矩阵乘法

主讲人：邓哲也

矩阵

一个 n×m 的矩阵可以看做一个 n 行 m 列的二维数组。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}[\mathbf{1}][\mathbf{1}] & \cdots & \boldsymbol{a}[\mathbf{1}][\boldsymbol{m}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}][\mathbf{1}] & \cdots & \boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}][\boldsymbol{m}] \end{pmatrix}$$

矩阵加法

两个大小相同的矩阵可以相加/减。

只要把同一个位置的两个数相加/减即可。

$$A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$$

$$A-B=\left[a_{ij}-b_{ij}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 6 & -7 & 9 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 7 \\ 5 & -10 & 8 \end{bmatrix}$$

矩阵乘以数字

矩阵可以乘上一个数字。

只要把矩阵中的每个数都乘上那个数字即可。

$$kA = \left[ka_{ij} \right]$$

$$= (-1)\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 6 & -7 & 9 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -6 & 7 & -9 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

矩阵乘法

一个大小为 n × m 和一个大小为 m × r 的矩阵可以相乘。

得到一个大小为 n × r 的矩阵。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 80 & 90 \\ 158 & 184 & 210 \end{pmatrix}$$

矩阵乘法

如果第一个矩阵的列数不等于第二个矩阵的行数，他们就无法相乘。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{is not defined}$$

矩阵乘法

试一试：$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 3 & -5\\ -2 & 4\end{bmatrix}$，求 AB

$$\begin{bmatrix}1 & 6\\ 3 & -5\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}8 & 9\\ -4 & 24\end{bmatrix}$$

矩阵乘法

试一试：$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$，求 BA

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 & 1 & 17 \\ -1 & 3 & -18 \\ 2 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

矩阵乘法不满足交换律

试一试：$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 3 & -5\\ -2 & 4\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}8 & 9\\ -4 & 24\end{bmatrix}$，$BA=\begin{bmatrix}15 & 1 & 17\\ -1 & 3 & -18\\ 2 & -2 & 14\end{bmatrix}$

矩阵乘法不满足交换律！

矩阵乘法代码实现

给定一个大小为 $n \times m$ 的矩阵 A[n][m]

和一个大小为 $m \times r$ 的矩阵 B[m][r]

```
for (int k = 1;k <= m;k ++)
    for (int i = 1;i <= n;i ++)
        for (int j = 1;j <= r;j ++)
            C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];
```

时间复杂度：$O(n^3)$

下节课再见