

知识精炼（二）



主讲人：邓哲也



P0J3613 Cow Relays

- 现在有 n 头奶牛打算用 T 条路跑接力赛。
- 一共有 m 条双向边，顶点个数 ≤ 1000 。
- 现在需要你找出一条从 S 开始到 E 结束的经过 n 条边的最短路。
- $n \leq 1000000$, $T \leq 100$

样例： （输出10）

```
2 6 6 4
11 4 6
4 4 8
8 4 9
6 6 8
2 6 9
3 8 9
```

P0J3613 Cow Relays

- 这题和以前的最短路的题的区别是，限制了路径上边的个数。
- 回顾一下 Floyd 算法，初始状态下是经过一条边的最短路。
- 我们只需要改一下 $f[i][j] = \min(f[i][j], f[i][k] + f[k][j])$
- 第一轮循环，算出经过两条边的最短路。
- 第二轮循环，算出经过三条边的最短路。
- 以此类推……
- 就可以使第 $n-1$ 轮循环，算出恰好经过 n 条边的最短路。

P0J3613 Cow Relays

- 还有一点小优化。
- 虽然顶点编号 ≤ 1000 ，但是边的数量 ≤ 100
- 所以很多点是用不到的，最多用到 200 个点。
- 这一步可以在预处理读入的时候，给每个点标一个新号码来解决。

P0J3613 Cow Relays

- 这样每一轮更新，复杂度都是 $O(200^3)$
- 可是最多会要循环 100万 轮，严重超时怎么办。

P0J3613 Cow Relays

- 考虑图初始的邻接矩阵 A ，令 $B = A$
- 用 $C[i][j] = \min(C[i][j], A[i][k] + B[k][j])$ 更新
- 那么 $C[i][j]$ 就是从 i 到 j 经过两条边的最短路。
- 用 $D[i][j] = \min(D[i][j], C[i][k] + A[k][j])$ 更新
- 那么 $D[i][j]$ 就是从 i 到 j 经过三条边的最短路。
- 如果每次都这样循环，就要循环 100万 次，可以加速吗？

POJ3613 Cow Relays

- 考虑图初始的邻接矩阵 A , 令 $B = A$
- 用 $C[i][j] = \min(C[i][j], A[i][k] + B[k][j])$ 更新
- 那么 $C[i][j]$ 就是从 i 到 j 经过两条边的最短路。
- 用 $D[i][j] = \min(D[i][j], C[i][k] + C[k][j])$ 更新
- 那么 $D[i][j]$ 就是从 i 到 j 经过四条边的最短路。
- 用 $E[i][j] = \min(E[i][j], D[i][k] + D[k][j])$ 更新
- 那么 $E[i][j]$ 就是从 i 到 j 经过八条边的最短路。
-
- 以此类推, 边数可以指数级增长。

P0J3613 Cow Relays

- 这就是快速幂的思想。
- 对 n 进行二进制分解，可以优化到只需要做 $O(\log n)$ 次 Floyd 算法。
- 因此最终的时间复杂度就是 $O(200^3 \log n)$ ，可以通过。

下节课再见