

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
1.1. Posibles Sistemas Optomecánicos . . . . .	4
1.1.1. Espejos Suspendidos . . . . .	4
1.1.2. Microresonadores . . . . .	4
1.1.3. Objetos Suspendidos o Levitados . . . . .	5
1.1.4. Cristales Optomecánicos . . . . .	5
1.2. Efectos Optomecánicos . . . . .	5
1.3. Aplicaciones . . . . .	6
1.4. Enfriamiento Optomecánico con Parámetros Dependientes del Tiempo . . . . .	7
<b>2. Oscilador Armónico Dependiente del Tiempo</b>	<b>8</b>
2.1. Teoría de Floquet . . . . .	8
2.1.1. Propiedades Básicas . . . . .	9
2.1.2. Estabilidad para Ecuaciones de Segundo Orden . . . . .	10
2.1.3. Estabilidad de las Soluciones de Floquet para la Ecuación de Hill . . . . .	11
2.2. Estados de Floquet en Mecánica Cuántica . . . . .	12
2.3. Oscilador Armónico Dependiente del Tiempo: Solución Mediante Formalismo de Floquet . . . . .	13
2.4. Caso Cuántico . . . . .	14
<b>3. Enfriamiento Optomecánico Dependiente del Tiempo: Caso de Oscilador Armónico Dependiente del Tiempo</b>	<b>16</b>
3.1. Hamiltoniano para Enfriamiento Optomecánico con Parámetros Dependientes del Tiempo . . . . .	16
3.2. Transformación Mediante Operador de Desplazamiento . . . . .	18
3.3. Solución para Oscilaciones Pequeñas . . . . .	19
3.3.1. Solución Explícita para Pequeñas Oscilaciones . . . . .	19
3.3.2. Hamiltoniano para Enfriamiento Láser . . . . .	20
3.3.3. Base de Decaimiento . . . . .	21
3.4. Enfriamiento Laser . . . . .	22
3.5. Análisis Numérico . . . . .	23
<b>4. Enfriamiento Optomecánico Dependiente del Tiempo: Caso de Cavidad con Frecuencia Dependiente del Tiempo</b>	<b>26</b>
<b>5. Transformación al Marco de Referencia Desplazado</b>	<b>31</b>

<b>6. Objetivos Futuros</b>	<b>36</b>
6.1. Objetivos y Calendarización . . . . .	36

# Objetivo General

Se estudia el enfriamiento de un oscilador mecánico acoplado a una cavidad óptica cuando se toma en cuenta que la frecuencia natural de la cavidad es una función del tiempo que depende de la posición del oscilador mecánico. Se ha demostrado que utilizar un formalismo que toma en cuenta la dependencia temporal de la frecuencia natural del oscilador mecánico lleva a un mejor modelo teórico para el sistema[1]. En un trabajo anterior donde se utiliza este formalismo para estudiar el enfriamiento del oscilador mecánico se encontró que la predicción para el enfriamiento es cualitativamente distinta **FiXme Note: Poner “,”** aún a primer orden de perturbación para la dependencia temporal[2]. Esto motiva la pregunta: ¿Qué sucede al tomar en cuenta el efecto de la variación de la longitud de la cavidad sobre la frecuencia de resonancia de la cavidad? En este trabajo se investiga este efecto.

FiXme Note!

# Capítulo 1

## Introducción

La optomecánica es el estudio de la interacción entre elementos ópticos y elementos mecánicos. En este capítulo se dará una breve introducción al tipo de sistemas y de efectos que se consideran parte de la optomecánica.

### 1.1. Posibles Sistemas Optomecánicos

Existen muchas implementaciones posibles de acoplamientos entre elementos ópticos y elementos mecánicos [3]. En esta sección se detallan algunas de las posibilidades más comunes.

#### 1.1.1. Espejos Suspendidos

Estos sistemas consisten de cavidades ópticas donde uno o más de los espejos pueden cambiar de posición y así alterar la longitud de la cavidad. La primera realización experimental de este tipo de sistemas se debe a los primeros esfuerzos para detectar ondas gravitacionales [4]. El sistema consiste en un interferómetro con los espejos montados en masas suspendidas, a manera que una onda gravitacional, al interactuar con las masas cambiaría la posición de los espejos y así la longitud de camino óptico. El propósito de suspender las masas no es *optomecánico* **FiXme Note: No es un un proposito, describirlo mejor**, sin embargo, *las fluctuaciones en la potencia del láser, debido a la incertidumbre en el número de fotones, son un efecto cuántico que impone un límite a la precisión de las mediciones* [5] **FiXme Note: No se entiende, puede haber fluctuaciones en la potencia del laser que no son cuanticas**. Experimentos en este tipo de sistemas han demostrado varios efectos, entre ellos el enfriamiento mediante presión de radiación [6]. También es posible utilizar este tipo de sistemas para estudiar el entrelazamiento cuántico [7] al acoplar dos cavidades al mismo espejo y así lograr entrelazamiento entre los modos de ambos campos.

FiXme Note!

FiXme Note!

#### 1.1.2. Microresonadores

Otro tipo posible de sistema **FiXme Note: optomecanico** son los microresonador o microcavidades. En este tipo de sistemas, es posible confinar a la luz a viajar en modos *whispering gallery*, los cuales implican que la luz es guiada a lo largo del perímetro del resonador, el cual puede tener forma esférica, circular, o

FiXme Note!

toroidal[8]. Si *este* **FiXme Note: no se entiende a que se refiere este** vibra, FiXme Note!  
esto puede alterar el camino óptico de la luz y se logra un acoplamiento **FiXme** FiXme Note!  
**Note: creo que es mejor decir el acoplamiento entre que y que a decir**  
**que el acoplamiento es optomecanico** optomecánico. Es posible fabricar  
resonadores de este tipo con un factor de calidad de  $10^6$  **FiXme Note: esto** FiXme Note!  
**es mucho o poco comparado con que?** [9]. Debido a su tamaño, es posible  
obtener acoplamiento fuerte entre sistemas cuánticos y el resonador[10] **FiXme** FiXme Note!  
**Note: el resonador no es cuantico?**

### 1.1.3. Objetos Suspendidos o Levitados

En este tipo de sistemas, se considera una cavidad óptica rígida donde se coloca un objeto mecánico dentro de la cavidad. Este esquema permite el acoplamiento de objetos mecánicos de tamaños inferiores a la longitud de onda de la luz [3], como por ejemplo una membrana dieléctrica de  $SI_3N_4$  de  $1mm \times 1mm \times 50nm$  de dimensión[11]. En ese caso, se puede observar que parámetros de la cavidad como la sintonización y la finesa dependen del desplazamiento de la membrana. Otra posibilidad consiste en un nano cable de carbón, de aproximadamente  $10^9$  átomos, el cual se coloca dentro de una micro cavidad de Fabri-Perot. Así mismo, se han realizado experimentos donde se levita una gota de Helio líquido dentro de la cavidad[12]. Las propiedades de la cavidad cambian no solo dependiendo de la posición del objeto, sino también de sus modos vibracionales[13].

### 1.1.4. Cristales Optomecánicos

Este tipo de sistema es más reciente que los demás y se basa en redes cristalinas donde se logra acoplar fotones y fonones. En *primera instancia* **FiXme** FiXme Note!  
**Note: instancia de que?** se fabricó una nano viga de silicio [14]. El sistema  
consiste en una nano viga con agujeros espaciados regularmente, lo cual forma  
una red. Se introduce un defecto mediante una reducción cuadrática en la constante de red, de manera simétrica al centro de la viga. Esto genera un potencial efectivo para los modos ópticos y uno análogo para los modos mecánicos. Las vibraciones ocasionan un cierto desplazamiento en la estructura lo cual afecta el potencial efectivo para los modos ópticos y se obtiene el acoplamiento. Una implementación reciente de este tipo de sistemas involucra usar redes cristalinas semi periódicas de diamante para implementar el resonador[15].

## 1.2. Efectos Optomecánicos

En esta sección se da un pequeño resumen de los efectos **FiXme Note: Hay** FiXme Note!  
**que ser consistentes con el uso de la palabra “optomecanico”:** a veces  
**la usas para describir una interaccion, a veces para describir una fami-**  
**lia de efectos, a veces para describir un tipo de sistemas** optomecánicos  
más conocidos y utilizados. Frecuentemente estos efectos **de** **FiXme Note: se** FiXme Note!  
deben a la interacción entre la presión de radiación que la luz incidente aplica  
sobre los elemento mecánicos y la reacción retardada de la cavidad a los cam-  
bios en su *estructura* **FiXme Note: no se entiende que es lo que cambia de** FiXme Note!  
**estrutura, o de que estructura se refiere.** Algunos de estos efectos son:

- **Efecto de Resorte Óptico (optical spring effect)** La presión de radiación depende **FiXme Note:** de la posición del objeto, por lo que esta cambia cuando el objeto se mueve. En particular, en el caso de cavidades con espejos suspendidos, la presión de radiación afecta la constante del resorte ya que genera un desplazamiento en la resonancia de la frecuencia mecánica, el cual se puede utilizar para aumentar o disminuir la frecuencia natural del resorte.[16] FiXme Note!
- **Bi-Estabilidad Óptica (optical bi-stability)** La presión de radiación puede desplazar al objeto mecánico y se espera que se llegue a una posición de equilibrio. Sin embargo, la dependencia del potencial efectivo sobre la posición es no lineal, lo cual lleva a que se generen dos posiciones de equilibrio. Para una presión lo suficientemente fuerte, este efecto se borra y se llega a una posición altamente estable[17].
- **Enfriamiento Optomecánico** **FiXme Note: Creo que se puede explicar mejor, ya que lo entiendes en detalle** A la absorción de fonones (enfriamiento) se le asocia con procesos de dispersión de Raman donde un cuanto sube de nivel mientras que los procesos de emisión (calentamiento) se le asocia con dispersión de Raman donde un fotón decae [18]. Este enfriamiento es posible siempre y cuando el ancho de banda de la cavidad sea mucho menor que la frecuencia de oscilación mecánica. [18] [19] Este régimen solo es válido cuando el acoplamiento optomecánico puede ser tratado como una perturbación, así que el esquema deja de ser valido cuando el acoplamiento es comparable al ancho de banda de la cavidad o a la frecuencia del oscilador mecánico FiXme Note!

### 1.3. Aplicaciones

Existen muchas aplicaciones posibles para los efectos y sistemas utilizados en optomecánica. Este trabajo se concentra principalmente en enfriamiento optomecánico, sin embargo algunas otras posibles aplicaciones son:

- **Estabilización Láser** Al utilizar una cavidad de tipo cristal optomecánico doble (*zipper cavity* en inglés) como base para un láser, se puede obtener un dispositivo tal que su frecuencia, en especial la sensibilidad de está a ruido térmico, se puede estabilizar optomecánicamente[20].
- **Memoria Optomecánica** Se puede crear un sistema de memoria utilizando una cavidad optomecánica compuesta por una guía de ondas y un resonador mecánico ligeramente torcido a manera de tener dos configuraciones posibles, arriba y abajo. Esto lleva a que se genere un potencial de doble pozo asimétrico para el resonador y, con la ayuda de un láser para excitar el sistema y de otro para enfriarlo, es posible realizar un proceso controlado donde se decide en que pozo queda el resonador. Estos dos estados corresponden a 0 y 1 y el sistema no requiere energía para mantenerse en la configuración final, generando un sistema de memoria estable [21].
- **Magnetometría** Al acoplar un material magnetostrictivo al resonador mecánico de una cavidad optomecánica se pueden excitar los eigenmodos del resonador mecánico al aplicar un campo magnético. De esta forma,

la presencia del campo magnético se puede leer en el comportamiento del campo de luz dentro de la cavidad. Esto permite tener un sensor de campos magnéticos de alta precisión que funciona a temperatura ambiente [22].

- **Redes Cuánticas** La optomecánica permite realizar el mapeo de los estados de un campo de luz a los modos vibracionales de un oscilador mecánico [23]. Este tipo de transferencia de información es clave en la formación de redes de información cuánticas.[24]
- **Detección de Cáncer** Los Microtúbulos son una parte clave de la estructura de una célula y se ha estudiado si su interacción con campos electromagnéticos externos puede ser un tratamiento viable para el cáncer[25]. El estudio de las propiedades vibracionales de estas estructuras es clave para esto y se ha propuesto un montaje experimental para realizar estas mediciones mediante un acoplamiento optomecánico[26].

## 1.4. Enfriamiento Optomecánico con Parámetros Dependientes del Tiempo

Este trabajo se enfoca en el enfriamiento optomecánico con parámetros dependientes del tiempo. Uno de los métodos empleados en la búsqueda por mejorar el enfriamiento de un oscilador mecánico acoplado a una cavidad es utilizar un oscilador mecánico cuya frecuencia natural sea función del tiempo [27]. Esta dependencia modifica el cuasi espectro de energía del sistema[1]. En el formalismo empleado en [27] esto no se toma en cuenta, sin embargo, dado que [1] muestra que este no es el enfoque óptimo, se realizó un trabajo que sí toma en cuenta los efectos de la dependencia temporal de la frecuencia natural del oscilador durante la derivación de la temperatura final que se espera del sistema [2]. Los resultados de este trabajo muestran diferencias cuantitativas y cualitativas en el comportamiento de la temperatura del oscilador mecánico, lo cual motiva la pregunta ¿Qué sucede al tomar en cuenta la dependencia temporal de la frecuencia natural de la cavidad?

En esta propuesta se explican los pasos que se siguen para modelar este tipo de sistemas en términos generales y luego se explica como se obtiene la temperatura final del sistema. Finalmente se propone aplicar este formalismo a un sistema donde se toma en cuenta la dependencia temporal de la **FiXme Note: frecuencia de la** cavidad. Se discute la teoría de los sistemas cuánticos abiertos, del oscilador mecánico dependiente del tiempo, y el enfriamiento optomecánico dependiente del tiempo.

FiXme Note!

FiXme Note!

**FiXme Note:** Falta decir algo sobre que pasa con la disipacion (acoplamiento del sistema con el medio ambiente) cuando la frecuencia depende del tiempo

## Capítulo 2

# Oscilador Armónico Dependiente del Tiempo

Antes de proceder a enfriamiento optomecánico es importante saber como modelar de manera cuántica un oscilador armónico con frecuencia natural dependiente del tiempo. Para resolver este problema, se utiliza la teoría de Floquet [28] y se busca una expresión para el Hamiltoniano del sistema expresada en términos de operadores de Floquet, los cuales se definirán más adelante.

### 2.1. Teoría de Floquet

Se desea resolver una ecuación diferencial que involucra coeficientes con dependencia temporal, tal como

$$x' = A(t)x, \quad (2.1)$$

donde la función  $A(t)$  es periódica con periodicidad  $\tau$ . En este caso el teorema de Floquet[28] dice que la solución no necesariamente es periódica pero debe tener la forma

$$x(t) = e^{\mu t}p(t). \quad (2.2)$$

Los valores  $\mu$  se conocen como los exponentes característicos o de Floquet y la función  $p(t)$  es periódica con período  $\tau$ , es decir el mismo periodo que el coeficiente en la ecuación diferencial. Los coeficientes  $\mu$  son, en general, complejos. Claramente, el hecho de que la solución tenga la forma (2.2) puede llevar a que la solución sea divergente con el tiempo, por lo que se desea entender el criterio de estabilidad para este tipo de soluciones. Antes de esto, es necesario establecer algunas definiciones y propiedades, las cuales se presentan sin demostración debido a que no son el enfoque principal de este trabajo. Si el lector se encuentra interesado, el tratamiento se encuentra con mayor detalle en las notas de las cuales surge la sección siguiente [28].



### 2.1.1. Propiedades Básicas

Sea la ecuación (2.1) en  $n$  dimensiones. Esto es, se piensa en  $x$  como un vector de  $n$  dimensiones y en  $A(t)$  como una matriz de  $n \times n$ . En este caso, si la ecuación tiene  $n$  soluciones  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , se define la **matriz fundamental** como la matriz formada utilizando las soluciones como columnas, siempre y cuando estas sean linealmente independientes

$$X(t) = [[x_1][x_2] \dots [x_n]], \quad (2.3)$$

Si  $X(t_0) = I$  la matriz se conoce como la **matriz fundamental principal**. Se tiene que

**Lema:** Si  $X(t)$  es una matriz fundamental, también lo es  $X(t)C$  para cualquier matriz constante y no singular  $C$ .

Y que

**Lema:** Sea  $W(t)$  el Wronskiano de  $X(t)$  el determinante de  $X(t)$  **FiXme**

FiXme Note!

**Note:** algo esta mal en la redaccion, entonces:

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr}[A(s)]ds}. \quad (2.4)$$

Se tiene entonces un teorema

**Teorema:** Sea  $A(t)$  una matriz con periodicidad  $\tau$ . Si  $X(t)$  es una matriz fundamental entonces  $X(t + \tau)$  también lo es y existe una única matriz constante no singular  $B$  tal que:

$$\begin{aligned} \text{i) } X(t + \tau) &= X(t)B \quad \forall t, \\ \text{ii) } \det(B) &= e^{\int_0^t \text{tr}[A(s)]ds}. \end{aligned}$$

Si se toma  $X(0) = I$  entonces  $B = X(\tau)$ . Con esto se pueden definir los **multiplicadores característicos**, los cuales son los valores propios de la matriz  $B$ , y se denominan con la letra  $\rho$ . Estos cumplen que

$$\rho_1 = e^{\mu_1 \tau}, \quad \rho_2 = e^{\mu_2 \tau}, \dots, \rho_n = e^{\mu_n \tau}, \quad (2.5)$$

donde los valores  $\mu$  son los exponentes de Floquet definidos anteriormente. Se cumplen cuatro propiedades:

1) Los multiplicadores característicos de  $B = X(\tau)$  cumplen que

$$\det(B) = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n = e^{\int_0^T \text{tr}[A(s)]ds}. \quad (2.6)$$

2) Trivialmente, como la traza es la suma de los valores propios

$$\text{Tr}[B] = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n. \quad (2.7)$$

3) Los multiplicadores característicos no son únicos, ya que

$$e^{\mu \tau} = e^{(\mu + \frac{2\pi i}{\tau})\tau}. \quad (2.8)$$

4) Los multiplicadores característicos son una propiedad de la ecuación (2.1) y no dependen de la elección de matriz fundamental.

Con estas propiedades, se puede pasar a analizar la estabilidad de las soluciones para el caso específico de ecuaciones de segundo orden.

### 2.1.2. Estabilidad para Ecuaciones de Segundo Orden

Si se piensa en una ecuación diferencial de segundo orden del tipo

$$\ddot{x} + a(t)x = 0, \quad (2.9)$$

donde  $a(t)$  tiene periodo  $\tau$ . Si se toma  $x_1 = x$  y  $x_2 = \dot{x}$ , la ecuación puede re-escribirse como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

si se toma la condición inicial  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , se obtiene una solución de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1^1(t) \\ x_1^1(t) \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

y para la condición inicial  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , se obtiene una solución de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1^2(t) \\ x_1^2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

esto permite generar la matriz  $B$

$$B = \begin{bmatrix} x_1^1(\tau) & x_1^2(\tau) \\ x_1^1(\tau) & x_1^2(\tau) \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

lo cual permite calcular los multiplicadores característicos, ya que

$$\rho_1 \rho_2 = e^{\int_0^\tau \text{Tr}[A(s)] ds} = e^0 = 1, \quad (2.14)$$

y

$$\rho_1 + \rho_2 = \text{Tr}[B] = x_1^1(\tau) + x_1^{(2)}(\tau) = 2\phi. \quad (2.15)$$

Esto permite obtener la ecuación

$$\rho = \phi \pm \sqrt{\phi^2 - 1}, \quad (2.16)$$

o en términos de  $\mu$  **FiXme Note: poner la definicion de  $\phi$  luego despues de cuando la nombras por primera vez** FiXme Note!

$$\cosh(\mu_1 \tau) = \phi. \quad (2.17)$$

Esto lleva a analizar cinco situaciones distintas.

**Caso**  $-1 < \phi < 1$ : En este caso, para algún valor  $\sigma$  se tiene que  $\phi = \cos(\sigma\tau)$  por lo que:

$$\begin{aligned} \rho &= \phi \pm \sqrt{\phi^2 - 1}, \\ &= \cos(\sigma\tau) \pm i \sin(\sigma\tau), \\ &= e^{\pm i\sigma\tau}, \end{aligned}$$

lo cual lleva a una solución general de tipo:

$$x(t) = c_1 \operatorname{Re}(e^{i\sigma t} p(t)) + c_2 \operatorname{Im}(e^{i\sigma t} p(t)), \quad (2.18)$$

la cual es estable y pseudo periódica.

**Caso  $1 < \phi$ :** en este caso  $\rho > 1$  y como  $\rho_1 = \frac{1}{\rho_2}$ , tenemos que  $\mu_1 = -\mu_2$ . Por esto, la solución es de la forma:

$$x(t) = c_1 e^{\mu_1 t} p_1(t) + c_2 e^{\mu_2 t} p_2(t) \quad (2.19)$$

donde las funciones  $p(t)$  son periódicas con periodo  $\pi$  **Fixme Note: el periodo no puede ser siempre  $\pi$ .** La solución es inestable. Fixme Note!

**Caso  $\phi < -1$ :** en este caso se tiene una solución del tipo:

$$x(t) = c_1 e^{\gamma_1 t} q_1(t) + c_2 e^{-\gamma_2 t} q_2(t), \quad (2.20)$$

donde las funciones  $q(t)$  tienen periodo  $2\pi$  y los coeficientes  $\gamma = \mu + \frac{i\pi}{\tau}$ . La solución de nuevo es inestable.

**Caso  $\phi = -1$ :** para este caso también se tiene una solución inestable, de la forma:

$$x(t) = (c_1 + tc_2) q_1(t) + c_2 q_2(t) \quad (2.21)$$

de nuevo la funciones  $q(t)$  tienen periodo  $2\pi$ .

**Caso  $\phi = 1$ :**

para este caso también se tiene una solución inestable, de la forma:

$$x(t) = (c_1 + tc_2) p_1(t) + c_2 p_2(t) \quad (2.22)$$

de nuevo la funciones  $p(t)$  tienen periodo  $\pi$ .

Es muy importante notar que en estos dos últimos casos, esta forma de la solución solo es correcta si la matriz  $B$  tiene un solo eigenvector linealmente independiente. Si este no es el caso, la solución tiene la forma usual con las funciones  $p(t)$  o  $q(t)$ , estos dos casos marcan el límite entre la estabilidad y la inestabilidad en este problema. Finalmente, se verá como estos criterios aplican a una ecuación que será relevante más adelante, la ecuación de Hill.

### 2.1.3. Estabilidad de las Soluciones de Floquet para la Ecuación de Hill

La ecuación de Hill es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes dependientes del tiempo de forma periódica[28]

$$\ddot{x}(t) + (\delta + \epsilon b(t))x = 0, \quad (2.23)$$

nuevamente, la función  $b(t)$  tiene periodo  $\tau$  y se considera que  $\delta$  y  $\epsilon$  son constantes reales. Para el caso  $\epsilon = 0$  claramente la ecuación se reduce al oscilador armónico usual y las soluciones son estables. Sin embargo, para ciertos valores de  $\delta$  puede encontrarse la región donde la solución aún es periódica, esto se puede resolver para los casos  $\phi = \pm 1$ , donde  $\phi$  es la función definida en la sección (2.1.2), de forma que se tiene soluciones estables y periódicas para los casos

$$\delta = (2m \frac{\pi}{\tau})^2, \quad (2.24)$$

que corresponde a  $\phi = 1$  y

$$\delta = ((2m + 1)\frac{\pi}{\tau})^2, \quad (2.25)$$

que corresponde a  $\phi = -1$ . Estos valores representan la frontera de la región de soluciones estables, las cuales corresponden a periodo de  $\tau$  y  $2\tau$  respectivamente. Más adelante se buscaran soluciones en esta región para el caso donde  $\epsilon \ll 1$ . **FiXme Note:** ¿No vale la pena poner las soluciones para este caso aqui?

FiXme Note!

## 2.2. Estados de Floquet en Mecánica Cuántica

*Ahora se busca estudiar Hamiltonianos con una dependencia periódica en el tiempo, donde se utilizaran los resultados obtenidos en la sección anterior* **FiXme Note:** Que tal así (me parece mas claro): Utilizaremos los resultados obtenidos en la sección anterior para estudiar Hamiltonianos con un parámetro con una dependencia periodica en el tiempo

FiXme Note!

$$H(t) = H(t + \tau). \quad (2.26)$$

El hecho de que el Hamiltoniano sea simétrico respecto a (ciertas) traslaciones en el tiempo, permite el uso del formalismo de Floquet [29]. Se asume que la dependencia temporal puede ser vista como una perturbación sobre un Hamiltoniano original

$$H(x, t) = H_0(x) + V(x, t) \quad V(x, t) = V(x, t + \tau). \quad (2.27)$$

Se utiliza que el Hamiltoniano no perturbado posee un conjunto completo de eigenfunciones  $\{\phi_n\}$  con valores propios correspondientes  $E_n$ . *En este caso* **FiXme Note:** El uso de “en este caso” hace pensar que se necesita cumplir que exista el conjunto  $\{\phi_n\}$  para que la ecuación de Schroedinger tenga la forma 2.28. Sin embargo la ecuacion de Schroedinger es siempre como la pusiste. Tienes que cambiar como redactaste esta sección, la ecuación de Schrödinger tiene la forma

FiXme Note!

$$-i\hbar\dot{\Psi}(x, t) = H(x, t)\Psi(x, t). \quad (2.28)$$

El problema cumple con las condiciones necesarias para utilizar una solución del tipo visto en la sección anterior

$$\Psi_n(x, t) = e^{(\frac{-i}{\hbar}\mu_n t)}\Phi_n(x, t). \quad (2.29)$$

Como se mencionó en la sección anterior,  $\mu$  en general es un número complejo, lo cual puede llevar a soluciones inestables. En este caso  $\Phi_n(x, t)$  es la función que contiene la periodicidad en el tiempo. Sustituir la solución en la ecuación (2.28) genera una ecuación para las funciones periódicas

$$H(x, t)\Phi_n(x, t) = E_n\Phi_n(x, t). \quad (2.30)$$

Antes de buscar formas explícitas para estos estados, es necesario resolver el problema clásico correspondiente a este sistema. La razón para esto se verá más adelante, y se debe sencillamente a que estas soluciones clásicas juegan un papel

clave en las expresiones explícitas para los estados y operadores involucrados en la solución del problema cuántico.

### 2.3. Oscilador Armónico Dependiente del Tiempo: Solución Mediante Formalismo de Floquet

En el caso clásico [1] se tiene, para un oscilador armónico unidimensional con frecuencia dependiente del tiempo y el cual experimenta una fuerza disipadora dependiente de la velocidad, que la posición cumple

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \frac{k(t)}{m}x = 0 \quad (2.31)$$

Se asume que la función  $k(t)$  es periódica con periodo  $T$ . Si se utiliza la sustitución  $x = ye^{-\frac{\gamma t}{2}}$ , se llega a la ecuación

$$\ddot{y} + \left(\frac{k(t)}{m} - \frac{\gamma^2}{4}\right)y = 0 \quad (2.32)$$

El teorema de Floquet para ecuaciones de segundo orden con coeficientes **FiXme Note: dependientes** del tiempo [1] asegura que esta ecuación tiene dos soluciones

FiXme Note!

$$E_1(t) = e^{i\mu t}\phi(t), \quad E_2(t) = E_1(-t), \quad (2.33)$$

Recordando que la función  $\phi$  debe tener la misma periodicidad que  $k(t)$ . Dado que la función cumple con *esta condición* **FiXme Note: cual condicion**, es posible realizar una expansión de Fourier [30] de la misma

FiXme Note!

$$\phi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}. \quad (2.34)$$

Para fijar los coeficientes se elige una normalización tal que el Wronskiano sea **FiXme Note: Ojo: este  $\phi$  es diferente al que definiste en 2.17** **FiXme Note: No pones sobre que indice es la suma**

FiXme Note!  
FiXme Note!

$$W = \dot{E}_1(t)E_2(t) - E_1(t)\dot{E}_2(t) = 2i. \quad (2.35)$$

Esto genera la regla de suma

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n^2 (\mu + n\omega) = 1, \quad (2.36)$$

y permite, en teoría, calcular las constantes de la expansión para un caso general. A continuación se trata el caso en mecánica cuántica.

FiXme Note!

**FiXme Note: No es claro a que quieres llegar. Se mas explicito**

## 2.4. Caso Cuántico

En el caso de un Hamiltoniano con dependencia temporal como la vista anteriormente **FiXme Note: pon el numero de ecuacion**, existe un conjunto completo de soluciones [31] **FiXme Note!**

$$|\Psi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\mu_\alpha t} |\phi_\alpha t\rangle, \quad |\phi_\alpha(t)\rangle = |\phi_\alpha(t + \tau)\rangle, \quad (2.37)$$

Estas soluciones tienen la forma explícita[32]

$$\Psi_\alpha(x, t) = \left(\frac{\sqrt{m/\pi\hbar}}{2^\alpha n! E_1^0(t)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{E_1^0(t)}{E_2^0(t)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} H_\alpha\left(x\sqrt{\frac{m}{\hbar E_1^0(t) E_2^0(t)}}\right) e^{(ix^2 \frac{E_1^0(t)}{2E_2^0(t)})} \quad (2.38)$$

donde el superíndice cero indica que se toma el límite donde  $\gamma$  tiende a cero. Sin embargo, estas soluciones se comportan de manera análoga a los estados de la base de Fock bajo la acción de los operadores de Floquet, los cuales pueden expresarse en términos de los operadores de momento y posición usuales en mecánica cuántica

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2i}(\hat{x}\dot{E}_1^0(t)\sqrt{\frac{2}{\hbar m}} - \hat{p}E_1^0(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m}}). \quad (2.39)$$

Así como su complejo conjugado. Su acción sobre la base de Floquet queda definida por

$$\begin{aligned} \Gamma(t) |\Psi_\alpha(x, t)\rangle &= \sqrt{\alpha} |\Psi_{\alpha-1}(x, t)\rangle, \\ \Gamma^\dagger(t) |\Psi_\alpha(x, t)\rangle &= \sqrt{\alpha+1} |\Psi_{\alpha+1}(x, t)\rangle. \end{aligned}$$

Es importante notar que estos operadores dependen explícitamente del tiempo. Es conveniente entender el origen de estos operadores. Se toma entonces un Hamiltoniano usual de oscilador armónico, con la excepción de que la frecuencia del oscilador es una función periódica del tiempo

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}k(t)q^2. \quad (2.40)$$

Este lleva a la ecuación de movimiento usual

$$m\ddot{q}(t) + k(t)q(t) = 0, \quad (2.41)$$

para el operador  $q(t)$ . Lo que se busca es una transformación unitaria que lleve este problema al problema usual del oscilador armónico en mecánica cuántica. Se trabaja en el cuadro de Heisenberg [33], tal que

$$\tilde{q}(t) = U^{-1}(t)q(t)U(t), \quad (2.42)$$

$$\tilde{p}(t) = U^{-1}(t)p(t)U(t). \quad (2.43)$$

Y donde entonces el nuevo Hamiltoniano queda dado por

$$\tilde{H} = H + U^{-1}i\dot{U}. \quad (2.44)$$

Para la transformación se elige

$$U = e^{-i\chi(t)q^2(t)}, \quad (2.45)$$

donde

$$\chi(t) = \frac{m}{4} \left( \frac{\dot{f}}{f} + \frac{\dot{f}^*}{f^*} \right) \quad (2.46)$$

Las funciones  $f$  son las soluciones al problema clásico correspondiente al Hamiltoniano (2.40) el cual tiene dos soluciones linealmente independientes, pero una es la compleja conjugada de la otra. Estas soluciones corresponden a  $E_1^0$  y  $E_2^0$  vistas en la sección anterior. Bajo esta transformación

$$\tilde{q}(t) = q(t), \quad (2.47)$$

$$\tilde{p}(t) = p(t) - 2\chi(t)q(t). \quad (2.48)$$

Utilizando esto se puede escribir el Hamiltoniano en las nuevas coordenadas tomando en cuenta que  $\ddot{f} = -k(t)f$  y el Wronskiano,  $W$

$$H = \frac{1}{2m} \tilde{p}^2 + \frac{\chi(t)}{m} (\{\tilde{q}, \tilde{p}\}) + \frac{mW^2}{|f|^2} k(t) \tilde{q}^2. \quad (2.49)$$

Para eliminar el término cruzado se utiliza una segunda transformación

$$U_2(t) = e^{\frac{i}{4}(\{\tilde{q}, \tilde{p}\}) \ln |f|^2}. \quad (2.50)$$

Esto es una transformación de escala que deja como variables finales

$$Q = U_2^{-1} \tilde{q} U_2 = \frac{1}{|f|} q(t), \quad (2.51)$$

$$P = U_2^{-1} \tilde{p} U_2 = |f|(p - 2\chi q), \quad (2.52)$$

en estas variables, el Hamiltoniano es

$$\tilde{H} = \frac{1}{|f(t)|^2} \left( \frac{1}{2m} P^2(t) + \frac{1}{2} m W^2 Q^2(t) \right). \quad (2.53)$$

Este Hamiltoniano es, salvo por un coeficiente general dependiente del tiempo, el Hamiltoniano usual de oscilador armónico y se puede resolver por medio de operadores de escalera

$$\Gamma = \sqrt{\frac{mW}{2}} Q + i \sqrt{\frac{1}{2mW}} P. \quad (2.54)$$

La expresión (2.39) se obtiene expresando los operadores en las coordenadas usuales, no en las transformadas. Es de mas utilidad expresar este Hamiltoniano en términos de estos operadores  $\Gamma(t)$ . Se obtiene

$$\tilde{H} = \frac{W}{|f(t)|^2} (\Gamma^\dagger(t) \Gamma(t) + \frac{1}{2}). \quad (2.55)$$

Con esto establecido se puede proceder a establecer un Hamiltoniano para enfriamiento optomecánico con parámetros dependientes del tiempo.

FiXme Note!

**FiXme Note: Me pareció muy confuso como llegaste a la ecuacion 2.55**

## Capítulo 3

# Enfriamiento Optomecánico Dependiente del Tiempo: Caso de Oscilador Armónico Dependiente del Tiempo

En este capítulo se da un breve resumen del trabajo realizado en [34] y en [2]. Se muestra que cuando se toma en cuenta una dependencia temporal en la frecuencia de un oscilador armónico mecánico acoplado a una cavidad de Fabry-Perot se llega a cambios cuantitativos y cualitativos en el enfriamiento del mismo. Esto motiva el trabajo que inicia en el capítulo siguiente.

### 3.1. Hamiltoniano para Enfriamiento Optomecánico con Parámetros Dependientes del Tiempo

*En particular, se analiza un sistema tal que la frecuencia natural del oscilador mecánico depende del tiempo de manera periódica. Se asume que el oscilador se encuentra acoplado a un único modo forzado de la cavidad el cual tiene frecuencia  $\omega_{cav}$ .* **FiXme Note:** Me parece que tienes que describir con mas cuidado el sistema, ejemplp: El sistema consiste de un oscilador mecánico, cuya frecuencia natural depende del tiempo, acoplado a una cavidad. Se asume que el acoplamiento es tal que la cavidad se puede suponer que solo tiene un modo. La cavidad es excitada por un laser.... (dices que la cavidad es forzada, pero despues hablas de una bomba, es poco claro a que se refiere la palabra bomba. Creo que es mejor evitar la palabra bomba y usar laser de excitacion o algo asi Se asume que el marco de referencia rota con la frecuencia de la bomba. Se modela el sistema mediante el siguiente Hamiltoniano[27]

FiXme Note!



$$H(t) = H_{cav} + H_{mec}(t) + H_{rad} + H_{Bomba}. \quad (3.1)$$

En donde

$$H_{cav} = -\hbar\delta a^\dagger a, \quad (3.2)$$

$$H_{mec}(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\nu^2(t)x^2, \quad (3.3)$$

$$H_{rad} = -\hbar g a^\dagger a x, \quad (3.4)$$

$$Bomba = \hbar \frac{\Omega}{2} (a^\dagger + a), \quad (3.5)$$

en este caso,  $\delta = w_{bomba} - w_{cav}$  representa la diferencia de frecuencias entre la bomba de fotones y la cavidad y  $\hbar g$  representa la fuerza de radiación que un fotón ejerce sobre el oscilador mecánico sin modulación. El término  $H_{rad}$  modela una interacción simple entre los fotones y el espejo. Dado que en este caso la longitud de la cavidad no es fija, la frecuencia de la cavidad debe tener una dependencia en la coordenada  $x$ . Una derivación completa de este término puede encontrarse en la referencia [3]. Por (2.53), se modela al oscilador mecánico utilizando operadores de Floquet

$$H_{mec}(t) = \hbar \frac{W}{|f(t)|^2} (\Gamma^\dagger \Gamma + \frac{1}{2}). \quad (3.6)$$

Recordando la definición de los operadores de Floquet (2.39), se puede invertir la relación en términos de los operadores  $x$  y  $p$  y sustituir el resultado en el Hamiltoniano de interacción, lo cual produce un nuevo Hamiltoniano[34]

$$H(t)_{rad} = 2ig\sqrt{\frac{\hbar^3}{2m}} a^\dagger a [\gamma_+(t)\Gamma(t) + \gamma_-(t)\Gamma^\dagger(t)] \quad (3.7)$$

donde

$$\gamma(t)_+ = \frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{m\hbar^3}} \frac{f(t)^*}{(\dot{f}(t)f(t)^* - \dot{f}(t)^*f(t))}, \quad (3.8)$$

$$\gamma(t)_- = \frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{m\hbar^3}} \frac{f(t)}{(\dot{f}(t)f(t)^* - \dot{f}(t)^*f(t))}, \quad (3.9)$$

con esto, el Hamiltoniano final es el siguiente

$$H(t) = -\hbar\delta a^\dagger a + \frac{W}{|f(t)|^2} (\Gamma^\dagger \Gamma + \frac{1}{2}) + g'a^\dagger a [\gamma_+(t)\Gamma(t) + \gamma_-(t)\Gamma^\dagger(t)] + \hbar \frac{\Omega}{2} (a^\dagger + a), \quad (3.10)$$

donde

$$g' = g\sqrt{\frac{\hbar^3}{2m}}. \quad (3.11)$$

### 3.2. Transformación Mediante Operador de Desplazamiento

Para poder encontrar una solución es necesario eliminar los términos de tercer orden en operadores, ya que estos son no-lineales y causan dificultades. Esto se logra mediante una transformación unitaria. Se utiliza la transformación

$$U_{a,\Gamma} = e^{(\alpha(t)a^\dagger - \alpha(t)^*a)} e^{(\beta(t)\Gamma^\dagger - \beta(t)^*\Gamma)}, \quad (3.12)$$

Tanto  $\alpha$  como  $\beta$  dependen del tiempo, esta dependencia no se escribirá de forma explícita a futuro por brevedad. Bajo la transformación, el operador densidad es

$$\rho' = U_{a,\Gamma}^\dagger \rho U_{a,\Gamma}. \quad (3.13)$$

Se puede despejar en términos de  $\rho$ , aprovechando que la transformación es unitaria

$$\rho = U_{a,\Gamma} \rho' U_{a,\Gamma}^\dagger, \quad (3.14)$$

y derivando respecto al tiempo

$$\dot{\rho} = L\rho = \frac{d}{dt}(U_{a,\Gamma} \rho' U_{a,\Gamma}^\dagger). \quad (3.15)$$

En este caso,  $L$  representa el operador de Liouville. Esto permite obtener una ecuación maestra para  $\rho$ .

$$U_{a,\Gamma}(\dot{\rho}')U_{a,\Gamma}^\dagger = L[U_{a,\Gamma} \rho' U_{a,\Gamma}^\dagger] - \dot{U}_{a,\Gamma} \rho' U_{a,\Gamma}^\dagger - U_{a,\Gamma} \rho' \dot{U}_{a,\Gamma}^\dagger \quad (3.16)$$

$$\dot{\rho} = U_{a,\Gamma}^\dagger L[U_{a,\Gamma} \rho' U_{a,\Gamma}^\dagger] U_{a,\Gamma} - U_{a,\Gamma}^\dagger \dot{U}_{a,\Gamma} \rho' - \rho' \dot{U}_{a,\Gamma}^\dagger U_{a,\Gamma}. \quad (3.17)$$

Esta transformación se emplea de nuevo y con más detalle en el capítulo siguiente. En el caso donde  $\alpha$  y  $\beta$  cumplen con las ecuaciones

$$\dot{\alpha} = \alpha \left( -\frac{A}{2} + i(\delta + g'(\gamma_-(t)\beta^* + \gamma_+(t)\beta)) \right) - i\frac{\Omega}{2}, \quad (3.18)$$

$$\dot{\beta} = \beta \left( -\frac{\gamma}{2} - i\frac{W}{|f(t)|^2} \right) + ig'|\alpha|^2\gamma_+(t), \quad (3.19)$$

el Hamiltoniano resulta

$$H' = -\hbar\delta'a^\dagger a + \frac{W}{|f(t)|^2}\Gamma\Gamma^\dagger - \hbar g'[(a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a)(\gamma_-(t)\Gamma^\dagger + \gamma_+(t)\Gamma)] \\ + i\hbar(\beta^*\dot{\Gamma} - \beta\dot{\Gamma}^\dagger),$$

donde se ha hecho el cambio  $\delta' = \delta + g'(\beta + \beta^*)$ . Con esto se obtiene la ecuación maestra para el enfriamiento optomecánico con un oscilador con frecuencia dependiente del tiempo, en el marco de referencia desplazado

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H', \rho] + L_a\rho + L_\Gamma\rho + |\beta|^2(Re[C])\rho, \quad (3.20)$$

donde

$$C = [\dot{\Gamma}^\dagger, \Gamma] \quad (3.21)$$

FiXme Note!

**FiXme Note:** Esta seccion es muy confusa. Nunca has hablado de disipacion, sin embargo de repente aparece  $\rho$  e introduces el operador de Lindblad. Falta explicar que haces y porque. Falta decir quien es la variable  $A$  y falta decir de donde sacaste que  $L_\Gamma \rho$  es un mejor modelo de disipación. Falta justificar que estas haciendo y porque.

### 3.3. Solución para Oscilaciones Pequeñas

FiXme Note!

**FiXme Note:** esta sección esta fuera de contexto, creo que la tienes que poner antes, donde hablas del caso  $\epsilon$  pequeño Esta solución se obtiene mediante la teoría de Floquet. [34]

$$\nu(t) = \nu_0 + \epsilon \cos(2\omega t), \quad (3.22)$$

donde  $\epsilon \ll \nu_0$  y  $\nu_0$  es la frecuencia natural promedio. Esto lleva a una ecuación de oscilador armónico

$$\ddot{x} + (\nu_0^2 + 2\epsilon\nu_0 \cos(2\omega t))x = 0, \quad (3.23)$$

la cual es un caso particular de la ecuación de Mathieu [?]. A fin de tener la ecuación en la forma estándar hacemos  $t' = \omega t$  y  $\epsilon' = \frac{2\epsilon\nu_0}{\omega^2}$  y

$$\frac{\nu_0^2}{\omega^2} = n^2 \quad (3.24)$$

con  $n \in \mathbb{Z}^+$  ya que como se vio esto es necesario para tener soluciones estables[28]. Bajo estas restricciones, tenemos que las soluciones para (3.22) son, a primer orden en  $\epsilon$  y para  $n = 1$

$$f(t) = e^{i\omega t} + \frac{\epsilon}{16} e^{3i\omega t}, \quad (3.25)$$

y su complejo conjugado es  $f(-t)$ .

#### 3.3.1. Solución Explícita para Pequeñas Oscilaciones

Con una solución para 3.22 **FiXme Note:** No estas buscando una solución de esta ecuacion. Esta mal la referencia, creo que tienes que referenciar la siguiente ecuacion en mano, podemos calcular soluciones explícitas para todos los términos que se han obtenido. Estos resultan ser[34]

FiXme Note!

$$C(t) = i[1 - \frac{\epsilon}{16} e^{-2i\omega t} - \frac{6\epsilon}{16} e^{2i\omega t}]. \quad (3.26)$$

Los coeficientes  $\gamma_\pm$  son

$$\gamma_\pm = \frac{1}{\omega} e^{\mp i\omega t}, \quad (3.27)$$

se hace lo mismo para el factor global en el Hamiltoniano de oscilador armónico en operadores de Floquet

$$\frac{W}{|f|^2} = \omega. \quad (3.28)$$

Y se puede obtener expresiones explícitas para los coeficientes  $\alpha(t)$  y  $\beta(t)$  en la transformación al marco desplazado

$$\dot{\alpha} = \alpha \left( -\frac{A}{2} + i(\delta + g' e^{i\omega t} \beta^* + e^{-i\omega t} \beta) \right) - i \frac{\Omega}{2}, \quad (3.29)$$

$$\dot{\beta} = \beta \left( -\frac{\gamma}{2} - i2\omega \right) + i g' |\alpha|^2 e^{i\omega t}, \quad (3.30)$$

**FiXme Note:** Quien es  $A$ , falta un parentesis en la ecuacion para  $\alpha$  el enfoque del enfriamiento **FiXme Note:** no es claro a que te refieres con el “enfoque del enfriamiento”. Tienes que decir que si  $\alpha, \beta$  llegan al estado estacionario muy rapido, podemos considerar sus valores estacionarios, o algo asi se encuentra en el caso del estado estacionario ( $\dot{\alpha}(t) = \dot{\beta}(t) = 0$ ) y en el régimen de acoplamiento débil por lo que coeficientes de orden mayor a cero en  $g'$  se desprecian. Esto lleva a

FiXme Note!

FiXme Note!

$$0 = \alpha \left( -\frac{A}{2} + i\delta \right) - i \frac{\Omega}{2}, \quad (3.31)$$

$$0 = \beta \left( -\frac{\gamma}{2} - i2\omega \right), \quad (3.32)$$

cuya solución es trivial

$$\alpha_0 = \frac{\Omega}{2\delta - iA}, \quad (3.33)$$

$$\beta_0 = 0. \quad (3.34)$$

El subíndice 0 muestra que las soluciones son válidas a orden cero en el acoplamiento.

### 3.3.2. Hamiltoniano para Enfriamiento Láser

Bajo estás condiciones el Hamiltoniano resulta

$$H = -\hbar \delta a^\dagger a + \hbar \omega \Gamma^\dagger \Gamma - \hbar g' (a^\dagger a + \alpha_0 a^\dagger + \alpha_0^* a) (\gamma_-(t) \Gamma^\dagger + \gamma_+(t) \Gamma). \quad (3.35)$$

En *este* **FiXme Note:** yo pondria: Vamos a trabajar en el régimen en el que  $|\alpha_0| \gg 1$  régimen  $|\alpha_0| \gg 1$  [27], por lo que el término  $a^\dagger a$  se puede despreciar y se llega a un Hamiltoniano simplificado

FiXme Note!

$$H(t) = -\hbar \delta a^\dagger a + \hbar \omega \Gamma^\dagger \Gamma + \frac{\hbar g'}{\omega} (\alpha_0 a^\dagger + \alpha_0^* a) (e^{i\omega t} \Gamma^\dagger + e^{-i\omega t} \Gamma) \quad (3.36)$$

Este Hamiltoniano *corresponde* **FiXme Note: no hay correspondencias entre Hamiltonianos y ecuaciones maestras. Yo pondria algo asi como: Agregando disipación en tal y tal se puede construir la ecuacion maestra** a la ecuación maestra

FiXme Note!

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + L_a \rho + L_\Gamma \rho, \quad (3.37)$$

Ahora se desea resolver la ecuación maestra correspondiente a este Hamiltoniano. Los términos de Lindblad que corresponden a este Hamiltoniano son  $L_a$  para la cavidad y  $L_\Gamma$  para el oscilador mecánico, ambos tienen la misma forma funcional [35]. Esto lleva a la ecuación maestra

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + L_a \rho + L_\Gamma \rho, \quad (3.38)$$

con

FiXme Note!

**FiXme Note: 3.37 y 4.28 son la misma ecuacion**

$$\begin{aligned} L_a \rho = & -\frac{\kappa}{2}(n_p + 1)[a^\dagger a \rho + \rho a^\dagger a - 2a \rho a^\dagger] \\ & -\frac{\kappa}{2}(n_p)[a a^\dagger \rho + \rho a a^\dagger - 2a^\dagger \rho a]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Y

$$\begin{aligned} L_\Gamma \rho = & -\frac{\gamma}{2}(n_m + 1)[\Gamma^\dagger \Gamma \rho + \rho \Gamma^\dagger \Gamma - 2\Gamma \rho \Gamma^\dagger] \\ & -\frac{\gamma}{2}(n_m)[\Gamma \Gamma^\dagger \rho + \rho \Gamma \Gamma^\dagger - 2\Gamma^\dagger \rho \Gamma]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

*Está* **FiXme Note: ¿Cual de las tres ecuaciones? Sobra el acento** ecuación es uno de los resultados presentados en [2].

FiXme Note!

### 3.3.3. Base de Decaimiento

En el caso de ecuaciones maestras correspondientes a un Hamiltoniano de tipo oscilador armónico, *la ecuación tiene solución* **FiXme Note: No es la única solución. Mas bien, una forma de encontrar la solución es usando la base de decaimiento. Argumentar porque nos interesa esta forma de encontrar la solución- Explicar mejor que es lo que haces aqui.** mediante la base de decaimiento[36].

FiXme Note!

$$\rho_\lambda(a, a^\dagger) =: f(a a^\dagger) : a^l. \quad (3.41)$$

Los  $::$  denotan ordenamiento normal, lo cual puede requerir el desarrollo en serie de la función  $f$ . Se puede expresar  $a^l$  en la base de número como

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^l |n\rangle \langle n+l|, \quad (3.42)$$

donde puede verse la relación *de este ansatz con el de la sección anterior* **FiXme Note: ¿Cual ansatz?, ¿Cual sección?, ¿Quien es  $C_n^l$  ?**. A partir de este se llega a la solución para  $\rho_n^l$  **FiXme Note: Nunca has dicho quien es  $\rho_n^l$**  [36]

FiXme Note!

FiXme Note!

$$a^{\dagger l} \frac{(-1)^n}{(\nu+1)^{l+1}} : L_n^l \left[ \frac{a^\dagger a}{\nu+1} \right] e^{-[\frac{a^\dagger a}{\nu+1}]} : \quad l \geq 0, \quad (3.43)$$

$$\frac{(-1)^n}{(\nu+1)^{|l|+1}} : L_n^{|l|} \left[ \frac{a^\dagger a}{\nu+1} \right] e^{-[\frac{a^\dagger a}{\nu+1}]} : a^{|l|} \quad l \leq 0, \quad (3.44)$$

con valores propios

$$\lambda_n^l = -A \left[ n + \frac{|l|}{2} \right], \quad (3.45)$$

los cuales cumplen con las condiciones

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.46)$$

Es importante notar que esto se obtiene en el cuadro de interacción, por lo que los valores finales deben incluir los valores propios de la parte correspondiente al Hamiltoniano sin intercambios de energía. **FiXme Note: Creo que es mas claro que pongas explícitamente la solución en el cuadro normal**

FiXme Note!

### 3.4. Enfriamiento Laser

El enfoque es en un régimen de parámetros donde la temperatura del oscilador mecánico varía de forma mucho más lenta que las pérdidas de la cavidad y que la frecuencia mecánica. Esto requiere que  $\chi^2 |\alpha|^2 \ll (\frac{\kappa}{\omega_m})$ . La siguiente derivación sigue el procedimiento de [18]. A fin de dividir la ecuación maestra en estas escalas de tiempo, se introduce un parámetro formal  $\tau$  tal que

$$L = \tau^2 L_0 + \tau L_1(\tau^2) + L_2, \quad (3.47)$$

con

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{i\hbar} [H_c, \cdot] + L_a, \\ L_1^+ &= -ie^{i\omega_m \tau^2 t} [g' [\alpha^* a + \alpha a^\dagger] \gamma_-(t) \Gamma^\dagger, ] \\ L_1^- &= -ie^{-i\omega_m \tau^2 t} [g' [\alpha^* a + \alpha a^\dagger] \gamma_+(t) \Gamma, ], \\ L_m &= \frac{1}{i\hbar} [H_m, \cdot] + L_\Gamma. \end{aligned}$$

Esto es en el marco de interacción.

FiXme Note!

**FiXme Note:**  $L_1^+$ ,  $L_1^-$  y  $L_m$  no aparecen en (3.47) y  $L_1$ ,  $L_2$  no están definidas.

Como el estado estacionario corresponde a **FiXme Note: No esta definido**  $\lambda = 0$  [36], los operadores de proyección  $P$  y  $Q$  se utilizan para proyectar la ecuación (3.37) al subespacio  $P$  que corresponde al estado estacionario del sistema **FiXme Note: no se entiende, esta redactado de forma tal que parece que necesitas los dos operadores  $P$  y  $Q$  para proyectar al espacio  $P$**

FiXme Note!

FiXme Note!

$$P\rho = \text{Tr}_c[\rho] \otimes \rho^0, \quad (3.48)$$

$$Q\rho = (1 - P)\rho. \quad (3.49)$$

**FiXme Note:** No has definido  $\rho^0$

FiXme Note!

El proceso de expandir la proporción entre escalas de tiempo rápidas y lentas equivale al límite  $\tau \rightarrow \infty$ , y eventualmente lleva a una ecuación cerrada para el operador densidad del sistema en el subespacio  $P$  **FiXme Note:** Creo que es poco claro el método de separación de escala que usan en esa referencia. Creo que es mas seguro no usarlo (i.e. eliminar  $\tau$  de el hamiltoniano)

FiXme Note!

$$P\dot{\rho} = PL_2P + [PL_1^+Q \int_0^\infty dt' e^{(i\omega_m + L_0)t'} QL_1^- P\rho + HC] \quad (3.50)$$

después de tomar el límite se traza sobre los estados de la cavidad

$$\begin{aligned} Tr_c[PL_1^+Q \int_0^\infty dt' e^{(i\omega_m + L_0)t'} QL_1^- P\rho] \\ \approx -\frac{(g'_m)^2}{2} [G(\omega_m, n_c)[\Gamma^\dagger, \Gamma\mu] - [G^*(-\omega_m, n_c)[\Gamma^\dagger, \mu\Gamma]] \end{aligned} \quad (3.51)$$

con  $g'_m = 2\chi|\alpha|$  y  $\mu = P\rho$ . Las cuadraturas de la cavidad son

$$G(\nu, n_p) = \int_0^\infty dt e^{i\nu(t)t} Tr_c[X_c e^{L_c t} X_c \rho_{st}], \quad (3.52)$$

con

$$X = \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}\alpha_0}, \quad (3.53)$$

Y los coeficientes de enfriamiento y calentamiento son

$$A_{\pm\nu}(n_p) = g^2 Real(G(\mp\nu, n_p)). \quad (3.54)$$

donde  $A_+$  representa calentamiento  $A_-$  enfriamiento. El número de excitaciones final para el oscilador mecánico es

$$\langle m \rangle = \frac{A_+}{A_- - A_+} \quad (3.55)$$

**FiXme Note:** Yo pondría 3.54 despues de 3.55

FiXme Note!

### 3.5. Análisis Numérico

Se utiliza el desarrollo en serie de potencia de (3.52) hasta primer orden en  $\epsilon$  para realizar cálculos numéricos. Se asume que la cavidad se encuentra a temperatura cero ( $n_p = 0$ ). Los eigenvalores de la cavidad se denotan por  $\lambda_c$

**FiXme Note:** No es claro a cuales son los eigenvalores de la cavidad.

FiXme Note!

El resultado de la traza es fácil de calcular y queda calcular la integral. **FiXme Note:** No es claro a que traza te refieres

FiXme Note!

$$G(\nu, 0) = \int_0^\infty dt e^{(i\nu(t) + \lambda_c)t} Tr[] \quad (3.56)$$

$$= \int_0^\infty e^{i\nu = \nu_0 + \epsilon \cos(2\omega t)t + \lambda t} Tr[...] dt, \quad (3.57)$$

$$= \int_0^\infty e^{i\nu_0 t + \lambda t} e^{i\epsilon \cos(2\omega t)t} Tr[...] dt, \quad (3.58)$$

$$= \int_0^\infty e^{i\nu_0 t + \lambda t} (1 + i\epsilon \cos(2\omega t)t) Tr[...] dt, \quad (3.59)$$

$$= \int_0^\infty e^{i\nu_0 t + \lambda t} Tr[...] dt \quad (3.60)$$

$$+ i\epsilon \int_0^\infty \cos(2\omega t)t e^{i\nu_0 t + \lambda t} Tr[...] dt. \quad (3.61)$$

**FiXme Note:** La ecuacion 3.57 tiene un igual que no va. Entre 3.58 y 3.57 no va “=” va  $\approx$

FiXme Note!

FiXme Note!

**FiXme Note:** No es trivial que la aproximacion sea valida, ya que la integral va de 0 a infinito, luego entonces  $\epsilon t$  no es pequeño y la expansión es difícil de justificar. Sin embargo, la aproximación funciona, la razón es el termino  $e^{-\lambda t}$ , que permite cortar la integral en  $t$  finito y ahí si usar que cuando  $\epsilon t$  es pequeño. Explicarlo en el texto.

Esto lleva a la expresión usual para 3.52 más un término proporcional a  $\epsilon$  que contiene el efecto de la dependencia temporal de la frecuencia

$$\frac{\chi^2}{-k + 2i(\delta + \nu_0)} + i\epsilon \frac{(-k + i(\nu_0 + \delta))^2 - 4\omega^2}{(-k + i(\nu_0 + \delta))^2 + 4\omega^2}, \quad (3.62)$$

donde  $\chi = g$   $E_0 = g\sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu_0}}$ .

La parte real de esta expresión no es fácil de obtener de manera analítica, pero se puede analizar numéricamente de forma extremadamente sencilla. A fin de que sea válida la aproximación adiabática, las variaciones de la frecuencia natural del oscilador deben ser mucho menores que la frecuencia promedio, lo que *pide*

**FiXme Note:** implica soluciones con  $\omega \ll \nu_0$  y  $1 \ll n$ .

FiXme Note!

Debido a 3.24, y asumiendo originalmente que  $\epsilon = \frac{\nu_0}{10}$  se tiene la condición  $\epsilon = \frac{n^2}{5}$ . Dado que se desea que  $n$  sea grande se elige  $n = \sqrt{\frac{\nu_0}{2}}$  redondeada al entero más cercano. **FiXme Note:** redactar mejor: Vamos a suponer, como ejemplo, que  $\epsilon = \frac{\nu_0}{10}$ , debido a la Ecuación (...)....

FiXme Note!

El *cálculo* **FiXme Note:** tienes que decir a que cálculo te refieres utiliza la proporción entre la frecuencia promedio  $n\nu_0$  y el desfazamiento  $\delta$  en el rango  $\frac{\nu_0}{\delta} \in [-2, 2]$

FiXme Note!

FiXme Note!

**FiXme Note:** Falta discutir la figura en el texto



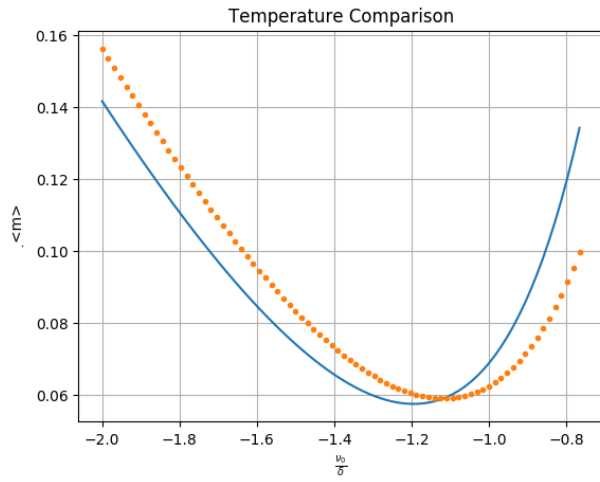


Figura 3.1: *Comparación entre predicciones con y sin el término  $\epsilon$*  La línea puntuada representa la predicción sin dependencia temporal y la línea sólida representa la predicción con el término adicional. Esta resulta en un mínimo más pequeño de excitaciones posibles y en un corrimiento en el punto donde se espera encontrar este mínimo. Se utiliza  $\kappa \ll \nu_0$

## Capítulo 4

# Enfriamiento Optomecánico Dependiente del Tiempo: Caso de Cavidad con Frecuencia Dependiente del Tiempo

Como se puede observar en el capítulo anterior, el cambio en el comportamiento predicho por el modelo con dependencia temporal es notorio. Sin embargo, durante todas las derivaciones se asume que la cavidad tiene un solo modo de frecuencia constante  $\omega_c$ . La frecuencia de resonancia de una cavidad de Fabry-Perot, asumiendo que su interior se encuentre en el vacío, está dada por

$$\omega_c = \frac{nc}{2L}, \quad (4.1)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío,  $n$  es algún entero y  $L$  es la longitud de la cavidad. Al emplear un montaje optomecánico como el que se lleva a los resultados del capítulo anterior,  $L$  deja de ser constante. Si el oscilador mecánico tiene oscilaciones de amplitud  $A$  y se toma a  $L_0$  como la longitud promedio de la cavidad, la longitud de la cavidad como función del tiempo viene dada por

$$l(t) = l_0 - A \cos(2\omega t) \quad (4.2)$$

lo cual lleva a la frecuencia

$$\nu(t) = \frac{nc}{2l_0 - 2A\cos(2\omega t)}, \quad (4.3)$$

$$\approx \frac{nc}{2l_0} + \frac{ncA\cos(2\omega t)}{4l_0^2}, \quad (4.4)$$

$$= \frac{nc}{2l_0} + \frac{nc}{2l_0} \left(\frac{A}{l_0}\right) \cos(2\omega t), \quad (4.5)$$

$$= \omega_0 + \epsilon \omega_0 \cos(2\omega t), \quad (4.6)$$

$$= \omega_0(1 + \epsilon \cos(2\omega t)). \quad (4.7)$$

donde la expresión se deja en primer orden del parámetro de perturbación  $\epsilon = \frac{A}{l_0}$ . Bajo estas restricciones se tiene un sistema de oscilador armónico donde la frecuencia natural es una función periódica del tiempo. Esto permite el uso de los operadores de Floquet vistos en el capítulo anterior. Se busca un Hamiltoniano optomecánico expresado en términos de estos operadores. Para este fin se hace referencia a la derivación del Hamiltoniano optomecánico general en [37]. Reduciendo la expresión a un solo modo para la cavidad, se tiene la expresión

$$H = \frac{1}{2m}(p + \frac{g}{q}PQ)^2 + v(q) + \frac{1}{2}[P^2 + \nu^2(t)Q^2]. \quad (4.8)$$

Los operadores  $p$  y  $q$  corresponden al oscilador mecánico y  $P$  y  $Q$  al campo dentro de la cavidad.  $g$  es una constante. En el trabajo original la dependencia de la frecuencia es sobre la variable  $q$  y no precisamente  $t$ . El teorema de Floquet permite obtener las soluciones de la ecuación

$$\ddot{q} + \nu^2(t)q = 0, \quad (4.9)$$

y se les llama  $f(t)$  y  $f(t)^*$ . De acuerdo con [1] los operadores de Floquet se pueden expresar como

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2i}(Q\sqrt{\frac{2m}{\hbar}}\dot{f}(t) - P\sqrt{\frac{2}{m\hbar}}f(t)) \quad (4.10)$$

y

$$\Gamma(t)^\dagger = \frac{-1}{2i}(Q\sqrt{\frac{2m}{\hbar}}\dot{f}^*(t) - P\sqrt{\frac{2}{m\hbar}}f^*(t)). \quad (4.11)$$

A futuro se omite la dependencia temporal de los operadores  $\Gamma$  al darse por entendida. Se puede invertir el sistema de ecuaciones y obtener

$$Q = \frac{b^*\Gamma - b\Gamma^\dagger}{(b^*a - a^*b)}, \quad (4.12)$$

$$P = \frac{a^*\Gamma - a\Gamma^\dagger}{(b^*a - a^*b)}. \quad (4.13)$$

donde

$$a = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} \dot{f}(t), \quad (4.14)$$

$$b = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{m\hbar}} f(t). \quad (4.15)$$

Esto se sustituye en el término  $PQ$  del Hamiltoniano y se obtiene

$$H = \frac{1}{2m} \left(p + \frac{g}{q}\gamma\right)^2 + v(q) + \frac{1}{2}[P^2 + \nu^2(t)Q^2], \quad (4.16)$$

donde

$$\gamma = \frac{\hbar^2}{W^2 q} [ab^* \Gamma^\dagger \Gamma + a^* b \Gamma \Gamma^\dagger - a^* b^* \Gamma \Gamma - ab \Gamma^\dagger \Gamma^\dagger] \quad (4.17)$$

con

$$W = \frac{\dot{f}(t)f^*(t) - \dot{f}^*(t)f(t)}{2i}. \quad (4.18)$$

Esto contrasta con la aproximación realizada en el trabajo original donde los operadores de creación y aniquilación de la cavidad se expanden en una serie de potencias para aproximar la dependencia de estos sobre el operador  $q$  del oscilador mecánico. En este procedimiento se asume  $q = l_o + x_m$ . En este trabajo asumimos  $x_m = -A \cos(\omega t)$ . Tomamos al término  $\gamma$  en el punto  $q = l_0$

FiXme Note!

**FiXme Note:** Creo que esta mal la forma en la que hiciste el cálculo. Te debo una disculpa por tardarme tanto en darme cuenta. En el artículo de CK Law ya supone que la frecuencia depende de la posición, como la posición depende del tiempo, el cálculo de CK Law incluye que la frecuencia depende del tiempo, por lo tanto no es consistente ponerle otra dependencia temporal como lo haces. Sin embargo tu idea me parece muy buena si lo que haces es expandir la solución del problema clásico en soluciones de Floquet en lugar de lo que hace CK Law. Creo que debemos explorar ese camino ahora que defiendas tu candidatura. Hablamos mas skype en estos días. Creo que este capítulo lo tienes que reescribir simplemente poniendo la ecuación estándar de CK Law con la disipación de Hangi y decir que intentamos resolverlo. Agregar también que exploraremos la alternativa que te dije al principio de este comentario.

Para lidiar con el primer término del Hamiltoniano se emplea la transformación unitaria dada por el operador

$$T = e^{\frac{ix_m \gamma}{\hbar}}. \quad (4.19)$$

Bajo esta transformación

$$\begin{aligned} T^\dagger p T &= p - \gamma, \\ T^\dagger p^2 T &= p^2 - 2p\gamma, \\ T^\dagger \gamma T &= \gamma, \end{aligned}$$

por lo que, despreciando el término  $\gamma^2$  por ser del orden de  $\frac{1}{l_0^2}$

$$\frac{1}{2m}(p + \frac{g}{q}\gamma)^2 \approx \frac{p^2}{2m}. \quad (4.20)$$

Se conoce como, bajo los operadores de Floquet, los operadores  $P$  y  $Q$  corresponden a un Hamiltoniano con la forma funcional de un oscilador armónico cuántico usual. Por esto, queda aplicar la transformación al término  $\Gamma^\dagger \Gamma$ . Cortando a primer orden en  $\epsilon$

$$\begin{aligned} e^{-\frac{ix\gamma_0}{\hbar}} \Gamma^\dagger \Gamma e^{\frac{ix\gamma_0}{\hbar}} &= \Gamma^\dagger \Gamma + [\Gamma^\dagger \Gamma, \gamma_0], \\ &= \Gamma^\dagger \Gamma + \frac{2i\hbar x}{W^2 l_0} (a^* b \Gamma^\dagger \Gamma + a^* b^* \Gamma \Gamma - ab \Gamma^\dagger \Gamma^\dagger), \\ &\approx \Gamma^\dagger \Gamma + \frac{2i\hbar x}{W^2 l_0} a^* b \Gamma^\dagger \Gamma, \\ &= \Gamma^\dagger \Gamma - \frac{if^*(t)f(t)}{W^2 l_0} x \Gamma^\dagger \Gamma, \end{aligned}$$

de esta forma la constante de proporcionalidad de la presión de radiación es una cantidad dependiente del tiempo bajo este enfoque. Esto contrasta con la definición usual  $F = \frac{\omega_0 \hbar}{l_0}$ . Tomando en cuenta el factor de amplitud global para el Hamiltoniano de oscilador armónico con frecuencia natural dependiente del tiempo  $\frac{W}{|f(t)|^2}$  se obtiene

$$H_{cav} = \frac{\hbar W}{|f(t)|^2} \Gamma^\dagger \Gamma - \frac{\hbar i \dot{f}^*(t)f(t)}{|f(t)|^2 W l_0} x \Gamma^\dagger \Gamma, \quad (4.21)$$

lo cual lleva a identificar el nuevo coeficiente de fuerza  $F$  el cual es ahora una función del tiempo

$$F(t) = \frac{\hbar i \dot{f}^*(t)f(t)}{|f(t)|^2 W l_0}, \quad (4.22)$$

y a un Hamiltoniano para un oscilador optomecánico de la forma

$$H = \hbar \omega b^\dagger b + \hbar \frac{W}{|f(t)|^2} \Gamma^\dagger \Gamma - F(t) x \Gamma^\dagger \Gamma, \quad (4.23)$$

pero  $x$  es el operador de posición del espejo, el cual se puede expresar en términos de los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico mecánico

$$H = \hbar \omega b^\dagger b + \hbar \frac{W}{|f(t)|^2} \Gamma^\dagger \Gamma - g(t) \Gamma^\dagger \Gamma (b^\dagger + b), \quad (4.24)$$

donde  $g$  es una función del tiempo que modula la fuerza de la interacción y está dada por

$$g(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} F(t). \quad (4.25)$$

A este Hamiltoniano se le agrega un término correspondiente a una bomba láser

$$H_{bomba} = \hbar \frac{\Omega}{2} (\Gamma^\dagger + \Gamma). \quad (4.26)$$

Y lleva a un Hamiltoniano completo

$$H = \hbar \omega b^\dagger b + \hbar \frac{W}{|f(t)|^2} \Gamma^\dagger \Gamma - g(t) \Gamma^\dagger \Gamma (b^\dagger + b) + \hbar \frac{\Omega}{2} (\Gamma^\dagger + \Gamma). \quad (4.27)$$

La ecuación maestra que corresponde a este Hamiltoniano toma en cuenta los intercambios de energía del sistema con el ambiente, tanto la pérdida de fotones de la cavidad como la re-termalización del oscilador mecánico. Esta es [27]

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] + L_b \rho + L_\Gamma \rho \quad (4.28)$$

Los términos  $L$  representan los intercambios de energía con el ambiente. Corresponden al oscilador mecánico y a la cavidad respectivamente. De forma explícita

$$\begin{aligned} L_b \rho = & -\frac{\gamma}{2} (n_m + 1) [b^\dagger b \rho + \rho b^\dagger b - 2b \rho b^\dagger] \\ & -\frac{\gamma}{2} (n_m) [b b^\dagger \rho + \rho b b^\dagger - 2b^\dagger \rho b]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} L_\Gamma \rho = & -\frac{\kappa}{2} (n_c + 1) [\Gamma^\dagger \Gamma \rho + \rho \Gamma^\dagger \Gamma - 2\Gamma \rho \Gamma^\dagger] \\ & -\frac{\kappa}{2} (n_c) [\Gamma \Gamma^\dagger \rho + \rho \Gamma \Gamma^\dagger - 2\Gamma^\dagger \rho \Gamma]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

$n_m$  y  $n_c$  representan el número promedio de excitaciones térmicas y  $\gamma$  y  $\kappa$  modelan la pérdida de energía ante el ambiente. Para poder estudiar este sistema se hace una transformación a un marco de referencia desplazado, esto se estudia en detalle en el próximo capítulo.

## Capítulo 5

# Transformación al Marco de Referencia Desplazado

Esta transformación se utiliza para eliminar términos de orden tercero en operadores en la ecuación (4.28). La transformación es unitaria y se genera mediante el operador

$$U_{b,\Gamma} = U_b U_\Gamma = e^{(\beta b^\dagger - \beta^* b)} e^{(\alpha \Gamma^\dagger - \alpha^* \Gamma)}. \quad (5.1)$$

$\alpha$  y  $\beta$  son coeficientes complejos dependientes del tiempo que se elijen de manera conveniente para simplificar la ecuación maestra. Se busca una ecuación para la matriz densidad no transformada [34]. Bajo la transformación la matriz densidad es

$$\rho' = U_{b,\Gamma}^\dagger \rho U_{b,\Gamma}. \quad (5.2)$$

Se puede despejar en términos de  $\rho$ , utilizando el hecho de que la transformación es unitaria

$$\rho = U_{b,\Gamma} \rho' U_{b,\Gamma}^\dagger, \quad (5.3)$$

y derivando respecto al tiempo

$$\dot{\rho} = L\rho = \frac{d}{dt}(U_{b,\Gamma} \rho' U_{b,\Gamma}^\dagger). \quad (5.4)$$

En este caso,  $L$  representa el operador de Liouville. Esto permite obtener una ecuación maestra para  $\rho'$ .

$$U_{b,\Gamma}(\dot{\rho}')U_{b,\Gamma}^\dagger = L[U_{b,\Gamma}\rho'U_{b,\Gamma}^\dagger] - \dot{U}_{b,\Gamma}\rho'U_{b,\Gamma}^\dagger - U_{b,\Gamma}\rho'\dot{U}_{b,\Gamma}^\dagger \quad (5.5)$$

$$\dot{\rho} = U_{b,\Gamma}^\dagger L[U_{b,\Gamma}\rho'U_{b,\Gamma}^\dagger]U_{b,\Gamma} - U_{b,\Gamma}^\dagger \dot{U}_{b,\Gamma}\rho' - \rho'\dot{U}_{b,\Gamma}^\dagger U_{b,\Gamma}. \quad (5.6)$$

A partir de este punto, se omiten los sub-índices de las transformaciones y la  $'$  para la matriz densidad. La transformación afecta a los distintos operadores presentes en el Hamiltoniano de la siguiente forma

$$U^\dagger b U = b + \beta, \quad (5.7)$$

$$U^\dagger \Gamma U = \Gamma + \alpha, \quad (5.8)$$

$$U^\dagger b^\dagger b U = b^\dagger b + \alpha^* b + \alpha b^\dagger + |\beta|^2, \quad (5.9)$$

$$U^\dagger \Gamma^\dagger \Gamma U = \Gamma^\dagger \Gamma + \alpha^* \Gamma + \alpha \Gamma^\dagger + |\alpha|^2. \quad (5.10)$$

Los conjugados Hermitianos se obtienen de manera trivial. Utilizar operadores con dependencia temporal explícita añade complejidad adicional a este procedimiento debido a las derivadas temporales del operador  $U$ . El procedimiento completo puede encontrarse en [34]. Se obtiene

$$\dot{U}_b = \dot{\beta} b^\dagger U_b - U_b \dot{\beta}^* b - \frac{1}{2}(\dot{\beta} \beta^* + \dot{\beta}^* \beta) U_b, \quad (5.11)$$

$$\dot{U}_b^\dagger = -\dot{\beta} b^\dagger U_b^\dagger + U_b^\dagger \dot{\beta}^* b - \frac{1}{2}(\dot{\beta} \beta^* + \dot{\beta}^* \beta) U_b^\dagger. \quad (5.12)$$

El caso de  $U_\Gamma$  es más complejo, pero el procedimiento es equivalente. Se obtiene

$$\dot{U}_\Gamma = (\dot{\alpha} \Gamma^\dagger + \alpha \dot{\Gamma}^\dagger) U_\Gamma - U_\Gamma (\dot{\alpha}^* \Gamma + \alpha^* \dot{\Gamma}) + (\alpha^*)^2 C_{--}(t) U_\Gamma - \frac{1}{2}(\dot{\alpha} \alpha^* + \dot{\alpha}^* \alpha) U_\Gamma, \quad (5.13)$$

$$\dot{U}_\Gamma^\dagger = -(\dot{\alpha} \Gamma^\dagger + \alpha \dot{\Gamma}^\dagger) U_\Gamma^\dagger + U_\Gamma^\dagger (\dot{\alpha}^* \Gamma + \alpha^* \dot{\Gamma}) - (\alpha)^2 C_{++}(t) U_\Gamma^\dagger - \frac{1}{2}(\dot{\alpha} \alpha^* + \dot{\alpha}^* \alpha) U_\Gamma^\dagger. \quad (5.14)$$

Finalmente se debe calcular las transformaciones de las derivadas temporales de los operadores  $\Gamma$

$$U^\dagger \dot{\Gamma} U = \dot{\Gamma} + \alpha C_{-+}(t) - \alpha^* C_{--}(t), \quad (5.15)$$

$$U^\dagger \dot{\Gamma}^\dagger U = \dot{\Gamma}^\dagger - \alpha^* C_{+-}(t) + \alpha C_{++}(t). \quad (5.16)$$

Los coeficientes  $C(t)$  surgen debido a que los operadores  $\Gamma$  no necesariamente conmutan con sus derivadas temporales

$$C_{++}(t) = [\dot{\Gamma}^\dagger, \Gamma^\dagger],$$

$$C_{+-}(t) = [\dot{\Gamma}^\dagger, \Gamma],$$

$$C_{-+}(t) = [\dot{\Gamma}, \Gamma^\dagger],$$

$$C_{--}(t) = [\dot{\Gamma}, \Gamma].$$

Falta únicamente calcular los términos de la ecuación maestra que corresponden a estas derivadas temporales

$$U_b^\dagger \dot{U}_b \rho + U_\Gamma^\dagger \dot{U}_\Gamma \rho + \rho \dot{U}_b^\dagger U_b + \rho \dot{U}_\Gamma^\dagger U_\Gamma, \quad (5.17)$$

los cuales resultan ser



$$U_{\Gamma}^{\dagger} \dot{U}_{\Gamma} \rho = [(\dot{\alpha} \Gamma^{\dagger} + \alpha \dot{\Gamma}^{\dagger} - \dot{\alpha}^* \Gamma - \alpha^* \dot{\Gamma}) - |\alpha|^2 C_{+-} + (\alpha)^2 C_{++} + (\alpha^*)^2 C_{--} - \frac{1}{2} |\dot{\alpha}^2| + \dot{\alpha}^* \alpha] \rho, \quad (5.18)$$

$$\rho \dot{U}_{\Gamma}^{\dagger} U_{\Gamma} = \rho [(-\dot{\alpha} \Gamma^{\dagger} - \alpha \dot{\Gamma}^{\dagger} + \dot{\alpha}^* \Gamma + \alpha^* \dot{\Gamma}) + |\alpha|^2 C_{-+} - (\alpha)^2 C_{++} - (\alpha^*)^2 C_{--} - \frac{1}{2} |\dot{\alpha}^2| + \dot{\alpha} \alpha^*], \quad (5.19)$$

$$U_{\Gamma}^{\dagger} \dot{U}_{\Gamma} \rho + \rho \dot{U}_{\Gamma}^{\dagger} U_{\Gamma} = [\rho, (\alpha^* \dot{\Gamma} - \alpha \dot{\Gamma}^{\dagger})] + [\rho, (\dot{\alpha}^* \Gamma - \dot{\alpha} \Gamma^{\dagger})] \quad (5.20)$$

$$+ |\alpha|^2 (C_{-+} - C_{+-}). \quad (5.21)$$

Los términos que involucran un conmutador con la matriz densidad se consideran parte del Hamiltoniano. El procedimiento para los términos  $U_b$  es el mismo pero resulta más sencillo

$$U_b^{\dagger} \dot{U}_b \rho + \rho \dot{U}_b^{\dagger} U_b = [\rho, (\dot{\beta}^* b - \dot{\beta} b^{\dagger})]. \quad (5.22)$$

El Hamiltoniano queda entonces dado por

$$H'_{mec} = \hbar \omega (b^{\dagger} b + \beta b^{\dagger} + \beta^* b + |\beta|^2), \quad (5.23)$$

$$H'_{cav} = \hbar \frac{W}{|f(t)|^2} (\Gamma^{\dagger} \Gamma + \alpha \Gamma^{\dagger} + \alpha^* \Gamma + |\alpha|^2), \quad (5.24)$$

$$H'_{rad} = -\hbar g(t) [(\Gamma^{\dagger} \Gamma + \alpha \Gamma^{\dagger} + \alpha^* \Gamma + |\alpha|^2)((b^{\dagger} + \beta^*) + (b + \beta))], \quad (5.25)$$

$$B' = \frac{\hbar \Omega}{2} (\Gamma^{\dagger} + \Gamma + \alpha + \alpha^*). \quad (5.26)$$

Más términos adicionales generados por la transformación debido a sus derivadas temporales

$$H_T = (\alpha^* \dot{\Gamma} - \alpha \dot{\Gamma}^{\dagger}) + (\dot{\alpha}^* \Gamma - \dot{\alpha} \Gamma^{\dagger}) + (\dot{\beta}^* b - \dot{\beta} b^{\dagger}), \quad (5.27)$$

y debido a los términos de Lindblad

$$U^{\dagger} [L_a U \rho U^{\dagger}] U + U^{\dagger} [L_{\Gamma} U \rho U^{\dagger}] U, \quad (5.28)$$

se generan términos adicionales para el Hamiltoniano mientras que los términos de Lindblad mantienen su forma original

$$U^{\dagger} [L_b U \rho U^{\dagger}] U = L_b \rho + [\beta b^{\dagger} - \beta^* b, \rho], \quad (5.29)$$

$$U^{\dagger} [L_{\Gamma} U \rho U^{\dagger}] U = L_{\Gamma} \rho + [\alpha \Gamma^{\dagger} - \alpha^* \Gamma, \rho]. \quad (5.30)$$

La transformación de los términos Lindblad resulta en Hamiltoniano efectivo adicional

$$H_L = -\frac{\gamma}{2} (\beta b^{\dagger} + \beta^* b) - \frac{\kappa}{2} (\alpha \Gamma^{\dagger} + \alpha^* \Gamma). \quad (5.31)$$

A fin de simplificar el Hamiltoniano, es necesario agrupar todos los términos a primer orden en operadores

$$b(\omega\beta - g(t)|\alpha|^2 + i\dot{\beta}^* + i\frac{\gamma}{2}\beta), \quad (5.32)$$

$$\Gamma(\frac{W\alpha}{|f|^2} - g(t)\alpha(\beta^* + \beta) + \frac{\Omega}{2} - i\dot{\alpha} - i\frac{\kappa}{2}\alpha), \quad (5.33)$$

y sus conjugados Hermitianos. Para anular estos términos es necesario que se cumpla el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\beta} = -i\omega\beta^* + ig(t)|\alpha|^2 - \frac{\gamma}{2}\beta, \quad (5.34)$$

$$\dot{\alpha} = -i\frac{W}{|f|^2}\alpha^* + ig(t)\alpha(\beta + \beta^*) - i\frac{\Omega}{2} - \frac{\kappa}{2}\alpha^*. \quad (5.35)$$

Debido a la forma de la frecuencia elegida, la función  $f(t)$  que figura en los operadores  $\Gamma$  es

$$f(t) = e^{i\omega t} + \frac{\epsilon}{16}e^{3i\omega t} \quad (5.36)$$

por lo que si se desprecian términos de corrección menores a epsilon

$$\dot{\Gamma}(t) = i\omega\Gamma(t), \quad (5.37)$$

$$\dot{\Gamma}^\dagger(t) = -i\omega\Gamma^\dagger(t), \quad (5.38)$$

y estos términos deben incluirse en las ecuaciones para  $\alpha$  y  $\beta$

$$\dot{\beta} = -i\omega\beta^* + ig(t)|\alpha|^2 - \frac{\gamma}{2}\beta, \quad (5.39)$$

$$\dot{\alpha} = -i\frac{W}{|f|^2}\alpha^* + ig(t)\alpha(\beta + \beta^*) - i\frac{\Omega}{2} - \frac{\kappa}{2}\alpha^* + \omega\alpha^*. \quad (5.40)$$

El caso de interés es el caso estacionario  $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$ . Se trabaja el límite de acoplamiento pequeño y se limita el análisis a orden 0 en el parámetro de acoplamiento  $g(t)$

$$0 = -i\omega\beta^* - \frac{\gamma}{2}\beta, \quad (5.41)$$

$$0 = -i\frac{W}{|f|^2}\alpha^* - i\frac{\Omega}{2} - \frac{\kappa}{2}\alpha^* + \omega\alpha^*. \quad (5.42)$$

dada la expresión para  $f(t)$  se tiene

$$\frac{W}{|f(t)|^2} = \omega, \quad (5.43)$$

se llega a la solución, a orden 0 en acoplamiento

$$\beta_0=0, \quad (5.44)$$

$$\alpha_0 = \frac{\Omega}{-i\kappa - 2\omega(1-i)}. \quad (5.45)$$

lo cual resulta en el Hamiltoniano transformado

$$H = \hbar\omega b^\dagger b + \hbar\omega \Gamma^\dagger \Gamma - \hbar g(t)[(\alpha\Gamma^\dagger + \alpha^*\Gamma)(b^\dagger + b)] \quad (5.46)$$

donde se ha despreciado el término  $\Gamma^\dagger \Gamma$  en la interacción ya que en este régimen  $|\alpha| \gg 1$  y es despreciable respecto a los otros dos términos. De esta forma se tiene un nuevo Hamiltoniano para interacción optomecánica donde se modela que la intensidad de la interacción optomecánica es una función del tiempo.

## Capítulo 6

# Objetivos Futuros

A partir del Hamiltoniano obtenido es posible estudiar un sistema de gran importancia tomando en cuenta su dependencia temporal inherente, la cual se no se mantiene en el Hamiltoniano usual[5]. A partir de este punto se proponen tres objetivos para realizar un estudio más completo de este sistema bajo este nuevo enfoque. En todos los casos se espera obtener expresiones analíticas y resultados numéricos para la temperatura final del oscilador mecánico bajo la aproximación adiabática.

### 6.1. Objetivos y Calendarización

1. Llegar a una expresión para la temperatura final del espejo bajo la aproximación adiabática y compararla con la expresión usual que se obtiene al no considerar una dependencia temporal explícita para la frecuencia natural de la cavidad. Esto requiere deducir desde primeros principios la ecuación maestra que contiene los coeficientes de enfriamiento y calentamiento correspondientes al oscilador mecánico.
2. Estudiar el sistema en un régimen distinto al establecido en los capítulos anteriores. Si no se puede tomar la interacción a orden cero durante la transformación al marco desplazado esto cambia el coeficiente  $\alpha$  y lo convierte en una función del tiempo.
3. Estudiar el sistema cuando el parámetro  $\epsilon$  debe tomarse en cuenta hasta segundo orden. Este cambio lleva a que incluso el factor global del Hamiltoniano para el campo dentro de la cavidad sea una función del tiempo, lo que lleva a estudiar el efecto sobre el oscilador de interactuar con un campo cuya frecuencia natural oscila en el tiempo.

Se prevee que cada uno de estos objetivos, junto con trabajo de redacción y revisión bibliográfica adicional, sea realizable dentro de un semestre de trabajo. Esto implicaría un último semestre únicamente dedicado a redacción a fin de elaborar la tesis doctoral en tiempo y forma, así como un artículo de investigación a ser publicado en una revista internacional.

# Bibliografía

- [1] Sigmund Kohler, Thomas Dittrich†, Peter Hänggi. Floquet-markov description of the parametrically driven, dissipative harmonic quantum oscillator. *Phys.Rev. E55*, 30 Sep 1998.
- [2] Pablo Yanes-Thomas, Pablo Barberis-Blostein. Optomechanical cooling with time dependent parameters. *TBD*, 2017.
- [3] Thomas J. Kippenberg, Thomas Marquardt, Markus Aspelmeyer. Cavity optomechanics. *Review of Modern Physics*, 2013.
- [4] Alex Abramovici, William E. Althouse, et al. Ligo: The laser interferometer gravitational-wave observatory. *Science*, 1992.
- [5] Carlton M. Caves. Quantum-mechanical radiation-pressure fluctuations in an interferometer. *Physical Review Letters*, 1980.
- [6] Thomas Corbitt, Christopher Wipf, et al. Optical dilution and feedback cooling of a gram-scale oscillator to 6.9 mk. *Physical Review Letters*, 2007.
- [7] Zhi Xin Chen. Entanglement dynamics in double-cavity optomechanical systems. *Optics Express*, 2017.
- [8] Kerry J. Vahala. Optical microcavities. *Nature*, 2003.
- [9] *1 Million-Q Optomechanical Microdisk Resonators with Very Large Scale Integration*, 2017.
- [10] E. Verhagen, et al. Quantum-coherent coupling of a mechanical oscillator to an optical cavity mode. *Nature*, 2012.
- [11] J. C. Sankey, et al. Strong and tunable nonlinear optomechanical coupling in a low-loss system. *Nature Physics*, 2010.
- [12] L. Childress. Cavity optomechanics in a levitated helium drop. *arXiv:1708.01803*, 2017.
- [13] Ivan Favero, et al. Fluctuating nanomechanical system in a high finesse optical microcavity. *Optics Express*, 2009.
- [14] Matt Eichenfield. Optomechanical crystals. *Nature*, 2009.
- [15] Michael J. Burek. Diamond optomechanical crystals. *Optica*, 2016.

- [16] V. B. Braginsky. Pondermotive effects of electromagnetic radiation. *Soviet Physics JEPT*, 1968.
- [17] A. Dorsel. Optical bistability and mirror confinement induced by radiation pressure. *Physical Review Letters*, 1983.
- [18] I Wilson-Rae, N. Nooshi, et al. Cavity-assisted back action cooling of mechanical resonators. *New Journal of Physics*, 2008.
- [19] Florian Marquardt, Joe P. Chen. Quantum theory of cavity-assisted side-band cooling of mechanical motion. *Physical Review Letters*, 2007.
- [20] Thiago P. Mayer Alegre. Optomechanical zipper cavity lasers: theoretical analysis of tuning range and stability. *Optics Express*, 2010.
- [21] Mahmood Bagheri. Dynamic manipulation of nanomechanical resonators in the high-amplitude regime and non-volatile mechanical memory operation. *Nature Nanotechnology*, 2011.
- [22] S. Forstner. Cavity optomechanical magnetometer. *Physical Review Letters*, 2012.
- [23] Jing Zhang. Quantum-state transfer from light to macroscopic oscillators. *Physical Review A*, 2003.
- [24] H.J. Kimble. The quantum internet. *Nature*, 2008.
- [25] Elion D. Kirson et al. Alternating electric fields arrest cell proliferation in animal tumor models and human brain tumors. *Proceedings of the National Academy of Science*, 2007.
- [26] V. Salari et al. Optomechanical proposal for monitoring microtubule mechanical vibrations. *Physical Review E*, 2017.
- [27] Marc Bienert, Pablo Barberis-Blostein. Optomechanical laser cooling with mechanical modulation. *Physical Review Letters A*, 2015.
- [28] M. Ward. *Supplement: Floquet Theory and the Mathieu's Equation*.
- [29] W.Domcke, P. Hänggi, D. Tannor. *Driven Quantum Systems*. Special Issue: Chemical Physics, Vol. 217, 1997.
- [30] George B. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists, Seventh Edition: A Comprehensive Guide*. Academic Press, 2013.
- [31] Stephen Barnett, Stig Stenholm. Spectral decomposition of the lindblad operator. *Journal of Modern Optics*, 2000.
- [32] Lowell S. Brown. Quantum motion in a paul trap. *Physical Review Letters*, 1991.
- [33] J. J. Sakurai, Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Pearson, 2013.
- [34] Pablo Enrique Yanes Thomas. Enfriamiento optomecánico dependiente del tiempo. Master's thesis, UNAM, 2015.

- [35] Peter Zoller. *Quantum Noise: A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics*. Springer Science and Business Media, 2004.
- [36] Hans-Jurgen Briegel, Berthold-Georg Englert. Quantum optical master equations: The use of damping bases. *PHYSICAL REVIEW A*, 1993.
- [37] C. K. Law. Interaction between a moving mirror and radiation pressure: A hamiltonian formulation. *Physical Review A*, 1995.