

最近公共祖先 ——欧拉序RMQ算法



主讲人：邓哲也



大纲

➤ RMQ问题

➤ ST算法

➤ 欧拉序列

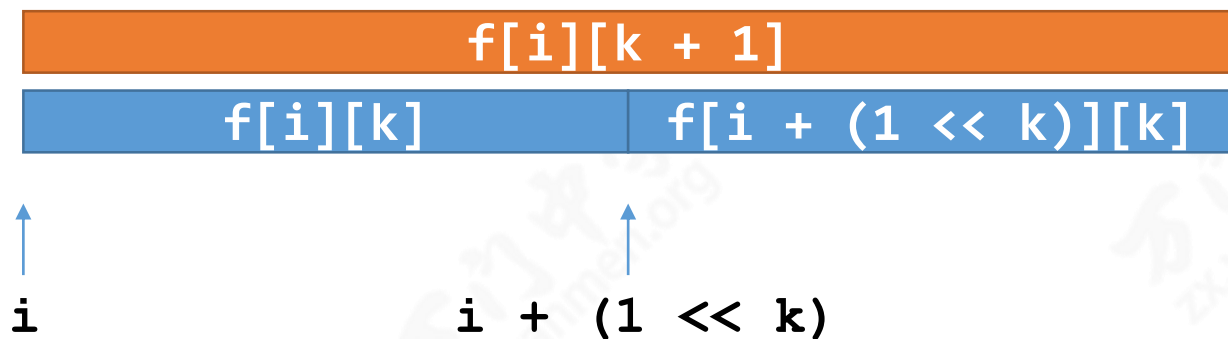
➤ 欧拉序+RMQ求LCA

RMQ问题

- **RMQ(Range Minimum/Maximum Query)** 区间最值查询
- 给一个序列 $a[1], a[2], \dots, a[n]$ ，每次查询一个区间的最小值
- 接触过线段树的同学会发现线段树可以轻松解决这个问题，预处理复杂度 $O(n)$ ，每次询问 $O(\log n)$
- 这里我们介绍一个更优秀的算法——ST算法。

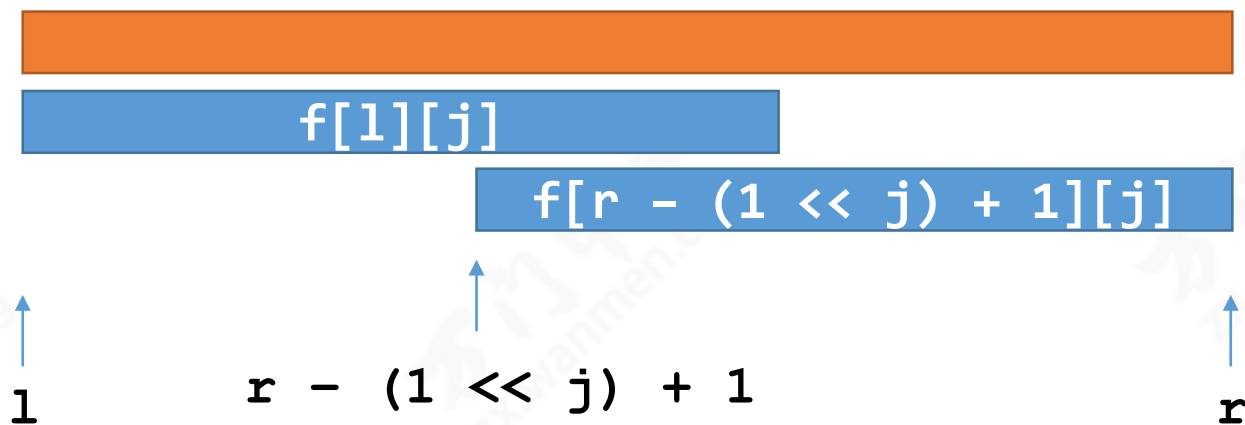
ST(Sparse Table)算法

- 运用倍增的思想，我们令 $f[i][k]$ 数组表示区间 $[i, i + 2^k - 1]$ 中的最小值
- 显然有
 - $f[i][0] = a[i]$
 - $f[i][k + 1] = \min(f[i][k], f[i + (1 \ll k)][k])$



ST(Sparse Table)算法

- 查询时给了一个区间 $[1, r]$ ，我们找一个最大的 j 满足 $2^j \leq r - 1 + 1$
- 于是我们可以用 $f[1][j]$ 和 $f[r - 2^j + 1][j]$ 来覆盖这个区间，得到最小值
- 也即 $\text{answer} = \min(f[1][j], f[r - (1 \ll j) + 1][j])$

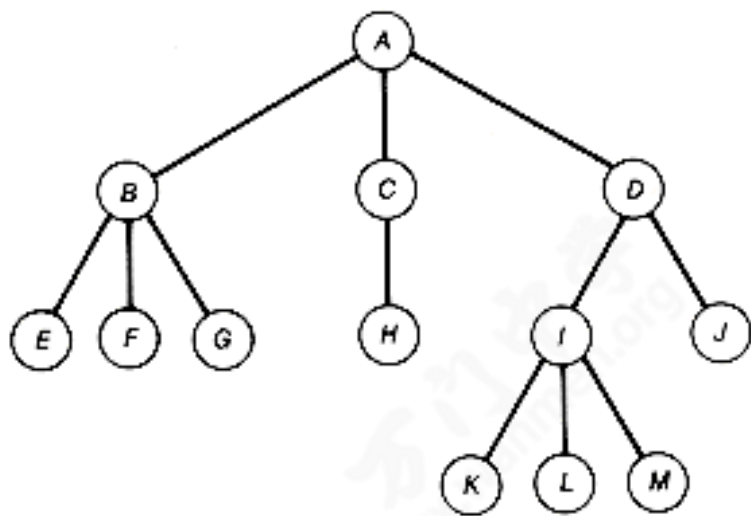


ST(Sparse Table)算法

- 时间复杂度分析:
 - 预处理: $O(n \log n)$
 - 询问: $O(1)$

欧拉序列

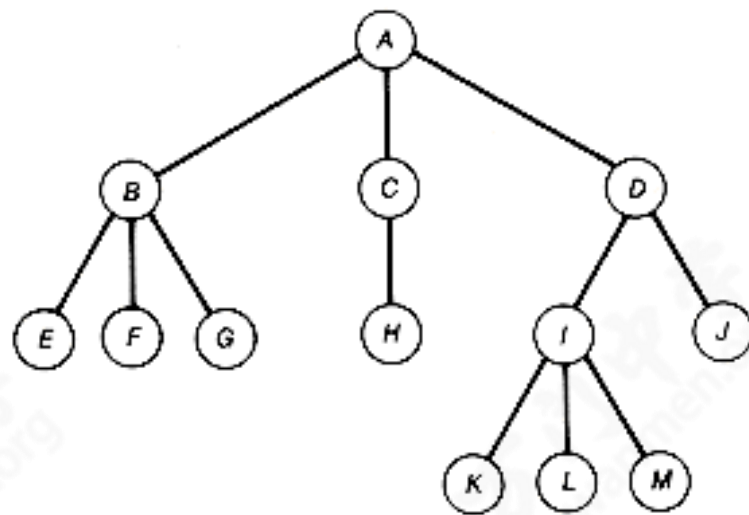
- 欧拉序是对树进行DFS的一种序列，只要到达每个节点就把它加入队列
- 对于右图，我们可以得到A B E B F B G B A C H C A D I K I L I M I D J D A



欧拉序+RMQ求LCA

- 节点 A B E B F B G B A C H C A D I K I L I M I D J D A
- 深度 0 1 2 1 2 1 2 1 0 1 2 1 0 1 2 3 2 3 2 3 2 1 2 1 0

- u 和 v 的LCA就是 u 第一次出现的位置和 v 第一次出现的位置的区间中深度最小的点。
- 对欧拉序对应的深度数组建立ST表，除了维护最小值外，还维护最小值对应的节点。
- 这样我们就做到了在 $O(n \log n) - O(1)$ 的时间复杂度下在线查询LCA。



下节课再见