Matematično modeliranje
6. predavanje

UP FAMNIT

Barbara Boldin

Kazalo

1 Osnove bifurkacijske teorije

Pri do sedaj obravnavanih modelih smo opazili, da se lahko dinamika sistema kvalitativno spremeni, ko se spremenijo vrednosti parametrov modela. Npr.:, ravnovesne točke nastajajo in izginjajo, njihova stabilnost se spremeni. Področje matematike, ki se ukvarja z analizo kvalitatitvih oziroma topoloških lastnosti dinamičnega sistema se imenuje *bifurkacijska teorija*. V tem razdelku na kratko spoznamo različne tipe bifurkacij ravnovesnih točk pri skalarnih enačbah ter ravninskih sistemih. Za dodano branje se priporoča [1, 2].

1.1 Bifurkacije ravnovesnih stanj skalarnih enačb

Denimo, da je dinamika opisana s skalarno enačbo

$$x'(t) = f_a(x),$$

kjer je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana C^∞ funkcija parametra $a \in \mathbb{R}$. Naj bo $\bar{x}(a)$ ravnovesna točka pri dani vrednosti a, torej

$$f_a(\bar{x}(a)) = 0.$$

Če je $f'_a(\bar{x}(a)) \neq 0$, potem majhne spremembe parametra a ne prinesejo kvalitativne spremembe v dinamiki, t.j.

$$x'(t) = f_{a+\varepsilon}(x)$$

ima ravnovesno točko $\bar{x}(a+\varepsilon)$, ki se zvezno spreminja z ε, za majhne ε pa se stabilnostne lastnosti ravnovesja ne spremenijo. Bifurkacija se torej lahko zgodi le, če je $f_a'(\bar{x}(a)) = 0$. Poznamo tri tipe bifurkacij ravnovesne točke.

1.1.1 Sedelno-vozelna bifurkacija

Kot bomo videli malce kasneje, ime sedelno-vozelna bifurkacija dobi smisel šele pri ravninskih sistemih. Rečemo, da se sedelno-vozelna bifurkacija zgodi pri $a = a_0$, če obstaja okolica točke $a = a_0$ na kateri:

- ima enačba dve ravnovesni točki za $a < a_0$. Od teh je eno ravnovesje LAS, drugo je nestabilno;
- ima enačba eno ravnovesno točko za $a = a_0$,
- enačba nima ravnovesnih točk za $a > a_0$.

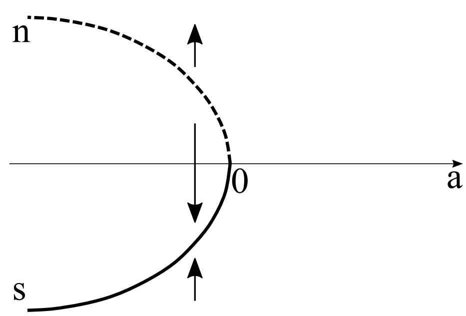
Opomba. Zgornji neenakosti sta lahko tudi obrnjeni, tako da ima enačba dve ravnovesji za $a > a_0$ ter nima ravnovesij za $a < a_0$.

Primer. Naj bo dana enačba

$$x'(t) = x^2 + a.$$

Enačba ima za $a < 0$ dve ravnovesni točki, $\bar{x}_{12} = \pm\sqrt{-a}$. Pri tem je pozitivna ravnovesna točka nestabilna, negativna pa LAS. Pri $a = 0$ ima enačba eno ravnovesno točko, medtem ko za $a > 0$ ravnovesnih točk ni. Sedelno-vozelna bifurkacija se zgodi pri $a = 0$.

Kvalitativno sliko lahko ponazorimo z bifurkacijskim diagramom na Sliki 1.



Slika 1: Sedelno-vozelna bifurkacija: s označuje LAS ravnovesno točko, n pa nestabilno. Puščice nakazujejo dinamiko $x(t)$.

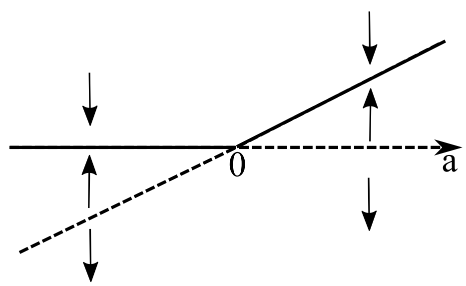
1.1.2 Transkritična bifurkacija

O transkritični bifurkaciji pri $a = a_0$ govorimo, če obstaja okolica točke a_0, na kateri ima enačba dve ravnovesni točki, ki se v $a = a_0$ sekata in si izmenjata stabilnost. Transkritična bifurkacija je tipična za sisteme oblike $x'(t) = xg_a(x)$ in jo pogosto najdemo pri populacijskih modelih.

Primer. Naj bo dana enačba

$$x'(t) = x(a - x).$$

Enačba ima za poljuben $a \in \mathbb{R}$ dve ravnovesni točki $\bar{x}_1 = 0$ in $\bar{x}_2 = a$. Prva je LAS za $a < 0$ in nestabilna za $a > 0$, druga je LAS za $a > 0$ in nestabilna za $a < 0$. Transkritična bifurkacija se zgodi pri $a = 0$, kjer se ravnovesni stanji sekata in si izmenjata stabilnost (glej Sliko 2).



Slika 2: Transkritična bifurkacija: s označuje LAS ravnovesno točko, n pa nestabilno.

1.1.3 Viličasta bifurkacija

Primer viličaste bifurkacije pri $a = 0$ je podan z enačbo

$$x'(t) = x(a - x^2).$$

Velja

- $\bar{x} = 0$ je ravnovesno stanje za poljuben $a \in \mathbb{R}$. Ničelno ravnovesno stanje je LAS za $a < 0$ in nestabilno za $a > 0$.
- Za $a < 0$ je ničelno ravnovesno stanje tudi edino ravnovesno stanje. Za $a > 0$ pa obstajata še dve ravnovesni točki $\bar{x}_{2,3} = \pm\sqrt{a}$. Obe netrivialni ravnovesni točki sta LAS.

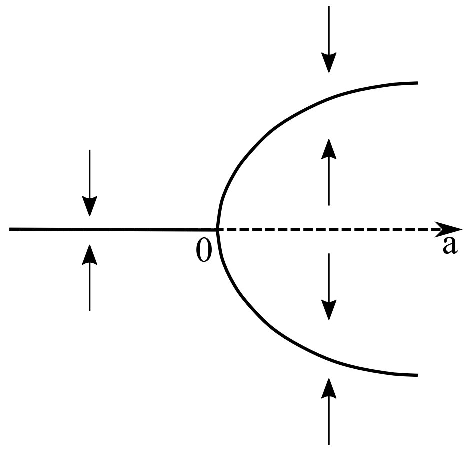
Opomba. V zgornjem primeru govorimo o *superkritični* viličasti bifurkaciji. V tem primeru sta neničelni ravnovesni točki LAS. Enačba $x'(t) = x(a + x^2)$ poda primer *subkritične* viličaste bifurkacije, kjer ima ničelno ravnovesje enake stabilnostne lastnosti kot v primeru superkritične bifurakacije, netrivialni ravnovesni točki pa sta nestabilni.

Primer. Narišite bifurkacijski diagram za $x'(t) = x(a + x^2)$.

1.2 Bifurkacije ravnovesnih točk ravninskih sistemov

V ravninskih sistemih

$$x'(t) = f_a(x, y)$$
$$y'(t) = g_a(x, y)$$



Slika 3: Viličasta bifurkacija: s označuje LAS ravnovesno točko, n pa nestabilno.

se bifurkacija ravnovesne točke $(\bar{x}(a), \bar{y}(a))$ pri zgodi pri $a = a_0$, ko ima Jacobijeva $J(\bar{x}(a), \bar{y}(a))$ bodisi ničelno lastno vrednost bodisi par konjugiranih imaginarnih lastnih vrednosti.

Poleg treh tipov bifurkacij, ki smo jih že spoznali (transkritična, sedelno-vozelna in viličasta), pri ravninskih sistemih naletimo še na en tip, t.j. Hopfova bifurkacija. Preden jo spoznamo, pa si poglejmo še en primer sedelno-vozelne bifurkacije (za primer transkritične bifurkacije v ravninskem sistemu glej epidemiološki model spodaj).

1.2.1 Sedelno-vozelna bifurkacija

Primer. Naj bo dan sistem

$$\begin{aligned} x'(t) &= x^2 + a \\ y'(t) &= -y. \end{aligned}$$

Jacobijeva matrika sistema je

$$J = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sistem ima za $a < 0$ dve ravnovesni stanji, $(\sqrt{-a}, 0)$ in $(-\sqrt{-a}, 0)$. Prvo je sedlo, drugo je stabilen vozel. Pri $a = 0$ ima sistem le eno ravnovesno točko in Jacobijeva matrika ima ničelno lastno vrednost. Za $a > 0$ ravnovesnih točk ni.

Izraz sedelno-vozelna bifurkacija dobi smisel šele pri sistemih dimenzije dva (ali več): ko negativen parameter a narašča proti 0, se sedlo in vozel približujeta drug drugemu. Pri $a = 0$ nastane bifurkacija, ravnovesni točki trčita in izgineta. Narišite fazne portrete za negativen, ničelen in pozitiven a in se prepričajte, da podajo tri kvalitativno različne tipe dinamike.

1.2.2 Hopfova bifurkacija

Ko ima Jacobijeva matrika sistema v ravnovesni točki konjugiran par imaginarnih lastnih vrednosti, govorimo o *Hopfovi bifurkaciji.*

Primer.

$$x'(t) = ax - y - x(x^2 + y^2)$$
$$y'(t) = x + ay - y(x^2 + y^2).$$

Sistem ima za poljuben $a \in \mathbb{R}$ ravnovesno točko $(0,0)$. V tej točki je Jacobijeva matrika

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix},$$

ki ima par kompleksih vrednosti $a \pm i$. Za $a < 0$ je torej $(0,0)$ stabilen fokus, za $a = 0$ je center, za $a > 0$ pa nestabilen fokus.

Da bi bolje razumeli, kaj se dogaja, ko parameter a prečka nič, zapišimo sistem v polarnih koordinatah (r, φ). V polarnih koordinatah ima sistem obliko

$$r' = ar - r^3$$
$$\varphi' = 1.$$

Ker je $\varphi' \neq 0$, je izhodišče edina ravnovesna točka sistema. Za $a < 0$ je torej izhodišče stabilen fokus. Če $a > 0$ je izhodišče nestabilen fokus. Za pozitivne a je $r' = 0$ za $r = \sqrt{a}$, torej je krožnica s polmerom $\sqrt{a}$ periodična rešitev s periodo 2π. Velja še $r' > 0$ za $0 < r < \sqrt{a}$ in $r' > 0$ za $r > \sqrt{a}$. Torej se orbite spiralijo proti periodični orbiti (cikel je stabilen).

V tem primeru govorimo o *superkritični Hopfovi bifurkaciji*: ko parameter a iz negativnega preide preko bifurkacijske točke $a = 0$ v pozitivnega, stabilen fokus preide v nestabilen fokus, okoli nestabilnega fokusa pa nastane stabilen cikel.

Poznamo tudi *subkritično Hopfovo bifurkacijo*, pri kateri nestabilen fokus preko bifurkacijske točke preide v stabilen fokus, okoli stabilnega fokusa pa nastane nestabilen cikel. Subkritično Hopfovo bifurkacijo lahko opazimo v sistemu

$$r' = ar + r^3$$
$$\varphi' = 1.$$

Primer. Obravnavajmo naslednji SIR sistem dinamike nalezljivih bolezni:

$$S'(t) = b - \beta SI - dS$$
$$I'(t) = \beta SI - \gamma I - \alpha I - dI$$
$$R'(t) = \gamma I - dR.$$

Pri tem $S(t)$ označuje velikost populacije dovzetnih ob času t, $I(t)$ označuje velikost populacije okuženih (in tudi kužnih), $R(t)$ pa je velikost populacije ozdravljenih. Pri tem naj bodo vsi parametri modela pozitivni.

V odsotnosti bolezni torej populacija raste s stopnjo rasti b in posamezniki umirajo s *per capita* stopnjo smrtnosti d. Ko je v populaciji prisotna bolezen, se le ta širi ob stiku dovzetnega z okuženim. Število okužb, ki jih en okuženi povzroči na časovno enoto je premo sorazmerno z velikostjo populacije dovzetnih. Bolezen poveča *per capita* stopnjo umrljivosti za α, γ pa je *per capita* stopnja ozdravitve. Po ozdravitvi so posamezniki popolnoma in doživljensko imuni.

V odsotnosti bolezni ima populacija dinamiko $N'(t) = b - dN$, kar pomeni, da se velikost populacije ustali pri ravnovesju $N_0 = \frac{b}{d}$. Denimo, da se bolezen pojavi v populaciji velikosti N_0. Tedaj se bo bolezen širila natanko tedaj, ko $\beta N_0 - (d+\alpha+\gamma) > 0$ oziroma natanko tedaj, ko

$$R_0 = \frac{\beta N_0}{d+\alpha+\gamma} > 1.$$

Parameter R_0 je *osnovno reprodukcijsko število*, t.j. pričakovano število okužb, ki jih en okužen posameznik povzroči v celotni kužni dobi v sicer povsem dovzetni populaciji. Res, okužen posameznik v povprečju živi $\frac{1}{d+\alpha+\gamma}$ časovnih enot in vsako časovno enoto povzroči βN_0 novih okužb.

Analizirajmo lokalno stabilnost ravnovesij sistema in narišimo kvalitativno različne fazne portrete. Ker spremenljivka R ne nastopa v prvih dveh enačbah, se lahko osredotočimo na sistem

$$\begin{aligned} S'(t) &= b - \beta S I - dS \\ I'(t) &= \beta S I - (d+\alpha+\gamma) I. \end{aligned}$$

Sistem ima dve ravnovesji: ravnovesje brez bolezni

$$(\hat{S}, \hat{I}) = (N_0, 0)$$

ter epidemično ravnovesje

$$(\bar{S}, \bar{I}) = \Big(\frac{N_0}{R_0}, \frac{d}{\beta}(R_0 - 1)\Big).$$

Le to je biološko smiselno natanko tedaj, ko je $R_0 > 1$, t.j. ko vsak okužen posameznik v celotni kužni dobi v sicer povsem dovzetni populaciji povzroči več kot eno okužbo.

Jacobijeva matrika sistema je

$$J = \begin{pmatrix} -\beta I - d & -\beta S \\ \beta I & \beta S - (d+\alpha+\gamma) \end{pmatrix}.$$

Torej

$$J(\hat{S}, \hat{I}) = \begin{pmatrix} -d & \star \\ 0 & \beta N_0 - (d+\alpha+\gamma) \end{pmatrix}.$$

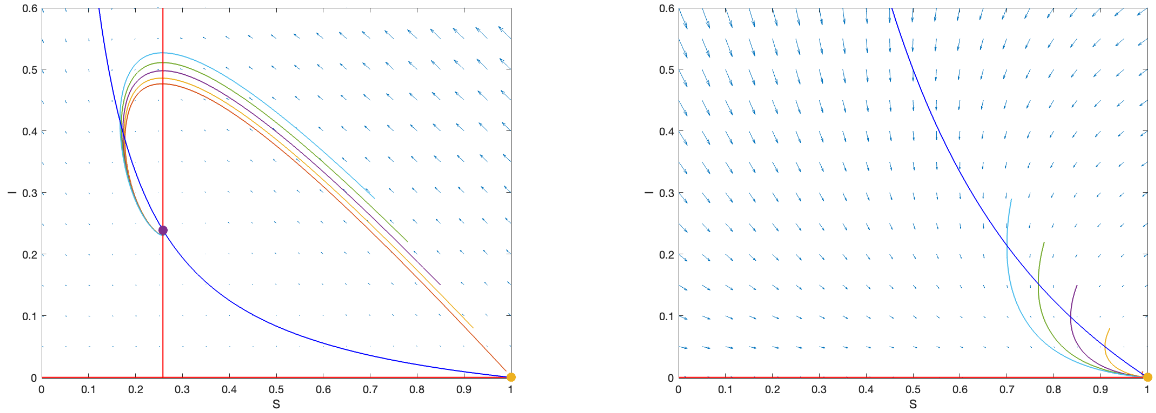
Ravnovesje $(\hat{S}, \hat{I})$ je LAS ko $R_0 < 1$ (t.j. ko $(\bar{S}, \bar{I})$ ni biološko smiselno) in nestabilno (bolj natančno, vozel) ko $R_0 > 1$. Imamo še

$$J(\bar{S}, \bar{I}) = \begin{pmatrix} -\beta \bar{I} - d & -\beta \hat{S} \\ \beta \bar{I} & 0 \end{pmatrix}.$$

Če je $(\bar{S}, \bar{I})$ biološko smiselno, je sled matrike $J(\bar{S}, \bar{I})$ negativna, njena determinantna pa pozitivna. Torej je $J(\bar{S}, \bar{I})$ LAS vedno, ko je biološko smiselno.

Ko osnovno reprodukcijsko število prečka točko $R_0 = 1$, se ravnovesji $(\hat{S}, \hat{I})$ in $(\bar{S}, \bar{I})$ sekata in izmenjata stabilnost. Pri $R_0 = 1$ se torej zgodi transkritična bifurkacija. Za kvalitativno različna fazna porteta glej Sliko 4.

Vprašanje. Za konec se vrnimo k modelu Rosenzweig-MacArthur. Katere bifurkacije nastopijo v tem sistemu in kdaj?



Slika 4: Fazni portet SIR modela z nekaj orbitami za $R_0 > 1$ (levo), in $R_0 < 1$ (desno). Če $R_0 > 1$ bolezen ostane stalno prisotna v populaciji in populacija konvergira k endemičnem ravnovesju. Če je $R_0 < 1$, pa epidemija zamre in se populacija približuje ravnovesju brez bolezni. Na obeh slikah sta spremenljivki izraženi kot deleža N_0.

Literatura

[1] Morris W Hirsch, Stephen Smale, and Robert L Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos.* Academic press, 2012.

[2] Stephen Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, volume 2. Springer Science & Business Media, 2003.