知识精炼（四）

主讲人：邓哲也

LCM之和

给出一个 n，求：

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{lcm}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n})$$

$n \leqslant 10^6$

10^6组询问。

LCM之和

LCM(i,n) = n * i / gcd(i,n)

因为 gcd(i,n) | n

我们可以枚举 n 的因子 d。

计算满足 gcd(i,n)=d (1 <= i <= n) 的 i/d 之和。

等价于 gcd(i, n/d)=1 (1 <= i <= n/d)的 i 之和乘以 d。

LCM之和

现在要求给定 $m=n/d$，求出小于 m 的数中与 m 互质的数的和。

我们知道这样的数一共有 $\phi(m)$ 个。

如果 x 与 m 互质，那么 $m - x$ 一定与 m 互质。

因此与 m 互质的数可以两两配对，加起来等于 m。

所以总和就是 $m \times \phi(m) / 2$

LCM之和

LCM(i,n) = n * i / gcd(i,n)

因为 gcd(i,n) | n

我们可以枚举 n 的因子 d。

计算满足 gcd(i,n)=d (1 <= i <= n) 的 i/d 之和。

等价于 gcd(i, n/d)=1 (1 <= i <= n/d)的 i 之和。

因此答案等于

$$n\sum_{d|n}\frac{\phi(d)d}{2}=\frac{n}{2}\left(1+\sum_{d|n}\phi(d)d\right)$$

LCM之和

我们只要预处理 ϕ 数组，然后枚举约数。

单次询问的时间复杂度就是 $O(\mathrm{sqrt}(n))$

还不够优秀。

LCM之和

我们关注函数：

$$g(n)=\sum_{d|n}\phi(d)d$$

因为 $\phi(d)d$ 是积性的。

所以 $g(n)$ 也是积性的。

我们可以在线性筛的过程中筛出 g(n).

LCM之和

只需要考虑 $g(p^a)$ 如何计算。

$$g(p^a) = 1+(p-1)p+(p-1)pp^2+(p-1)p^2p^3+(p-1)p^{a-1}p^a$$

$$= 1+p^2-p+p^4-p^3+\cdots+p^{2a}-p^{2a-1}$$

$$= p^2g(p^{a-1})-p+1$$

$$g(p) = p^2-p+1$$

这样就可以在线性筛的时候求出 g 数组。

这样单次询问的时间复杂度就是 O(1) 了。

LCM之和

```
void sieve(long long n){
    g[1]=1;
    for(long long i=2LL;i<=n;i++){
        if(!flag[i]){
            prime[++cnt]=i;
            g[i]=i*i-i+1LL;
            mincnt[i]=i;
            remdiv[i]=1;
        }
       …
```

LCM之和

```
        for(long long j=1LL;j<=cnt && i*prime[j]<=n;j++){
            flag[i*prime[j]]=1;
            if(i%prime[j]==0LL){
                remdiv[i*prime[j]]=remdiv[i];
                mincnt[i*prime[j]]=prime[j]*mincnt[i];
                g[i*prime[j]]=g[remdiv[i]]*(1LL-
prime[j]+prime[j]*prime[j]*g[mincnt[i]]);
                break;
            }else{
                g[i*prime[j]]=g[i]*g[prime[j]];
                mincnt[i*prime[j]]=prime[j];
                remdiv[i*prime[j]]=i;
            }
        }
    }
}
```

下节课再见