

# 知识精炼（一）



主讲人：邓哲也



## HDU 4135 Co-prime

给出  $A$ ,  $B$ ,  $N$ , 求区间  $[A, B]$  中有几个数与  $N$  互质。

$$1 \leq A \leq B \leq 10^{15}, 1 \leq N \leq 10^9$$

样例:

1 10 2 (输出: 5)

3 15 5 (输出: 10)

## HDU 4135 Co-prime

来考虑一个简化的问题：

$[1, 100]$  有几个数与 2 互质？

$100 / 2 = 50$ ，有 50 个数是 2 的倍数，因此有  $100 - 50 = 50$  个数与 2 互质。

## HDU 4135 Co-prime

再来考虑一个简化的问题：

$[1, 100]$  有几个数与 4 互质？

4 的质因数分解是  $2^2$ ，因此只要考虑与 2 互质的即可。

$100 / 2 = 50$ ，有 50 个数是 2 的倍数，因此有  $100 - 50 = 50$  个数与 2 互质。

## HDU 4135 Co-prime

再来考虑一个简化的问题：

$[1, 100]$  有几个数与 6 互质？

6 的质因数分解是  $2 \times 3$ 。

$100 / 2 = 50$ ，有 50 个数是 2 的倍数，因此有 50 个数与 2 不互质。

$100 / 3 = 33$ ，有 33 个数是 3 的倍数，因此有 33 个数与 3 不互质。

可以注意到里面有  $100 / 6 = 16$  个数是 6 的倍数，被计算了两次。

## HDU 4135 Co-prime

因此，总共有  $50 + 33 - 16 = 67$  个数与 6 不互质。

$[1, 100]$  中与 6 互质的数总共有  $100 - 67 = 33$  个。

## HDU 4135 Co-prime

在回到这题来，先求出  $N$  的质因数分解

只考虑  $N$  的质因子即可，不用考虑幂次。

枚举这些质因子的集合，计算  $[A, B]$  中有几个数是他们的倍数。

如果质因子集合大小是奇数，那么答案要减去这么多。

如果质因子集合大小是偶数，那么答案要加上这么多。

可以发现这其实等价于莫比乌斯函数。

## HDU 4135 Co-prime

```
tot = 0;
N = n;
for (int i = 2; i * i <= N; i++) {
    if (n % i == 0) {
        factor[++ tot] = i;
        while (n % i == 0) n /= i;
    }
}
if (n > 1) factor[++ tot] = n;
```



## HDU 4135 Co-prime

枚举质因子的集合这一步可以用 dfs 来做。

假设当前枚举的数是  $k$ 。

$[A, B]$  中包含的  $k$  的倍数的个数显然就是

$$\left\lfloor \frac{B}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A-1}{k} \right\rfloor$$

由于  $N$  不会有超过 9 个不同的质因子。时间复杂度可以认为是  $2^9$ （枚举这么多个集合）

## HDU 4135 Co-prime

可以注意到决定加还是减的过程就是计算莫比乌斯函数。

可以尝试用莫比乌斯函数的方法试试看。

下节课再见