

最近公共祖先 ——知识精炼（二）



主讲人：邓哲也



习题精讲——HDU3830

- 题目描述
 - 在数轴上有三个互不相等的数，对于两个数 x 和 y ， x 可以移动到它关于 y 对称的位置 x' ，当且仅当从 x 到 x' 这段区间内没有第三个数。
 - 问状态 a, b, c 能否经过若干次移动变成状态 x, y, z 。若能请输出最少移动次数。
- 数据范围
 - $a, b, c, x, y, z \in (-10^9, 10^9)$
- 样例
 - 输入
 - 1 2 3 0 3 5
 - 输出
 - 2

习题精讲——HDU3830

- 对于一个状态 (a, b, c) ($a < b < c$)
- 最多只有3种转移
 1. b 关于 a 对称: $(a, b, c) \rightarrow (2a - b, a, c)$
 2. b 关于 c 对称: $(a, b, c) \rightarrow (a, c, 2c - b)$
 3. a 或 c 关于 b 对称, 分情况讨论:
 - 若 $c - b = b - a$, 不存在这种情况
 - 若 $c - b > b - a$, $(a, b, c) \rightarrow (b, 2b - a, c)$
 - 若 $c - b < b - a$, $(a, b, c) \rightarrow (a, 2b - c, b)$

习题精讲——HDU3830

- 对于前两种转移：看作左儿子和右儿子
- 而两边的点向中间转移，可以看作是往父节点走。
- 当 $b - a = c - b$ 时，就是走到了根节点了。
- 所有的状态形成了无数颗无限的有根二叉树。
- 判断两个状态是否可转化，我们只需要让他们都往父节点走，一直走到根。
- 比较两个状态的根节点是否相等即可。

习题精讲——HDU3830

- 给定一个状态 (a, b, c) ($a < b < c$)，怎么快速得到它的根节点呢？
- 假设 $b - a < c - b$ ，那么我们一定是让最左边的点一直往右跳，直到不能跳为止；
- 然后让右边的点一直往左跳，知道不能跳为止；交替循环，直到左右两边的点都不能跳，就走到了根节点。
- 比如 $1\ 3\ 10 \rightarrow 3\ 5\ 10 \rightarrow 5\ 7\ 10 \rightarrow 7\ 9\ 10 \rightarrow 7\ 8\ 9$ 。
- 怎么算最左边的点往右跳几次呢？
- 经过推导就可以得到 $(c - b - 1) / (b - a)$ 下取整。
- 从右往左同理。类似辗转相除，两个间隔会以 \log 的速度趋近1。
- 也就是我们在 $O(\log V)$ 的时间内得到了一个状态的根节点，而且得到了这个状态的深度。

习题精讲——HDU3830

- 若发现两个状态的根节点一样，我们还需要计算出这两个状态在树上的距离。
- 也就是我们需要计算出它们的LCA。
- 回顾倍增的做法，我们先把两个点拉到同一个深度，然后二分往上爬多少步，比较是否到达了同一个状态。若到了同一个状态，说明已经超过了LCA，否则还没有。
- 现在问题变成了给一个状态，让你计算向上爬了 k 步后到达的状态。
- 仍然用之前的方法，可以在 $O(\log V)$ 的时间内得到。
- 综上，总的时间复杂度是 $O(\log^2 V)$ 。
- 这题需要大家发现状态的转移对应着树上的移动，而寻找最少次数的方案就是询问树上的路径，思路非常巧妙，需要大家灵活掌握倍增求LCA的思想。

下节课再见