

知识精炼（二）



主讲人：邓哲也



P0J1201 Intervals

- 给定 n 个整数闭区间 $[a[i], b[i]]$ 和 n 个整数 $c[1], c[2], \dots, c[n]$ 。编程实现以下 3 点：
 1. 读入闭区间的个数，每个区间的端点和整数 $c[1], c[2], \dots, c[n]$ 。
 2. 求一个最小的整数集合 Z ，满足 $|Z \cap [a[i], b[i]]| \geq c[i]$ ，即 Z 里面的数中，范围在区间 $[a[i], b[i]]$ 的个数不小于 $c[i]$ 个。
 3. 输出答案。

P0J1201 Intervals

- $n \leq 50000$, $0 \leq a[i] \leq b[i] \leq 50000$.
- 样例: (输出 6, $Z = \{3, 6, 7, 8, 9, 10\}$)
- 5
- 3 7 3
- 8 10 3
- 6 8 1
- 1 3 1
- 10 11 1

P0J1201 Intervals

- 该题目可建模成一个差分约束系统。
- 设 $S[i]$ 是集合 Z 中小于等于 i 的元素个数。
- Z 集合中范围在 $[a[i], b[i]]$ 的整数个数即 $S[b[i]] - S[a[i] - 1]$ 至少为 $c[i]$ 。
- **约束条件 1:**
 - $S[b[i]] - S[a[i] - 1] \geq c[i] \Rightarrow S[a[i] - 1] - S[b[i]] \leq -c[i]$
 - $S[2] - S[7] \leq -3$
 - $S[7] - S[10] \leq -3$
 - $S[5] - S[8] \leq -1$
 - $S[0] - S[3] \leq -1$
 - $S[9] - S[11] \leq -1$

样例:

```
5
3 7 3
8 10 3
6 8 1
1 3 1
10 11 1
```

POJ1201 Intervals

- 根据实际情况，还有两个约束条件
- $S[i] - S[i - 1] \leq 1$
- $S[i] - S[i - 1] \geq 0$
- 最终要求的是什么呢？
- 设所有区间中右端点的最大值为 mx ，如样例中 $mx = 11$
- 设所有区间中左端点的最小值为 mn ，如样例中 $mn = 1$
- 要求的是 $S[mx] - S[mn - 1]$ 的最小值。
- $S[11] - S[0] \geq M \rightarrow S[0] - S[11] \leq -M$
- 即求 11 到 0 的最短路径的长度，长度为 $-M$

样例：

```
5
3 7 3
8 10 3
6 8 1
1 3 1
10 11 1
```

P0J1201 Intervals

- 但是考虑到后两个约束条件对应的不等式有 $2 * (mx - mn + 1)$ 个。
- 再加上约束条件 1，构造的边数最多会达到 $3 * 50000$ 条。
- 会超时！

样例：

5

3 7 3

8 10 3

6 8 1

1 3 1

10 11 1

POJ1201 Intervals

- 优化!
- 先用约束条件 1 构造有向图。
- 源点到各点最短距离初始为 0, 因为 $S[i] - S[mx] \leq 0$.
- 所以源点到各点的最短距离肯定是小于 0 的。
- 然后直接用 Bellman-Ford 算法求源点到各顶点的最短距离。
- 在每次循环中, 约束条件1 判断完后, 再判断后两个约束条件。

样例:

```
5
3 7 3
8 10 3
6 8 1
1 3 1
10 11 1
```

P0J1201 Intervals

- 约束条件 2 的判断:
 - $S[i] \leq S[i - 1] + 1 \rightarrow S[i] - S[mx] \leq S[i-1] - S[mx] + 1$
 - 如果发现 $dist[i] > dist[i - 1] + 1$, 那么把 $dist[i]$ 修改为 $dist[i - 1] + 1$.
- 约束条件 3 的判断:
 - $S[i - 1] \leq S[i] \rightarrow S[i - 1] - S[mx] \leq S[i] - S[mx]$
 - 如果 $dist[i - 1] > dist[i]$, 那么把 $dist[i - 1]$ 修改为 $dist[i]$.

样例:

```
5
3 7 3
8 10 3
6 8 1
1 3 1
10 11 1
```


POJ1201 Intervals

- $S[2] - S[7] \leq -3$
- $S[7] - S[10] \leq -3$
- $S[5] - S[8] \leq -1$
- $S[0] - S[3] \leq -1$
- $S[9] - S[11] \leq -1$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	-3	0	0	-1	0	-3	0	-1	0	0
-4	-3	-6	-3	-3	-3	-3	-3	-2	-1	0	0
-6	-6	-6	-5	-4	-3	-3	-3	-2	-1	0	0

样例:

```
5
3 7 3
8 10 3
6 8 1
1 3 1
10 11 1
```

P0J1201 Intervals

- 最后一个优化就是：如果在某一次执行完 Bellman-Ford 算法中的循环后，`dist`数组每个元素的值都没有发生变化，后续的循环就不用进行下去了。

样例：

```
5
3 7 3
8 10 3
6 8 1
1 3 1
10 11 1
```

下节课再见