

矩阵乘法



主讲人：邓哲也



矩阵

一个 $n \times m$ 的矩阵可以看做一个 n 行 m 列的二维数组。

$$\begin{pmatrix} a[1][1] & \cdots & a[1][m] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a[n][1] & \cdots & a[n][m] \end{pmatrix}$$

矩阵加法

两个大小相同的矩阵可以相加/减。

只要把同一个位置的两个数相加/减即可。

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{ij} + b_{ij} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 6 & -7 & 9 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 7 \\ 5 & -10 & 8 \end{bmatrix} \\ A - B &= \begin{bmatrix} a_{ij} - b_{ij} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

矩阵乘以数字

矩阵可以乘上一个数字。

只要把矩阵中的每个数都乘上那个数字即可。

$$kA = [ka_{ij}] = (-1) \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 6 & -7 & 9 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -6 & 7 & -9 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

矩阵乘法

一个大小为 $n \times m$ 和一个大小为 $m \times r$ 的矩阵可以相乘。

得到一个大小为 $n \times r$ 的矩阵。

The diagram illustrates the multiplication of two matrices. The first matrix is $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ and the second matrix is $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$. The result matrix is $\begin{pmatrix} 70 & 80 & 90 \\ 158 & 184 & 210 \end{pmatrix}$. Colored boxes and arrows show the calculation of the first row of the result matrix: the first column (1, 4, 7, 10) is boxed in pink, the second column (2, 5, 8, 11) in blue, and the third column (3, 6, 9, 12) in yellow. Arrows connect the first row of the first matrix to the first row of the result matrix: pink from 1 to 70, blue from 2 to 80, and yellow from 3 to 90.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 80 & 90 \\ 158 & 184 & 210 \end{pmatrix}$$

矩阵乘法

如果第一个矩阵的列数不等于第二个矩阵的行数，他们就无法相乘。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \text{ is not defined}$$

矩阵乘法

试一试: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, 求 AB

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -4 & 24 \end{bmatrix}$$

矩阵乘法

试一试: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, 求 BA

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 1 & 17 \\ -1 & 3 & -18 \\ 2 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

矩阵乘法不满足交换律

试一试: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -4 & 24 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 15 & 1 & 17 \\ -1 & 3 & -18 \\ 2 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

矩阵乘法**不满足**交换律!

矩阵乘法代码实现

给定一个大小为 $n \times m$ 的矩阵 $A[n][m]$

和一个大小为 $m \times r$ 的矩阵 $B[m][r]$

```
for (int k = 1; k <= m; k ++)
```

```
    for (int i = 1; i <= n; i ++)
```

```
        for (int j = 1; j <= r; j ++)
```

```
            C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];
```

时间复杂度: $O(n^3)$

下节课再见