知识精炼（二）

主讲人：邓哲也

Codeforces 938E. Max History

给定一个长度为 n 的数组 a，我们定义一个函数 $f(a)$

一开始 $f(a) = 0$, $M = 1$

对于 $2 \leqslant i \leqslant n$:

　　如果 $a[M] < a[i]$:

　　　　$f(a) = f(a) + a[M]$

　　　　$M = i$

现在对于 a 的 $n!$ 个全排列都被 f 函数作用一次，求 f 函数之和。

$n \leqslant 10^6$, $1 \leqslant a[i] \leqslant 10^9$

Codeforces 938E. Max History

样例输入

3

1 1 2

样例输出

4

解释：

当 p = [1,2,3], [1,3,2], [2,1,3], [2,3,1] 时

f(a) = 1

当 p = [3,1,2], [3,2,1] 时，f(a) = 0

Codeforces 938E. Max History

对于这类对 n! 种排列都要考虑的题，我们肯定不能枚举所有的排列。

能做的就是对 n 个元素，计算他们在所有全排列中对答案的贡献，累加起来即可。

对于这题，就要求出对于每个 a[i]，会在最终的答案里被加几次。

Codeforces 938E. Max History

一个 a[i] 什么时候会被加入答案呢。

✓ a[1], a[2], …, a[i-1] 必须都严格小于 a[i].

✓ a[i+1], a[i+2], …, a[n] 中一定要有一个数大于 a[i].

满足这两个条件 a[i] 才会被加入答案。

设小于 a[i] 的数有 b[i] 个。

那么一共有多少种排列呢？

$$\sum_{k=1}^{b[i]+1} \binom{b[i]}{k-1} (k-1)!\,(n-k)!$$

Codeforces 938E. Max History

那么答案自然就是：

$$\sum_{i=1}^{n} a[i] \sum_{k=1}^{b[i]+1} \binom{b[i]}{k-1} (k-1)!\,(n-k)!$$

可惜这么做是 $O(n^2)$ 的。

Codeforces 938E. Max History

我们可以试着打开组合数的式子，看看能否化简：

$$\sum_{i=1}^{n} a[i] \sum_{k=1}^{b[i]+1} \frac{b[i]!}{(k-1)!\,(b[i]-k+1)!}(k-1)!\,(n-k)!$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a[i] \sum_{k=1}^{b[i]+1} \frac{b[i]!}{(b[i]-k+1)!}(n-k)!$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a[i]b[i]! \sum_{k=1}^{b[i]+1} \frac{(n-k)!}{(b[i]-k+1)!}$$

Codeforces 938E. Max History

$$= \sum_{i=1}^{n} a[i]b[i]! \sum_{k=1}^{b[i]+1} \frac{(n-k)!}{(b[i]-k+1)!}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a[i]b[i]!\,(n-b[i]-1)! \sum_{k=1}^{b[i]+1} \frac{(n-k)!}{(n-b[i]-1)!\,(b[i]-k+1)!}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a[i]b[i]!\,(n-b[i]-1)! \sum_{k=1}^{b[i]+1} \binom{n-k}{n-b[i]-1}$$

Codeforces 938E. Max History

$$= \sum_{i=1}^{n} a[i]b[i]!\,(n - b[i] - 1)! \sum_{k=1}^{b[i]+1} \binom{n-k}{n-b[i]-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a[i]b[i]!\,(n - b[i] - 1)! \binom{n}{n-b[i]}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a[i]b[i]!\,(n - b[i] - 1)! \frac{n!}{(n-b[i])!\,b[i]!}$$

Codeforces 938E. Max History

$$= \sum_{i=1}^{n} a[i]b[i]!\,(n - b[i] - 1)!\,\frac{n!}{(n - b[i])!\,b[i]!}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a[i]\,\frac{n!}{n - b[i]}$$

至此，这一步的计算复杂度变为了 O(n)

瓶颈则是求出 b 数组需要排序，时间复杂度 O(n log n)

下节课再见