Matematično modeliranje

5. predavanje

UP FAMNIT

Barbara Boldin

Kazalo

1 Periodične rešitve in asimptotska dinamika ravninskih sistemov

V tem predavanju obravnavamo periodične rešitve skalarnih diferencialnih enačb in ravninskih sistemov diferencialnih enačb ter spoznamo nekaj rezultatov, ki govorijo o asimptotski dinamiki takih sistemov.

Definicija. *Naj bo*

$$X'(t) = F(X),$$

kjer $X \in \mathbb{R}^n$ in $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dana funkcija. Periodična rešitev $\varphi(t)$ je nekonstantna rešitev danega sistema, za katero velja $\varphi(t) = \varphi(t+T)$ za nek $T > 0$ in vse t za katere rešitev obstaja. Najmanjši tak T imenujemo perioda dane rešitve.

Pokažimo najprej, da skalarne diferencialne enačbe nimajo periodičnih rešitev.

Izrek. *Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna na $\mathbb{R}$. Enačba $x'(t) = f(x)$ nima periodičnih rešitev.*

Dokaz. Denimo, da obstaja periodična rešitev $\varphi(t)$ in naj bo T perioda te rešitve. Tedaj velja

$$0 \neq \int_t^{t+T} \varphi'(s)^2 ds = \int_t^{t+T} f(\varphi(s))\varphi'(s) ds = \int_{\varphi(t)}^{\varphi(t+T)} f(u) du = 0,$$

kar je protislovje. $\square$

Na prejšnjem predavanju smo videli, da ima sistem Lotka-Volterra za poljubne pozitivne vrednosti parametrov neskončno mnogo periodičnih rešitev, medtem ko ima model Rosenzweig-MacArthur pri določenih vrednostih parametrov eno samo periodično orbito, ki jo imenujemo limitni cikel (in za katero velja, da k njej konvergira za $t \to \infty$ poljubna rešitvena krivulja z izjemo ravnovesij).

V nadaljevanju bomo obravnavali asimptotsko dinamiko ravninskih sistemov (t.j. dinamiko za $t \to \infty$ ali $t \to -\infty$) in spoznali dva kriterija, s pomočjo katerih dokažemo, da določen ravninski sistem nima periodičnih rešitev. Začnimo z nekaj definicijami.

DEFINICIJA. *Naj bo $\varphi(t, X_0)$ rešitev sistema $X'(t) = F(X)$, ki zadošča začetnemu pogoju $\varphi(0, X_0) = X_0$.*

(i) Orbita (oz. trajektorija) z začetno točko v X_0 je množica

$$\Gamma(X_0) = \{X \in \mathbb{R}^n : X = \varphi(t, X_0), t \in \mathbb{R}\}.$$

(ii) Pozitivna orbita $\Gamma^+(X_0)$ z začetno točko v X_0 je množica

$$\Gamma^+(X_0) = \{X \in \mathbb{R}^n : X = \varphi(t, X_0), t \geq 0\}.$$

(iii) Negativna orbita $\Gamma^-(X_0)$ z začetno točko v X_0 je množica

$$\Gamma^-(X_0) = \{X \in \mathbb{R}^n : X = \varphi(t, X_0), t \leq 0\}.$$

Definirajmo še dve limitni množici.

DEFINICIJA. *(i) α-limitna množica, $\alpha(X_0)$, je množica točk, h kateri konvergira negativna orbita*

$$X \in \alpha(X_0) \iff \exists \{t_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim_{n\to\infty} t_n = -\infty : \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, X_0) = X.$$

(ii) ω-limitna množica, $\omega(X_0)$, je množica, h kateri konvergira pozitivna orbita

$$X \in \omega(X_0) \iff \exists \{t_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim_{n\to\infty} t_n = \infty : \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, X_0) = X.$$

PRIMER. (i) Če je $\bar{X}$ iravnovesna točka, potem je $\alpha(\bar{X}) = \{\bar{X}\} = \omega(\bar{X})$.

(ii) Za lokalno asimptotsko stabilno ravnovesje $\bar{X}$ je $\omega(X_0) = \{\bar{X}\}$ za začetne vrednosti X_0 blizu $\bar{X}$.

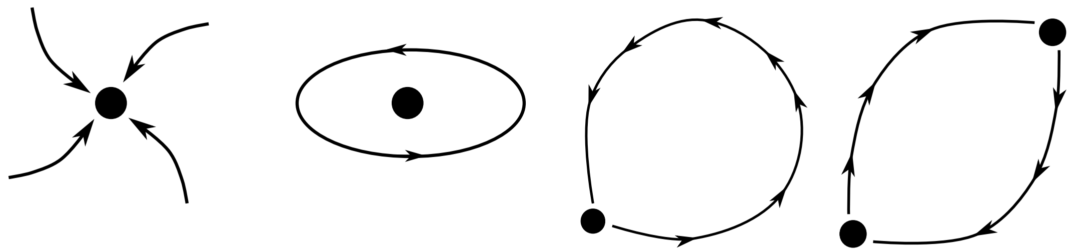
1.1 Asimptotska dinamika ravninskih sistemov

Naj bo

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x, y) \\ y'(t) &= g(x, y). \end{aligned} \tag{1}$$

Imamo

IZREK (Poincare - Bendixon). *Naj bo $\Gamma^+(X_0)$ pozitivna orbita sistema* (1)*, ki je vsebovana v neki kompaktni (t.j. zaprti in omejeni) množici v $\mathbb{R}^2$. Če $\omega(X_0)$ ne vsebuje nobene ravnovesne točke sistema* (1)*, potem velja ena od naslednjih možnosti:*



Slika 1: (a) ravnovesna točka, (b) a periodična orbita, (c) a homoklinična orbita, (d) a heteroklinična orbita

(i) $\Gamma^+(X_0)$ *je periodična orbita (torej* $\Gamma^+(X_0) = \omega(X_0)$*) ali*

(ii) $\omega(X_0)$ *je periodična orbita.*

IZREK (Trihotomoja Poincare-Bendixon). *Naj bo* $\Gamma^+(X_0)$ *pozitivna orbita sistema* (1)*, ki je vsebovana v neki kompaktni (t.j. zaprti in omejeni) množici v* $B \subset \mathbb{R}^2$*. Naj* B *vsebuje kvečjemu končno mnogo ravnovesnih točk sistema* (1)*. Tedaj velja ena od naslednjih možnosti:*

(i) $\omega(X_0)$ *je ravnovesna točka,*

(ii) $\omega(X_0)$ *je periodična orbita,*

(iii) $\omega(X_0)$ *vsebuje končno mnogo ravnovesij ter končno množico orbit* $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\}$*, za katere sta* $\alpha-$ *in* $\omega-$*limitni množici katera od teh ravnovesij.*

Za dokaz teh trditev glej [1].

OPOMBA.

- Za primer (ii): če $\Gamma^+(X_0) \neq \omega(X_0)$ potem $\omega(X_0)$ imenujemo *limitni cikel* (glej model Rosenzweig-MacArthur).
- V primeru (iii) limitne množice imenujemo *ciklični grafi*. *Homoklinična* orbita "povezuje" ravnovesje s samim seboj, *heteroklinična* orbita "povezuje" različna ravnovesja (glej Sliko 1).
- Periodična orbita vedno obkroža vsaj eno ravnovesje. Če obkroža natanko eno ravnovesje, potem to ravnovesje ne more biti sedlo.

Preden predstavimo dva rezultata, ki obravnavata (ne)obstoj periodičnih orbit v ravninskih sistemih potrebujemo dve definiciji.

DEFINICIJA. *Množica* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *je povezana s potmi, če za poljubna* $x, y \in D$ *obstaja zvezna preslikava* $p : [0,1] \to D$ *za katero velja* $p(0) = x$ *in* $p(1) = y$*.*

DEFINICIJA. *Množica* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *je enostavno povezana, če je povezana s potmi in za poljubni dve poti* $p, q : [0,1] \to D$ *z* $p(0) = q(0)$ *in* $p(1) = q(1)$ *obstaja zvezna preslikava* $H : D \times [0,1] \to D$*, za katero* $H(x,0) = p(x)$ *in* $H(x,1) = q(x)$ *za vsak* $x \in D$*.*

Izrek (Bendixon). *Naj bo dan sistem* (1) *in naj bo* D *enostavno povezana množica v* $\mathbb{R}^2$. *Če*

$$div(f,g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

ni identično enaka nič na D *in na* D *ne spremeni predznaka, potem sistem* (1) *v množici* D *nima periodičnih rešitev.*

Dokaz. Trditev dokazujemo s protislovjem. Denimo da sistem (1) ima periodično rešitev C v D in naj S označuje notranjost C. Iz Greenove formule tedaj sledi

$$\int_C (f(x,y)dy - g(x,y)dx) = \iint_S (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y})dxdy.$$

Desna stran je neničelna saj $div(f,g)$ ni identično enaka 0 in ne spremeni predznaka v D . Ampak iz (1) sledi

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)},$$

kar da ničelno levo stran. □

Naslednja trditev je posplošitev Bendixonovega kriterija.

Izrek (Dulac). *Naj bo dan sistem* (1) *in naj bo* D *enostavno povezana množica v* $\mathbb{R}^2$. *Če obstaja realna* C^1 *funkcija* $B(x,y)$ *na* D *za katero*

$$div(Bf, Bg) = \frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y}$$

ni identično enaka nič na D *in v* D *ne spremeni predznaka, potem sistem* (1) *v množici* D *nima periodičnih rešitev.*

Dokaz. Analogno kot dokaz prejšnje trditve. □

Primer. Kaj lahko povemo o periodičnih rešitvah linearnih sistemov

$$x'(t) = ax + by$$
$$y'(t) = cx + dy$$

v $\mathbb{R}^2$?

Za $f(x,y) = ax + by$ in $g(x,y) = cx + dy$ imamo $div(f,g) = a + d$. Če $a + d \neq 0$, potem po Bendixonovem kriteriju sistem nima periodičnih rešitev v $\mathbb{R}^2$.

Če $a + d = 0$, potem Bendixonovega kriterija ne moremo uporabiti. Izkaže se, da v primeru $a + d = 0$ sistem v določenih primerih ima, v drugih pa nima periodičnih rešitev. Za $a = 1, d = -1$ in $b = c = 0$ imamo denimo

$$x'(t) = x$$
$$y'(t) = -y,$$

kar ima rešitvi $x(t) = x(0)e^t$ ter $y(t) = y(0)e^{-t}$. V tem primeru periodičnih rešitev ni.

Za $a = d = 0$ ter $b = 1, c = -1$ pa imamo

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= y \\
y'(t) &= -x,
\end{aligned}
$$

kar ima rešitev $x^2 + y^2 = C$ za neko konstanto C. Rešitvene krivulje so torej sklenjene množice (t.j. dinamika je periodična).

Primer. Analizirajmo enostaven model tekmovanja dveh populacij

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= r_1 x_1 \frac{K_1 - x_1 - \beta_{12} x_2}{K_1} \\
x_2'(t) &= r_2 x_2 \frac{K_2 - x_2 - \beta_{21} x_1}{K_2}.
\end{aligned}
$$

Vsaka od populacij $i = 1, 2$ ima v osami logistično rast z nosilno kapaciteto K_i in osnovno stopnjo rasti r_i. Ko sta prisotni obe populaciji, je zaradi tekmovanja rast vsake od populacij manjša: parameter β_{ij}/K_i opisuje negativen učinek j-te populacije na i-to.

Pokažimo najprej, da sistem v množici

$$
D = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0\}
$$

nima periodičnih rešitev. Če najprej poskusimo z Bendixonovim kriterijem ugotovimo, da $div(f, g)$ spremeni znak v D. Definirajmo

$$
B(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}
$$

in $f(x_1, x_2) = r_1 x_1 \frac{K_1 - x_1 - \beta_{12} x_2}{K_1}$, $g(x_1, g_2) = r_2 x_2 \frac{K_2 - x_2 - \beta_{21} x_1}{K_2}$. Tedaj je

$$
div(f, g) = -\frac{r_1}{K_1 x_2} - -\frac{r_2}{K_2 x_1} < 0
$$

v D. Iz Dulacovega kriterija tedaj sledi, da sistem nima periodičnih orbit v D.

Model ima štiri ravnovesne točke:

(i) $(0, 0)$,

(ii) $(K_1, 0)$,

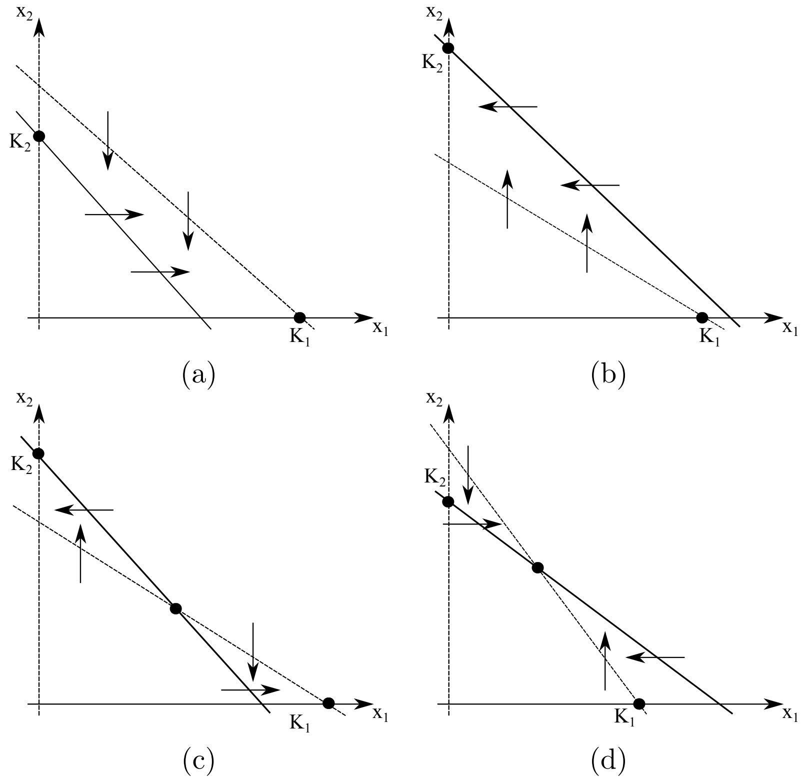
(iii) $(0, K_2)$,

(iv) $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{K_1 - \beta_{12} K_2}{1 - \beta_{12} \beta_{21}}, \frac{K_2 - \beta_{21} K_1}{1 - \beta_{12} \beta_{21}}\right)$. Le to je biološko smiselno natanko tedaj, ko je

   (a) $1 - \beta_{12} \beta_{21} > 0$, $K_1 - \beta_{12} K_2 > 0$ in $K_2 - \beta_{21} K_1 > 0$ ali

   (b) $1 - \beta_{12} \beta_{21} < 0$, $K_1 - \beta_{12} K_2 < 0$ in $K_2 - \beta_{21} K_1 < 0$

   kar je ekvivalentno



Slika 2: (a) $\beta_{21}K_1 > K_2$ in $K_1 > \beta_{12}K_2$, (b) $\beta_{21}K_1 < K_2$ in $K_1 < \beta_{12}K_2$, (c) $\beta_{21}K_1 < K_2$ in $K_1 > \beta_{12}K_2$, (d) $\beta_{21}K_1 > K_2$ in $K_1 < \beta_{12}K_2$

(a) $K_1 - \beta_{12}K_2 > 0$ in $K_2 - \beta_{21}K_1 > 0$ ali

(b) $K_1 - \beta_{12}K_2 < 0$ in $K_2 - \beta_{21}K_1 < 0$.

Jacobijeva matrika ima obliko

$$J = \begin{pmatrix} r_1 \frac{K_1 - x_1 - \beta_{12}x_2}{K_1} - \frac{r_1 x_1}{K_1} & -\frac{r_1\beta_{12}x_1}{K_1} \\ -\frac{r_2\beta_{21}x_2}{K_2} & r_2 \frac{K_2 - x_2 - \beta_{21}x_1}{K_2} - \frac{r_2 x_2}{K_2} \end{pmatrix}.$$

Sledi

(i)

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix},$$

torej je $(0,0)$ nestabilen vozel.

(ii)

$$J(K_1,0) = \begin{pmatrix} -r_1 & * \\ 0 & r_2 \frac{K_2 - \beta_{21}K_1}{K_2} \end{pmatrix},$$

torej je $(K_1, 0)$ LAS kadar $K_2 - \beta_{21}K_1 < 0$ in sedlo kadar $K_2 - \beta_{21}K_1 > 0$.

(iii)

$$J(0,K_2) = \begin{pmatrix} r_1\frac{K_1-\beta_{12}K_2}{K_1} & 0 \\ * & -r_2 \end{pmatrix},$$

torej je $(0,K_2)$ LAS kadar $K_1-\beta_{12}K_2<0$ in sedlo kadar $K_1-\beta_{12}K_2>0$.

(iv)

$$J(x_1^*,x_2^*) = \begin{pmatrix} -\frac{r_1x_1^*}{K_1} & -\frac{r_1\beta_{12}x_1^*}{K_1} \\ -\frac{r_2\beta_{21}x_2^*}{K_2} & -\frac{r_2x_2^*}{K_2} \end{pmatrix}.$$

Kadar je (x_1^*,x_2^*) pozitivno ima matrika $J(x_1^*,x_2^*)$ negativno sled. Determinatna pa je pozitivna natanko tedaj, ko je $1-\beta_{12}\beta_{21}>0$. Če je (x_1^*,x_2^*) biološko smiselno in je $1-\beta_{12}\beta_{21}<0$, potem je T_4 sedlo. V tem primeru sta tako $(K_1,0)$ kot $(0,K_2)$ LAS. Na dolgi rok v tem primeru preživi le ena od populacij, katera pa je odvisno od začetnega pogoja (glej fazne portrete).

Štirje kvalitativno različni fazni portreti so na Sliki 2.

Literatura

[1] Morris W Hirsch, Stephen Smale, and Robert L Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos.* Academic press, 2012.