二项式系数

主讲人：邓哲也

二项式系数

之前已经介绍了$\binom{n}{k}$表示n个元素的集合中k-组合的个数。

由于它们出现在二项式定理中，因此它们也叫二项式系数。

Pascal公式

对于满足 1 <= k <= n-1 的所有整数 k 和 n，

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

证明：

1. 直接证明
2. 结合实际意义

Pascal公式

另外，对于 n >= 0

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

预处理二项式系数

```
int c[N][N];

for (int i = 0; i <= n; i ++){
      c[i][0] = c[i][i] = 1;
      for (int j = 1; j < i; j ++)
            c[i][j] = c[i - 1][j - 1] + c[i][j - 1];
}
```

二项式定理

令 n 是一个正整数，对于所有的 x 和 y，都有

$$(x+y)^n$$

$$= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

二项式定理

二项式定理可以写成以下三种等价形式：

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^{n-k}y^k$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^{k}y^{n-k}$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}y^{n-k}$$

二项式定理

对于 $\mathbf{y = 1}$的情况

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

常见的恒等式

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m}$$

多项式系数

$$\binom{n}{n_1 n_2 n_3 \ \dots n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

这里，$n_1\ n_2\ n_3\ \dots n_k$ 都是非负整数，且$n_1 + n_2 + n_3 + \ \dots + n_k = n$

多项式定理

令 n 是一个正整数，对于所有$x_1\ x_2\ x_3\ \dots x_k$，都有

$$(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k)^n=\sum\binom{n}{n_1 n_2 n_3\ \dots n_k}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_k^{n_k}$$

多项式定理

【例】求

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^7$$

被展开时，$x_1^2 x_2^3 x_4\ x_5$ 的系数

【答案】

$$\binom{7}{2!\,3!\,0!\,1!\,1!} = 420$$

多项式定理

【例】求

$$(2x_1-4x_2+x_3)^7$$

被展开时， $x_1^2x_2^3x_3^2$ 的系数

【答案】

$$\binom{7}{2!\,3!\,2!}2^2(-4)^3=-53760$$

多项式定理

出现在$(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k)^n$的多项式展开时中的不同的项的数目等于

$$n_1+n_2+n_3+\ \ldots+n_k=n$$

的非负整数解的个数。

等于

$$\binom{n+k-1}{n}$$

下节课再见