Лабораторная работа №2

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Цель работы: получение практических навыков определения параметров функций от случайных величин и закона больших чисел в среде разработки Jupiter Notebook.

1. Дискретные случайные величины

Задача 1. Совместный закон распределения случайных величин ξ и η задан с помощью таблицы:

ξ	η	
	1	2
−1	1/16	3/16
0	1/16	3/16
1	1/8	3/8

Для пары случайных величин вычислить *M(*ξη)

Решение. Воспользуемся формулой $M(\xi\eta) = \sum_{i,j} x_i y_i p_{ij}$, а именно: в каждой клетке таблицы выполняем умножение соответствующих значений x_i и y_i результат умножаем на вероятность p_{ij},, и все это суммируем по всем клеткам таблицы. В итоге получаем:

*M(*ξη) = -1-1-1/16+(-1)·2·3/16 + 0·1·1/16 + 0·2·3/16 + 1·1·1/8 + 1·2·3/8 =
=-1/16-3/8 +1/8 + 3/4 = 7/16.

Задача 2. Пусть случайная величина ξ имеет следующий закон распределения:

ξ	−1	0	2
P	1/4	1/4	1/2

Вычислить математическое ожидание *M*ξ*,* дисперсию *D*ξ и среднеквадратическое отклонение σ.

Решение. По определению математическое ожидание ξ равно:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Далее:

$$M\xi^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i = (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

а потому

$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{16} = 19/16.$

Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{D\xi} = \frac{\sqrt{19}}{4}.$$

Задача 3. Случайный вектор (ξ,η) принимает значения (0, 0), (1, 0), (-1, 0), (0, 1) и (0, -1) равновероятно (рис. 1). Вычислить ковариацию случайных величин ξ и η. Показать, что они зависимы.

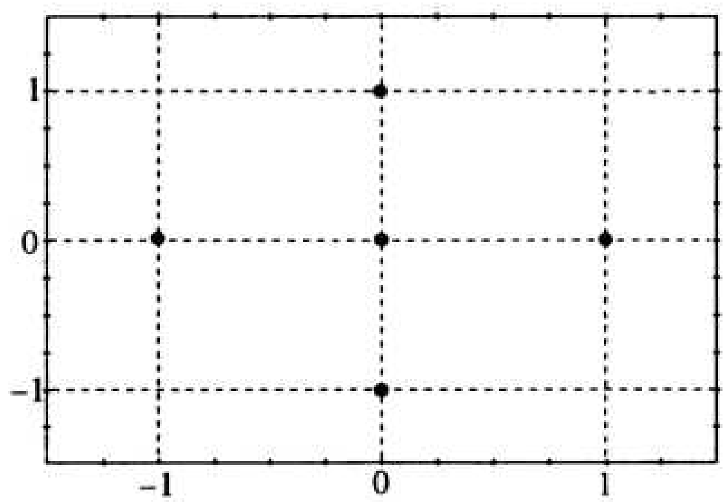

Рисунок 1 – Пояснение к задаче 3

Решение. Поскольку *P*(ξ = 0) = 3/5, P(ξ = 1) = 1/5, *P*(ξ,= -1) = = 1/5; *P*(η = 0) = 3/5, *P*(η = 1) = 1/5, *P(*η = -1) = 1/5, то *M*ξ, = 3/5 · 0 + 1/5 · 1 + 1/5· (-1) = 0 и *M*η = 0; *M(*ξη) = 0 · 0 · 1/5 + 1 · 0 · 1/5 - 1 · 0 · 1/5 + 0 · 1 · 1/5 – 0 · 1 · 1/5 = 0.

Получаем cov(ξ,η) = *M(*ξη) - *M*ξ*M*η = 0, и случайные величины некоррелированы. Однако они зависимы. Пусть ξ = 1, тогда условная вероятность события {η = 0} равна *P*(η = 0 | ξ = 1) = 1 и не равна безусловной P(η = 0) = 3/5, или вероятность совместного появления {ξ = 0, η = 0} не равна произведению вероятностей: *P*(ξ = 0, η = 0) = 1/5 ≠ *P*(ξ = 0)*P*(η = 0) = 9/25. Следовательно, ξ и η зависимы.

Задача 4. Случайные приращения цен акций двух компаний за день ξ и η имеют совместное распределение, заданное таблицей:

ξ	η	
	−1	+1
−1	0,3	0,2
+1	0,1	0,4

Найти коэффициент корреляции.

Решение. Прежде всего вычислим $M\xi\eta$ = 0,3 - 0, 2 - 0,1 + 0,4 = 0,4. Далее находим частные законы распределения ξ и η:

ξ	η		
	−1	+1	p_ξ
−1	0,3	0,2	0,5
+1	0,1	0,4	0,5
p_η	0,4	0,6	1,0

Определяем $M\xi$= 0,5 - 0,5 = 0; $M\eta$ = 0,6 - 0,4 = 0,2; $D\xi$. = 1; $D\eta = 1 – 0{,}2^2$ = 0,96; cov(ξ, η) = 0,4. Получаем

$$\rho = \frac{0{,}4}{\sqrt{1}\sqrt{0{,}96}} \approx 0{,}408.$$

2. Непрерывные случайные величины

Задача 5. Плотность распределения непрерывной случайной величины имеет вид:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 2]; \\ Cx^2, & x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Определить константу *C*, построить функцию распределения $F_\xi(x)$ и вычислить вероятность P(-1 £ ξ £ 1).

Решение. Константа *C* находится из условия $\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)\,dx = 1$. В результате имеем

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = \int_0^2 Cx^2 dx = C\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8C}{3}, \quad \text{откуда } C = 3/8.$$

Чтобы построить функцию распределения $F_\xi(x)$, отметим, что отрезок [0, 2] делит область значений аргумента *x* (числовую ось) на три части: (-μ, 0), [0, 2], (2, +μ). Рассмотрим каждый из этих промежутков. В первом случае (когда $x<0$) вероятность события $\{\xi < x\}$ вычисляется так:

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} p_{\xi}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0(t)\,dt = 0$$

так как плотность ξ, на полуоси (-μ, 0) равна нулю. Во втором случае

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{x} p_{\xi}(t)dt = \int_{-\infty}^{0} p_{\xi}(t)dt + \int_{0}^{x} p_{\xi}(t)dt = 0 + \frac{3}{8}\int_{0}^{x} t^2 dt = \frac{x^3}{8}.$$

Наконец, в последнем случае, когда $x > 2$,

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{x} p_{\xi}(t)dt = \int_{-\infty}^{0} p_{\xi}(t)dt + \int_{0}^{2} p_{\xi}(t)dt + \int_{2}^{x} p_{\xi}(t)dt = 0 + \frac{3}{8}\int_{0}^{2} t^2 dt =$$

$$= 0 + 1 + 0 = 1,$$

так как плотность $f_{\xi}(x)$ обращается в нуль на полуоси (2, +μ). Итак, получена функция распределения

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{x^3}{8}, & 0 \le x \le 2; \\ 1. & x > 2. \end{cases}$$

Следовательно, P(-1 £ ξ £ 1)= F(1) - F(-1) = 1/8 - 0 = 1/8.

Задача 6. Для случайной величины ξ, из задачи 5 вычислить математическое ожидание и дисперсию.

Решение.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 dx + \frac{3}{8}\int_{0}^{2} x \cdot x^2 dx + \int_{2}^{\infty} x \cdot 0 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{3}{2}.$$

Далее

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{\xi}(x)dx = \frac{3}{8}\int_{0}^{2} x^2 \cdot x^2 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{12}{5},$$

и значит

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{12}{5} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0,15.$$

Задача 7. Пусть задана случайная величина ξ Î N(1, 4). Вычислить вероятность $P\{0 < \xi < 3\}$.

Решение. Здесь $a = 1$ и σ = 2. Согласно формуле

$$P\{c_1 \le \xi < c_2\} = \Phi_0\left(\frac{c_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{c_1 - a}{\sigma}\right)$$

определяем

$$P(0 \le \xi < 3) = \Phi_0\left(\frac{3-1}{2}\right) - \Phi_0\left(\frac{0-1}{2}\right) = \Phi_0(1) - \Phi_0(-0,5) =$$

$$= \Phi_0(1) + \Phi_0(0,5) = 0,3413 + 0,1915 = 0,5328.$$

3. Решение задач с определением параметров функций от случайных величин

Задача 8. Случайная величина x равномерно распределена на отрезке [0, 2]. Найти плотность случайной величины $\eta = -\sqrt{+1}$.

Решение. Из условия задачи следует, что

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 2], \\ \frac{1}{2}, & x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Далее, функция $y = -\sqrt{+x}$ является монотонной и дифференцируемой функцией на отрезке [0, 2] и имеет обратную функцию $x = \psi^{-1}(y) = y^2 - 1$, производная которой равна $\frac{d\psi^{-1}(y)}{dy} = 2y$.

Кроме того, $\psi(0) = -1$, $\psi(2) = -\sqrt{3}$. Следовательно,

$$p_\eta(y) = p_\xi(\psi^{-1}(y))\left|\frac{d\psi^{-1}(y)}{dy}\right| = p_\xi(\psi^{-1}(y)) \cdot 2|y| =$$

$$= 2|y| \cdot \begin{cases} 0, & y \notin [-\sqrt{3},\ -1], \\ \frac{1}{2}, & y \in [-\sqrt{3},\ -1]. \end{cases}$$

Значит,

$$p_\eta = \begin{cases} 0, & y\left[-\sqrt{3},\ -1\right] \\ -y, & y\left[-\sqrt{3},\ -1\right] \end{cases}$$

Задача 9. Пусть двумерный случайный вектор (ξ, η) равномерно распределен внутри треугольника $\Delta = \{(x,\ y) : x > 0, y > 0, x + y < 2\}$. Вычислить вероятность неравенства ξ>η.

Решение. Площадь указанного треугольника Δ равна S(Δ) = 2 (см. рис. 2). В силу определения двумерного равномерного распределения совместная плотность случайных величин η равна:

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y)\Delta \\ \dfrac{1}{2}, & (x, y)\Delta \end{cases}$$

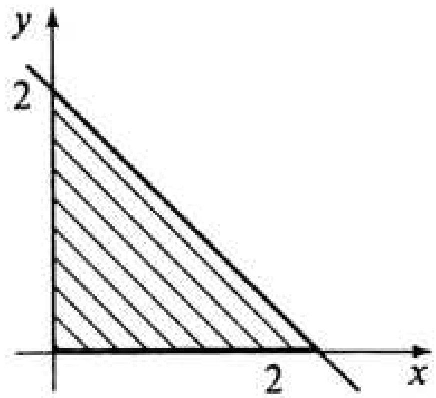

Рисунок 2 – Пояснение к задаче 9

Событие {ξ>η}, соответствует множеству B = {(x, y): x>y} на плоскости, т.е. полуплоскости. Тогда вероятность

$$P(B) = P\{(\xi, \eta)\in B\} = \iint\limits_B p_{\xi,\eta}(x, y)\, dxdy$$

На полуплоскости B совместная плотность $p_{\xi,\eta}(x, y)$ равна нулю вне множества Δ и 1/2 - внутри множества Δ. Таким образом, полуплоскость B разбивается на два множества: $B_1 = B\cap\Delta$ и $\boldsymbol{B_2} = \boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{\Delta}}$. Следовательно, двойной интеграл по множеству B представляется в виде суммы интегралов по множествам B_1 и B_2 причем второй интеграл равен нулю, так как там совместная плотность равна нулю. Поэтому

$$P\{(\xi,\eta)\in B\} = \iint\limits_B p_{\xi,\eta}(x, y)dxdy = \iint\limits_{B_1} \frac{1}{2}dxdy + \iint\limits_{B_2} 0dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}S(B_1) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Если задана совместная плотность распределения $p_{\xi,\eta}(x, y)$ пары $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$, то плотности $p_{\xi}(x)$ и $p_{\eta}(y)$ составляющих ξ и η называются *частными плотностями* и вычисляются по формулам:

$$p_{\xi}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)dy;$$

$$p_{\eta}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)dx.$$

Для непрерывно распределенных случайных величин с плотностями $p_{\xi}(x)$ и $p_{\eta}(y)$ независимость означает, что при любых x и y выполнено равенство

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = p_{\xi}(x)\, p_{\eta}(y)$$

Задача 10. В условиях предыдущей задачи определить, независимы ли составляющие случайного вектора ξ и η.

Решение. Вычислим частные плотности $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$. Имеем:

$$p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{\xi,\eta}(x,y)dy=\begin{cases}0, & x\notin(0,2),\\ \int_0^{2-x}\frac{1}{2}dy, & x\in(0,2)\end{cases}=\begin{cases}0, & x\notin(0,2);\\ \frac{2-x}{2}, & x\in(0,2).\end{cases}$$

Аналогично

$$p_\eta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{\xi,\eta}(x,y)dy=\begin{cases}0, & y\notin(0,2);\\ \frac{2-y}{2}, & y\in(0,2).\end{cases}$$

Очевидно, что в нашем случае $p_{\xi,\eta}(x,y)\neq p_\xi(x)\,p_\eta(y)$, и потому случайные величины ξ и η зависимы.

Числовые характеристики для случайного вектора (ξ, η) можно вычислять с помощью следующей общей формулы. Пусть *p(x,y)* - *совместная* плотность величин и η, а ψ(x, *y)* — функция двух аргументов, тогда

$$M\varphi(\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x,y)p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy$$

В частности,

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xp_{\xi,\eta}(x,y)dxdy;$$

$$M\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yp_{\xi,\eta}(x,y)dxdy;$$

$$M\xi\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyp_{\xi,\eta}(x,y)dxdy.$$

Задача 11. В условиях предыдущей задачи вычислить $M\xi\eta$.

Решение. Согласно указанной выше формуле имеем

$$M\xi\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyp_{\xi,\eta}(x,y)dxdy=\iint_{\Delta}xy\cdot\tfrac{1}{2}dxdy.$$

Представив треугольник Δ в виде $\Delta=\{(x,\ y):0<x<2;0<y<2-\ x\}$, двойной интеграл можно вычислить как повторный:

$$M\xi\eta = \iint\limits_{\Delta} xy\cdot\frac{1}{2}dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 xdx\int\limits_0^{2-x} ydy = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 xdx\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{2-x}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^2 x(2-x)^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

$$p_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 4xe^{-2x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Задача 12. Двумерный случайный вектор (ξ, η) равномерно распределен внутри треугольника $\Delta = \{(x,\ y) : x > 0, y > 0, x + y < 2\}$. Найти условное распределение ξ, при η = y и функцию регрессии $\varphi_{\xi,\eta}(y)$.

Решение. Как уже было показано (см. задачи 2 и 3),

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \notin \Delta, \\ \dfrac{1}{2}, & (x,y) \in \Delta \end{cases} \quad \text{и} \quad p_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & y \notin (0,2); \\ \dfrac{2-y}{2}, & y \in (0,2). \end{cases}$$

Поделив первую плотность на вторую, получаем условную плотность:

$$p_{\xi|\eta}(x\,|\,y) = \begin{cases} 0, & x \notin (0, 2-y); \\ \dfrac{1}{2-y}, & x \in (0, 2-y). \end{cases}$$

Таким образом, речь идет о равномерном распределении на промежутке (0, 2-y). Функцию регрессии вычисляем как математическое ожидание равномерного распределения. Получаем $\varphi_{\xi,\eta}(y)$ = (2 - y)/2, 0 < y < 2.

Задача 13. Точку бросают случайным образом в круг радиуса R с центром в начале координат. Найти условную плотность распределения случайной величины ξ — абсциссы точки падения - при условии, что ордината η приняла значение y.

Решение. Естественно, поскольку точка не может попасть за пределы круга $p_{\xi,\eta}(x,\ y)$ = 0 при $x^2+y^2>R^2$. Для каждой области внутри круга вероятность попадания пропорциональна площади этой области. Поэтому $p_{\xi,\eta}(x,\ y)$ = A при x^2+y^2£R^2, т.е. плотность внутри круга постоянна. Определим константу A:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,\ y)dxdy = \iint_{x^2+y^2\le R^2} Adxdy = \pi AR^2 = 1.$$

Отсюда $A = 1/(\pi R^2)$ и плотность совместного распределения

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & x^2+y^2>R^2, \\ \dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2\le R^2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & |x|>\sqrt{R^2-y^2}, \\ \dfrac{1}{\pi R^2}, & |x|\le\sqrt{R^2-y^2}; \end{cases}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} 0, & |y|>R, \\ \dfrac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & |y|\le R, \end{cases}$$

и при $|y|<R$ получаем условную плотность

$$p_{\xi|\eta}(x\,|\,y) = \begin{cases} 0, & |x|>\sqrt{R^2-y^2}, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}}, & |x|\le\sqrt{R^2-y^2}. \end{cases}$$

Таким образом, случайная величина ξ, при условии η=*y* равномерно распределена на отрезке $\left[-\sqrt{R^2-y^2};\ +\sqrt{R^2-y^2}\right]$. Ее условное математическое ожидание тождественно равно нулю. Интересно отметить, что условная плотность распределения случайной величины ξ, при условии η=*y* равномерна, в то время как безусловная плотность ξ таковой не является. И в этом примере случайные величины ξ и η зависимы между собой.

3. Решение задач по закону больших чисел

Задача 14. В 400 испытаниях Бернулли вероятность успеха в каждом испытании равна 0,8. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что разница между числом успехов в этих испытаниях и средним числом успехов будет меньше 20.

Решение. Число успехов в этих испытаниях распределено по закону Бернулли, поэтому среднее число успехов равно $M\xi = np = 400\cdot 0{,}8 = 320$, а дисперсия $D\xi = = npq = 400\cdot 0{,}8´0{,}2 = 64$. Тогда в силу неравенства Чебышева имеем

$$P\left(|\xi-320|<20\right)\ge 1-\frac{D\xi}{20^2} = 1-\frac{64}{400} = 0{,}84.$$

Вычислим эту же вероятность с помощью приближенной (интегральной) формулы Муавра—Лапласа:

$$P\left(\left|\xi-320\right|<20\right)=P\left(\left|\xi-np\right|<\varepsilon\right)=P\left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}<\frac{\xi-np}{\sqrt{npq}}<\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)=$$

$$=2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)=2\Phi_0\left(\frac{20}{\sqrt{64}}\right)=2\Phi_0(2,5)=2\cdot 0,4938=0,9876.$$

Последнее вычисление показывает, что неравенство Чебышева дает довольно грубые оценки вероятностей.

Задача 15. В продукции цеха детали отличного качества составляют 50%. Детали укладываются в коробки по 200 шт. в каждой. Какова вероятность того, что число деталей отличного качества в коробке отличается от 100 не более чем на 5?

Решение. Пусть ξ_i - случайное число деталей отличного качества в i-й коробке, тогда при n = 200, $p = q - \frac{1}{2}$ получим:

$$P(95\le m\le 105)=P\left(-\frac{5}{\sqrt{50}}\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{5}{\sqrt{50}}\right)\approx\Phi_0(0,71)-\Phi_0(-0,71)\approx 0,52.$$

Задача 16. Используя условия задачи 2, указать, в каких границах с вероятностью 0,997 находится число деталей отличного качества в коробке.

Решение. По табл. 2 приложения 2 при условии $P\left(\left|\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right|<u\right)\approx 0{,}997$ находим u = 3, и следовательно, S_n лежит в пределах $np\pm 3\sqrt{npq}$, т.е. число деталей отличного качества в коробке с вероятностью 0,997 находится в пределах 100 ± 21.

Задача 4. Используя условия задачи 2, определить, сколько деталей надо положить в коробку, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, можно было утверждать, что число деталей отличного качества в коробке не менее 100.

Решение. Обозначим $u=\frac{100-np}{\sqrt{npq}}$. Используя нормальное приближение, получаем

$$P(m\ge 100)=P\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\ge u\right)\approx 1-\Phi(u)=\frac{1}{2}-\Phi_0(u)\ge 0,99.$$

Отсюда $\Phi_0(u)$ £ -0,49, а из табл. 2 приложения и свойств функции Лапласа получаем неравенство u < -2,32. Обозначив $x=\sqrt{n}>0$, с учетом $p=q=\frac{1}{2}$, приходим к квадратному неравенству x^2 -2,3x - 200 ³ 0, решая которое, получаем

n ³ 236.

Можно предложить и другой метод. Пусть — число деталей, которые пришлось перебрать, чтобы найти i-ю деталь отличного качества (включая ее саму). Случайные величины имеют геометрическое распределение с параметром p = 1/2. Можем вычислить Mx= $1/p$ = 2, Dx = (1 — p)/p^2 = 2. Используя ЦПТ, получаем неравенство

$$P(S_{100} \le n) = \Phi\left(\frac{n - 100 \cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{100}}\right) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{n - 200}{14{,}14}\right) \ge 0{,}99,$$

откуда следует n ³ 200 + 14,14 × 2,32 = 232,8, или, округляя, n > 234.

Результаты получаются близкие, но первый метод более точен и потому предпочтительнее. Вторым методом лучше пользоваться, если нужно определить границы, в которых лежит неизвестное число деталей.

Задача 17. Доходы (в месяц) жителей города имеют математическое ожидание 10 тыс. руб. и среднее квадратическое отклонение 2 тыс. руб. Найти вероятность того, что средний доход 100 случайно выбранных жителей составит от 9,5 до 10,5 тыс. руб.

Решение. Переформулируем условие задачи для суммарного дохода: он должен составлять от 950 до 1050 тыс. руб. Используя ЦПТ, получаем:

$$P(950 < S_{100} < 1050) = \Phi_0\left(\frac{1050 - 100 \cdot 10}{2\sqrt{100}}\right) - \Phi_0\left(\frac{950 - 100 \cdot 10}{2\sqrt{100}}\right) =$$
$$= 2\Phi_0(2{,}5) = 0{,}9876.$$

Задание для выполнения работы

1. В среде разработки подготовить файл Jupiter Notebook, содержащий описание, программу и необходимые графические построения для определения параметров в соответствии с заданием.
2. Подготовить отчет о выполнении работы.

Варианты заданий

Задание 1. Решение задач с дискретными случайными величинами (обязательное задание)

1. Монету подбросили 3 раза. Найти распределение вероятностей числа появлений герба.

2. Вероятность, что лотерейный билет окажется выигрышным, равна 0,1. Покупатель купил 5 билетов. Найти распределение числа выигрышей у владельца

этих 5 билетов.

3. Три стрелка с вероятностями попадания в цель при отдельном выстреле 0,7, 0,8 и 0,9 соответственно делают по одному выстрелу. Найти распределение вероятностей общего числа попаданий.

4. Два стрелка поражают мишень с вероятностями 0,8 и 0,9 соответственно (при одном выстреле). Найти распределение общего числа попаданий в мишень, если первый стрелок выстрелил один раз, а второй — два раза.

5. Два станка выпускают детали с вероятностями брака 0,01 и 0,05 соответственно. В выборке одна деталь выпущена первым станком и две - вторым. Найти распределение числа бракованных деталей в выборке.

6. Прибор комплектуется из двух деталей, вероятность брака для первой детали — 0,1, а для второй — 0,05. Выбрано 4 прибора. Прибор считается бракованным, если в нем есть хотя бы одна бракованная деталь. Найти распределение числа бракованных приборов среди выбранных.

Стрелок поражает мишень с вероятностью 0,7 при одном выстреле. Стрелок стреляет до первого попадания, но делает не более 3 выстрелов. Найти распределение числа выстрелов.

11. Монета подбрасывается до тех пор, пока герб не выпадет 2 раза, но при этом делается не более 4 бросаний. Найти распределение числа подбрасываний.

12. Среди 5 ключей два подходят к двери. Ключи пробуют один за другим, пока не откроют дверь. Найти распределение числа опробованных ключей.

13. Среди 6 ключей три подходят к двери. Ключи подбираются до тех пор, пока дверь не будет открыта. Найти распределение числа опробованных ключей.

14. Курс акции в течение дня торгов может подняться или опуститься на один пункт, либо остаться неизменным (все три варианта равновероятны). Найти распределение изменения курса акции: а) за 2 дня; б) за 3 дня.

15. В телеигре игроку задают вопросы. Если игрок правильно отвечает на вопрос, ему задают следующий; если неправильно, то игрок выбывает из игры. Всего задается не более трех вопросов. Вероятность ответить на первый вопрос равна 0,9; на второй — 0,3; на третий — 0,1. Найти распределение числа правильных ответов и математическое ожидание выигрыша, если за один правильный ответ платят 100 руб., за два — 400 руб. и за три — 1000 руб.

16. В игровом автомате три окошка, в которых случайным образом появляются цифры от 0 до 9, равновероятно и независимо друг от друга. Если две цифры совпали, игрок получает 10 руб., если все три — 100 руб. Чтобы начать игру, он платит 5 руб. Найти распределение выигрыша игрока и его математическое

ожидание.

17. В игровом автомате три окошка, в которых случайным образом появляются 7 цветов, равновероятно и независимо друг от друга. Если два цвета совпали, игрок получает 20 руб., если три — 100 руб. Чтобы начать игру, он платит 10 руб. Найти распределение выигрыша игрока. Вычислить математическое ожидание.

18. Фирма участвует в четырех независимых проектах. Вероятность успешного завершения первого и второго равна 0,8, а третьего и четвертого — 0,7. Найти распределение числа успешных проектов. Вычислить математическое ожидание.

19. В папке находятся 4 документа: два заявления и две анкеты. В заявлении могут быть ошибки с вероятностью 0,1. В анкете могут быть ошибки с вероятностью 0,2. Найти распределение числа документов с ошибками в папке и его математическое ожидание.

Решение задач с непрерывными случайными величинами (дополнительное задание)

Плотность распределения случайной величины ξ равна $p_\xi(x)$. Вычислить константу C, функцию распределения $F(x)$, $M\xi$ и вероятность $P(A)$, если:

№ варианта	Задание
1	$p_\xi(x) = \begin{cases} C(x+1), & x \in [-1,2] \\ 0, & x \notin [-1,2] \end{cases}; \quad A = \{\xi^2 < 1\};$
2	$p_\xi(x) = \begin{cases} C(5-x), & x \in [-2,1] \\ 0, & x \notin [-2,1] \end{cases}; \quad A = \{0 < \xi < 3\}$
3	$p_\xi(x) = \begin{cases} C(x-2), & x \in [3,5] \\ 0, & x \notin [3,5] \end{cases}; \quad A = \{4 < \xi < 6\}$
4	$p_\xi(x) = \begin{cases} C(x+4), & x \in [-1,3] \\ 0, & x \notin [-1,3] \end{cases}; \quad A = \{2 < \xi < 5\}$
5	$p_\xi(x) = \begin{cases} C(3-x), & x \in [-5,2] \\ 0, & x \notin [-5,2] \end{cases}; \quad A = \{0 < \xi < 5\}$
6	$p_\xi(x) = \begin{cases} C(x^2-1), & x \in [1,3] \\ 0, & x \notin [1,3] \end{cases}; \quad A = \{2 < \xi < 5\}$
7	$p_\xi(x) = \begin{cases} C(x^2+3), & x \in [-2,1] \\ 0, & x \notin [-2,1] \end{cases}; \quad A = \{-1 < \xi < 2\}$

8	$p_\xi(x)=\begin{cases}C(9-x^2), & x\in[-3,2]\\ 0, & x\notin[-3,2]\end{cases};\quad A=\{0<\xi<3\}$
9	$p_\xi(x)=\begin{cases}C(x^2+x), & x\in[1,4]\\ 0, & x\notin[1,4]\end{cases};\quad A=\{3<\xi<6\}$
10	$p_\xi(x)=\begin{cases}C(x^2-2x), & x\in[2,5]\\ 0, & x\notin[2,5]\end{cases};\quad A=\{1<\xi<4\}$
11	$p_\xi(x)=\begin{cases}C(x^3+1), & x\in[2,6]\\ 0, & x\notin[2,6]\end{cases};\quad A=\{5<\xi<7\}$
12	$p_\xi(x)=\begin{cases}C(x^3+2), & x\in[1,3]\\ 0, & x\notin[1,3]\end{cases};\quad A=\{0<\xi<2\}$
13	$p_\xi(x)=\begin{cases}C/(x-4), & x\in[5,8]\\ 0, & x\notin[5,8]\end{cases};\quad A=\{3<\xi<6\}$
14	$p_\xi(x)=\begin{cases}C/(x+2), & x\in[-1,3]\\ 0, & x\notin[-1,3]\end{cases};\quad A=\{0<\xi<5\}$
15	$p_\xi(x)=\begin{cases}C/(8-x), & x\in[-2,3]\\ 0, & x\notin[-2,3]\end{cases};\quad A=\{2<\xi<5\}$
16	$p_\xi(x)=\begin{cases}C/(x+6), & x\in[-1,4]\\ 0, & x\notin[-1,4]\end{cases};\quad A=\{0<\xi<5\}$

Вариант 17. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$p_\xi(x)=\begin{cases}C(x+1)^{-3/2}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Вычислить константу *C*, функцию распределения F(*x*), *M*ξ,, *D*ξ и вероятность *P*{|ξ-1/3|<1}

Вариант 18. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$p_\xi(x)=\begin{cases}C(1-x^2), & |x|\leq 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

Вычислить константу *C*, функцию распределения F(*x*), *M*ξ,, *D*ξ и вероятность *P*{|ξ-1/2|<1/4}

Вариант 19. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} Ce^x, & x \le 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Вычислить константу C, функцию распределения $F(x)$, $M\xi$,, $D\xi$ и вероятность $P\{-2<\xi<1\}$

Задание 2. Задачи по закону больших чисел (обязательное задание)

1. Средний размер вклада в отделении банка равен 6000 руб. Оценить вероятность, что случайно взятый вклад не превысит 10 000 руб.
2. Среднее количество вызовов, поступающих на АТС завода в течение часа, равно 300. Оценить вероятность того, что в течение следующего часа число вызовов на коммутатор: а) превысит 400; б) будет не более 600.
3. Отделение банка обслуживает в среднем 100 клиентов в день. Оценить вероятность того, что сегодня в отделении банка будет обслужено: а) не более 200 клиентов; б) более 150 клиентов.
4. Среднее абсолютное приращение цены акции компании в течение биржевых торгов составляет 0,3%. Оценить вероятность того, что на ближайших торгах курс изменится более чем на 3%.
5. Среднее квадратическое отклонение приращения цены акции компании в течение биржевых торгов составляет 2%, а среднее приращение равно нулю. Оценить вероятность того, что на ближайших торгах курс изменится более чем на 5%.
6. В каждой упаковке товара имеется одна из N различных наклеек (равновероятно). С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что удастся собрать все наклейки, купив не более M упаковок товара. Решить задачу, если: а) $N = 4$, $M = 20$; б) $N = 5$, $M = 30$.
7. По статистическим данным, в среднем 87% новорожденных доживают до 50 лет. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что из 1000 новорожденных доля доживших до 50 лет будет отличаться от вероятности этого события не более чем на 0,04 (по абсолютной величине).
8. В среднем 10% работоспособного населения некоторого региона — безработные. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что уровень безработицы среди случайно выбранных 10 000 работоспособных жителей составит от 9 до 11% (включительно).
9. Опыт страховой компании показывает, что страховой случай приходится примерно на каждый пятый договор. Оценить с помощью неравенства Чебышева количество договоров, при котором с вероятностью 0,9 можно утверждать, что доля страховых случаев отклонится от 0,2 не более чем на 0,01 (по абсолютной

величине). Уточнить ответ с помощью теоремы Муавра—Лапласа.

10. В продукции цеха детали отличного качества составляют 80%. В каких границах будет находиться с вероятностью 0,99 число деталей отличного качества среди 10 000 деталей? Сделать оценку с помощью неравенства Чебышева и с помощью теоремы Муавра—Лапласа.
11. Ежедневно новая сделка заключается с вероятностью 0,2 (но не более одной в день). За сколько дней с вероятностью 0,9 можно ожидать заключения не менее 50 сделок?
12. Аппаратура состоит из 100 одинаково надежных и независимо работающих элементов, каждый из которых может отказать в течение суток с вероятностью 0,01. На обнаружение отказавшего элемента и его замену требуется 20 минут, в течение которых аппаратура простаивает. Найти: а) вероятность того, что время простоя составит не более 40 минут в сутки; б) среднее время простоя аппаратуры в сутки.
13. На заводе 1000 станков, каждый из которых в среднем в течение 24 дней в месяц потребляет электроэнергию независимо от других станков с интенсивностью 10 единиц в день. Какое количество электроэнергии необходимо заводу ежедневно, чтобы недостаток электроэнергии наблюдался в среднем не чаще двух раз за 100 дней?
14. Предприятие выпускает 30% изделий стоимостью 100 руб., 30% изделий — стоимостью 200 руб. и 40% изделий — стоимостью 300 руб. Какова вероятность получить за 1000 случайно отобранных изделий не менее 215 тыс. руб.?
15. Известно, что треть всех деталей, сходящих с конвейера, подвергается выборочному контролю на основании некоторого случайного признака. Пусть через контроль прошло 100 дета- лей. В каких границах с вероятностью 0,99 лежит общее число деталей, сошедших с конвейера?
16. Кадровое агентство трудоустроило 500 специалистов. В каких границах с вероятностью 95% находилось общее число соискателей на работу, если каждый соискатель устраивается на работу с вероятностью 0,2?
17. Изготовление детали занимает случайное время, равномерно распределенное от 10 до 15 минут. Найти вероятность того, что на изготовление 100 деталей понадобится не менее 20,5 часа.
18. Изготовление детали занимает случайное время, равномерно распределенное от 4 до 8 минут. Изготовление скольких дета- лей за 25 рабочих часов можно гарантировать с вероятностью 95%.
19. По статистике страховой компании, число страховых случаев в день имеет

распределение Пуассона, а за год в среднем про- исходит 400 страховых случаев. Найти вероятность того, что за год их произойдет не более 450 раз.

Задачи с функциями от случайных величин (дополнительное задание)

Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке *L* Найти плотность распределения случайной величины η, если:

Номер варианта	**Вариант задания**
1	$I = [1, 3]$; $\eta = \xi^2 + 1$
2	$I = [0, 3]$; $\eta = 10 - \xi^2$
3	$I = [1, 3]$; $\eta = (\xi + 2)^2$
4	$I = [0, 2]$; $\eta = 10 - \xi^2$
5	$I = [-1, 2]$; $\eta = \sqrt{\xi + 3}$
6	$I = [1, 2]$; $\eta = \sqrt{\xi - 1}$
7	$I = [-1, 2]$; $\eta = 1/(\xi+1)$
8	$I = [1, 2]$; $\eta = 6/(\xi+1)$
9	$I = [-1, 1]$; $\eta = 1/(\xi+1)^2$
10	$I = [-1, 1]$; $\eta = -\ln(\xi+2)$

Плотность распределения случайной величины ξ равна $p_\xi(x)$. Найти плотность распределения η, если:

Номер варианта	**Вариант задания**
11	$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{x+4}{20}, & x \in [-1,3] \\ 0, & x \notin [-1,3] \end{cases}$; $\eta = (\xi+1)^3$;
12	$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{4}, & x \in [4,6] \\ 0, & x \notin [4,6] \end{cases}$; $\eta = \xi^2 - 6$;
13	$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2(3-x)}{63}, & x \in [-5,2] \\ 0, & x \notin [-5,2] \end{cases}$; $\eta = 1/(\xi+5)^2$;
14	$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2(5-x)}{55}, & x \in [2,5] \\ 0, & x \notin [2,5] \end{cases}$; $\eta = \ln(\xi+4)$;

15	$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{8-x}{28}, & x\in[-1,3]\\ 0, & x\notin[-1,3]\end{cases}$; $\eta=e^{\xi}-1$.
16	$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{3(x^2-1)}{20}, & x\in[1,3]\\ 0, & x\notin[1,3]\end{cases}$; $\eta=\sqrt{\xi+1}$;
17	$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{24}, & x\in[1,4]\\ 0, & x\notin[1,4]\end{cases}$; $\eta=\sqrt{\xi-1}$;
18	$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{3(9-x^2)}{100}, & x\in[-3,2]\\ 0, & x\notin[-3,2]\end{cases}$; $\eta=1/(\xi+3)$;
19	$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{18}, & x\in[2,5]\\ 0, & x\notin[2,5]\end{cases}$; $\eta=\ln(\xi-1)$;