Travaux Pratiques

Compte Rendu Hebdomadaire TP3
Début travail en groupe

M1 - EDPMA
Groupe AlMati

Alice Castagnet
Marine Redondo
Tiffanie Carlier

Encadrant
M. Leguèbe

9 octobre 2018

1 Première partie : recherche de ressources, documentation

1. Une équation de transport est une équation de la forme :

$$\partial_t u(t,x) + c(t,x,u).\nabla_x u(t,x) = 0 \tag{1}$$

Elle décrit le comportement d'une quantité u dépendant du temps t et d'une autre variable x appartenant à un domaine Ω qui représente généralement un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$. La variable x peut définir une position, une vitesse, un couple position/vitesse ... Les équations de transport font apparaître une notion de propagation à vitesse finie et sont donc qualifiées d'équations d'hyperboliques.
Il en existe deux formes :
- la forme conservative :

$$\begin{cases} u_t(t,x) + div_x(c(t,x)u(t,x)) = 0 \\ u(t=0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{2}$$

- la forme forte :

$$\begin{cases} u_t(t,x) + c(t,x)\nabla_x u(t,x) = d(t,x,u) \\ u(t=0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{3}$$

Dans notre cas, nous utilisons la forme conservative de l'équation de transport car la divergence du vecteur vitesse c est nulle. L'intégrale de u est conservée au cours du temps.

Pour résoudre le problème, il est nécessaire d'imposer une condition initiale à $t = 0$:
$u(t = 0, x) = u_0(x)$.
De plus, si Ω possède des bords il faut pour que le problème soit bien posé, ajouter une condition u_b sur la partie de la frontière où le champ est rentrant ie :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \partial\Omega, \quad c(t,x).\overrightarrow{n(x)} < 0 \Rightarrow u(t,x) = u_b(t,x) \tag{4}$$

Ou $\overrightarrow{n(x)}$ représente la normale extérieure à Ω.
Ceci permet d'éviter au problème d'être sur-déterminé et de vérifier ainsi les trois conditions nécessaires qui définissent un problème bien posé (existence,unicité et stabilité).

2. Dans le cas 1D avec un champ de vitesse constant c le problème s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + c\partial_x u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{5}$$

Une des méthodes pour résoudre ce type d'équation est la méthode des caractéristiques. On définit les caractéristiques comme les courbes de $\mathbb{R}^2$ définies par $(t, X(t))$ où $X(t)$ est la solution de l'équation différentielle ordinaire $\partial_t X(t) = c$. On a alors que $(t, X(t))$ vérifie :

$$\left\{ \partial_t u(t, X(t)) = \partial_t X * \partial_x u + \partial_t u = c * \partial_x u + \partial_t u = 0 \right. \tag{6}$$

Les solutions sont donc constantes le long des caractéristiques. Considérons (t^*, x^*) un point du plan avec $t^* > 0$ ainsi que $X^*(t)$ la caractéristique passant par ce point. Alors X^* vérifie :

$$\partial_t X^* = c \ , \ X^*(t^*) = x^* \tag{7}$$

$$\Rightarrow \ X^* = ct + x^* - ct^* \text{ et donc } X^*(0) = x * -ct^* \tag{8}$$

Finalement au point (t^*, x^*) sachant que la variable t ne rentre pas en compte car u est constante le long des caractéristiques, la solution u du problème est déterminée par :

$$u(t^*, x^*) = u(0, X^*(0)) = u(0, x^* - ct^*) = u_0(x^* - ct^*) \tag{9}$$

On obtient finalement le critère suivant :
Si u_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors il existe pour le problème de transport en une dimension une unique solution différentiable u en (t, x) donnée par :

$$u(t, x) = u_0(x - ct) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \tag{10}$$

3.

METHODE DES VOLUMES FINIS :
Pour définir la méthode des volumes finis ils est nécessaire de définir la notion de maillage. Un maillage est la discrétisation spatiale d'un milieu continu, ou une modélisation géométrique d'un domaine par des éléments proportionnés finis et bien définis. Un maillage doit vérifier les propriétés suivantes :
Soit Ω l'ensemble d'espaces associé à notre problème. Les éléments de la suite $(K_i)_{1 \leq i \leq I}$ sont appelés volumes de contrôle. Cette suite définie un maillage du domaine Ω vérifiant :
- K_i un ouvert de Ω
- $K_i \cap \mathrm{K}_j = \varnothing, \forall i \neq j$
- $\cup_{i=1}^{I} \overline{K_i} = \overline{\Omega}$

En voici un exemple dans le cas d'un maillage "cell vertex" :

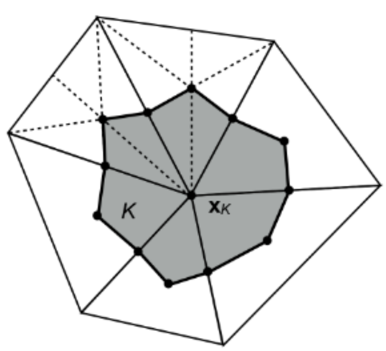

FIGURE 1 – Exemple d'un volume de contrôle K_i

En considérant un maillage définis comme précédemment. Le principe des volumes finis est l'intégration de l'équation aux dérivées partielles donc dans notre cas l'équation de transport sur tous les volumes de contrôle.
Ceci permet de simplifier le problème grâce à la formule de la divergence qui nous dit :

$$\int_K div\, w\; dK = \int_{\partial K} w.n\; d(\partial K) = \sum_{\sigma \in \varepsilon K} \int_\sigma \omega_\sigma . n_\sigma \; d\gamma$$

εK l'ensemble des arêtes de volume de contrôle K, n_σ est la normale à l'extérieur par rapport à l'arête σ, et γ la mesure sur σ.

Ainsi, pour l'équation de transport la méthode des volumes finis donne sur un volume de contrôle K_i :

$$\frac{d}{dt} \int_{K_i} u(t,x)dx + \sum_{\epsilon K_i, L \in \partial K_i} \int_{\epsilon K_i, L} (cu).n\; d\gamma = 0 \tag{11}$$

$$mes(K_i)u_i = - \sum_{\epsilon K_i, L \in \partial K_i} \int_{\epsilon K_i, L} (cu).n\; d\gamma \tag{12}$$

Ici, γ est la mesure de $\epsilon K_i, L$.
Pour la prochaine fois, discrétiser un 1D.

APPLICATION AU CAS 1D :

La Figure 2 ci-dessous représente un maillage en 1 dimension. Ici, l'espace Ω est le segment $[AB]$. On divise ce segment en petits segments délimités par les points x_i où $i \in \{1, l\}$ (en vert sur le schéma). On note que ici, tous les x_i sont strictement à l'intérieur des extrémités A et B. On définit ensuite les $x_{i \pm \frac{1}{2}}$ (en rouge sur le schéma). Les volumes de contrôle K_i définis précédemment correspondent aux intervalles ouverts $]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ pour $i \in \{1, l\}$.
Dans le cas ci-dessous, les x_i sont situés au milieu de K_i mais il est également possible de choisir les x_i à l'une ou l'autre des extrémités des K_i.

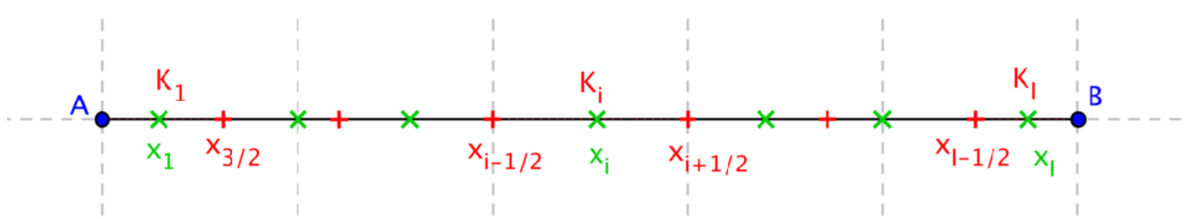

FIGURE 2 – Maillage en 1 dimension

FLUX NUMÉRIQUES :
La mécanique des fluides numériques est l'étude des mouvements d'un fluide par la résolution numérique des équations décrivant le comportement du fluide. Il s'agit d'un outils essentiel dans de nombreuses branches de la dynamique des fluides : propulsion aérospatiale, météorologie, barrage hydraulique, écoulement d'un fluide dans un tuyau... L'avantage de cette approche est qu'elle

donne accès à toutes les informations instantanées (vitesse, pression, concentration...) en chaque point du domaine de calcul, pour un faible coût par rapport aux expériences correspondantes.

La résolution d'un problème de mécanique des fluides numériques comprend trois étapes :
- l'analyse du problème : choix d'une géométrie, d'un maillage discrétisant le domaine de calcul, des méthodes numériques employées ;
- la résolution numérique du problème : exécution d'un programme informatique ;
- l'exploitation des résultats : vérification de la cohérence puis étude des résultats.

Les trois méthodes de discrétisation sont :
- méthode des différences finies
- méthode des volumes finis
- méthode des éléments finis

Cependant, c'est la méthode des volumes finis qui est la plus appropriée et la plus utilisée pour résoudre des problèmes de dynamique des fluides.

4. Oui, il faut résoudre un système linéaire !

2 Bibliographie

Lien du sujet : https ://github.com/upici/SaintVenant Support de Recherche : http ://www.i2m.univ-amu.fr/perso/maxime.hauray/enseignement/M2-Transport/Cours2.pdf

Livres BU :
- Résolution numérique des équations de Saint-Venant par la technique de projection en utilisant une méthode des volumes finis dans un maillage non structuré

Se renseigner sur :
- méthode des volumes finis