

最近公共祖先 ——知识精炼（一）



主讲人：邓哲也



习题精讲——POJ3417

- 题目描述

- 有一个 n 个节点的树，额外加了 m 条新边
- 现在你要删除一条原来的树边和一条新边。
- 问有多少种方案使得树断裂（存在两个点不再连通）。

- 数据范围

- $n, m \leq 100,000$

- 样例

- 输入

- 4 1
- 1 2
- 2 3
- 1 4
- 3 4

- 输出

- 3

习题精讲——POJ3417

- 两种思路：
 - 枚举每一条树边，计算有几条新边满足要求
 - 枚举每一条新边，计算有几条树边满足要求

习题精讲——POJ3417

- 假设删了一条树边 $\langle x, y \rangle$, 会有三种情况:
 - 树直接断了
 - 得再删一条新边才能断
 - 删哪条新边树都不会断
- 如何判断?
- 对于一条新边 $\langle u, v \rangle$, $u \rightarrow \text{LCA}(u, v) \rightarrow v \rightarrow u$ 形成了一个环。
- 对于这个环上的所有树边, 我们记作被覆盖了一次。
- 对树边的覆盖次数进行讨论。

习题精讲——POJ3417

- 1. 没有被覆盖过的树边
- 此时删除树边后，树直接断裂了，任意选择一条新边都可以满足要求。
- 故产生了 m 种方案。

习题精讲——POJ3417

- 2. 恰好被覆盖过一次的树边
- 记覆盖这个树边的新边为 e
- 此时删除树边后，原来的树边加上新边 e ，恰好形成了一颗新的树。
- 为了让树断裂，只能选择断掉新边 e 。
- 因为不考虑其他的新边，只要 e 在，图就是连通的，必须断掉。
- 故产生了1种方案。

习题精讲——POJ3417

- 3. 被覆盖过两次及以上的树边
- 记覆盖这个树边的新边为 e_1, e_2, e_3, \dots
- 思路同上，删除树边后，任何一条 e_i 都可以使图连通，但你只能删掉一条，一定不能使树断裂。
- 故产生0种方案。

习题精讲——POJ3417

- 综上所述，只需要统计每条树边被覆盖的次数然后计算答案即可。
- 令 $\text{cnt}[u]$ 表示 u 的指向父亲的那条边被覆盖的次数
- 对于一条新边 $\langle u, v \rangle$:
 - $\text{cnt}[u]++$, $\text{cnt}[v]++$, $\text{cnt}[\text{LCA}(u, v)] -= 2$
- 试着对每个节点 u ，都沿着往根的方向对每个点的值都加上 $\text{cnt}[u]$
- LCA到根的部分都被抵消了！

习题精讲——POJ3417

- 求和的过程只要在dfs的时候即可完成。
- 对于每一条新边，都要计算两个端点的LCA。
- 这一步可以用tarjan算法离线解决。
- 因此我们所有的操作都是线性的，在 $O(n + m)$ 的时间复杂度内解决了这道题目。
- 快去动手试一试吧！

下节课再见