知识精炼（一）

主讲人：邓哲也

HDU 1695 GCD

给出n，m，k，求有多少个无序数对(x， y）满足 $x \in [1,n]$，$y \in [1,m]$，且 $\gcd(x, y) == k$。

$n,m,k \leqslant 100000$

例如 n = 3， m = 5， k = 1

答案是 9 ： (1， 1)，(1， 2)，(1， 3)，(1， 4)，(1， 5)，(2， 3)，(2， 5)，(3， 4)，(3， 5).

HDU 1695 GCD

首先发现题目可以转化为：

求有多少个数对(x, y) 满足 $x \in [1,n/k]$，$y \in [1,m/k]$，

且 $gcd(x, y) == 1$。

令 $n' = n / k$, $m' = m / k$。

HDU 1695 GCD

我们可以先不考虑无序数对的问题，先算有序数对

问题可以写成：

$$\sum_{i=1}^{n'}\sum_{j=1}^{m'}[gcd(i,j)=1]$$

联系一个式子：

$$[n=1]=\sum_{i|n}\mu(i)$$

HDU 1695 GCD

问题可以写成：

$$\sum_{i=1}^{n\prime}\sum_{j=1}^{m\prime}\sum_{d|gcd(i,j)}\mu(d)$$

可以进一步写成：

$$\sum_{i=1}^{n\prime}\sum_{j=1}^{m\prime}\sum_{d|i,d|j}\mu(d)$$

HDU 1695 GCD

把 d 移到最前面来

$$\sum_{d} \mu(d) \sum_{i=1}^{n'/d} \sum_{j=1}^{m'/d} 1$$

进一步等价于：

$$\sum_{d} \mu(d) \lfloor n'/d \rfloor \lfloor m'/d \rfloor$$

HDU 1695 GCD

注意到$\lfloor n'/d \rfloor \lfloor m'/d \rfloor$这个式子，连续一段的取值是相同的。

假设 n = 10, m = 12

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lfloor n'/d \rfloor$	10	5	3	2	2	1	1	1	1	1
$\lfloor m'/d \rfloor$	12	6	4	3	2	2	1	1	1	1

HDU 1695 GCD

再看 $n = 100$

$d = 1, \ n / d = 100$

$d = 2, \ n / d = 50$

$d = 3, \ n / d = 33$

$d = 4, \ n / d = 25$

$d = 5, \ n / d = 20$

……

HDU 1695 GCD

d = 16，n / d = 6

d = 17，n / d = 5

d = 18，n / d = 5

d = 19，n / d = 5

d = 20，n / d = 5

d = 21，n / d = 4

……

HDU 1695 GCD

d ∈ [21, 25], n / d = 4

d ∈ [26, 33], n / d = 3

形式化的来说，n / d = k 时:

$$d \in \left[\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor + 1, \left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right]$$

HDU 1695 GCD

对于 n 来说，n / d 一共有 O(sqrt(n)) 段相同的值。

对于 n, m 来说，(n/d)(m/d) 一共也有 O(sqrt(n)) 段相同的值。

这样我们就可以求出 μ 的前缀和，相同的一段值一起算。

从单次询问 O(n) 优化到了 单次询问O(sqrt(n))

最后不要忘记把算了两次的数对减掉。

HDU 1695 GCD

首先用线性筛处理出 μ 的前缀和数组 miu[n]

```
n /= k;
m /= k;
if (n > m) swap(n, m);
for (int i = 1;i <= n;i ++){
      int j = min(n / (n / i), m / (m / i));
      ans += (miu[j] - miu[i - 1]) * (n / i) * (m / i);
      i = j;
}
```

HDU 1695 GCD

减去多算的。

```
for (int i = 1;i <= n;i ++){
      int j = min(n / (n / i);
      ans2 += (miu[j] - miu[i - 1]) * (n / i) * (n / i);
      i = j;
}
```

ans2 / 2 就是多算的部分，减去即可。

下节课再见