

最小生成树的唯一性



主讲人：邓哲也



大纲

最小生成树不唯一的原因

判断最小生成树是否不唯一

次小生成树

最小生成树不唯一的原因

对于一个给定的连通无向图，它的最小生成树是唯一的吗？

当然不是。

边权全部一样的图，可以有不止一个生成树。

最小生成树不唯一的原因

无向图中存在相同权值的边是最小生成树不唯一的必要条件（但不是充分条件！）

如果无向图中各边的权值都不相同，那么用 Kruskal 算法构造最小生成树时，选择边的方案是唯一的，因此构造的最小生成树也是唯一的。

判断最小生成树是否不唯一

比如我们求出了一个最小生成树，我们会想，拿掉其中的一条边 e 之后，剩下的图中的最小生成树的权值是否和之前一样？

这样我们也就验证了 e 这条边是不是最小生成树中必需的。如果一样，说明最小生成树不唯一， e 这条边不是必需的！

如果验证了 $n - 1$ 条边都是必需的，那说明这个图的最小生成树是唯一的。

实现方法

对图中的每条边，扫描其他边，如果存在相同权值的边，就对该边做标记。

然后用任意一个算法求出最小生成树。

求出最小生成树后，如果它没有包含作了标记的边，那么可以立即判断最小生成树唯一。

否则，如果包含作了标记的边，就依次去掉这些边再求最小生成树。如果所得的最小生成树权值和与一开始的相同，则说明这个无向图的最小生成树不唯一。

时间复杂度

注意到每次枚举删掉哪条边之后，都要重新跑一次最小生成树的算法。

假设使用最优的 Kruskal 算法，每次 $O(m \log m)$ 。

枚举 $n - 1$ 次，总复杂度为 $O(nm \log m)$ 。

次小生成树

注意到我们这个想法实际上，就是在求这个图的次小生成树。其中，这里的“次小”是可以等于“最小”生成树的权值和的，只要两个生成树不同即可。

显然如果次小生成树的权值和等于最小生成树的，那么最小生成树就不唯一了。

下节课我们将探讨次小生成树的求解方法。

下节课再见