知识精炼（一）

主讲人：邓哲也

BZOJ 1096 仓库建设

公司有 N($1 \leqslant N \leqslant 10^6$) 个工厂，由高到低分布在一座山上。工厂1在山顶，N在山脚。现在需要在某些工厂建立一些仓库，已知第 i 个工厂距离 1 号工厂的距离是 x[i]，目前有 p[i] 件成品，在第 i 个工厂建立仓库的费用是 c[i]。对于没有建立仓库的工厂，其产品应该被运往其他的仓库进行储藏，且只能往山下运，一件产品运送一个单位距离的费用是 1。请你找出一个建设仓库的方案，使得总的费用最小。

样例：（答案：32 在 1 和 3 建立工厂）

3

0 5 10

5 3 100

9 6 10

BZOJ 1096 仓库建设

基本思路：

用 f[i] 表示在第 i 个工厂建立仓库产生的最小花费。

状态转移：

$f[i] = \min\{f[j] + w(j,i) \mid 1 \le j < i\} + c[i]$

$w(j,i) = p[j+1](x[i]-x[j+1]) + p[j+2](x[i]-x[j+2]) + \cdots + p[i-1](x[i]-x[i-1])$

$= x[i]*\mathrm{sum}(p[j+1..i]) - p[j+1]*x[j+1] - \cdots - p[i-1]*x[i-1]$

BZOJ 1096 仓库建设

$w(j,i) = x[i]*sum(p[j+1..i]) - p[j+1]*x[j+1] - \cdots - p[i-1]*x[i-1]$

我们用 $P[i]$ 表示 $p[1] + p[2] + \cdots + p[i]$

用 $Q[i]$ 表示 $p[1]x[1] + p[2]x[2] + \cdots + p[i]x[i]$

那么 $w(j,i) = x[i](P[i]-P[j]) - (Q[i]-Q[j])$

BZOJ 1096 仓库建设

$w(j,i) = x[i](P[i]-P[j]) - (Q[i]-Q[j])$

对于 $f[i]$，我们对比两个决策 j 和 k

如果 $j > k$ 且从 j 转移更优，那么有：

$f[j] + w(j,i) < f[k] + w(k,i)$

$\Rightarrow f[j] + x[i]P[i] - x[i]P[j] - Q[i] + Q[j] <$

$\quad f[k] + x[i]P[i] - x[i]P[k] - Q[i] + Q[k]$

$\Rightarrow (f[j] + Q[j]) - P[j]x[i] < (f[k] + Q[k]) - P[k]x[i]$

$\Rightarrow (f[j] + Q[j]) - (f[k] + Q[k]) < x[i](P[j] - P[k])$

注意到 $j > k$ 那么 $P[j] - P[k] > 0$ ，可以除到左边。

BZOJ 1096 仓库建设

$w(j,i) = x[i](P[i]-P[j]) - (Q[i]-Q[j])$

如果 $j > k$ 且从 j 转移更优，那么有：

$f[j] + w(j,i) < f[k] + w(k,i)$

$\Rightarrow (f[j] + Q[j]) - (f[k] + Q[k]) < x[i](P[j] - P[k])$

对于第 i 个点，横坐标可以看成 $P[i]$，纵坐标是 $f[i] + Q[i]$

可以发现横坐标是递增的。

每次计算 $f[i]$ 的时候，相当于计算 $(f[j] + Q[j]) - x[i]P[j]$ 的最小值。

BZOJ 1096 仓库建设

每次计算 f[i] 的时候，相当于计算 (f[j] + Q[j]) - x[i]P[j] 的最小值。

f[i] = min (-x[i] * P[j] + (f[j] + Q[j]))

F = min (-kx + y)

即 y = kx + F 的 y 轴截距最小

即 y = x[i] * P[j] + f[i] 的最小截距。

也就是一条斜率为 x[i] 的直线自下而上碰到的第一个点就是答案。

BZOJ 1096 仓库建设

我们只要维护一个斜率递增的下凸壳即可。

不在凸壳上的点一定没用（几何意义）

每次给定一个斜率 x[i]，我们只要在下凸壳上找到一个点使得它和前一个点的斜率小于 x[i]，和下一个点的斜率大于等于 x[i]，这个点就是最优的点。

注意到 x[i] 也是递增的。

因此最优的点是具有单调性，也即决策具有单调性。

BZOJ 1096 仓库建设

```
double slope(int i, int j){
    long long dx = P[i] - P[j];
    long long dy = f[i] - f[j] + Q[i] - Q[j];
    if (!dx) return (dy >= 0) ? 1e30 : -1e30;
    return (double)dy / (double)dx;
}
```

BZOJ 1096 仓库建设

```
int main(){
    scanf("%d", &n);
    for(int i = 1;i <= n;i ++){
        scanf("%d%d%d", &x[i], &p[i], &c[i]);
        P[i] = P[i - 1] + p[i];
        Q[i] = Q[i - 1] + 1LL * p[i] * c[i];
    }
```

BZOJ 1096 仓库建设

```
        int s = 0, e = 0;
        q[0] = 0;
        for(int i = 1;i <= n;i ++){
                while (s < e && slope(q[s], q[s + 1]) <= x[i]) s ++;
                f[i] = f[q[s]] + x[i] * (P[i] - P[q[s]]) - (Q[i] - Q[q[s]]) + c[i];
                while (s < e && slope(q[e], q[e - 1]) >= slope(i, q[e])) e --;
                q[++ e] = i;
        }
        printf(“%lld\n”, f[n]);
        return 0;
}
```

下节课再见