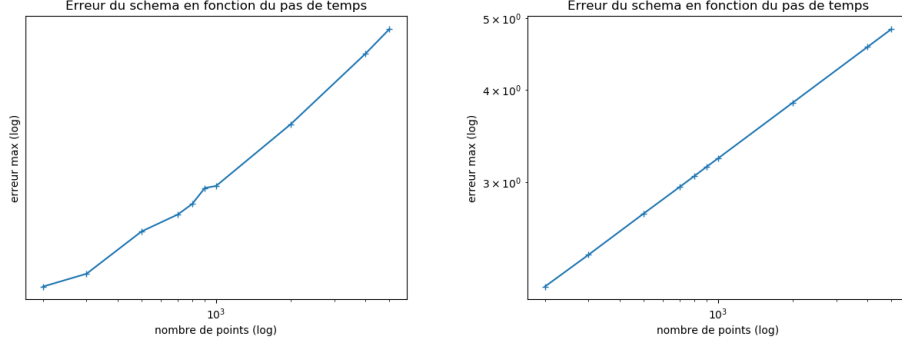


FIGURE 26 – Lax Wendroff et Lax Friedrichs

Dans le cas de la dernière condition initiale choisi peut importe le schéma considéré l'approximation est mauvaise cela est du au fait que la condition initiale choisi n'est pas une fonction continue mais une indicatrice sur le domaine  $] -\infty; 0.2[$ .

A l'aide des résultat obtenu on peut donc dire que certains schémas sont meilleurs que d'autres cela est du à leur propriété comme leur stabilité et leur ordre de convergence mais en fonction de la condition initiale imposé au problème 1D de transport le choix du schéma doit se poser en fonction de cette donnée.

## 5 Le cas général

### 5.1 Généralisation à la dimension 2

On cherche à généraliser le cas 1D de l'équation de transport à son problème 2D toujours dans le cas linéaire.

Soit  $c$  un vecteur vitesse à deux composantes.

On note  $c_x$  sa première composante et  $c_y$  sa seconde. On peut par exemple considérer  $x$  et  $y$  dans un domaine  $(0, 1)$ .

Ainsi l'équation de transport en 2 dimensions est donnée par :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x, y) + c \cdot \nabla u = \partial_t u(t, x, y) + c_x \partial_x u(t, x, y) + c_y \partial_y u(t, x, y) = 0 \\ u(0, x, y) = u_0(x, y) \text{ condition initiale} \end{cases}$$

Dans le cas 1D un des schémas possible était le suivant :

- le schéma décentré amont et aval :

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n), \text{ si } c > 0 \iff u_i^{n+1} = u_i^n \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) + u_{i-1}^n \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n), \text{ si } c < 0 \iff u_i^{n+1} = u_i^n \left(1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) - u_{i+1}^n \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) \end{aligned}$$

Si on cherche maintenant à généraliser ce résultat pour une discrétisation 2D on obtient :

$$\begin{aligned} \text{si } c > 0 : \quad & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{c_x}{\Delta x} (u_{i-1,j}^n - u_{i,j}^n) + \frac{c_y}{\Delta y} (u_{i,j-1}^n - u_{i,j}^n) \\ \text{si } c < 0 : \quad & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{c_x}{\Delta x} (u_{i,j}^n - u_{i+1,j}^n) + \frac{c_y}{\Delta y} (u_{i,j}^n - u_{i,j+1}^n) \end{aligned}$$

On note  $P_{i,j} = (i\Delta x, j\Delta y)$  où  $i, j \in \mathbb{Z}$ , les noeuds du maillage de  $\mathbb{R}^2$   $u_{i,j} = u(i\Delta x, j\Delta y)$  est une approximation de la solution exacte aux noeuds  $P_{i,j}$  à l'instant  $n\Delta t$ .

On pourra choisir un maillage non uniforme i.e un maillage où le pas d'espace en la variable  $x$  n'est pas le même que le pas d'espace en la variable  $y$ . Ainsi la principale différence entre le problème 1D et le problème 2D et l'ajout de nouvelles variables qui imposent à l'inconnu  $u$  que l'on cherche à identifier d'être représenté sous forme d'une matrice où  $x$  agit sur les lignes et  $y$  sur les colonnes.

## 5.2 Application à un exemple

Soit le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x, y) + c \cdot \nabla u = \partial_t u(t, x, y) + 3\partial_x u(t, x, y) + 2\partial_y u(t, x, y) = 0 \\ u(0, x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \text{ condition initiale} \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) \\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) \end{cases}$$

On choisit des conditions aux limites périodiques que l'on initialise connaissant la valeur de cette fonction pour cette équation qui est  $u(x, y, t) = \sin(2\pi(x - c_x t)) \sin(2\pi(y - c_y t))$ , où  $c_x = 3$  et  $c_y = 2$ . Connaissant la solution exacte on pourra par la suite calculer l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée pour voir la pertinence du schéma utilisé et du code produit.

On utilise le schéma défini précédemment pour le cas 2D. On obtient alors une représentation de la solution qui est de la forme suivante :

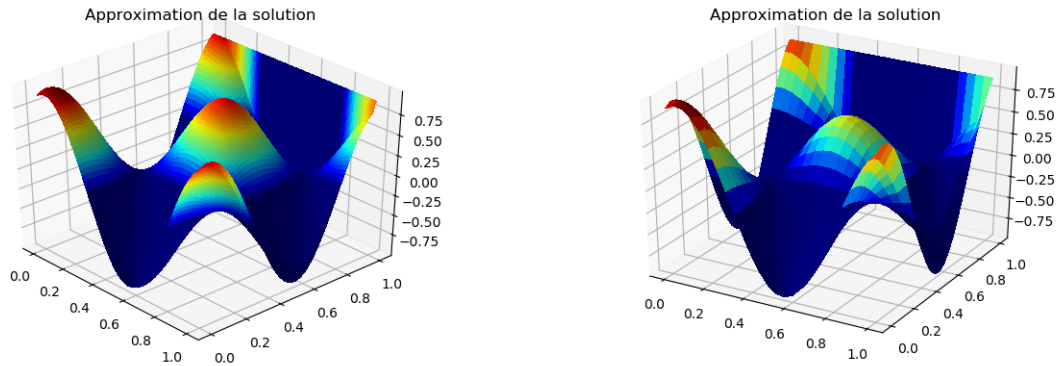


FIGURE 27 –  $\Delta x = \Delta y$  Discrétisation par 100 et 25

## 5.3 Résolution du problème de rupture de barrage des équations de Saint Venant

### 5.3.1 Les équations de Saint-Venant

à rédiger...

### 5.3.2 Résolution du système d'équation de Saint Venant

à rédiger...



## 6 Bibliographie

Livres BU : Résolution numérique des équations de Saint-Venant par la technique de projection en utilisant une méthode des volumes finis dans un maillage non structuré

### Références

- [1] Yves Coudier. Support de projet, 2017. <https://github.com/upici/SaintVenant>.
- [2] Pierron Théo. Équations différentielles et phénomènes de transport. <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tpier758/cours/edph.pdf>.
- [3] Méthodes des volumes finis. <https://fr.wikipedia.org/wiki/>.
- [4] Raphael Herbin. Méthodes de différences finies et volumes finis pour les problèmes elliptiques et paraboliques. <https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/raphaele.herbin/PUBLI/anedp-chap2.pdf>.
- [5] Sophia-Antipolis. Équations de transport, 2006/2007. <https://math.unice.fr/~frapetti/TD5.pdf>.
- [6] Université de Lyon Unknown. Schéma d'Euler explicite. <http://math.univ-lyon1.fr/~benzoni/M2AO/Schemas-EDO.pdf>.
- [7] J.-F. Scheid. Quoi ma CFL, qu'est-ce qu'elle a ma CFL?, 2013. <http://www.breves-de-maths.fr/quoi-ma-cfl-quest-ce-quelle-a-ma-cfl/>.
- [8] J.-F. Scheid. Méthodes numériques pour la dynamique des fluides, 2011-2012. <http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Jean-Francois.Scheid/Enseignement/polyM2MOI.pdf>.