多重集的组合

主讲人：邓哲也

多重集合的组合

如果 S 是一个多重集，那么 S 的一个 r-组合是 S 的 r 个元素的一个无序选择。

如果 S 的元素总个数是 n （包括计算重复元素），那么 S 只有一个 n-组合；如果 S 含有 k 种不同类型的元素，那么就存在 S 的 k 个1-组合。

多重集合的组合

令S为具有k种类型元素的一个多重集，每种元素均具有无限的重复数。则S的r-组合的个数为：

$$\binom{r+k-1}{r}=\binom{r+k-1}{k-1}$$

这里的个数即为 $x_1+x_2+...+x_k = r$ 的非负整数解的个数。

运用隔板法可以求得。

隔板法

证明：$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$ 的非负整数解的个数为

$$\binom{r+k-1}{r} = \binom{r+k-1}{k-1}$$

多重集合的组合

【例】一家面包房生产 9 种炸面包圈，如果一盒内装有 12 个面包圈，那么你能买到多少种不同的盒装面包圈？

【解】

$$\binom{12+9-1}{12}=\binom{20}{12}$$

多重集合的组合

【例】 S 集合里 a, b, c, d 各有 10 个，求有几个 10-组合满足a, b, c, d都至少出现一次。

【解】$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ 的正整数解的个数。

$$\binom{10-1}{4-1} = \binom{9}{3}$$

多重集合的组合

【例】方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ 的整数解有多少？其中：$x_1 >= 3$，$x_2 >= 1$，$x_3 >= 0$，$x_4 >= 5$

【解】令 $y_1 = x_1 - 3$，$y_2 = x_2 - 1$，$y_3 = x_3$，$y_4 = x_4 - 5$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$

$$\binom{11+4-1}{11} = \binom{14}{11}$$

下节课再见