集合的排列与组合

主讲人：邓哲也

集合的排列

令 r 为正整数，我们把 n 个元素的集合 S 的一个 r-排列理解为 n 个元素中的 r 个元素的有序摆放。

如果 S = {a, b, c}，则 S 的 3 个 1-排列是： a　b　c

S 的 6 个 2-排列是：ab　ac　ba　bc　ca　cb

S 的 6 个 3-排列是：abc　acb　bac　bca　cab　cba

集合的排列

我们用 A(n, r) 来表示 n 个元素集合 r-排列的数目。

如果 r > n，则 A(n, r) = 0

之前我们已经看到 A(3,1) = 3，A(3,2) = A(3,3) = 6

一般的，$A(n,r) = n \times (n-1) \times \cdots (n-r+1)$

也可以记为， $A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

集合的排列

【例1】将 26 个字母排序，使得元音字母 a，e，i，o，u 中任意两个都不得相继出现，问方案数。

【解】首先我们需要对辅音字母排序。总共有 21 个辅音字母，这个排列数是 21!

由于不能有两个元音字母连续出现，所以这些元音字母必须放入 22 个空位中。对 a 有 22 个位置，对 e 有 21 个位置……也就是这一步可以有 A(22，5）种方法。

总共的方案数就是 21! * 22! / 17!

集合的循环排列

刚刚考虑的过的排列可以称为线性排列。

如果把它们排成一个圆，那么排列的数目就要减少。

思考一个问题，假设 6 个人排成一个圈，有几种不同的方式。

由于他们是一个圈，所以重要的是他们彼此之间的相对位置。

因此如果两个循环排列通过一个旋转可以从一个变成另外一个，那么要把它们两个看成是相同的。

例如 123456，234561，345612， 456123， 561234，612345 是等价的。

集合的循环排列

可以看出，6个人的线性排列和6个人的循环排列存在一个 6 到1的对应。因此只要用 6 去除线性排列的数目即可。

也就是 6!/6 = 5!

更一般的，n 个元素的集合的循环r-排列的个数是：

$$\frac{A(n,r)}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

集合的排列

【例2】10个人要围坐一圆桌，其中有两人不愿意彼此挨着就坐。共有多少循环座位排放方案？

【解】先考虑 9 个人（X,3,4,…,9,10）的方案数：8!

然后 X 可以用 1,2 或 2,1 替换。

因此挨着就坐的方案数是 2*8!

总方案数就是 9!-2*8!

集合的组合

令 r 为非负整数，我们把 n 个元素的集合 S 的一个 r-组合理解为从 S 的 n 个元素中对 r 个元素的无序选择。

如果 S = {a, b, c, d}，则 S 的 4 个 3-组合是：

{a, b, c}，{a, b, d}，{a, c, d}，{b, c, d}

我们用$\binom{n}{r}$表示 n-元素集的 r-组合的个数。

显然

$$\binom{n}{r} = 0\ (r > n)$$

$$\binom{0}{r} = 0\ (r > 0)$$

集合的组合

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{n} = 1$$

特别地，

$$\binom{0}{0} = 1$$

集合的组合

对于 0 <= r <= n，

$$A(n,r)=r!\binom{n}{r}$$

因此

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

集合的组合

【例3】在平面上给出 25 个点，没有 3 个点共线。这些点能确定多少条直线？确定多少个三角形？

【解】每一对点确定唯一一条直线。

因此答案为$\binom{25}{2} = 300$

同理，每 3 个点确定唯一一个三角形，答案为$\binom{25}{3}$

集合的组合

【例4】如果每个词包含 3、4或5个元音，那么用26个字母可以构造多少个8-字母词？

【解】首先分元音个数计数。

3元音词：元音的位置有$\binom{8}{3}$种选择方式，其余5个位置是辅音。

元音有5^3种方式，辅音有21^5种方式，因此总共有 $\binom{8}{3}5^3 21^5$ 种。

同理，4元音词有$\binom{8}{4}5^4 21^4$种， 5元音词有$\binom{8}{5}5^5 21^3$种。

三个数加起来就是答案。

组合数的重要性质

对于 0 <= r <= n，

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

对于 n >= 0，

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

下节课再见