

# Travaux Pratiques

Compte Rendu Hebdomadaire TP4  
Travail en groupe

M1 - EDPMA  
Groupe AlMati

Alice CASTAGNET  
Marine REDONDO  
Tiffanie CARLIER

Encadrant  
M. LEGUÈBE

**16 octobre 2018**

# 1 Première partie : recherche de ressources, documentation

1. Une équation de transport est une équation de la forme :

$$\partial_t u(t, x) + c(t, x, u) \cdot \nabla_x u(t, x) = 0 \quad (1)$$

Elle décrit le comportement d'une quantité  $u$  dépendant du temps  $t$  et d'une autre variable  $x$  appartenant à un domaine  $\Omega$  qui représente généralement un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^n$ . La variable  $x$  peut définir une position, une vitesse, un couple position/vitesse ... Les équations de transport font apparaître une notion de propagation à vitesse finie et sont donc qualifiées d'équations d'hyperboliques.

Il en existe deux formes :

- la forme conservative :

$$\begin{cases} u_t(t, x) + \operatorname{div}_x(c(t, x)u(t, x)) = 0 \\ u(t = 0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (2)$$

- la forme forte :

$$\begin{cases} u_t(t, x) + c(t, x) \nabla_x u(t, x) = d(t, x, u) \\ u(t = 0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (3)$$

Dans notre cas, nous utilisons la forme conservative de l'équation de transport car la divergence du vecteur vitesse  $c$  est nulle. L'intégrale de  $u$  est conservée au cours du temps.

Pour résoudre le problème, il est nécessaire d'imposer une condition initiale à  $t = 0$  :

$$u(t = 0, x) = u_0(x).$$

De plus, si  $\Omega$  possède des bords il faut pour que le problème soit bien posé, ajouter une condition  $u_b$  sur la partie de la frontière où le champ est rentrant ie :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \partial\Omega, \quad c(t, x) \cdot \overrightarrow{n(x)} < 0 \Rightarrow u(t, x) = u_b(t, x) \quad (4)$$

Où  $\overrightarrow{n(x)}$  représente la normale extérieure à  $\Omega$ .

Ceci permet d'éviter au problème d'être sur-déterminé et de vérifier ainsi les trois conditions nécessaires qui définissent un problème bien posé (existence, unicité et stabilité).

2. Dans le cas 1D avec un champ de vitesse constant  $c$  le problème s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + c \partial_x u(t, x) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (5)$$

Une des méthodes pour résoudre ce type d'équation est la méthode des caractéristiques. On définit les caractéristiques comme les courbes de  $\mathbb{R}^2$  définies par  $(t, X(t))$  où  $X(t)$  est la solution de l'équation différentielle ordinaire  $\partial_t X(t) = c$ . On a alors que  $(t, X(t))$  vérifie :

$$\partial_t u(t, X(t)) = \partial_t X * \partial_x u + \partial_t u = c * \partial_x u + \partial_t u = 0$$

Les solutions sont donc constantes le long des caractéristiques. Considérons  $(t^*, x^*)$  un point du plan avec  $t^* > 0$  ainsi que  $X^*(t)$  la caractéristique passant par ce point. Alors  $X^*$  vérifie :

$$\partial_t X^* = c, \quad X^*(t^*) = x^* \quad (6)$$

$$\Rightarrow X^* = ct + x^* - ct^* \text{ et donc } X^*(0) = x^* - ct^* \quad (7)$$

Finalement au point  $(t^*, x^*)$  sachant que la variable  $t$  ne rentre pas en compte car  $u$  est constante le long des caractéristiques, la solution  $u$  du problème est déterminée par :

$$u(t^*, x^*) = u(0, X^*(0)) = u(0, x^* - ct^*) = u_0(x^* - ct^*) \quad (8)$$

On obtient finalement le critère suivant :

Si  $u_0$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , alors il existe pour le problème de transport en une dimension une unique solution différentiable  $u$  en  $(t, x)$  donnée par :

$$u(t, x) = u_0(x - ct) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \quad (9)$$

3.

### CAS GÉNÉRAL DE LA MÉTHODE DES VOLUMES FINIS :

Pour définir la méthode des volumes finis il est nécessaire de définir la notion de maillage. Un maillage est la discrétisation spatiale d'un milieu continu, ou une modélisation géométrique d'un domaine par des éléments proportionnés finis et bien définis. Un maillage doit vérifier les propriétés suivantes :

Soit  $\Omega$  l'ensemble d'espace associé à notre problème. Les éléments de la suite  $(K_i)_{1 \leq i \leq I}$  sont appelés volumes de contrôle. Cette suite définit un maillage du domaine  $\Omega$  vérifiant :

- $K_i$  un ouvert de  $\Omega$
- $K_i \cap K_j = \emptyset, \forall i \neq j$
- $\cup_{i=1}^I \overline{K_i} = \overline{\Omega}$

En voici un exemple dans le cas d'un maillage "cell vertex" :

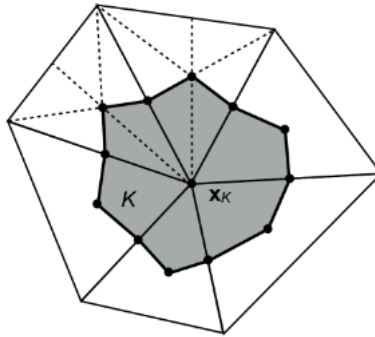


FIGURE 1 – Exemple d'un volume de contrôle  $K_i$

En considérant un maillage défini comme précédemment, le principe des volumes finis est l'intégration de l'équation aux dérivées partielles donc dans notre cas l'équation de transport sur tous les volumes de contrôle. La formule de la divergence nous permet de simplifier le problème qui nous dit :

$$\int_K \operatorname{div} w \, dK = \int_{\partial K} w \cdot n \, d(\partial K) = \sum_{\sigma \in \varepsilon K} \int_{\sigma} \omega_{\sigma} \cdot n_{\sigma} \, d\gamma$$

$\varepsilon K$  l'ensemble des arêtes du volume de contrôle  $K$ ,  $n_{\sigma}$  est la normale à l'extérieur par rapport à l'arête  $\sigma$ , et  $\gamma$  la mesure sur  $\sigma$ .

Ainsi, pour l'équation de transport la méthode des volumes finis donne sur un volume de contrôle  $K_i$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{K_i} u(t, x) dx + \sum_{\epsilon K_i, K_j \in \partial K_i} \int_{\epsilon K_i, K_j} (cu) \cdot n_{K_i, K_j} \, d\gamma = 0 \quad (10)$$

$$\operatorname{mes}(K_i) \frac{du_i}{dt} = - \sum_{\epsilon K_i, K_j \in \partial K_i} \int_{\epsilon K_i, K_j} (cu) \cdot n_{K_i, K_j} \, d\gamma \quad (11)$$

Ici,  $\gamma$  est la mesure de  $\epsilon K_i, K_j$  où  $\epsilon K_i, K_j$  est l'arête commune aux deux volumes de contrôle  $K_i$  et  $K_j$  et  $n_{K_i, K_j}$  est la normale à l'arête  $\epsilon K_i, K_j$  sortant du volume de contrôle  $K_i$ . Ajouter Figure ?

#### APPLICATION AU CAS 1D :

La Figure 2 ci-dessous représente un maillage en 1 dimension. Ici, l'espace  $\Omega$  est le segment  $[AB]$ . On divise ce segment en petits segments délimités par les points  $x_i$  où  $i \in \{1, l\}$  (en vert sur le schéma). On note que ici, tous les  $x_i$  sont strictement à l'intérieur des extrémités  $A$  et  $B$ , le volume de contrôle devant être ouvert. On définit ensuite les  $x_{i \pm \frac{1}{2}}$  (en rouge sur le schéma). Les volumes de contrôle  $K_i$  définis précédemment correspondent aux intervalles ouverts  $]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$  pour  $i \in \{1, l\}$ . Dans le cas ci-dessous, les  $x_i$  sont situés au milieu de  $K_i$  mais il est également possible de choisir les  $x_i$  à l'une ou l'autre des extrémités des  $K_i$ .

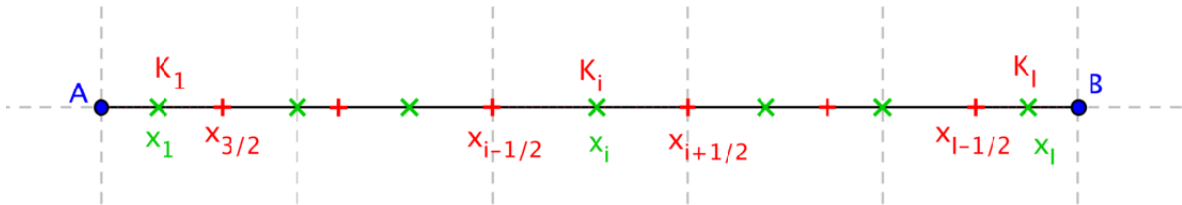


FIGURE 2 – Maillage en 1 dimension

#### MÉTHODE DES VOLUMES FINIS EN 1D :

On intègre l'équation de transport sur tous les volumes de contrôle donc ici sur une dimension d'espace, cela nous donne :

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (\partial_t u(t, x) + c \partial_x u(t, x)) dx = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} \Delta x u_i + c [u(t, x)]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} = 0 \quad (13)$$

$$\Delta x \frac{du_i}{dt} + c (u(t, x_{i+\frac{1}{2}}) - u(t, x_{i-\frac{1}{2}})) = 0 \quad (14)$$

$$\Delta x \cdot \partial_t u_i + c (u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}) = 0 \quad (15)$$

où  $\Delta x$  représente le pas d'espace. Pour obtenir un schéma numérique, il est maintenant nécessaire d'introduire une discrétisation en temps. On introduit les instants  $t^n = n\Delta t$  avec  $n$  un entier positif et  $\Delta t$  positif le pas de notre discrétisation. Comme dit précédemment, la méthode des volumes finis consiste à intégrer le problème que l'on cherche à résoudre sur les différents volumes de contrôle. Ceci nous permet ainsi d'obtenir autant d'équations que de volumes de contrôles. Il est alors possible grâce par exemple au schéma d'Euler explicite d'obtenir un schéma "Volumes Finis". La méthode d'Euler pour un schéma explicite consiste à associer à une équation différentielle du type :

$$\partial_t u(t, x) = f(t, x) \quad (16)$$

un schéma avec un pas de temps  $\Delta t$  donné par :

$$u^{n+1} - u^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} (f(s, u(s))) ds \quad (17)$$

En appliquant la méthode d'Euler à l'équation (15), on obtient :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (18)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2} \right) \quad (19)$$

où  $u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_i + u_{i+1}}{2}$  et  $u_{i-\frac{1}{2}} = \frac{u_{i-1} + u_i}{2}$ .

## FLUX NUMÉRIQUES :

La mécanique des fluides numériques est l'étude des mouvements d'un fluide par la résolution numérique des équations décrivant le comportement du fluide. Il s'agit d'un outil essentiel dans de nombreuses branches de la dynamique des fluides : propulsion aérospatiale, météorologie, barrage hydraulique, écoulement d'un fluide dans un tuyau... L'avantage de cette approche est qu'elle donne accès à toutes les informations instantanées (vitesse, pression, concentration...) en chaque point du domaine de calcul, pour un faible coût par rapport aux expériences correspondantes.

La résolution d'un problème de mécanique des fluides numériques comprend trois étapes :

- l'analyse du problème : choix d'une géométrie, d'un maillage discrétisant le domaine de calcul, des méthodes numériques employées ;
- la résolution numérique du problème : exécution d'un programme informatique ;

- l'exploitation des résultats : vérification de la cohérence puis étude des résultats.

Les trois méthodes de discrétisation sont :

- méthode des différences finies
- méthode des volumes finis
- méthode des éléments finis

Cependant, c'est la méthode des volumes finis qui est la plus appropriée et la plus utilisée pour résoudre des problèmes de dynamique des fluides. La méthode des volumes finis est complètement déterminé par son flux numérique

Dans notre cas le flux numérique vérifie deux propriétés :

- la conservation des flux à travers les arêtes
- la consistance des flux

Prenons par exemple le problème suivant :

$$-u''(x) = f(x), x \in ]0, 1[ \quad (20)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (21)$$

En appliquant la méthode des volumes finis à cette équation on obtient le schéma suivant :

$$-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + u'(x_{i-\frac{1}{2}}) = h_i f_i \quad (22)$$

$$\Leftrightarrow F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = h_i f_i \quad (23)$$

$F_{i+\frac{1}{2}}$  est appelé le flux numérique en  $x_{i+\frac{1}{2}}$

Un des principes de la méthode des volumes finis est de pouvoir écrire les flux numériques en fonctions des variables discrètes  $u_i$ . Une approximation de ce flux numérique peut alors être donnée par la notation suivante :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \quad (24)$$

4. Le flux à travers l'arête  $\epsilon K_i, K_j$  est approché par :

$$\int_{\epsilon K_i, K_j} (cu) \cdot n_{K_i, K_j} d\gamma = \text{mes}(\epsilon K_i, K_j) \Phi(u_i, u_j, n_{K_i, K_j}) \quad (25)$$

où  $\Phi(u_i, u_j, n_{K_i, K_j})$  est le flux numérique à travers l'arête  $\epsilon K_i, K_j$  entre les volumes de contrôle  $K_i$  et  $K_j$  définit ainsi :

$$\Phi(u_i, u_j, n_{K_i, K_j}) = \begin{cases} u_{K_i}(\bar{c} \cdot n_{K_i, K_j}) & \text{si } \bar{c} \cdot n_{K_i, K_j} > 0 \\ u_{K_j}(\bar{c} \cdot n_{K_i, K_j}) & \text{sinon} \end{cases} \quad (26)$$

$$= u_{K_i}(\bar{c} \cdot n_{K_i, K_j})^+ + u_{K_j}(\bar{c} \cdot n_{K_i, K_j})^- \quad (27)$$

où  $(\bar{c} \cdot n_e)^+ = \max(\bar{c} \cdot n_e, 0)$  et  $(\bar{c} \cdot n_e)^- = \min(\bar{c} \cdot n_e, 0)$  et  $\bar{c}$  est la moyenne de la vitesse  $c$  aux extrémités  $x_1$  et  $x_2$  de l'arête  $e$  :

$$\bar{c} = \frac{c(x_1) + c(x_2)}{2} \quad (28)$$

On utilise donc l'information venant des espaces de contrôle  $K_i$  ou  $K_j$  en fonction de la direction du champ de vitesse  $c$ .

En appliquant le schéma d'Euler à l'équation (11), on obtient :

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{mes(K_i)} \sum_{\epsilon K_i, K_j \in \partial K_i} mes(\epsilon K_i, K_j) \Phi(u_i, u_j, n_{K_i, K_j}) \quad (29)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{mes(K_i)} \sum_{\epsilon K_i, K_j \in \partial K_i} mes(\epsilon K_i, K_j) (u_{K_i}(\bar{c} \cdot n_{K_i, K_j})^+ + u_{K_j}(\bar{c} \cdot n_{K_i, K_j})^-) \quad (30)$$

## 2 Bibliographie

Lien du sujet : <https://github.com/upici/SaintVenant>

Support de Recherche : <http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/maxime.hauray/enseignement/M2-Transport/Cours2.pdf>

<http://www.lmpa.univ-littoral.fr/sadok/fichiers/cours2b.pdf>

<http://math.univ-lyon1.fr/benzoni/M2AO/Schemas-EDO.pdf>

Livres BU :

- Résolution numérique des équations de Saint-Venant par la technique de projection en utilisant une méthode des volumes finis dans un maillage non structuré