

最近公共祖先 ——Tarjan算法



主讲人：邓哲也



大纲

➤ Tarjan算法离线求LCA

➤ 三种算法比较

➤ 实战演练

Tarjan算法离线求LCA

- 之前我们介绍的两种算法都是在线的，也就是给你一对 (u, v) ，你能立即返回结果。
- 今天我们来讲一种离线的算法，也就是给你所有的询问 (u, v) ，然后重新组织查询顺序以便得到更高效的处理方法。
- Tarjan算法是一个常见的用于解决LCA问题的离线算法，它结合了DFS和并查集，整个算法是线性的。

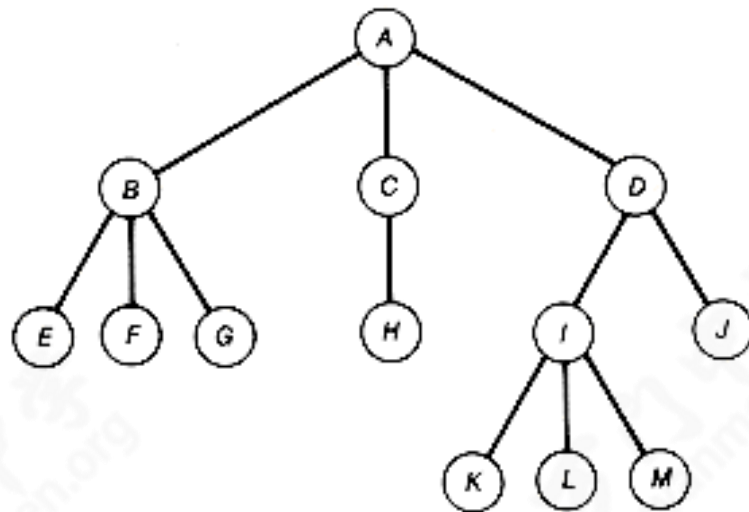
Tarjan算法离线求LCA

- 伪代码

- tarjan(u) {
 - for each(u, v) { // 枚举u的子节点v
 - tarjan(v)
 - merge(v, u) // 把v合并到u上
 - vis[v] = 1
- }
- for each(u, v) // 枚举和u相关的询问
 - if (vis[v])
 - LCA(u, v) = find(v)
- }

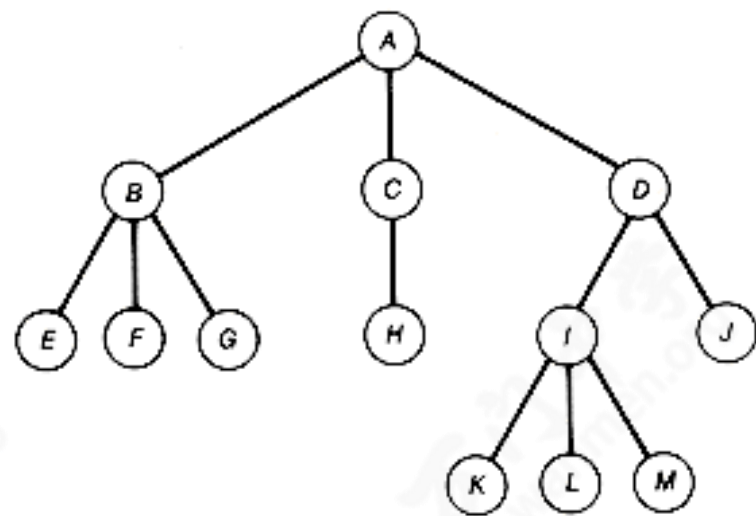
- 如果不太理解，我们来看一组例子：

- 询问<E, G>, <F, D>, <K, J>的LCA



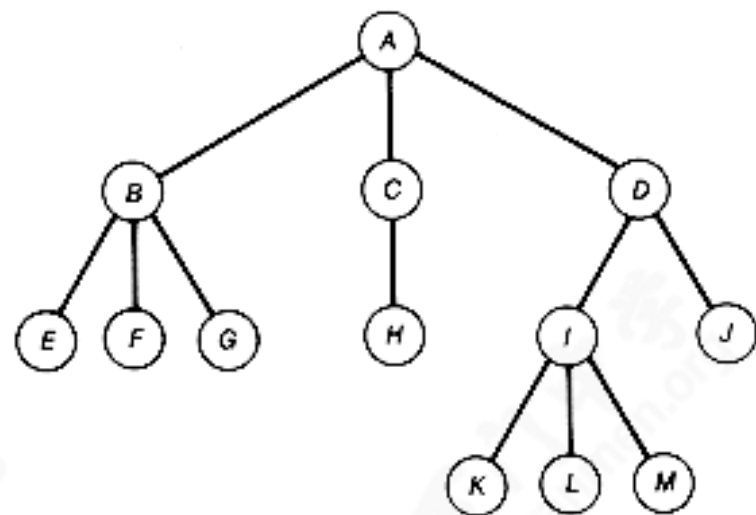
Tarjan算法离线求LCA

- 询问 $\langle E, G \rangle$, $\langle F, D \rangle$, $\langle K, J \rangle$ 的LCA
- $f[]$ 数组为并查集的父节点数组, 初始化 $f[i] = i$
- $vis[]$ 数组为是否访问过的数组, 初始化为0
- $A \rightarrow B \rightarrow E$, 发现E没有子节点, 寻找与其相关的询问, 发现有 $\langle E, G \rangle$, 但是 $vis[G]=0$, 所以不操作, 返回B, $vis[E]=1$, $f[E]=B$.
- 搜索F, 发现有询问 $\langle F, D \rangle$, 但是 $vis[D]=0$, 所以不操作, 返回B, $vis[F]=1$, $f[F]=B$.
- 搜索G, 发现有询问 $\langle E, G \rangle$, 且 $vis[E]=1$, 得到 $LCA(E, G) = find(E) = B$, 然后返回B, $vis[G]=1$, $f[G]=B$.
- B搜索完毕, 返回A, $vis[B]=1$, $f[B]=A$.



Tarjan算法离线求LCA

- 询问 $\langle E, G \rangle$, $\langle F, D \rangle$, $\langle K, J \rangle$ 的LCA
- $A \rightarrow C \rightarrow H \rightarrow C \rightarrow A$, $\text{vis}[C] = \text{vis}[H] = 1$, $f[H] = C$, $f[C] = A$.
- $A \rightarrow D \rightarrow I \rightarrow K$, 发现询问 $\langle K, J \rangle$, 但 $\text{vis}[J] = 0$, 所以不操作, 返回I, $\text{vis}[K] = 1$, $f[K] = I$.
- 搜索L和M, 无操作, $f[L] = f[M] = I$, $\text{vis}[L] = \text{vis}[M] = 1$, 返回I
- I搜索完了, 返回D, $f[I] = D$, $\text{vis}[I] = 1$
- 搜索J, 发现询问 $\langle K, J \rangle$, 且 $\text{vis}[K] = 1$, 得到 $\text{LCA}(K, J) = \text{find}(K) = D$, 返回D.
- D搜索完了, 发现询问 $\langle F, D \rangle$, 且 $\text{vis}[F] = 1$, 得到 $\text{LCA}(F, D) = \text{find}(F) = A$, 返回A.
- A搜索完了, 没有找到询问, 算法结束.



Tarjan算法离线求LCA

- 利用dfs序和并查集，我们在 $O(n + q)$ 的时间复杂度内完美的解决了离线查询LCA问题。

三种算法比较

算法	在线 or 离线	预处理复杂度	单次询问复杂度
倍增	在线	$O(n \log n)$	$O(\log n)$
欧拉序+RMQ	在线	$O(n \log n)$	$O(1)$
Tarjan	离线	$O(n)$	$O(1)$

实战演练

- 洛谷P3379
 - 链接: <https://www.luogu.org/problemnew/show/P3379>
 - 给定一棵有根多叉树, 请求出指定两个点直接最近的公共祖先。
 - $N \leq 500,000$, $M \leq 500,000$
- 快来把我们讲过的三种方法都试一试吧!

下节课再见