生成树及最小生成树

主讲人：邓哲也

大纲

最小生成树的定义

最小生成树的算法

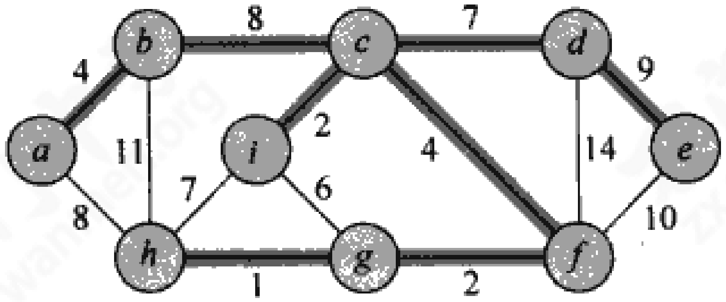
最小生成树的性质

生成树

生成树(Spanning Tree)：

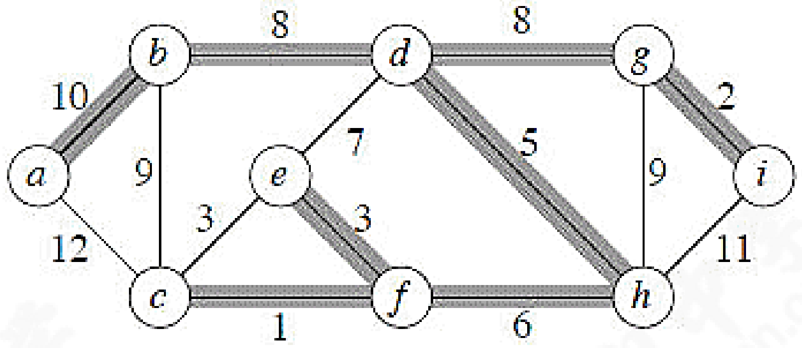
无向连通图G的一个子图如果是一棵包含G的所有顶点的树，则该子图称为G的生成树。生成树是连通图的极小连通子图。

包含n个顶点的连通图，其生成树有n个顶点、n-1条边。



最小生成树

最小生成树(Minimum Spanning Tree)：对无向连通图的生成树，各边的权值总和称为生成树的权，权最小的生成树称为最小生成树。



构造最小生成树的准则：

1. 必须只使用该网络中的边来构造最小生成树
2. 必须使用n-1条边来连接网络中的n个顶点
3. 不能使用产生回路的边

最小生成树的算法

- Kruskal算法
- Prim算法
- Boruvka算法

- 共同的策略：逐步求解！

最小生成树的算法

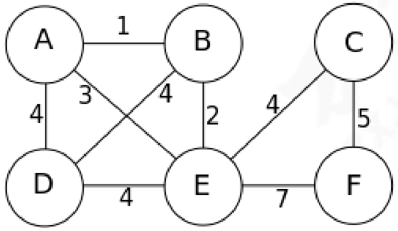
- 设一个无向连通图G(V,E)，顶点集合V中有n个顶点。
- 最初先构造一个包括全部n个顶点和0条边的森林 Forest={T0,T1,…Tn-1}。
- 之后每一步向Forest中加入一条边，它应当是一端在Forest中的某一棵树Ti上，而另一端不在Ti上的所有边中具有最小权值的边。
- 由于边的加入，使Forest中的某两棵树合并为一棵。
- 经过n-1步，最终得到一棵有n-1条边的最小生成树。

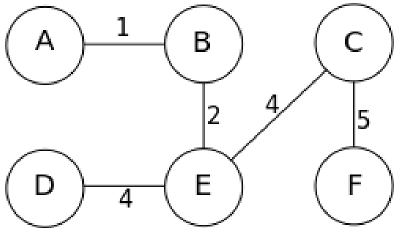
最小生成树的性质

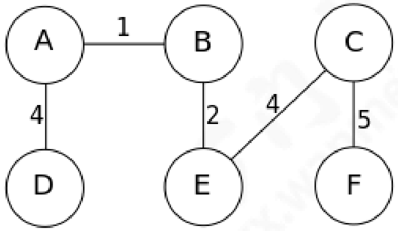
最小生成树可能会有多个。

例如，当图的每个边权都相同。

若图中的每一条边的权值都互不相同，那么最小生成树将只有一个。







最小生成树的性质

对于连通图中的任意一个环C，如果C中有边e的权值大于该环中任意一个其它的边的权值，那么这个边不会是最小生成树中的边。

证明：

假设e属于最小生成树T1，那么将e删去会使得T1变为两个树。

因为环C必然还存在一条边f可以连接T1和T2，且由于f<e，

生成树T2权值更小，与T1是最小生成树矛盾。

下节课再见