知识精炼（二）

主讲人：邓哲也

余数之和

给出一个 n，求：

$$\sum_{i=1}^{n} n \bmod i$$

$n \leqslant 10^9$

余数之和

观察一下 n = 10

i	n mod i
1	0
2	0
3	1
4	2
5	0
6	4
7	3
8	2
9	1
10	0

余数之和

观察一下 $n = 11$

i	n mod i
1	0
2	1
3	2
4	3
5	1
6	5
7	4
8	3
9	2
10	1
11	0

余数之和

注意到 n mod i

= n - i * floor(n / i)

i	n / i	n mod i
1	11	0
2	5	1
3	3	2
4	2	3
5	2	1
6	1	5
7	1	4
8	1	3
9	1	2
10	1	1
11	1	0

余数之和

n / i 的值可以分为连续的若干段。

可以证明只会有 O(sqrt(n)) 段。

当 n / i = d 时，

$i \in [n/(d+1)+1, n/d]$

i	n / i	n mod i
1	11	0
2	5	1
3	3	2
4	2	3
5	2	1
6	1	5
7	1	4
8	1	3
9	1	2
10	1	1
11	1	0

余数之和

那么对于相同的 n/i

这段连续的值可以一起算

n-i*floor(n/i)

是一个公差为 -

floor(n/i) 的等差数列。

时间复杂度 O(sqrt(n))

i	n / i	n mod i
1	11	0
2	5	1
3	3	2
4	2	3
5	2	1
6	1	5
7	1	4
8	1	3
9	1	2
10	1	1
11	1	0

下节课再见