

Matematično modeliranje

2. predavanje

UP FAMNIT

Barbara Boldin

Kazalo

1 Enostavni populacijski modeli (nadaljevanje)	1
1.1 Vpliv (ribo)lova na rast populacije	1
1.2 Alleejev učinek	4
2 Populacijski modeli v obliki sistema diferencialnih enačb	5
2.1 Uvodni primer: dinamika v kemostatu	5
3 Sistemi diferencialnih enačb	6
3.1 Sistemi dveh linearnih diferencialnih enačb	7
3.2 Klasifikacija ravnovesnih točk	9

1 Enostavni populacijski modeli (nadaljevanje)

1.1 Vpliv (ribo)lova na rast populacije

Denimo, da populacija rib v jezeru raste logistično z osnovno stopnjo rasti $r = 1$ in nosilno kapaciteto $K = 1$. Oglejmo si dva enostavna modela, ki vključujeta učinek ribolova.

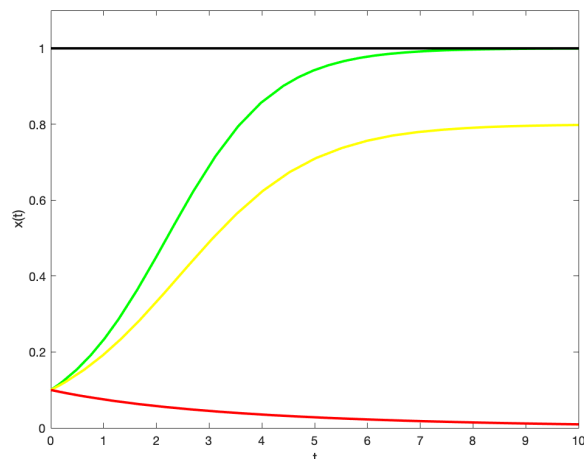
- (a) Če ribolov poteka s konstantno *per capita* stopnjo $\rho > 0$, potem dinamiko populacije opisuje enačba

$$x' = x(1 - x) - \rho x.$$

Enačbo lahko zapišemo v obliki

$$x' = (1 - \rho)x \left(1 - \frac{x}{1 - \rho}\right),$$

iz česar je razvidno, da gre ponovno za logistično enačbo, tokrat z osnovno stopnjo rasti $1 - \rho$ in nosilno kapaciteto $1 - \rho$. Če je $\rho \geq 1$ (zelo intenziven ribolov), je populacija rib na dolgi obsojena na izumrtje. Če pa je $\rho < 1$, potem populacija preživi kljub ribolovu in se na dolgi rok približuje zmanjšani nosilni kapaciteti $1 - \rho$.



Slika 1: Dinamika ribje populacije z začetnim stanjem $x(0) = 0.1$ za model v točki (a) in sicer z $\rho = 0$ (zeleni), $\rho < 1$ (rumeni) in $\rho > 1$ (rdeči).

(b) Če ribolov poteka s konstantno stopnjo $\rho > 0$, potem je dinamika opisana z

$$x' = x(1 - x) - \rho. \quad (1)$$

V tem primeru dobimo Riccatijevo enačbo. Naj bo $f(x) = x(1 - x) - \rho$. Če je $\rho \leq \frac{1}{4}$, potem ima f dve realni ničli, označimo ju z \bar{x}_1 in \bar{x}_2 (naj bo $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2$; ničli sovpadata v primeru $\rho = \frac{1}{4}$). Konstanti \bar{x}_1 in \bar{x}_2 rešita dano enačbo. Enačbo (1) tedaj lahko rešimo v dveh korakih: (i) uvedemo novo spremenljivko $y = x - \bar{x}_2$ in enačbo prevedemo na Bernoullijevo enačbo za y , (ii) uvedemo še $z = y^{-1}$ in enačbo prevedemo na linearno enačbo 1. reda za z (za vajo rešitev poščite sami).

V kolikor pa nas ne zanima populacijsko stanje ob nekem določenem času, pač pa le dolgoročna populacijska dinamika, lahko do zaključkov pridemo hitreje z analizo lastnosti funkcije f ali obravnavanjem stabilnosti ravnovesnih stanj.

Vpeljimo torej pojma ravnovesja in stabilnosti (bolj splošno, kot pripravo na sisteme NDE). Naj bo

$$X'(t) = F(X), \quad (2)$$

kjer je $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ vektor spremenljivk in $F(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))^T$ desna stran sistema.

DEFINICIJA. *Ravnovesna točka (ali ravnovesno stanje) enačbe $X'(t) = F(X)$ je konstanta \bar{X} , ki zadošča $f(\bar{X}) = 0$.*

Z vidika dinamike ravnovesna stanja niso preveč zanimiva: če je začetna populacija v ravnovesnem stanju, bo tam ostala za vse čase. Lahko pa se vprašamo: kaj se zgodi z rešitvenimi krivuljami, katerih začetno stanje je v bližini ravnovesja?

DEFINICIJA. *Ravnovesna točka \bar{X} enačbe $X'(t) = f(X)$ je lokalno stabilna, če za poljuben $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsako rešitev $\varphi(t)$ z začetnim pogojem $\varphi_0 = \varphi(t_0)$, za katerega je $\|\varphi_0 - \bar{X}\| < \delta$ velja $\|\varphi(t) - \bar{X}\| < \varepsilon$ za vsak $t \geq t_0$. Če ravnovesna točka ni lokalno stabilna je nestabilna.*

Z besedami lahko torej lokalno stabilnost ravnovesne točke opišemo takole: rešitvena krivulja začetnega problema ostane za vse čase tako blizu ravnovesne točke kot želimo, če je le začetni pogoj zadosti blizu ravnovesne točke.

Bolj strog je pogoj lokalne asimptotske stabilnosti ravnovesne točke.

DEFINICIJA. *Ravnovesna točka \bar{X} enačbe $X'(t) = F(X)$ je lokalno asimptotsko stabilna (LAS), če je lokalno stabilna in obstaja $\gamma > 0$, da za vsako rešitev φ z $\|\varphi_0 - \bar{X}\| < \gamma$ sledi*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t) - \bar{x}\| = 0.$$

Vrnimo se sedaj k skalarnim enačbam. Naj bo \bar{x} ravnovesna točka enačbe $x'(t) = f(x)$. Če je f' zvezna na odprtem intervalu, ki vsebuje ravnovesno točko \bar{x} , potem

$$f(\bar{x} + h) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h = f'(\bar{x})h.$$

Če je $x(t) = \bar{x} + h(t)$, je torej

$$h'(t) = x'(t) = f(\bar{x} + h) \approx f'(\bar{x})h.$$

Dinamiko v bližini ravnovesnega stanja lahko torej v določenih primerih aproksimiramo z linearno enačbo

$$h'(t) = f'(\bar{x})h.$$

Tedaj velja: perturbacije h bodo rasle eksponentno kadar $f'(\bar{x}) > 0$ in upadale eksponentno proti nič kadar $f'(\bar{x}) < 0$. V prvem primeru se začetno stanje blizu ravnovesne točke oddaljuje od ravnovesja, v drugem primeru pa se perturbacije manjšajo in x konvergira proti ravnovesju. V kolikor je $f'(\bar{x}) = 0$, nam linearizacija ne da nobene informacije o stabilnosti ravnovesja. Velja (glej [1])

TRDITEV. *Denimo, da je f' zvezna na odprtem intervalu, ki vsebuje ravnovesno točko \bar{x} enačbe $x'(t) = f(x)$. Ravnovesna točka \bar{x} je LAS če $f'(\bar{x}) < 0$ in nestabilna če $f'(\bar{x}) > 0$.*

OPOMBA. Rečemo, da je ravnovesna točka \bar{x} enačbe $x'(t) = f(x)$ hiperbolična če $f'(\bar{x}) \neq 0$ in nehiperbolična če $f'(\bar{x}) = 0$. Za hiperbolične ravnovesne točke lahko torej lokalno asimptotsko stabilnost določimo z linearizacijo okoli ravnovesnega stanja.

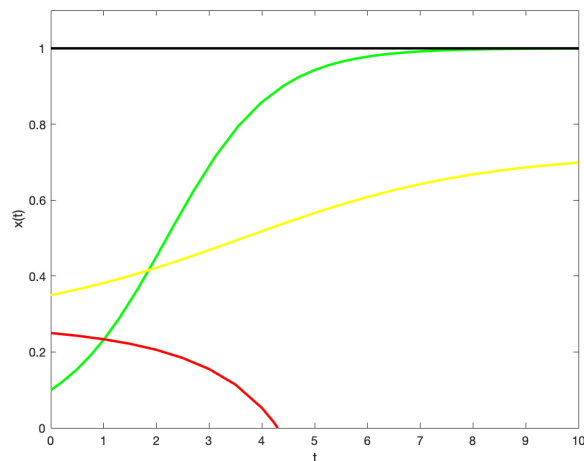
Za primer ribolovne enačbe v (3) lahko za $\rho < \frac{1}{4}$ pišemo

$$x'(t) = x(1 - x) - \rho = -(x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_2) = f(x), \quad \bar{x}_1 < \bar{x}_2. \quad (3)$$

Velja $f'(\bar{x}_1) = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 > 0$ in $f'(\bar{x}_2) = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 < 0$. Ravnovesje \bar{x}_1 je torej nestabilno, \bar{x}_2 pa LAS.

Iz lastnosti funkcije f lahko povemo še več. Na intervalu $[0, \bar{x}_1)$ velja $f < 0$. Če je $x(0) < \bar{x}_1$, bo torej populacija na dolgi rok izumrla. Na intervalu (\bar{x}_1, \bar{x}_2) velja $f > 0$, torej za $\bar{x}_1 < x(0) < \bar{x}_2$ populacija narašča proti \bar{x}_2 . Za $x(0) > \bar{x}_2$ pa populacija upada proti \bar{x}_2 , saj je $f < 0$ za $x > \bar{x}_2$. Glede na navedeno lahko torej vrednosti \bar{x}_1 rečemo prag izumrtja, \bar{x}_2 pa nosilna kapaciteta. Dinamika je prikazana na Sliki 4.

Vprašanje. Kaj se s populacijo zgodi na dolgi rok v primeru, ko $\rho > \frac{1}{4}$?



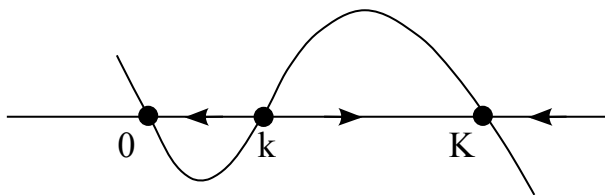
Slika 2: Dinamika ribje populacije za model v točki (b) in sicer brez ribolova (zelena), ter z $\rho = 0.2$ za $\bar{x}_1 < x(0) < \bar{x}_2$ (rumena) in $x(0) < \bar{x}_1$ (rdeča).

1.2 Alleejev učinek

Alleejev učinek, imenovan po ameriškem biologu Warderju C. Alleeju (1885-1955), opisuje povezanost med fitnessom populacije (pogosto merjenim s stopnjo rasti populacije) in njeno velikostjo (ali gostoto). Pri majhnih populacijah je lahko rast populacije zmanjšana, ali celo negativna, saj v razpršeni populaciji posamezniki denimo težje najdejo partnerja ali pa so bolj ogroženi s strani plenilcev. Alleejev učinek lahko najbolj enostavno modeliramo z enačbo

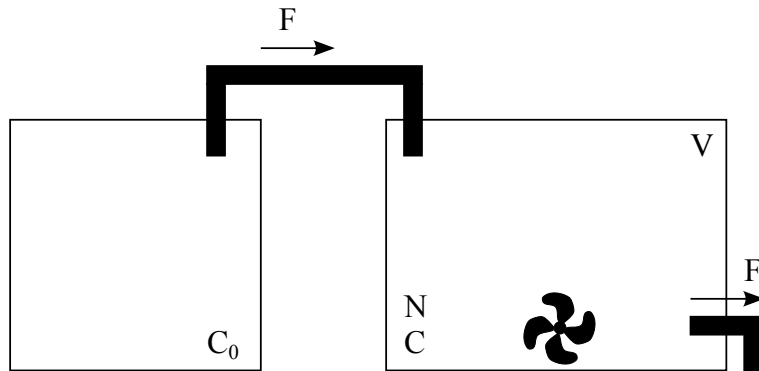
$$x'(t) = rx\left(\frac{x}{k} - 1\right)\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

kjer sta k in K dana parametra za katera velja $0 < k < K$, $x(t)$ pa je velikost populacije ob času t .



Slika 3: Alleejev učinek.

Enačba ima tri ravnovesna stanja: $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = k$ ter $\bar{x}_3 = K$. Ničelno stanje je LAS: če je začetna populacija pod k , potem populacija izumre. Ravnovesje $\bar{x}_2 = k$ je nestabilno. Ravnovesno stanje \bar{x}_3 je LAS. Še več, temu ravnovesju se približujejo vse rešitve z začetnim stanjem nad k . Parameter k je torej prag izumrtja, K pa je nosilna kapaciteta.



Slika 4: Kemostat

2 Populacijski modeli v obliki sistema diferencialnih enačb

2.1 Uvodni primer: dinamika v kemostatu

Kemostat je laboratorijska naprava, v kateri pri nadzorovanih pogojih gojimo mikroorganizme.

Denimo, da ima posoda za gojenje prostornino V . Naj $N(t)$ označuje gostoto populacije v posodi ob času t ($N(t)$ ima enoto [število/volumen]). Hranilo, ki ga mikroorganizmi potrebujejo za rast sproti dovajamo in odvajamo. Naj $C(t)$ označuje koncentracijo hranila v posodi ob času t ($C(t)$ ima enoto [masa/volumen]). Posodo z mikroorganizmi ves čas mešamo, tako da je populacija mikroorganizmov homogena. Sveže hranilo s hitrostjo F (F ima enoto [volumen/čas]) sproti dovajamo iz shrambe, kjer je koncentracija hranila konstanta C_0 (C_0 ima enoto [masa/volumen]). Iz glavne posode z mikroorganizmi hkrati s hitrostjo F odvajamo mešanico populacije in hranila.

Označimo s $K(C)$ *per capita* stopnjo rasti populacije mikroorganizmov (ta je odvisna od koncentracije hranila) in naj bo $D = \frac{1}{\alpha}$ donos, t.j. število novih mikroorganizmov na enoto zaužitega hranila (D ima enoto [število/masa]).

Naloga laboranta je sistem postaviti tako, da

- (i) hitrost F ne bo tako velika, da bi populacijo mikroorganizmov odplaknilo, in
- (ii) bo hitrost F zadosti velika, da populacija ne bo izumrla.

Kakšen sistem enačb opisuje dinamiko $N(t)$ in $C(t)$? Kot prvi poskus zapišimo sistem enačb

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= K(C)N - FN \\ \frac{dC}{dt} &= -\alpha K(C)N - FC + FC_0.\end{aligned}$$

Ta sistem ni pravilen. Zakaj? Preverimo enote v prvi enačbi:

$$[\text{število/volumen}] \cdot [1/\text{čas}] \neq [1/\text{čas}] [\text{število/volumen}] - [\text{volumen/čas}] [\text{število/volumen}]$$

Namesto člena FN je pravilen izraz $\frac{FN}{V}$, saj $\frac{F}{V}$ meri hitrost pritoka v posodo na enoto prostornine. Podobno velja za zadnja dva člena v drugi enačbi. Pravilen sistem enačb, ki opisuje zgoraj opisane procese v kemostatu je torej

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= K(C)N - \frac{FN}{V} \\ \frac{dC}{dt} &= -\alpha K(C)N - \frac{FC}{V} + \frac{FC_0}{V}.\end{aligned}$$

Ujemanje enot v sistemu enačb seveda ne pomeni, da je model pravilen, je pa neujemanje enot znak, da model zagotovo ni pravilen.

Za funkcijo $C \mapsto K(C)$, ki poda stopnjo rasti populacije mikroorganizmov v odvisnosti od koncentracije hranila, pričakujemo, da bo imela naslednje lastnosti: (i) $K(C) \geq 0$ za $C \geq 0$, (ii) je naraščajoča funkcija in (iii) je omejena funkcija. Ena takih funkcij je (v tem kontekstu včasih imenovana Michaelis - Mentenova funkcija)

$$K(C) = \frac{K_{\max}C}{K_n + C},$$

za katero velja $\lim_{C \rightarrow \infty} K(C) = K_{\max}$ (K_{\max} je torej zgornja meja za stopnjo rasti) in $K(K_n) = \frac{1}{2}K_{\max}$. Michaelis-Mentenova funkcija vodi do naslednjega sistema enačb

$$\frac{dN}{dt} = \frac{K_{\max}C}{K_n + C}N - \frac{FN}{V} \quad (4a)$$

$$\frac{dC}{dt} = -\alpha \frac{K_{\max}C}{K_n + C}N - \frac{FC}{V} + \frac{FC_0}{V}. \quad (4b)$$

Model ima torej dve odvisni spremenljivki in šest parametrov. Od slednjih so F, V in C_0 parametri, ki so odvisni od kontrole sistema laboranta, α, K_{\max} in K_n pa so odvisni od hranila in mikroorganizmov, ki jih gojimo.

Model dinamike v kemostatu (4) je primer nelinearnega sistema diferencialnih enačb. Da bi znali analizirati take sisteme, si sedaj pogledjmo nekaj osnovnih rezultatov.

3 Sistemi diferencialnih enačb

Obravnavajmo diferencialne enačbe

$$X'(t) = F(X), \quad (5)$$

kjer je $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ vektor spremenljivk in $F(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))^T$ desna stran sistema. Velja naslednja trditev, ki jo navajamo brez dokaza.

TRDITEV. *Naj bo dan sistem*

$$X'(t) = F(X),$$

kjer so funkcije F in $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ ($j = 1, \dots, n$) zvezne na \mathbb{R}^n . Tedaj obstaja enolična rešitev začetnega problema

$$X'(t) = F(X),$$

$$X(t_0) = X_0$$

za poljuben $X_0 \in \mathbb{R}^n$.

OPOMBA. Maksimalen interval $[t_0, t)$, na katerem rešitev začetnega problema obstaja je lahko končen. Privzeli bomo, da rešitev obstaja na $[t_0, \infty)$.

Rešitvena krivulja $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ je parametrično podana krivulja v \mathbb{R}^n . Imenujemo jo tudi *orbita* ali *trajektorija*. Množico v \mathbb{R}^n , kjer je orbita definirana imenujemo *fazni prostor*.

Pomembna posledica izreka, ki zagotavlja enoličnost rešitve začetnega problema je, da se dve različni rešitveni krivulji ne sekata. Velja

POSLEDICA. Naj bo dan sistem

$$X'(t) = F(X),$$

kjer so funkcije F in $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ ($j = 1, \dots, n$) zvezne na \mathbb{R}^n . Denimo, da sta $X_1(t)$ in $X_2(t)$ dve rešitvi sistema $X'(t) = F(X)$ z $X_1(0) = X_0$ in $X_2(t_0) = X_0$. Tedaj je $X_2(t) = X_1(t - t_0)$.

Dokaz. Naj bo $Y(t) = X_1(t - t_0)$. Za $u = t - t_0$ je

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dX_1}{du} \frac{du}{dt} = \frac{dX_1}{du} = F(X_1(u)) = F(Y(t)).$$

Ker je $Y(t_0) = X_1(0) = X_0 = X_2(t_0)$, je zaradi enoličnosti rešitve začetnega problema $Y(t) = X_2(t)$. \square

Poseben primer rešitev (5) so ravnovesne točke.

DEFINICIJA. *Ravnovesna točka (ali ravnovesno stanje) enačbe (5) je konstanta \bar{X} , ki zadošča $F(\bar{x}) = 0$.*

Sistema nelinearnih enačb v splošnem ne znamo rešiti. Običajno pa je mogoč izračun ravnovesnih točk ter analiza njihove (lokalne) stabilnosti.

Številni klasični populacijski modeli so zapisani v obliki sistema dveh navadnih diferencialnih enačb. Zato se sedaj osredotočimo na ravninske sisteme v obliki

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x, y) \\ y'(t) &= g(x, y). \end{aligned} \tag{6}$$

Začnimo z linearnimi sistemi.

3.1 Sistemi dveh linearnih diferencialnih enačb

Naj bo dan linearni sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} x'(t) &= a_{11}x + a_{12}y \\ y'(t) &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned} \tag{7}$$

kjer so a_{11}, a_{12}, a_{21} in a_{22} dana realna števila. Sistem lahko zapišemo v matrični obliki

$$X'(t) = AX,$$

kjer je $X(t) = (x(t), y(t))^T$ vektor odvisnih spremenljivk,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

pa dana realna matrika.

Po vzoru homogenih linearnih diferencialnih enačb 1. reda, iščemo rešitev v obliki

$$X(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$$

za neko število λ in nek vektor \vec{v} . Tedaj mora veljati

$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t} \vec{v} = A(e^{\lambda t} \vec{v}) = e^{\lambda t} A\vec{v},$$

torej je vektor \vec{v} lastni vektor matrike A , ki pripada lastni vrednosti λ .

Naj bosta sedaj λ_1 in λ_2 lastni vrednosti matrike A . Za zapis splošne rešitve sistema (7) ločimo tri primere (podrobnosti lahko najdete v knjigah o diferencialnih enačbah, denimo [2, 3], nekaj podrobnosti je tudi v [1]), in sicer:

- (i) Če $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ in lastnima vrednostima pripadata dva linearno neodvisna vektorja \vec{v}_1 in \vec{v}_2 (to velja vedno, kadar sta lastni vrednosti različni), potem je splošna rešitev (7) oblike

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

za poljubni konstanti C_1 in C_2 .

- (ii) Če $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ in je \vec{v} edini linearno neodvisen lastni vektor ki pripada λ , potem je splošna rešitev (7) oblike

$$X(t) = C_1 e^{\lambda t} \vec{v} + C_2 e^{\lambda t} (t\vec{v} + \vec{w}).$$

Pri tem je vektor \vec{w} pripadajoči korenski vektor (t.j. rešitev enačbe $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{w}$), C_1 in C_2 pa poljubni konstanti.

- (iii) Če sta $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ konjugirani kompleksni lastni vrednosti matrike A , potem je splošna rešitev (7) oblike

$$X(t) = \vec{C}_1 e^{at} \cos(bt) + \vec{C}_2 e^{at} \sin(bt),$$

kjer sta vektorja C_1 in C_2 odvisna od lastnih vektorjev in lastnih vrednosti matrike A (ostaneta le dve splošni konstanti).

Če je $\det(A)$ od nič različna, potem je točka $(0, 0)$ izolirana ravnovesna točka linearnega sistema (7). Njeno lokalno (asimptotsko) stabilnost določata lastni vrednosti matrike A in sicer velja:

- (i) Ravnovesje $(0, 0)$ je LAS natanko tedaj, ko je $\operatorname{Re}(\lambda_{i,j}) < 0$ za $i = 1, 2$.
- (ii) Ravnovesje $(0, 0)$ je lokalno stabilno natanko tedaj, ko je $\operatorname{Re}(\lambda_{i,j}) \leq 0$ za $i = 1, 2$.
- (iii) Ravnovesje $(0, 0)$ je nestabilno natanko tedaj, ko je $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$ ali $\operatorname{Re}(\lambda_2) > 0$.

Za matrike reda 2 lahko informacijo o lokalni stabilnosti ravnovesja izrazimo tudi s sledjo matrike A , $\text{tr}(A)$, in njeno determinanto, $\det(A)$. Vemo, da je

$$\begin{aligned}\text{tr}(A) &= a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2, \\ \det(A) &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \lambda_1 \cdot \lambda_2,\end{aligned}$$

torej dobimo naslednjo tabelo:

λ_1, λ_2	λ_1	λ_2	$\text{tr}(A)$	$\det(A)$
$\in \mathbb{R}$	+	+	+	+
$\in \mathbb{R}$	+	-	?	-
$\in \mathbb{R}$	-	-	-	+
$a \pm ib$	$a > 0$	$a > 0$	+	+
$a \pm ib$	$a < 0$	$a < 0$	-	+
$a \pm ib$	$a = 0$	$a = 0$	0	+

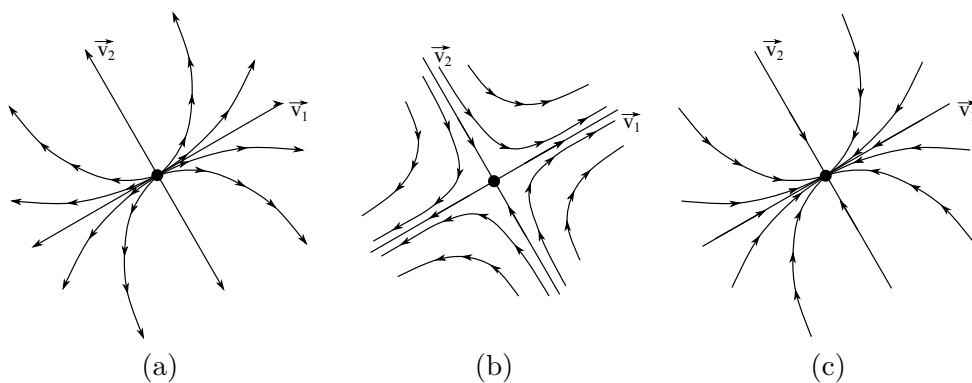
Velja torej naslednja

TRDITEV. Naj bo dan linearni sistem $X'(t) = AX$, kjer je A dana realna matrika reda 2 z $\det(A) \neq 0$. Ravnovesna točka $(0,0)$ je:

- (i) *LAS natanko tedaj, ko $\text{tr}(A) < 0$ in $\det(A) > 0$,*
- (ii) *lokalno stabilna natanko tedaj, ko $\text{tr}(A) \leq 0$ in $\det(A) > 0$,*
- (iii) *nestabilna natanko tedaj, ko $\text{tr}(A) > 0$ ali $\det(A) < 0$.*

3.2 Klasifikacija ravnovesnih točk

Glede na lastne vrednosti matrike linearnega sistema lahko ravnovesno točko $(0,0)$ klasificiramo kot *vozel*, *sedlo* ali *fokus*. Poglejmo si definicijo teh pojmov in obravnavajmo dinamiko trajektorij v bližini izhodišča.



Slika 5: (a) nestabilen vozel, (b) sedlo, (c) stabilen vozel

I. Naj ima matrika linearnega sistema dve realni lastni vrednosti $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ z linearno neodvisnima lastnima vektorjema \vec{v}_1 in \vec{v}_2 .

(i) Če je $\lambda_1 > 0$ in $\lambda_2 > 0$ je $(0, 0)$ *nestabilen vozle*.

Če je $X(0) = c\vec{v}_j$ ($j = 1, 2$) (torej, začetno stanje leži v podprostoru napetem na lastni vektor \vec{v}_j), potem za vsak t velja $X(t) = ce^{\lambda_j t}\vec{v}_j$. Rešitvena krivulja torej za vse čase ostane v lastnem podprostoru napetem na \vec{v}_j in se eksponentno hitro oddaljuje od izhodišča ko $t \rightarrow \infty$. Vse orbite z začetnim stanjem blizu izhodišča se torej oddaljujejo od ravnovesne točke ko $t \rightarrow \infty$. Nestabilen vozle je prikazan na Sliki 5(a).

(ii) Če je $\lambda_1 > 0$ in $\lambda_2 < 0$, ravnovesno točko imenujemo *sedlo*.

V tem primeru vedno obstajata linearno neodvisna vektorja \vec{v}_1 in \vec{v}_2 , ki pripadata lastnima vrednostima λ_1 in λ_2 . Orbite, ki se začnejo na podprostoru, napetem na lastni vektor, ki pripada pozitivni lastni vrednosti, se eksponentno hitro oddaljujejo od izhodišča ko $t \rightarrow \infty$. Orbite, ki se začnejo na podprostoru napetem na lastni vektor, ki pripada negativni lastni vrednosti pa se eksponentno hitro približujejo izhodišču ko $t \rightarrow \infty$ (vendar izhodišča nikoli ne dosežejo). Nekaj orbit v bližini sedla je prikazanih na Sliki 5(b).

(iii) Če je $\lambda_1 < 0$ in $\lambda_2 < 0$ rečemo, da je $(0, 0)$ *stabilen vozle*.

Če je $X(0) = c\vec{v}_j$ ($j = 1, 2$), potem za vsak t velja $X(t) = ce^{\lambda_j t}\vec{v}_j$. Rešitvena krivulja torej za vse čase ostane v lastnem podprostoru napetem na \vec{v}_j in se eksponentno hitro približuje izhodišču ko $t \rightarrow \infty$. Vse orbite z začetnim stanjem blizu izhodišča se torej približujejo ravnovesni točki ko $t \rightarrow \infty$. Stabilno sedlo je prikazano na Sliki 5(c).

II. Če $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ in obstaja le en linearno neodvisen vektor \vec{v} , potem:

(i) je ravnovesje $(0, 0)$ *nestabilen nepravi vozle* kadar je $\lambda > 0$ in

(ii) je ravnovesje $(0, 0)$ *stabilen nepravi vozle*, kadar je $\lambda < 0$.

Nekaj orbit v bližini nepravega vozla je prikazanih na Sliki 6.

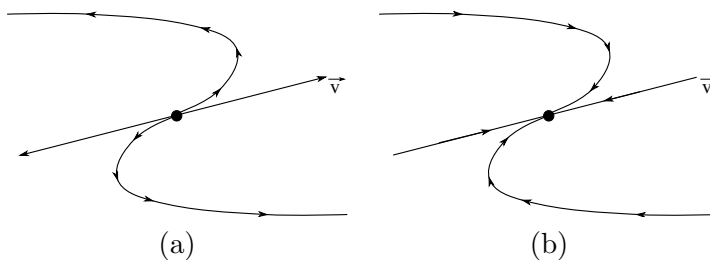
III. Če ima matrika linearnega sistema dve kompleksni lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, potem vemo, da je splošna rešitev oblike

$$X(t) = \vec{C}_1 e^{at} \cos(bt) + \vec{C}_2 e^{at} \sin(bt).$$

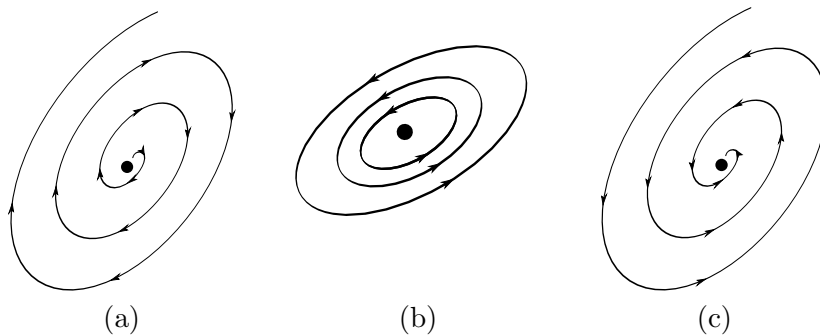
(i) Če $a > 0$, potem rečemo, da je ravnovesna točka $(0, 0)$ *nestabilen fokus*. V tem primeru se orbite vrtijo okoli ravnovesne točke in se od izhodišča oddaljujejo ko $t \rightarrow \infty$. Nestabilen fokus je prikazan na Sliki 7(a).

(ii) Če je $a = 0$, potem rečemo, da je ravnovesna točka $(0, 0)$ *center*. V tem primeru so orbite sklenjene krivulje, ki krožijo okoli izhodišča. Center je prikazan na Sliki 7(b).

(iii) Če $a < 0$, potem rečemo, da je ravnovesna točka $(0, 0)$ *stabilen fokus*. V tem primeru se orbite vrtijo okoli ravnovesne točke in se izhodišču približujejo ko $t \rightarrow \infty$. Stabilen fokus je prikazan na Sliki 7(c).



Slika 6: (a) nestabilen nepravi vozle, (b) stabilen nepravi vozle



Slika 7: (a) nestabilen fokus, (b) center, (c) stabilen fokus

Vprašanje. Denimo, da je izhodišče fokus ali center. Na podlagi česa lahko povemo, ali se orbite vrtijo v smeri urinega kazalca ali v nasprotni smeri urinega kazalca?

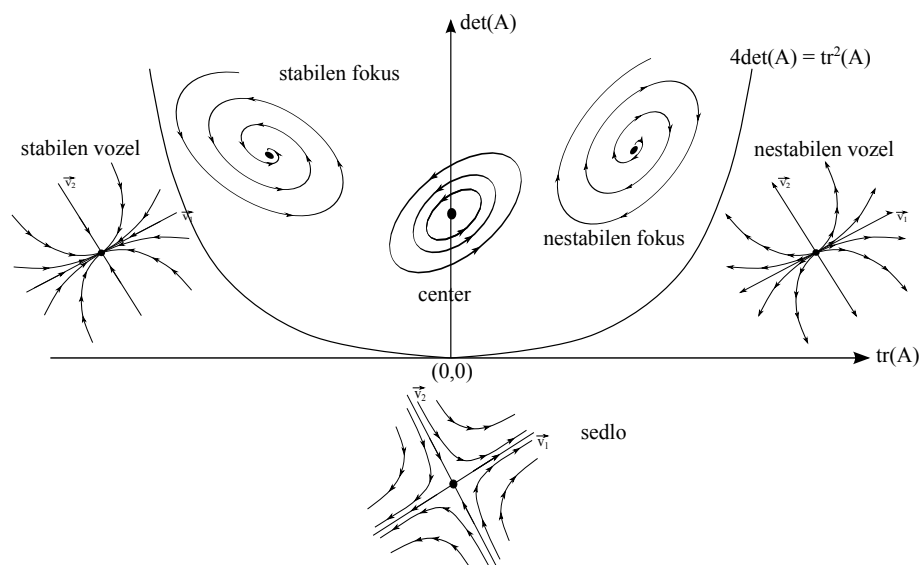
Spomnimo se še, da lahko karakteristični polinom matrike sistema zapišemo v obliki

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Lastni vrednosti sta konjugirano kompleksni natanko tedaj, ko $\operatorname{tr}^2(A) - 4\det(A) < 0$. Klasifikacijo ravnovesne točke lahko tedaj grafično prikažemo v ravnini $(\operatorname{tr}, \det)$ kot prikazuje Slika 8.

Literatura

- [1] Leah Edelstein-Keshet. *Mathematical models in biology*. SIAM Classics in Applied Mathematics, 2005.
- [2] John Guckenheimer and Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, volume 42. Springer Science & Business Media, 1983.
- [3] Stephen Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, volume 2. Springer Science & Business Media, 2003.



Slika 8: Klasifikacija ravnovesne točke $(0,0)$ sistema (7).