最近公共祖先
——真题演练

主讲人：邓哲也

大纲

- LCA的应用
- 真题演练——NOIP2013

LCA的应用

- 查询树上两点的距离
- 更一般地，查询树上两点之间的路径上的信息：
  - 边权之和
  - 边权最值

真题演练——NOIP2013 提高组 Day1 T3

- 一个n个点m条边的图，每条边有边权。
- q次询问，每次询问两点之间的路径上边权的最小值的最大值。
- $n < 10,000$，$m < 50,000$，$q < 30000$

真题演练——NOIP2013 提高组 Day1 T3

- 目标：给定两点x和y之后，找一条x→y的路径，使得路径上最小值越大越好。

- x和y在最大生成树上的路径就是最优路径

真题演练——NOIP2013 提高组 Day1 T3

- 最大生成树的性质：给定两个点x和y，x和y在最大生成树上的路径的边权最小值一定是所有x到y的路径上的边权最小值中最大的。
- 证明？
- 反证法。如果不是，令x和y在最大生成树上的路径中边权最小的那条边为e，存在一条不全在树上的x到y的路径l，这条路径上每条边的边权都大于e的边权。
- 那我们断开x和y这条边，树变成了两个连通块。
- 此时路径l上一定有一条边的两个端点分别属于两个连通块，连接这条边，我们就得到了一个比原来的生成树更大的生成树，矛盾。
- 命题成立。

真题演练——NOIP2013 提高组 Day1 T3

- 于是我们先用Kruskal算法在O(m log m)的时间复杂度下求出最大生成树，然后接下来的询问都在树上操作即可。
- 问题变成了：每次查询树上一条路径的最小边权。

- 考虑倍增算法。我们不仅维护up[u][k]，还维护val[u][k]，表示从u开始往上爬2^k条边，遇到的最小值。
- 每次倍增向上跳的时候都记录下这次经过的最小值即可。这部分的时间复杂度是O((n + q) log n)。
- 至此问题完美解决。

下节课再见