容斥原理

主讲人：邓哲也

容斥原理

【例】计算 1 到 100 中不能被 6 整除的整数个数。

考虑问题的反面： 1 到 100 中有几个数能被 6 整除。

答案是 100 / 6 = 16个

因此 1 到 100 中有 100-16=84 个整数不能被 6 整除。

这个就是容斥原理应用的最简单的例子。

容斥原理

设 P_1 和 P_2 是两个性质（例如“被6整除”）

我们想统计既不具有 P_1 也不具有 P_2 性质的物体的个数。

可以先排除掉具有 P_1 的物体个数

然后再排除掉具有 P_2 的物体个数

由于同时具有两种性质的物体被排除了两次，所以我们要把

他们重新算回来——加上同时具有 P_1 和 P_2 的物体个数。

容斥原理

集合 S 中不具有 $P_1\ P_2 \ldots P_n$ 的物体个数：

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| =$$

$$|S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

容斥原理

集合 S 中至少具有 P_1 P_2 ... P_n 之一的物体个数：

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| =$$

$$\sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

容斥原理

【例】求 1 到 1000 中不能被 5， 6， 9 整除的数。

【解】被 5 整除：1000 / 5 = 200

被 6 整除： 1000 / 6 = 166

被 9 整除： 1000 / 9 = 111

同时被 5 和 6 整除（LCM(5, 6)=30），1000 / 30 = 33

同时被 5 和 9 整除 (LCM(5,9)=45)，1000 / 45 = 22

同时被 6 和 9 整除 (LCM(6,9)=18)，1000 / 18 = 55

同时被 5，6，9 整除 （LCM(5,6,9)=90），1000/90=11

答案即为 1000-200-166-111+33+22+55-11=622

容斥原理

【例】字母 MATHISFUN 存在多少种排列使得 MATH， IS， FUN 都不作为连续字母出现？

【解】首先假设MATH连续出现，MATH,I,S,F,U,N，有 6！种排列。

假设IS连续出现，M,A,T,H,IS,F,U,N，有 8！种排列。

假设FUN连续出现，M,A,T,H,I,S,FUN，有 7！种排列。

假设MATH和IS连续出现，MATH,IS,F,U,N 有 5！种排列。

假设MATH和FUN连续出现，MATH,I,S,FUN 有 4！种排列

假设IS和FUN连续出现，M,A,T,H,IS,FUN 有 6！种排列

假设MATH,IS,FUN连续出现，MATH,IS,FUN 有 3！种排列

答案就是9!-6!-8!-7!+5!+4!+6!-3!=317658

容斥原理

【例】求出多重集合 $S=\{a, a, a, b, b, b, b, c, c, c, c, c\}$ 的10-组合的个数。

【解】对于集合 $S^* =\{\infty*a,\ \infty*b,\ \infty*c\}$。

性质1：10-组合中有大于3个a

性质2：10-组合中有大于4个b

性质3：10-组合中有大于5个c

我们要求的就是不满足以上三条性质的10-组合。

容斥原理

$|S| = \binom{10+3-1}{10} = 66$

A_1中 a至少要出现 4次，因此剩下的6个可以任选

$|A_1| = \binom{6+3-1}{6} = 28$

同理：

$|A_2| = \binom{5+3-1}{5} = 21$

$|A_3| = \binom{4+3-1}{4} = 15$

容斥原理

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{1+3-1}{1} = 3$$

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{0+3-1}{0} = 1$$

$$|A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

答案 = 66-(28+21+15)+(3+1+0)-0 = 6

也就是（3a, 4b, 3c)，(3a, 3b, 4c)，(3a, 2b, 5c)，(2a, 4b, 4c)，(2a, 3b, 5c)，(a, 4b, 5c)

下节课再见