

Prim算法堆优化



主讲人：邓哲也



大纲

Prim算法实现

Prim算法堆优化执行过程

Prim算法堆优化时间复杂度

Prim算法回顾

回顾 Prim 算法:

1. 从连通无向图 G 中选择一个起始顶点 u_0 , 首先将它加入到集合 T 中, 然后选择与 u_0 关联的、具有最小权值的边 (u_0, v) , 将顶点 v 加入到顶点集合 T 中。
2. 以后每一步都从 (u, v) (其中 u 在 T 中, v 在 T' 中) 找出权值最小的边, 把顶点 v 加入到顶点集合 T 中。
3. 重复第二步, 直到图中的所有点都被加入 T 集合。

第二步中权值最小的边是怎么找的呢?

枚举

可以更快吗?

Prim算法回顾

回顾 Prim 算法:

从连通无向图 G 中选择一个起始顶点 u_0 , 首先将它加入到集合 T 中, 然后选择与 u_0 关联的、具有最小权值的边 (u_0, v) , 将顶点 v 加入到顶点集合 T 中。

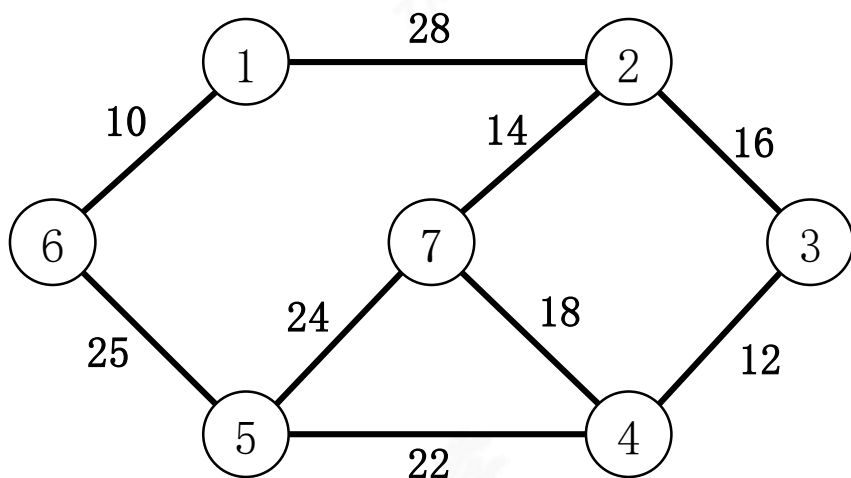
1. 以后每一步都从 (u, v) (其中 u 在 T 中, v 在 T' 中) 找出权值最小的边, 把顶点 v 加入到顶点集合 T 中。
2. 重复第二步, 直到图中的所有点都被加入 T 集合。

我们可以用一个堆来维护 T' 集合的 low 值, 每次选出堆顶元素加入 T 。

然后更新其他顶点的 low 值即可。

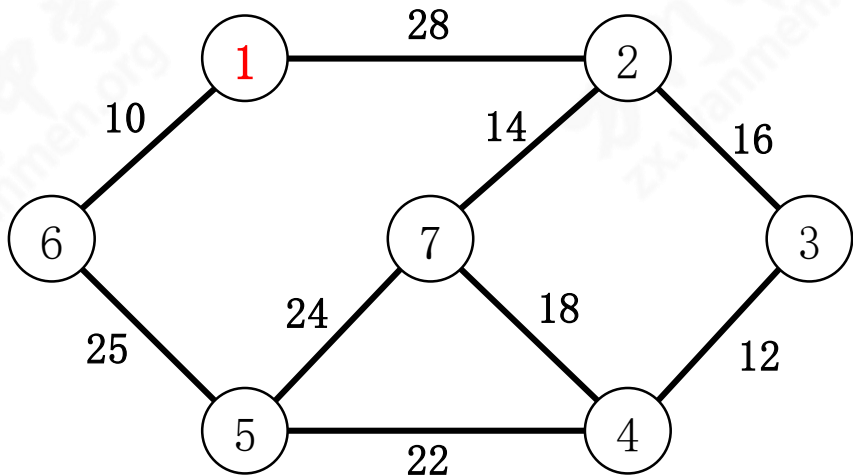
Prim算法堆优化执行过程

以下面这个无向图为例，我们来看看 Prim 算法堆优化的执行过程。



Prim算法堆优化执行过程

假设选择的起始顶点是1，则两个辅助数组的初始状态如下表：



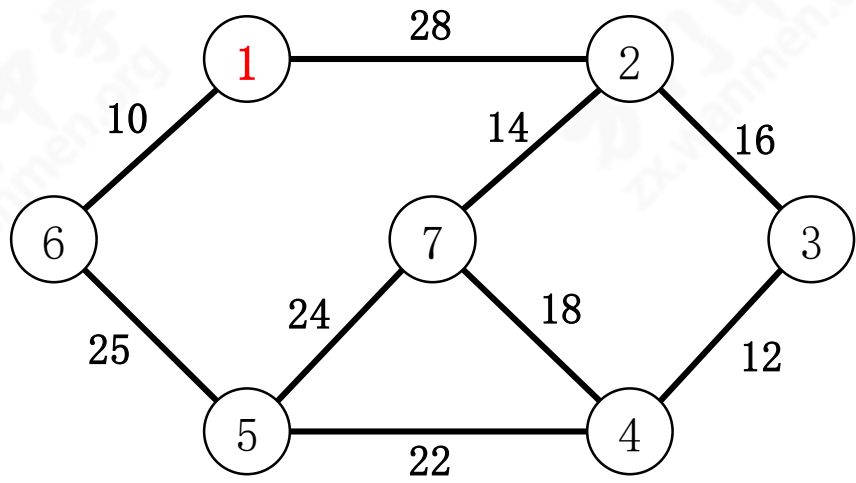
堆中元素：

(0, 1)
(10, 6)
(28, 2)
(∞ , 3)
(∞ , 4)
(∞ , 5)
(∞ , 7)

	1	2	3	4	5	6	7
low	0	28	∞	∞	∞	10	∞
pos	0	1	1	1	1	1	1

Prim算法堆优化执行过程

low[6]最小，选择 6 号点加入 T

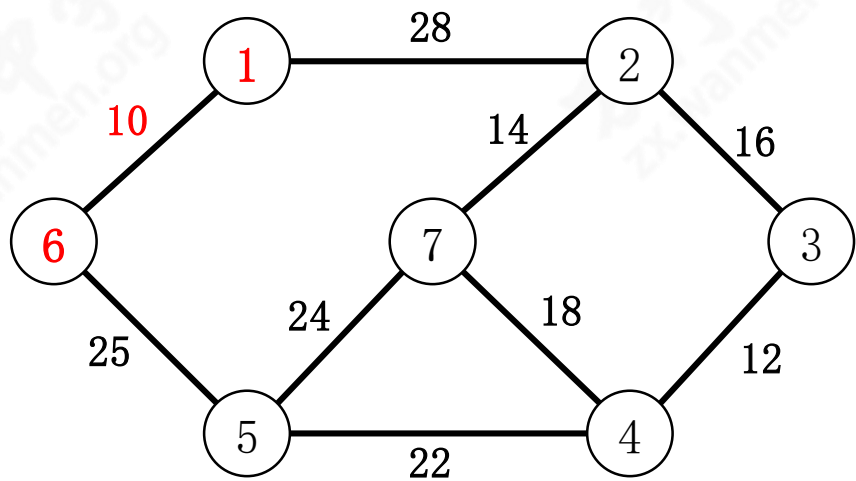


堆中元素:
(10, 6)
(28, 2)
(∞ , 3)
(∞ , 4)
(∞ , 5)
(∞ , 7)

	1	2	3	4	5	6	7
low	0	28	∞	∞	∞	10	∞
pos	0	1	1	1	1	1	1

Prim算法堆优化执行过程

low[5]最小，选择 5 号点加入 T:



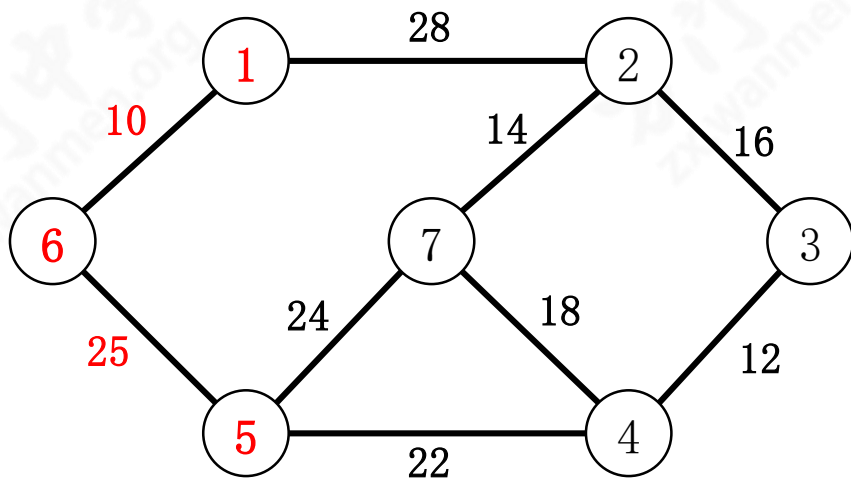
堆中元素:

(25, 5)
(28, 2)
(∞ , 3)
(∞ , 4)
(∞ , 7)

	1	2	3	4	5	6	7
low	0	28	∞	∞	25	10	∞
pos	0	1	1	1	6	0	1

Prim算法堆优化执行过程

low[4] 最小，选择 4 号点加入 T:



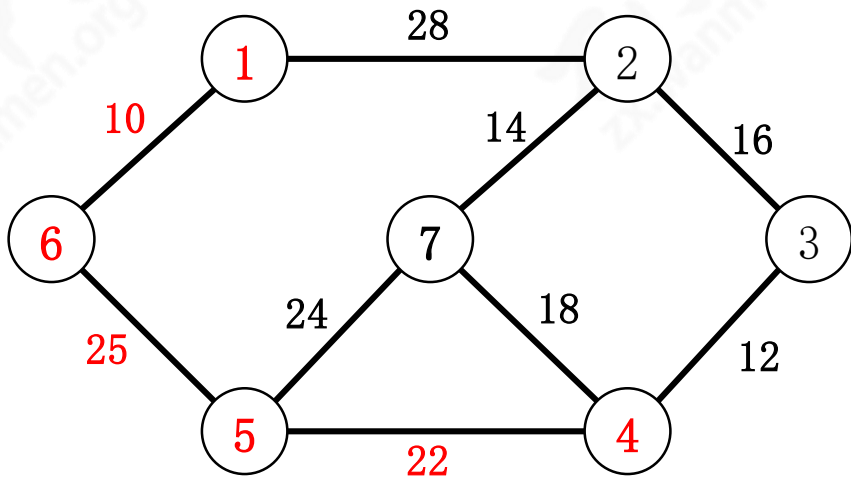
堆中元素:

(22, 4)
—
(24, 7)
—
(28, 2)
(∞ , 3)

	1	2	3	4	5	6	7
low	0	28	∞	22	25	10	24
pos	0	1	1	5	0	0	5

Prim算法堆优化执行过程

low[3] 最小, 选择 3 号点加入 T:



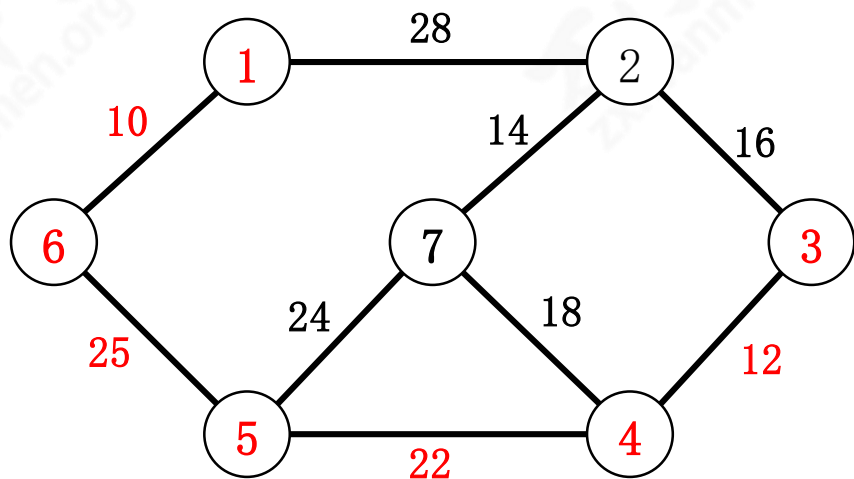
堆中元素:

(12, 3)
(18, 7)
(28, 2)

	1	2	3	4	5	6	7
low	∞	28	12	22	25	10	18
pos	∞	1	4	∞	∞	∞	4

Prim算法堆优化执行过程

low[2] 最小, 选择 2 号点加入 T:

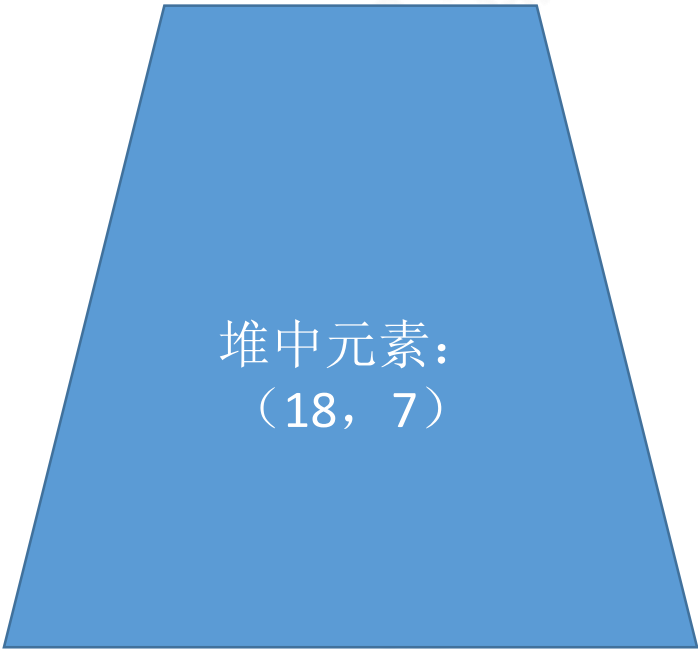
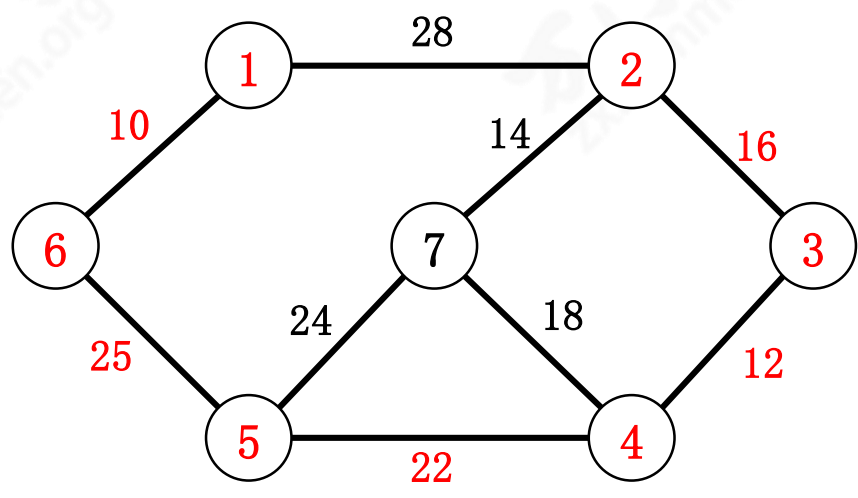


堆中元素:
 $(16, 2)$
 $(18, 7)$

	1	2	3	4	5	6	7
low	0	16	12	22	25	10	18
pos	0	3	0	0	0	0	4

Prim算法堆优化执行过程

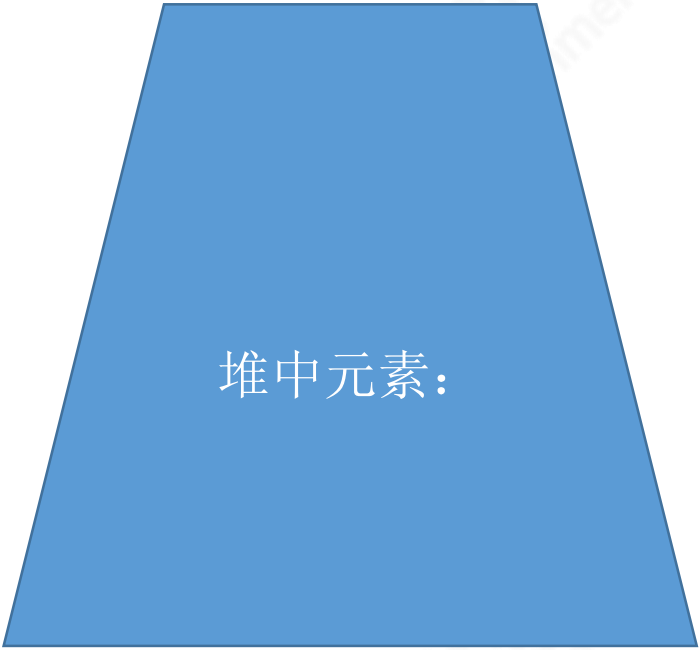
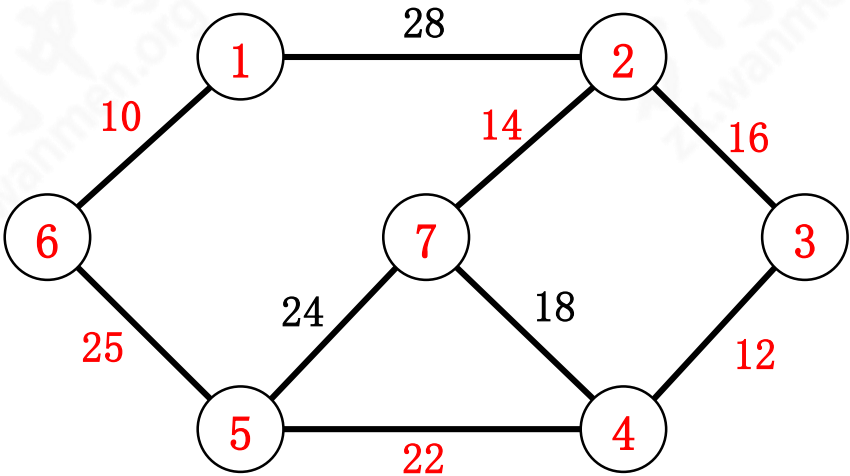
low[7] 最小，选择 7 号点加入 T:



	1	2	3	4	5	6	7
low	∅	16	12	22	25	10	14
pos	∅	∅	∅	∅	∅	∅	2

Prim算法堆优化执行过程

算法结束。



	1	2	3	4	5	6	7
low	0	16	12	22	25	10	14
pos	0	0	0	0	0	0	0

Prim算法堆优化时间复杂度

每次从堆中取出一个点加入 T 集合，时间复杂度 $O(\log n)$.

更新 T' 集合中的 low 值，由于每条边只会被更新一次，

所以总共的时间复杂度是 $O(m \log n)$

循环 n 次，故总的时间复杂度为 $O((n + m) \log n)$.

下节课再见