特殊计数序列

主讲人：邓哲也

Catalan 数

卡塔兰数是组合数学中一个常在各种计数问题中出现的数列。

以比利时的数学家欧仁·查理·卡特兰（1814－1894）命名。

卡塔兰数的一般项公式为 $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$

前10项为：1，1，2，5，14，42，132，429，1430，4862

Catalan 数的计算

另一个表达形式： $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \quad \text{for } n \geq 1$

递推关系（计算复杂度 O(n²)）

$$C_0 = 1 \quad \text{and} \quad C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i\, C_{n-i} \quad \text{for } n \geq 0.$$

递推关系（计算复杂度 O(n)）

$$C_0 = 1 \quad \text{and} \quad C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n,$$

Catalan 数的组合学意义

（1）从（0，0）点沿第一象限的格线到（n，n）点的不穿越方格对角线的最短路径数。

（2）用 n-1 条互不交叉的对角线把 n+2 条边（n≥1）的凸多边形拆分三角形化的方法数。

（3）甲乙两人比赛乒乓球，最后结果为 n:n，比赛过程中甲始终不落后于乙的计分种数。

Catalan 数的组合学意义

（4）n 个点的有序二叉树的个数

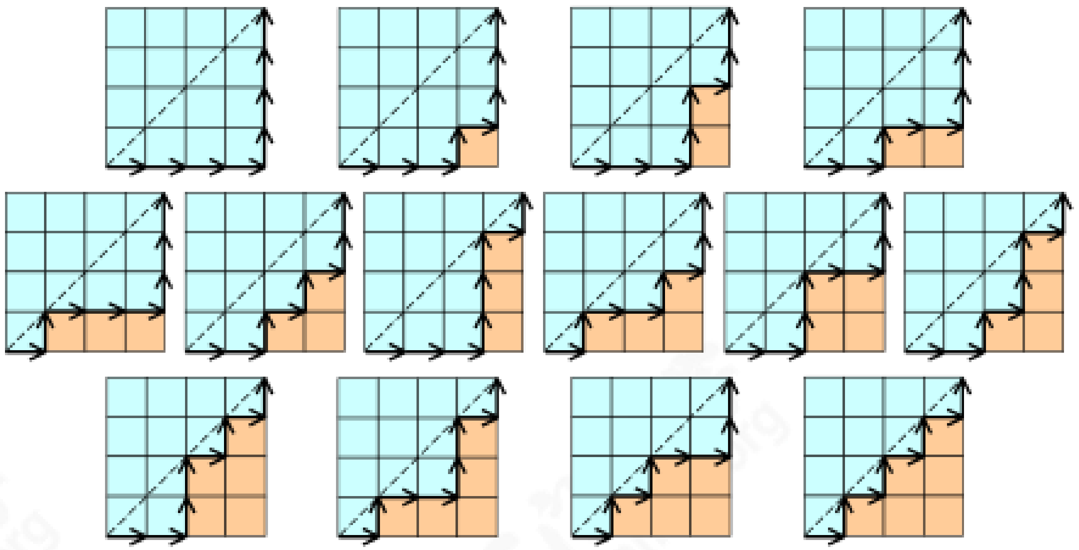
（5）n 个叶子的完全二叉树的个数

（6）圆周上 2n 个点连成的 n 条两两互不相交的弦分割圆的方案数。

Catalan 数的组合学意义

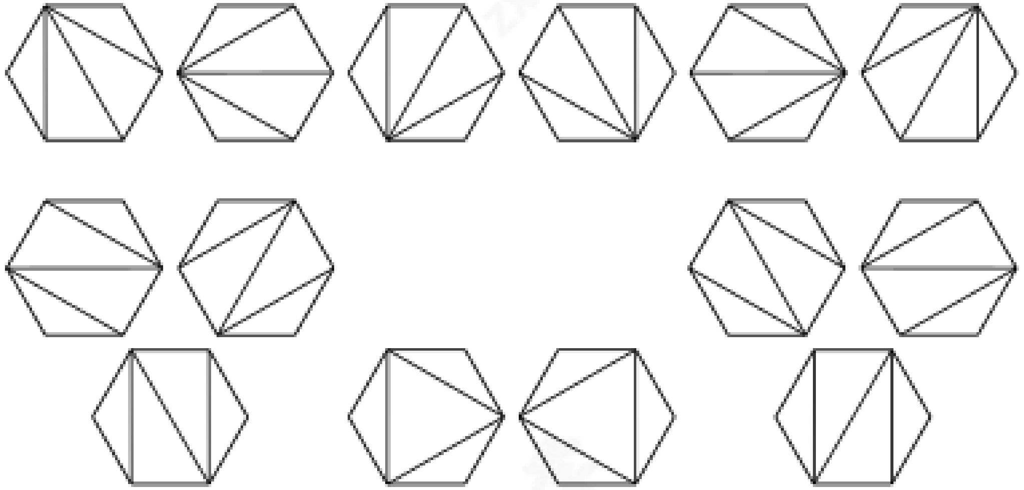
C_n 表示所有在n × n格点中不越过对角线的单调路径的个数。

一个单调路径从格点左下角出发，在格点右上角结束，每一步均为向上或向右。



Catalan 数的组合学意义

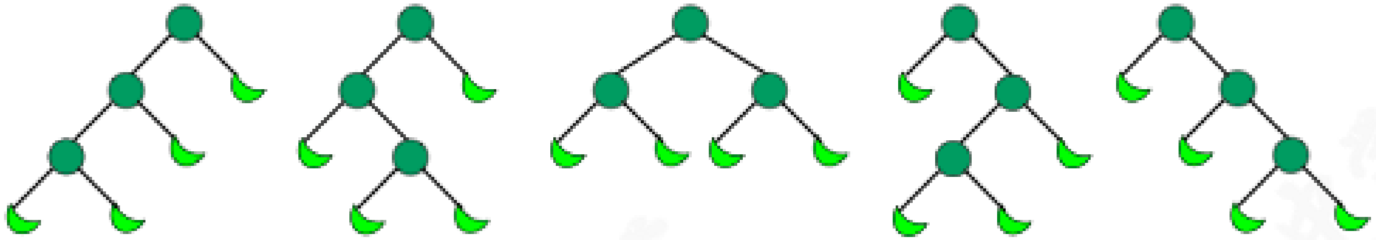
C_n表示通过连结顶点而将n + 2边的凸多边形分成三角形的方法个数。



Catalan 数的组合学意义

C_n表示有n个节点组成不同构二叉树的方案数。下图中，n等于3，圆形表示节点，月牙形表示什么都没有。

C_n表示有2n+1个节点组成不同构满二叉树的方案数。下图中，n等于3，圆形表示内部节点，月牙形表示外部节点。本质同上。



第一类 Stirling 数

第一类 Sirling 数是有正负的，其绝对值是 n 个元素的项目分作 k 个环排列的方法数目。常用的表示方法有

$\boldsymbol{s(n,k)}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{k} \end{bmatrix}$

比如 s(4,2) = 11:

{A,B},{C,D} | {A,C},{B,D} | {A,D},{B,C} | {A},{B,C,D}

| {A},{B,D,C} | {B},{A,C,D} | {B},{A,D,C} |

{C},{A,B,D} | {C},{A,D,B} | {D},{A,B,C} | {D},{A,C,B}

第一类 Stirling 数

给定 $s(n,0)=0$， $s(1,1)=1$，有递归关系：

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k)$$

考虑第 n 个物品，n 可以单独构成一个非空循环排列，这样前 n-1 种物品构成 k-1 个非空循环排列。

也可以前 n-1 个物品组成 k 个非空循环排列，而第 n 个物品插入第 i 个物品的左边。

第一类 Stirling 数

$$|s(n,1)| = (n-1)!$$

$$s(n,k) = (-1)^{n+k}|s(n,k)|$$

$$s(n,n-1) = -C(n,2)$$

$$s(n,2) = (-1)^n (n-1)!\, H_{n-1}$$

$$s(n,3) = \frac{1}{2}(-1)^{n-1}(n-1)![(H_{n-1})^2 - H_{n-1}^{(2)}]$$

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k$$

第二类 Stirling 数

第二类 Sirling 数是 n 个元素的集定义 k 个等价类的方法数目。常用的表示方法有 S(n, k), $\left\{ {n \atop k} \right\}$.

比如 S(4, 2) = 7:

{A, B}, {C, D}　{A, C}, {B, D}　{A, D}, {B, C}

{A}, {B, C, D}　{B}, {A, C, D}　{C}, {A, B, D}　{D}, {A, B, C}

第二类 Stirling 数

给定 $S(n,n)=1$，$S(n,1)=1$，有递归关系：

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$$

考虑第 n 个物品，n 可以单独构成一个非空集合，这样前 n-1 种物品构成 k-1 个集合。

也可以前 n-1 个物品组成 k 个集合，第 n 个物品放入 k 个中的任意一个。

第二类 Stirling 数

$$S(n, n-1) = C(n, 2) = n(n-1)/2$$

$$S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$$

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} C(k, j) j^n$$

错排问题

考虑一个有n个元素的排列，若一个排列中所有的元素都不在自己原来的位置上，那么这样的排列就称为原排列的一个错排。

n 个元素的错排数记为 D_n

D_n 的前几项： 0， 1， 2， 9， 44， 265， 1854， 14833

错排问题

显然 $D_1=0$，$D_2=1$，当 n≥3时，不妨假设 n 排在了第 k 位，

且1 <= k <= n-1

当 k 排在第 n 位时，除了 n 和 k 以外还有 n-2 个数，

错拍数为 D_{n-2}

当 k 不在第 n 位时，那么将第 n 位重新考虑为第 k 位，

这时包括 k 在内的剩下 n-1 个数的每一种错排都等价于只

有 n-1 个数时的错排。其错排数为 D_{n-1}

因此，$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

错排问题

$$D_n = n!M_n = n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}).$$

$$D_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + 0.5 \right\rfloor$$

下节课再见