

# 汉密尔顿回路

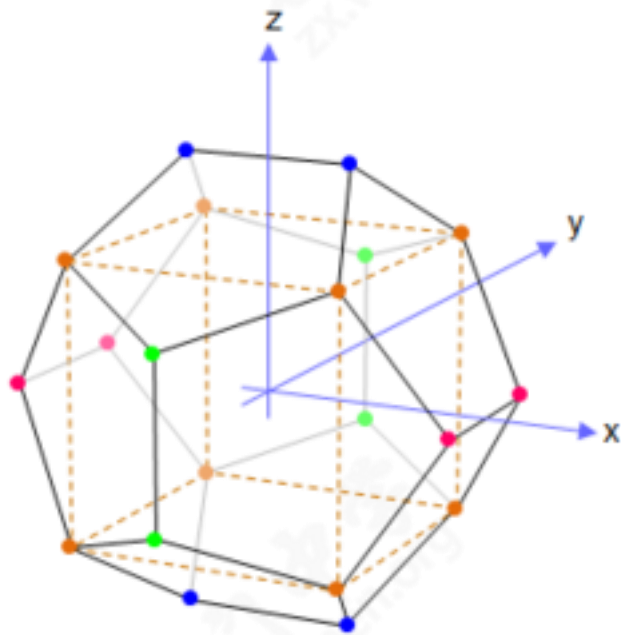


主讲人：邓哲也



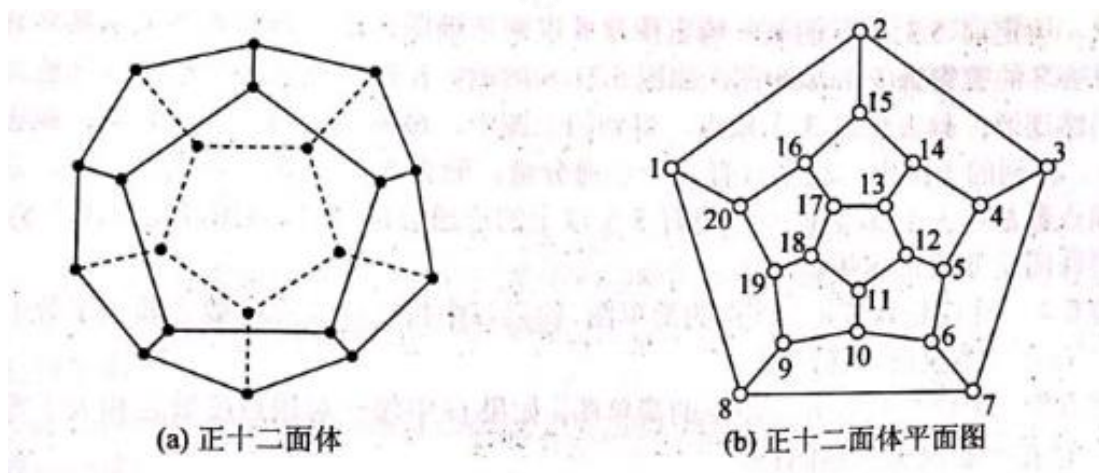
# 正十二面体游戏

- 正十二面体的每个棱角上标有一个非常有名的城市，游戏的目的是“环绕地球旅行”，也就是说，寻找一个环游路线是的经过每个城市一次且恰好一次。



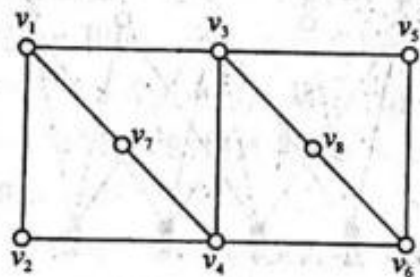
# 正十二面体游戏

- 现在把正十二面体的 20 个棱角开成图中的顶点，将正十二面体化成图 (b) 所示的平面图。那么问题就转化成了：能否在图中找到一条回路，经过每个顶点一次且仅一次。

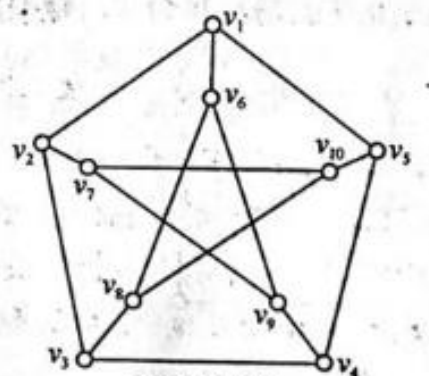


# 基本概念

- **汉密尔顿通路**: 给定图  $G$ , 若存在一条经过图中的每个顶点一次且仅一次的通路, 则称这条通路为汉密尔顿通路。
- **汉密尔顿回路**: 若存在一条回路, 经过图中的每个顶点一次且仅一次, 则称这条回路为汉密尔顿回路。
- **汉密尔顿图**: 具有汉密尔顿回路的图称为汉密尔顿图。



(a) 无向图1



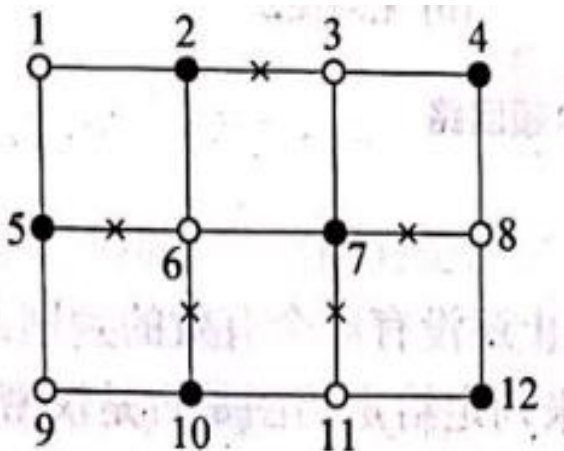
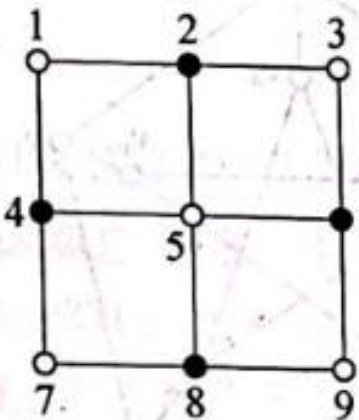
(b) 无向图2

# 相关定理

- 与欧拉回路的判定不同，对汉密尔顿回路，迄今为止还没有一个有效的通用的判别方法。只有对一些特定条件下的图，有准确的充要条件。
- **【定理1】** 设  $G$  是具有  $n$  个顶点的简单图，如果  $G$  中每一对顶点度数之和大于等于  $n - 1$ ，则在  $G$  中存在一条汉密尔顿通路。
- **【定理2】** 设  $G$  是具有  $n$  个顶点的简单图，如果  $G$  中每一对顶点度数之和大于等于  $n$ ，则在  $G$  中存在一条汉密尔顿回路。

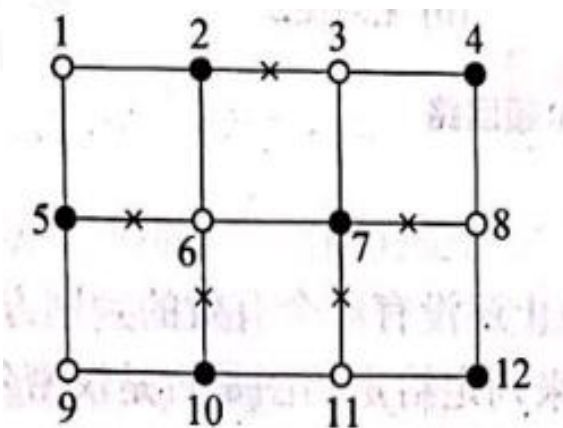
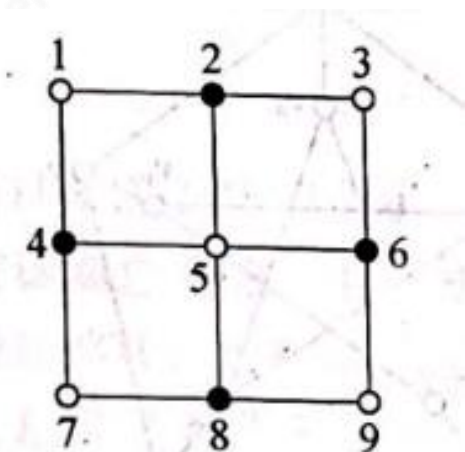
# 汉密尔顿回路的应用

- 项链：一个有  $m * n$  颗珍珠和连接它们之间的丝线组成的网格，珍珠排成  $m$  行  $n$  列，如图所示，问是否能够通过间断一些丝线，得到一个由这些珍珠做成的项链。



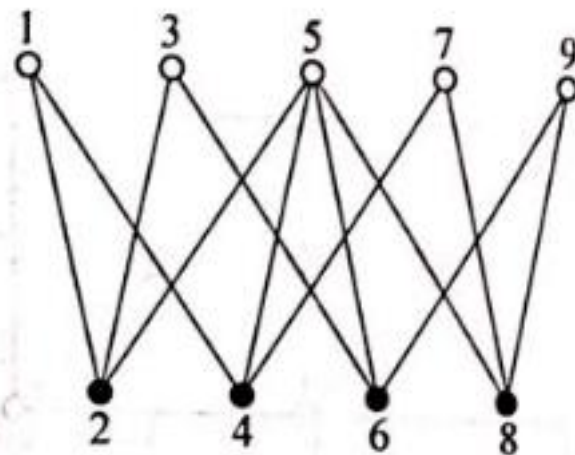
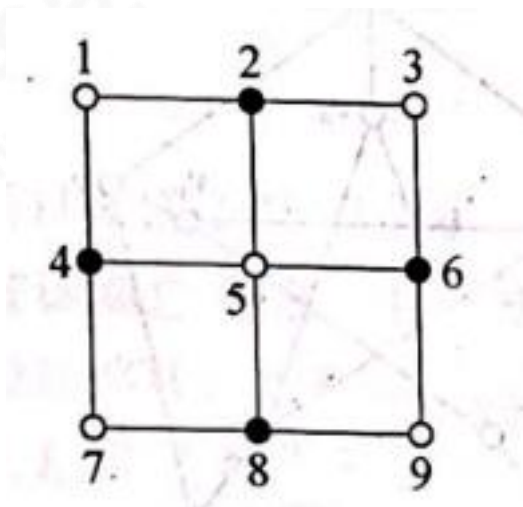
# 汉密尔顿回路的应用

- 要做成项链，就需要把这些珍珠串起来，并且相邻两颗珍珠用一根丝线连起来，整串珍珠首尾相连。这就是一个汉密尔顿回路问题。



# 汉密尔顿回路的应用

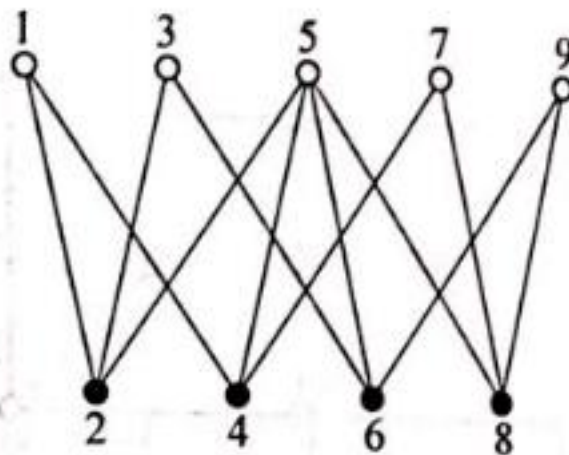
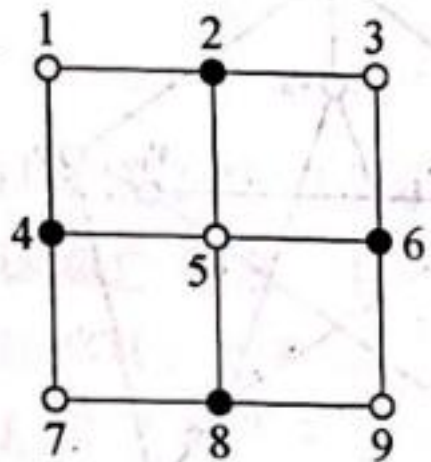
- 因为相邻的两个点一定是一黑一白，故珍珠网构成的是一个二分图。





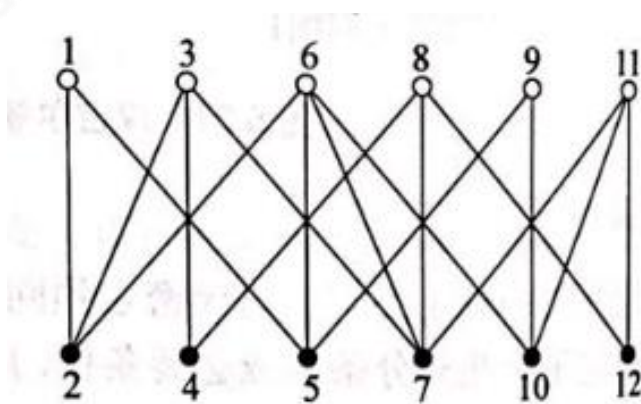
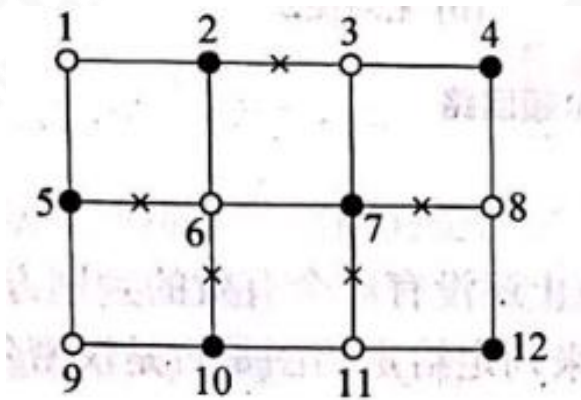
# 汉密尔顿回路的应用

- 当  $m * n$  为奇数时：如果  $G$  是汉密尔顿图，则存在一条包含  $m * n$  个顶点的汉密尔顿回路，但  $G$  是二分图，它的任意一条回路中边的数目都是偶数！所以肯定不存在汉密尔顿回路。



# 汉密尔顿回路的应用

- 当  $m * n$  为偶数时，是存在汉密尔顿回路的。
- 如图，剪断带标记的线即可。



下节课再见