

欧拉回路

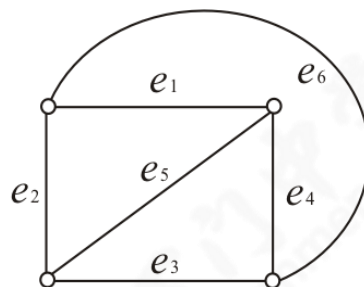
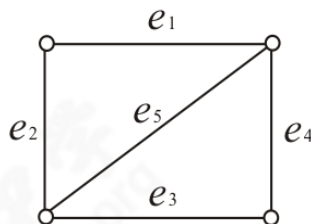
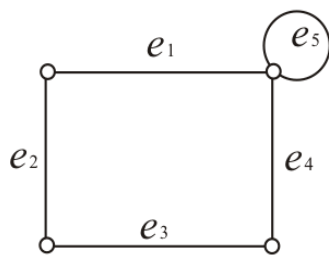


主讲人：邓哲也



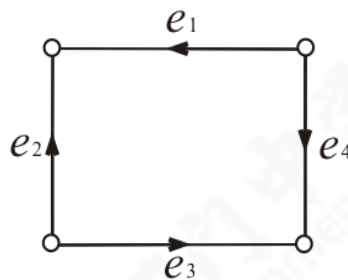
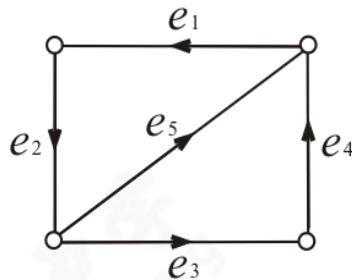
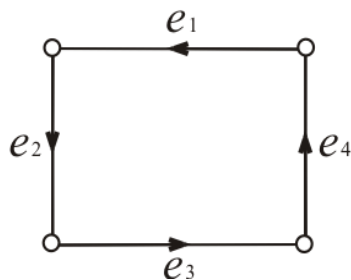
欧拉回路

- 无向图：
 - 设 G 是无向连通图，则称经过 G 的每条边一次且仅一次的路径为**欧拉通路**
 - 如果欧拉通路是回路（起点和终点是同一个顶点），则称此回路为**欧拉回路**
 - 具有欧拉回路的无向图 G 称为**欧拉图**



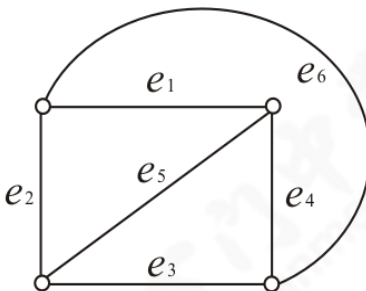
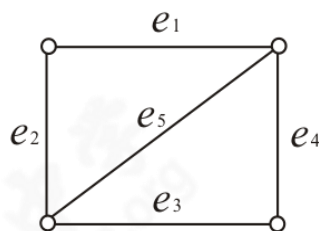
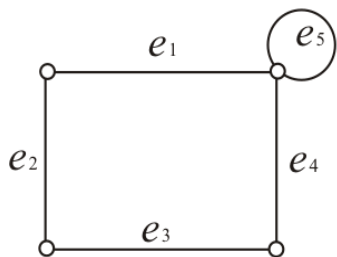
欧拉回路

- 有向图：
 - 设 D 是有向图， D 的基图连通，则称经过 D 的每条边一次且仅一次的有向路径为有向欧拉通路
 - 如果有向欧拉通路是有向回路，则称此有向回路为有向欧拉回路
 - 具有有向欧拉回路的有向图 D 称为欧拉图



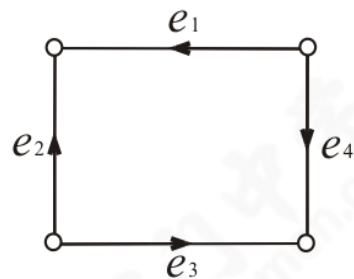
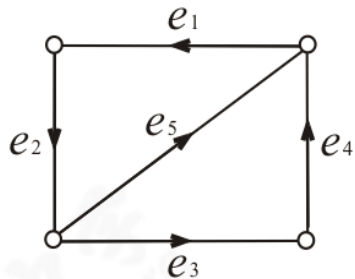
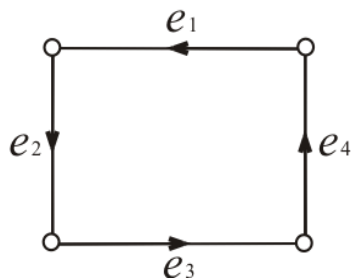
定理及推论

- **【定理 1】** 无向图 G 存在欧拉通路的充要条件是： G 为连通图，并且 G 仅有两个奇度顶点或者无奇度顶点。
- **【推论 1】** 当 G 是仅有两个奇度顶点的连通图时， G 的欧拉通路必以此两个节点为端点。
- **【推论 2】** 当 G 时无奇度顶点的连通图时， G 必有欧拉回路
- **【推论 3】** G 为欧拉图（存在欧拉回路）的充要条件时 G 无奇度顶点。



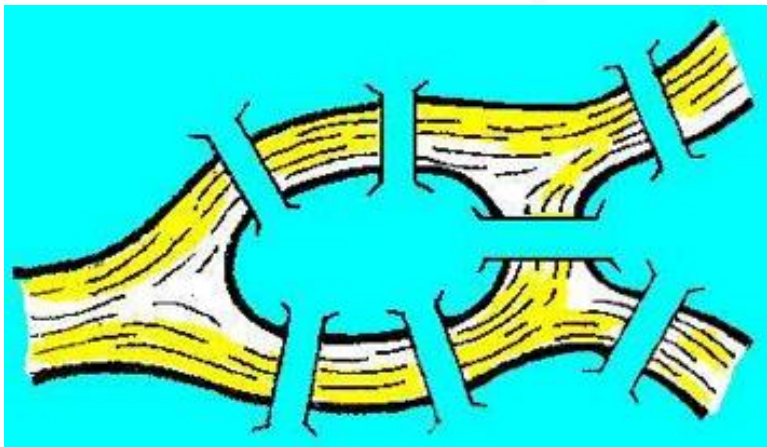
定理及推论

- **【定理 2】** 有向图 D 存在欧拉通路的充要条件是： D 为有向图， D 的基图连通，并且所有顶点的入度和出度都相等；或者除两个顶点外，其余顶点的出度和入度都相等，而这两个顶点中，一个顶点的出入度差为 1，另一个顶点的出入度差为 -1
- **【推论 4】** 当 D 的所有顶点出入度都相等时， D 中存在有向欧拉回路



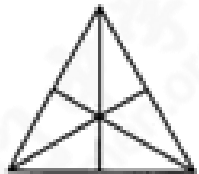
哥尼斯堡七桥问题

- 一条河流及其两条分支将尼斯堡市分成了 4 个区，各区之间共有 7 座桥梁联系着。问题：能不能一次走遍所有的 7 座桥，并且每座桥只能经过一次？

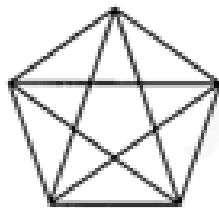


一笔画问题

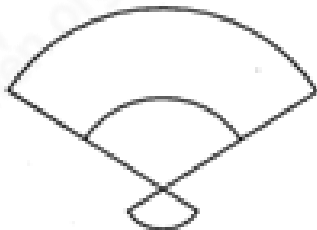
- 判断一个图 G 是否可以一笔画出。



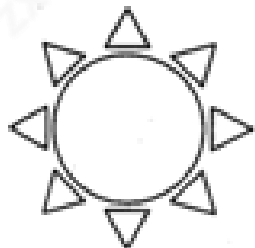
①



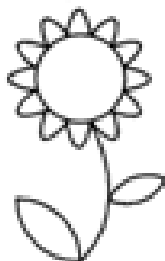
②



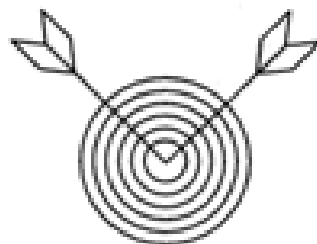
③



④



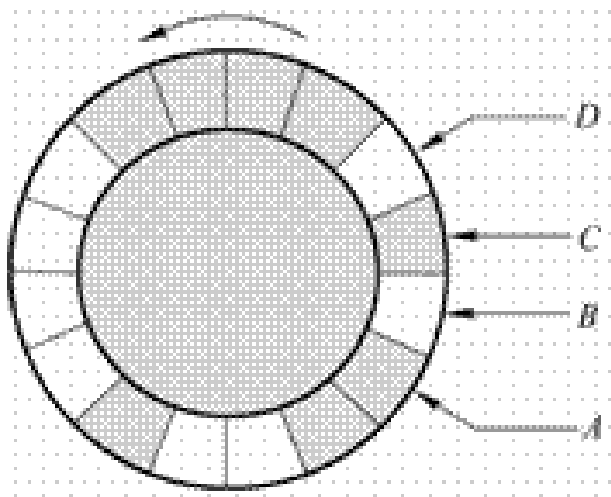
⑤



⑥

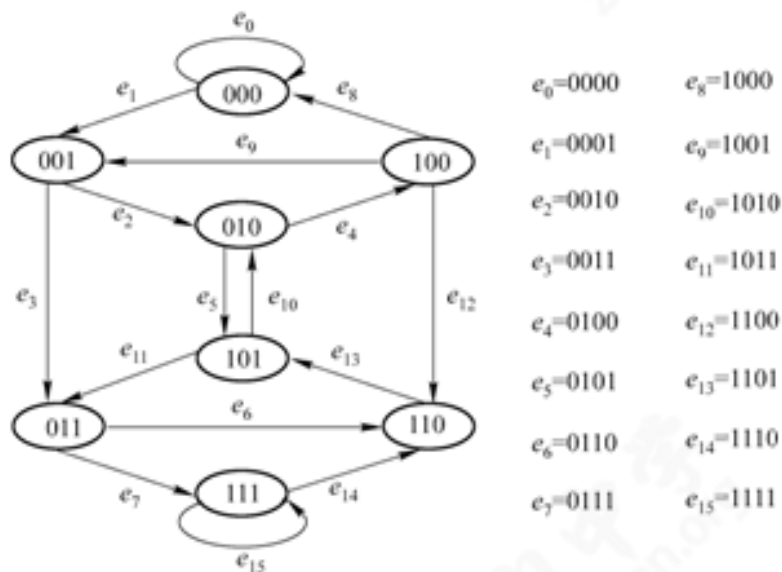
旋转鼓轮

- 旋转鼓轮，其表面被分为 2^4 个部分，每个位置可以给出 0 或 1 的信号。
- 问应该如何设计，使得鼓轮旋转一周，4 个触点得到的一组 4 位二进制信息都不同？



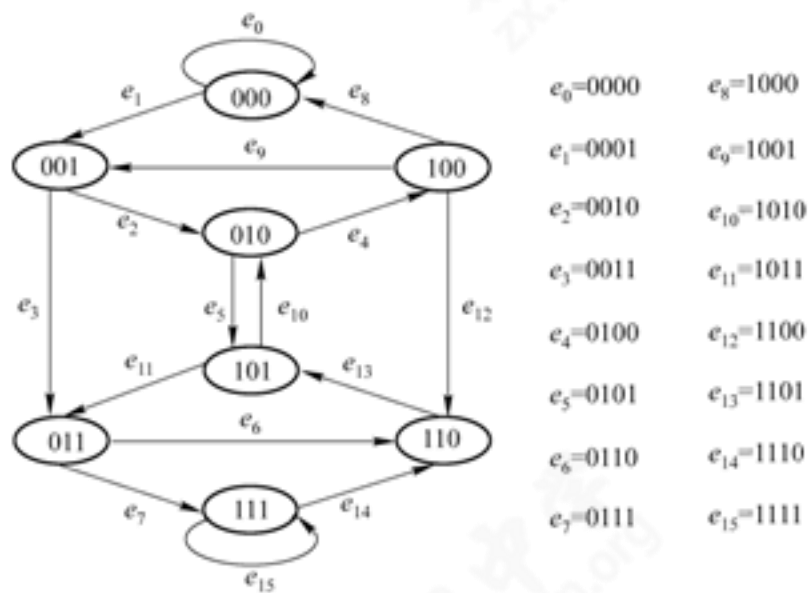
旋转鼓轮

- 要使得鼓轮旋转一周，得到的 16 组二进制信息都不同，唯一的可能就是每种组合恰好出现一次，并且前一组信息的后三位跟后一组信息的前三位相同。
- 把这个三位信息看成顶点。
- 前后两组信息看成边。



旋转鼓轮

- 只要找出欧拉回路，就是旋转鼓轮的一个解。
- 每个点都有两条出边和两条入边。
- 故一定存在有向欧拉回路。



欧拉回路问题

- 欧拉回路一般存在以下两类问题：
 - 欧拉回路的判定问题：判断是否存在欧拉回路/有向欧拉回路。
 - 欧拉回路的求解：判断出存在之后，如何输出一条欧拉回路/有向欧拉回路？

下节课再见