多重集的排列

主讲人：邓哲也

多重集合的排列

如果 S 是一个多重集，那么 S 的一个 r-排列是 S 的 r 个元素的一个有序排放。如果 S 的元素总个数是 n （包括计算重复元素），那么 S 的 n-排列也将称为 S 的排列。

例如 $S = \{a, a, b, c, c, c\}$，那么 acbc，cbca 都是 S 的4-排列，abaccc，cbcaca 都是 S 的排列。

多重集合的排列

令 S 是一个多重集，它有 k 个不同类型的元素，每一个元素都有无限重复次数，那么 S 的r–排列的个数为 k^r.

多重集合的排列

【例】最多 4 位数字的三进制数有多少个?

【解】从多重集$\{\infty*0, \infty*1, \infty*2\}$中选出 4-排列。

答案是$3^4 = 81$

多重集合的排列

令 S 是一个多重集，有 k 个不同类型的元素，各元素的重数分别为 n_1，n_2，…, n_k。

设 S 的大小为 $n_1+n_2+\cdots+n_k$, 则 S 的排列数等于：

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

多重集合的排列

【例】计算 mississippi 中的字母排列数。

【解】{1M, 4I, 4S, 2P} 的排列数

多重集合的排列

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

这个式子还有一种解释，就是把元素的集合划分成指定大小的部分之后，每部分都给它们贴上一个标签。

多重集合的排列

考虑4个元素的集合{a, b, c, d}，它要被划分成两个集合，每个集合的大小为2. 如果这两部分没有标签，那么有三种划分方式：ab/cd, ac/bd, ad/bc。

如果有标签，比如有黑色和白色，那么ab/cd就对应两种方案：黑ab/白cd，白ab/黑cd

多重集合的排列

令 S 是一个多重集，S 的大小为 $n_1+n_2+\cdots+n_k$, 将 n 个元素的集合划分成 k 组放进带标签的盒子 B_1，$B_2, \cdots, B_k$的方案数等于：

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

其中盒子 B_i中有 n_i 个元素。

多重集合的排列

令 S 是一个多重集，S 的大小为 $n_1+n_2+\cdots+n_k$, 将 n 个元素的集合划分成 k 组放进不带标签的盒子 B_1， $B_2, \cdots, B_k$的方案数等于：

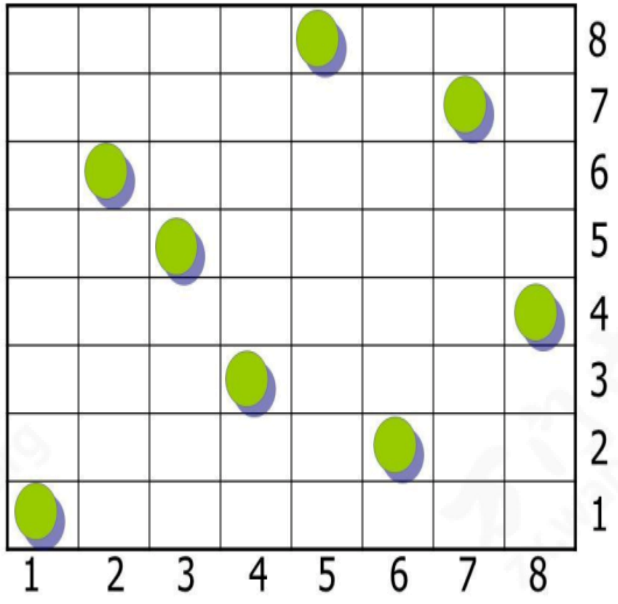
$$\frac{n!}{k!\,n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

其中盒子 B_i中有 n_i 个元素。

非攻击型车问题

在8 ＊ 8的国际象棋棋盘上，两个车能够相互攻击的充要条件是它们位于棋盘的同一行或同一列。

现在的问题是：在8 ＊ 8的额棋盘上对于8个非攻击型车有多少种可能的方法？



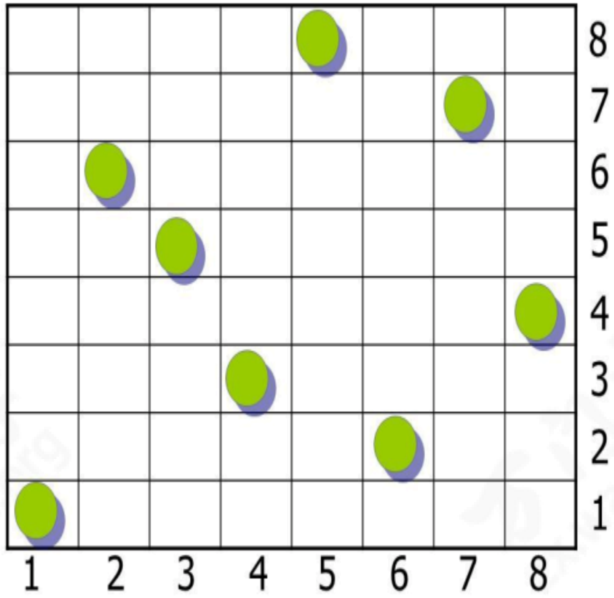
非攻击型车问题

我们给棋盘上的每个方块一对坐标（i, j）。

8个车的坐标一定是（$(1, j_1), (2, j_2), \cdots, (8, j_8)$）

且 j 是 $\{1, 2, \cdots, 8\}$ 的排列。

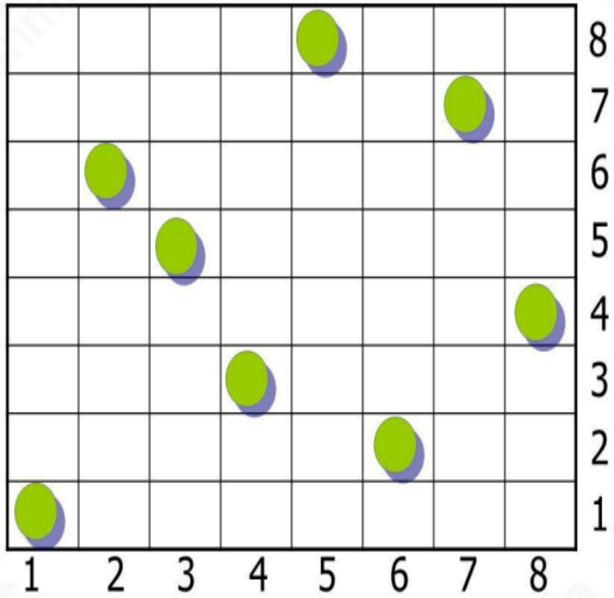
因此答案就是 8!



非攻击型车问题

在上面的例子中，我们假设每个车都是等价的。

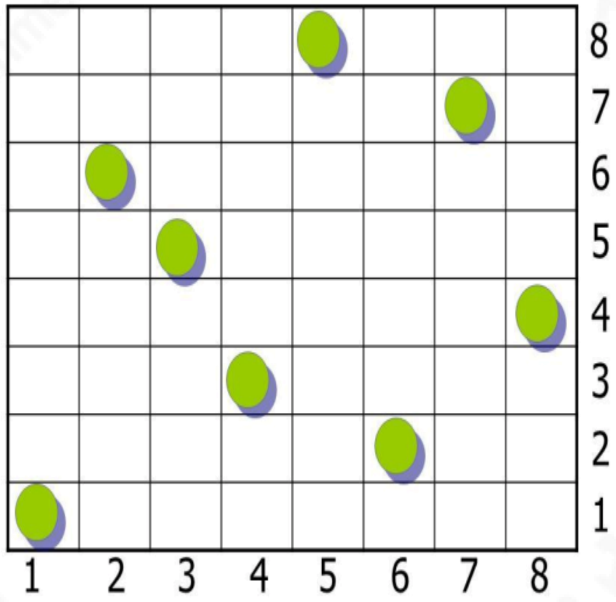
如果 8 辆车各不相同，方案数是多少呢？



非攻击型车问题

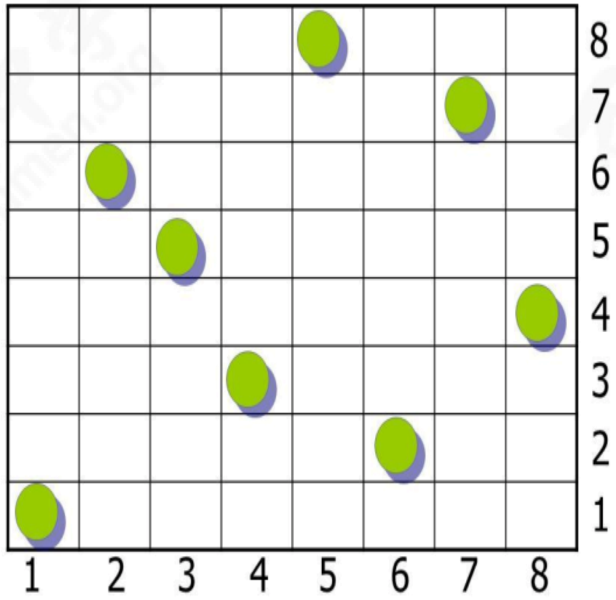
我们只要先摆放好，然后决定一个颜色的排列即可。

方案数是8!8!



非攻击型车问题

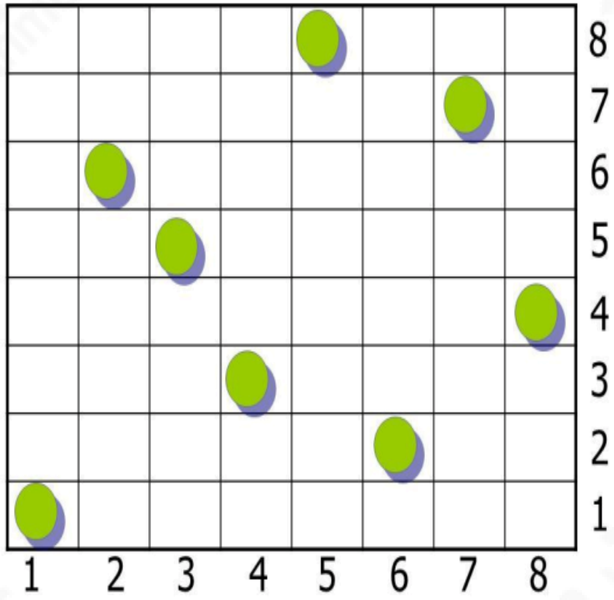
假设有 2 个红车，3 个绿车， 3个蓝车，问方案数？



非攻击型车问题

染色的方案数是 8!/(2!3!3!)

乘上车的摆放方案就是 8!8!/(2!3!3!)



非攻击型车问题

有 n 个车共 k 种颜色，第一种颜色的车有 n_1 个，第二种颜色的车有 n_2 个，…，第 k 种颜色的车有 n_k 个。

将这些车摆放在 n * n 的棋盘上，使没有车能够互相攻击的摆放方法数等于

$$n!\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}=\frac{(n!)^2}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

下节课再见