知识精炼（二）

主讲人：邓哲也

HDU 5514 Frogs

有 m 个石头围成一圈，编号分别为 0 ~ m-1.

现在有 n 只青蛙从 0 开始跳，第 i 只青蛙的步长是 a[i]。

也就是如果 i 号青蛙从位置 j 起跳，会落在 (j + a[i]) % m 的位置上。青蛙会永无止境的跳。

现在告诉你：n，m，a[1..n]，问至少被经过一次的石头的编号之和是多少。

$n \leqslant 10^4$，$m \leqslant 10^9$，$1 \leqslant a[i] \leqslant 10^9$

样例：n = 2, m = 12, a = [9, 10]

被经过的石头：{9, 6, 3, 10, 8, 4, 2, 0}，编号之和为 42.

HDU 5514 Frogs

对于 m = 12

步长为 9，经过的石头为『9，6，3』

步长为 10，经过的石头为『10，8，6，4，2』

可以发现，步长为 k 时，经过的石头为 gcd(k, m) 的倍数。

对答案的贡献是一个等差数列：

和为 gcd(k, m) * (m / gcd(k,m)) * (m / gcd(k,m) - 1) / 2

HDU 5514 Frogs

可以看到对于样例，

gcd(9, 12) = 3

gcd(10, 12) = 2

对于 6 我们计算了两遍。

这里就用容斥的思想，对于 6 也算一遍等差数列，从答案中减去。

HDU 5514 Frogs

更一般的，我们对于每个 a[i] 都求出 gcd(a[i], m) 作为他们的步长。

因为可能的步长肯定是 m 的因子。

所以我们可以预处理出 m 的因子。

```
for(int i = 1;i <= sqrt(m);i ++){
        if (m % i == 0){
                p[++ cnt] = i;
                if (i * i != m) p[++ cnt] = m / i;
        }
sort(p + 1, p + cnt + 1);
```

HDU 5514 Frogs

用一个数组 f[i] 表示至少有一个步长会整除 i。

也就是首项为 0，公差为 i 的等差数列会被经过。

因此只要读入所有的 a[i]，令 a[i] = gcd(a[i], m).

所有 a[i] 的倍数 k，我们要记为 f[k] = 1.

HDU 5514 Frogs

然后我们从小到大枚举 k。

如果 f[k] = 1，显然我们要把这个公差为 k 的等差数列加入答案。

同时要把所有 k 的倍数 p，都令 f[p] -= f[k].

表示 p 的因子已经被计算过一遍了，不需要再计算 p 了。

HDU 5514 Frogs

当然对于样例来说 f[2]=1，f[3]=1，f[6]=1

f[6]被减了两次

也就是说以 6 为公差的等差数列需要被乘上 -1，加入答案

（因为被计算了两次）

HDU 5514 Frogs

对于步长 2， 3， 5

f[2]=1, f[3]=1, f[5]=1, f[6]=1, f[10]=1, f[15]=1, f[30]=1

处理完 2， 3， 5之后：

f[6]=-1, f[10]=-1, f[15]=-1, f[30]=-2

处理完 6， 10， 15 之后：

f[30]=1

HDU 5514 Frogs

```
for (int i = 1;i <= cnt;i ++)
    if (f[i] != 0){
        ans += 等差数列求和 * f[i];
        for (int j = i + 1;j <= cnt;j ++)
            if (p[j] % p[i] == 0)
                f[j] -= f[i];
    }
```

下节课再见