差分约束系统

主讲人：邓哲也

大纲

- 差分约束系统
- 差分约束系统与最短路
- 有向图的构造
- 差分约束系统求解
- 差分约束系统无解的情形

差分约束系统

- 假设有这样一组不等式：

$$\begin{gathered} x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 - x_5 \leq -1 \\ x_2 - x_5 \leq 1 \\ x_3 - x_1 \leq 5 \\ x_4 - x_1 \leq 4 \\ x_4 - x_3 \leq -1 \\ x_5 - x_3 \leq -3 \\ x_5 - x_4 \leq -3 \end{gathered}$$

- 每个不等式都是两个未知数的差小于等于某个常数（大于等于也可以）
- 这样的不等式组，我们称为差分约束系统。

差分约束系统

$$x_1 - x_2 \le 0$$
$$x_1 - x_5 \le -1$$
$$x_2 - x_5 \le 1$$
$$x_3 - x_1 \le 5$$
$$x_4 - x_1 \le 4$$
$$x_4 - x_3 \le -1$$
$$x_5 - x_3 \le -3$$
$$x_5 - x_4 \le -3$$

- 该问题的一个解为 x = (-5, -3, 0, -1, -4)
- 另一个解为 x’ = (0, 2, 5, 4, 1)
- 可以发现 x’ 等于 x 中每个元素 + 5.
- 显然 x + d 都是该系统的解。
- 因此，这个不等式组要么无解，要么就有无数组解。

差分约束系统与最短路

- 回顾一下单源最短路问题中的三角形不等式。
  - d[v] <= d[u] + edge[u][v]
- 这是显然的，否则 d[v] 可以用 d[u] + edge[u][v] 更新。
- 把 d[u] 移到左边： d[v] - d[u] <= edge[u][v]
- 正好符合差分约束系统的格式！
- 一个差分约束系统就对应着一张有向图！

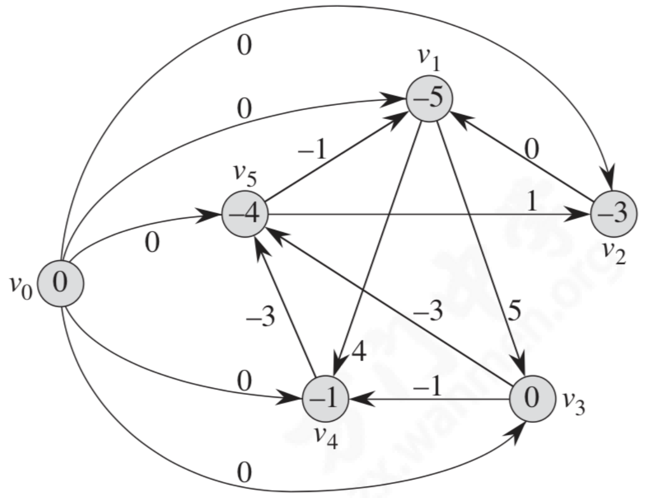
有向图的构造

1. 每个不等式中的每个未知数 x_i 对应图中的一个顶点 V_i。
2. 把所有不等式都化成图中的一条边，对于不等式 $x_i - x_j \le c$，把它画成三角形不等式 $x_i \le x_j + c$，就可以化作边 $\langle V_j, V_i \rangle$，边权为 c
3. 还需要增加源点，因为只把不等式组转化为边不能保证源点可以到达所有点。我们自己造一个源点 V_0，给所有的点都加上 $\langle V_i, V_0 \rangle$ 的边权为 0 的边。

有向图的构造

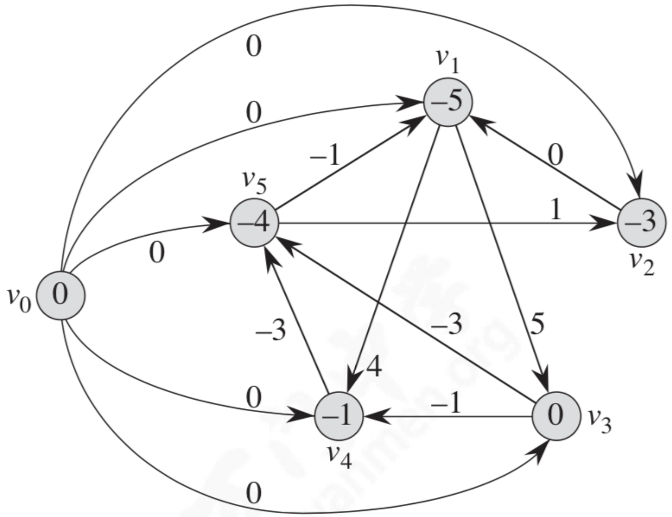
$$x_1 - x_2 \le 0$$
$$x_1 - x_5 \le -1$$
$$x_2 - x_5 \le 1$$
$$x_3 - x_1 \le 5$$
$$x_4 - x_1 \le 4$$
$$x_4 - x_3 \le -1$$
$$x_5 - x_3 \le -3$$
$$x_5 - x_4 \le -3$$

- 于是我们就得到了这样的有向图



差分约束系统求解

- 在这张图上，每一个边都代表差分约束系统中的一个不等式。
- 现在以 V_0 为源点，求单源最短路径。
- 由于存在负权边，必须用 Bellman-Ford 或 SPFA 算法。
- 得到的最短路径数组 dist[] = {-5, -3, 0, -1, -4} 就是一组合法解。



差分约束系统无解的情形

- 前面所描述的差分约束系统也有可能出现无解的情况，也就是从源点到某一个顶点不存在最短路径。
- 也就是——有向图中存在负权值回路，使得最短路径无穷小。
- 无解的差分约束系统是什么样子的呢？
- 比如下面这个例子，试着画出他对应的有向图。

$$x_1 - x_5 \le -5$$
$$x_4 - x_1 \le 3$$
$$x_5 - x_4 \le -1$$

下节课再见