知识精炼（三）

主讲人：邓哲也

GCD之和

给出一个 n，求：

$$\sum_{i=1}^{n} \gcd(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n})$$

$n \leqslant 10^9$

GCD之和

因为 gcd(i,n) ｜ n

我们可以枚举 n 的因子 d。

计算 gcd(i,n)=d (1 <= i <= n)的个数。

等价于 gcd(i, n/d)=1 (1 <= i <= n/d)的个数。

等于Φ(n/d)

因此答案等于：

$$\sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) d$$

GCD之和

$$f(n)=\sum_{d|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)d$$

注意到 f 是积性函数。

因为 f 可以看做 φ 函数和 id 函数的狄利克雷卷积。

我们只要思考 $f(p^a)$ 如何计算即可。

GCD之和

注意到 $\phi(p^a) = p^a - p^{a-1}$

$$f(p^a) = (p-1)p^{a-1} + (p-1)p^{a-2}p + \cdots + (p-1)p^0p^{a-1} + p^a$$

$$= a(p-1)p^{a-1} + p^a$$

$$= (ap + p - a)p^{a-1}$$

GCD之和

```
for (long long i = 2;i <= sqrt(n);i ++){
        if (n % i == 0){
                long long cnt = 0, t =  1;
                while(n % i == 0) n /= i, cnt ++, t *= n;
                ans *= (cnt * i + i - cnt) * (t / i);
        }
}
if (n > 1) ans *= 2 * n - 1;
```

GCD之和2

给出一个 n，求：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\gcd(i,j)$$

$n \leqslant 10^6$

10^6组询问。

GCD之和2

我们设

$$f(n)=\sum_{j=1}^{n}\gcd(j,n)$$

要求的就是

$$\sum_{i=1}^{n}f(i)$$

GCD之和2

之前我们已经证明了：

$$f(n)=\sum_{d|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)d$$

且 f 是积性函数。

$f(p^a) = (ap + p - a)p^{a-1}$

在线性筛的过程中可以O(n)求出 f(n)。

回答询问的时候回答前缀和即可。

下节课再见