

Enfriamiento Optomecánico con Parámetros Dependientes del Tiempo

Pablo Enrique Yanes Thomas

1 de mayo de 2018

Índice general

1. Introducción	4
1.1. Ejemplos de Sistemas Optomecánicos	4
1.1.1. Espejos Suspendidos	4
1.1.2. Microresonadores	5
1.1.3. Objetos Suspendidos o Levitados	5
1.1.4. Cristales Optomecánicos	5
1.2. Efectos Optomecánicos	5
1.3. Aplicaciones	6
1.3.1. Enfriamiento Optomecánico	7
1.4. Enfriamiento Optomecánico con Parámetros Dependientes del Tiempo	9
2. Oscilador Armónico Dependiente del Tiempo y Sistemas Cuánti- cos Abiertos	11
2.1. Teoría de Floquet	12
2.1.1. Propiedades Básicas	12
2.1.2. Estabilidad para Ecuaciones de Segundo Orden	13
2.1.3. Estabilidad de las Soluciones de Floquet para la Ecuación de Hill	15
2.1.4. Solución para Oscilaciones Pequeñas	15
2.2. Estados de Floquet en Mecánica Cuántica	16
2.3. Oscilador Armónico Dependiente del Tiempo: Solución Mediante Formalismo de Floquet	17
2.4. Sistemas Cuánticos Abiertos	19
2.4.1. Base de Decaimiento	21
3. Enfriamiento Optomecánico Dependiente del Tiempo: Caso de Oscilador Armónico Dependiente del Tiempo	23
3.1. Hamiltoniano para Enfriamiento Optomecánico con Parámetros Dependientes del Tiempo	23
3.2. Transformación Mediante Operador de Desplazamiento	25
3.2.1. Solución Explícita para Pequeñas Oscilaciones	26
3.3. Enfriamiento Laser	27
3.4. Análisis Numérico	28

4. Enfriamiento Optomecánico Dependiente del Tiempo: Modelo Mejorado de Disipación Aplicado a Cavidad	31
4.1. Ecuación de Onda para el Potencial Vectorial en una Cavidad con Espejo Móvil	33
4.2. Introducción Directa de Operadores Γ en el Hamiltoniano	36
5. Objetivos Futuros	40
5.1. Objetivos y Calendarización	40
A. Transformación al Marco de Referencia Desplazado	42

Objetivo General

Si la frecuencia natural de un oscilador armónico mecánico con fricción, acoplado a una cavidad de Fabry-Perot, es una función periódica del tiempo, el modelo de disipación debe tomar en cuenta esta dependencia; en general esto no se hace. Durante el primer año de doctorado se encontró que, si en este caso, se emplea un formalismo de disipación que toma en cuenta la dependencia temporal de la frecuencia natural, se obtiene una predicción cualitativa y cuantitativamente distinta para la temperatura final del oscilador mecánico que si no se toma en cuenta. Este resultado justifica la sospecha de que en el caso de un sistema optomecánico, en donde el oscilador mecánico también es un espejo semitransparente, el cambio de la frecuencia natural de los modos de la cavidad debe ser tomado en cuenta en el modelo de de la disipación del campo electromagnético a través de los espejos. El objetivo de la tesis es investigar esta posibilidad y sus posibles efectos en enfriamiento de sistemas optomecánicos y manipulación de su estado cuántico.

Capítulo 1

Introducción

La optomecánica es el estudio de la interacción entre elementos ópticos y elementos mecánicos. En este capítulo se dará una breve introducción al tipo de sistemas, efectos y aplicaciones que se consideran parte de la optomecánica. Se hace énfasis particular en el enfriamiento optomecánico y como este efecto es fundamentalmente cuántico. Después se explica una variante del enfriamiento optomecánico que motiva este trabajo, el enfriamiento optomecánico con parámetros dependientes del tiempo cuando existe disipación. Los formalismos particulares que se utilizan para modelar este tipo de procesos se introducen en el capítulo 2. Los resultados obtenidos en trabajos previos se presentan en el capítulo 3 y se explica porque estos motivan el trabajo que se propone en el capítulo 4.

1.1. Ejemplos de Sistemas Optomecánicos

Existen muchas implementaciones posibles de acoplamientos entre elementos ópticos y elementos mecánicos [1]. En esta sección se detallan algunos de estos.

1.1.1. Espejos Suspendidos

Consisten de cavidades ópticas donde uno o más de los espejos pueden cambiar de posición y así alterar la longitud de la cavidad. La primera realización experimental de este tipo de sistemas se debe a los primeros esfuerzos para detectar ondas gravitacionales [2]. El sistema consiste en un interferómetro con los espejos montados en masas suspendidas, a manera que una onda gravitacional, al interactuar con las masas cambiaría la posición de los espejos y así la longitud de camino óptico. El propósito de suspender las masas no es crear un sistema optomecánico, sin embargo, fue necesario estudiar las fluctuaciones ocasionadas por la interacción entre la luz y las masas [3]. Experimentos en este tipo de sistemas han demostrado varios efectos, entre ellos el enfriamiento mediante presión de radiación [4]. También es posible utilizar este tipo de sistemas para estudiar el entrelazamiento cuántico[5] al acoplar dos cavidades al mismo espejo y así lograr acoplamiento entre los modos de ambos campos.

1.1.2. Microresonadores

Otro tipo posible de sistema optomecánico son los microresonador o microcavidades. En este tipo de sistemas, es posible confinar a la luz a viajar en modos *whispering gallery*, los cuales implican que la luz es guiada a lo largo del perímetro del resonador, el cual puede tener forma esférica, circular, o toroidal[6]. Si el resonador vibra, esto puede alterar el camino óptico de la luz y se logra un acoplamiento entre el resonador macroscópico y la luz atrapada en el. Es posible fabricar resonadores de este tipo con un factor de calidad de 10^6 , este factor es igual a 2π veces el número de oscilaciones requeridas para que la energía almacenada en el resonador decaiga a $\frac{1}{e}$ de su valor inicial. Debido a su tamaño, es posible obtener acoplamiento fuerte entre sistemas cuánticos y el resonador, el cual es un objeto macroscópico [7].

1.1.3. Objetos Suspendidos o Levitados

En este tipo de sistemas, se considera una cavidad óptica rígida donde se coloca un objeto mecánico dentro de la cavidad. Este esquema permite el acoplamiento de objetos mecánicos de tamaños inferiores a la longitud de onda de la luz [1], como por ejemplo una membrana dieléctrica de SI_3N_4 de $1mm \times 1mm \times 50nm$ de dimensión[8]. En ese caso, se puede observar que parámetros de la cavidad como la sintonización y la finesa dependen del desplazamiento de la membrana. Otra posibilidad consiste en un nano cable de carbón, de aproximadamente 10^9 átomos, el cual se coloca dentro de una micro cavidad de Fabri-Perot. Así mismo, se han realizado experimentos donde se levita una gota de Helio líquido dentro de la cavidad[9]. Las propiedades de la cavidad cambian no solo dependiendo de la posición del objeto, sino también de sus modos vibracionales[10].

1.1.4. Cristales Optomecánicos

Este tipo de sistema es más reciente que los demás y se basa en redes cristalinas donde se logra acoplar fotones y fonones. En uno de los primeros experimentos se fabricó una nano viga de silicio [11]. El sistema consiste en una nano viga con agujeros espaciados de manera regular, lo cual forma una red. Se introduce un defecto mediante una reducción cuadrática en la constante de red, de manera simétrica respecto al centro de la viga. Esto genera un potencial efectivo para los modos ópticos y uno análogo para los modos mecánicos. Las vibraciones ocasionan un cierto desplazamiento en la estructura lo cual afecta el potencial efectivo para los modos ópticos y se obtiene el acoplamiento. Una implementación reciente de este tipo de sistemas involucra usar redes cristalinas semi periódicas de diamante para implementar el resonador[12].

1.2. Efectos Optomecánicos

En esta sección se da un pequeño resumen de los efectos más conocidos y utilizados resultantes de la interacción optomecánica. Frecuentemente estos efectos se deben a la interacción entre la presión de radiación que la luz incidente aplica sobre los elemento mecánicos y la reacción retardada de la cavidad a

los cambios en su longitud o el equivalente en cavidades de otras geometrías. Algunos de estos efectos son:

- **Efecto de Resorte Óptico (optical spring effect)** La presión de radiación depende de la posición del objeto, por lo que esta cambia cuando el objeto se mueve. En particular, en el caso de cavidades con espejos suspendidos, la presión de radiación afecta la constante del resorte ya que genera un desplazamiento en la resonancia de la frecuencia mecánica, el cual se puede utilizar para aumentar o disminuir la frecuencia natural del resorte.[13]
- **Bi-Estabilidad Óptica (optical bi-stability)** La presión de radiación puede desplazar al objeto mecánico y se espera que se llegue a una posición de equilibrio. Sin embargo, la dependencia del potencial efectivo sobre la posición es no lineal, lo cual lleva a que se generen dos posiciones de equilibrio. Para una presión lo suficientemente fuerte, este efecto se borra y se llega a una posición altamente estable[14].
- **Enfriamiento Optomecánico** Este es el efecto en el que se basa este trabajo y se describe a mayor detalle más adelante. El efecto consiste en lograr que un sistema de resonador acoplado a una cavidad favorezca las transiciones a estados de menor número de excitaciones por sobre transiciones a estados de mayor número de excitaciones.

1.3. Aplicaciones

Existen muchas aplicaciones posibles para los efectos y sistemas utilizados en optomecánica. Este trabajo se concentra principalmente en enfriamiento optomecánico, sin embargo algunas otras posibles aplicaciones son:

- **Estabilización Láser** Al utilizar una cavidad de tipo cristal optomecánico doble (*zipper cavity* en inglés) como base para un láser, se puede obtener un dispositivo tal que su frecuencia, en especial la sensibilidad de está a ruido térmico, se puede estabilizar optomecánicamente[15].
- **Memoria Optomecánica** Se puede crear un sistema de memoria utilizando una cavidad optomecánica compuesta por una guía de ondas y un resonador mecánico ligeramente torcido a manera de tener dos configuraciones posibles, arriba y abajo. Esto lleva a que se genere un potencial de doble pozo asimétrico para el resonador y, con la ayuda de un láser para excitar el sistema y de otro para enfriarlo, es posible realizar un proceso controlado donde se decide en que pozo queda el resonador. Estos dos estados corresponden a 0 y 1 y el sistema no requiere energía para mantenerse en la configuración final, generando un sistema de memoria estable [16].
- **Magnetometría** Al acoplar un material magnetostrictivo al resonador mecánico de una cavidad optomecánica se pueden excitar los eigenmodos del resonador mecánico al aplicar un campo magnético. De esta forma, la presencia del campo magnético se puede leer en el comportamiento del campo de luz dentro de la cavidad. Esto permite tener un sensor de campos magnéticos de alta precisión que funciona a temperatura ambiente [17].

- **Redes Cuánticas** La optomecánica permite realizar el mapeo de los estados de un campo de luz a los modos vibracionales de un oscilador mecánico [18]. Este tipo de transferencia de información es clave en la formación de redes de información cuánticas.[19]
- **Detección de Cáncer** Los Microtúbulos son una parte clave de la estructura de una célula y se ha estudiado si su interacción con campos electromagnéticos externos puede ser un tratamiento viable para el cáncer[20]. El estudio de las propiedades vibracionales de estas estructuras es clave para esto y se ha propuesto un montaje experimental para realizar estas mediciones mediante un acoplamiento optomecánico[21].

1.3.1. Enfriamiento Optomecánico

En esta sección se da una breve explicación de la causa del enfriamiento optomecánico y la razón de que este sea un efecto puramente cuántico. Al hablar de enfriamiento es importante definir que se considera como temperatura. En este trabajo se habla del enfriamiento de un oscilador armónico cuántico, por lo que se toma el número promedio de sus excitaciones como medida de su temperatura. Esta medida se toma para lo que se considera un estado estacionario. El enfriamiento entonces se puede entender como transiciones de estados con un número mayor de excitaciones a estados con un número menor. A continuación se explica de que dependen estas transiciones. La derivación se basa en la encontrada en [22]. Primero es necesario definir la Densidad de Potencia Espectral

$$S_{hh}(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \langle h_{\tau}^*(\omega) h_{\tau}(\omega) \rangle, \quad (1.1)$$

donde $h(t)$ una variable estocástica compleja cuyas propiedades estadísticas son estacionarias. $h_{\tau}(\omega)$ es la transformada de Fourier tomada entre $-\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}$. Es importante notar que este es un promedio estadístico. La densidad de potencia espectral describe la potencia que se encuentra en una señal. Para el proceso de enfriamiento optomecánico la cantidad de interés será la densidad de potencia espectral de la fuerza ejercida por el baño térmico al que se acopla el oscilador armónico. Para el cálculo será importante expresar la densidad de potencia espectral de una forma específica dada por el siguiente teorema que se presenta sin demostración.

Teorema de Wiener-Khinchin: *Sea $h(t)$ una variable estocástica compleja cuyas propiedades estadísticas son estacionarias, entonces*

$$S_{hh}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle h^*(t+\tau) h(t) \rangle_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \langle h^*(-\omega) h(\omega') \rangle \quad (1.2)$$

El teorema es la primera igualdad, la segunda resulta de las propiedades de la transformada de Fourier. En el caso clásico la densidad de potencia espectral es simétrica en la frecuencia. Sin embargo, en el caso cuántico se tiene operadores y esto no es necesariamente cierto. Debido a que, en general, no se puede asegurar que para un operador Hermitiano $\hat{O}(t)$ se tenga $[\hat{O}(t), \hat{O}(t+\tau)] = 0$. Se sigue entonces que no se puede asegurar $S_{OO}(\omega) = S_{OO}(-\omega)$. El hecho de que un

operador no necesariamente conmute con si mismo a distintos tiempos rompe la simetría. Se estudia ahora el caso específico de un oscilador armónico cuántico descrito por un Hamiltoniano

$$H = H_0 + V, \quad (1.3)$$

donde

$$H_0 = \hbar\Omega a^\dagger a + H_b \quad (1.4)$$

y

$$V = qF, \quad (1.5)$$

es la interacción entre el oscilador y el baño, donde F es la fuerza ejercida por el baño, la cual conmuta con q . H_0 es el Hamiltoniano usual para un oscilador armónico cuántico más H_b , el Hamiltoniano que describe el baño térmico al que está acoplado el oscilador. Se desea obtener la probabilidad de que el oscilador armónico pase de un estado inicial $|\Psi(t)\rangle$ a un estado final ortogonal $|\Psi_f(t)\rangle$. Se trabaja en el cuadro de interacción por simplicidad. La amplitud de transición $A_{if}(t)$ está dada por

$$A_{if}(t) = \langle \Psi_f(t) | U_0 U_I | \Psi(0) \rangle = e^{\frac{-iE_f t}{\hbar}} \langle \Psi_f(t) | \Psi_I(t) \rangle, \quad (1.6)$$

donde

$$U_0 = e^{\frac{-iH_0 t}{\hbar}}, \quad (1.7)$$

$$U_I = e^{\frac{-iV t}{\hbar}}. \quad (1.8)$$

En el cuadro de interacción el Hamiltoniano está dado por

$$H_I(t) = U_0^\dagger(t) H U_0(t), \quad (1.9)$$

$$= U_0^\dagger(t) V U_0(t), \quad (1.10)$$

$$= V_I(t). \quad (1.11)$$

Utilizando teoría de perturbación a primer orden, y asumiendo que la interacción es débil y por lo tanto los estados del baño y del oscilador armónico se mantienen separables, se llega a que la amplitud de transición para pasar de un estado n a un estado $n+1$ en el oscilador, dado que el baño inicia en algún estado j y que la interacción lo deje en un estado k , es

$$A_{if}(t) = \frac{x_{zp}\sqrt{n+1}}{i\hbar} \int_0^t d\tau_1 e^{i\Omega\tau_1} \langle k | F(\tau_1) | j \rangle, \quad (1.12)$$

donde $F_I(t)$ es la fuerza que ejerce el baño en el cuadro de interacción y x_{zp} es la amplitud mínima del oscilador. La probabilidad de transición se obtiene al sumar sobre los cuadrados de las amplitudes de probabilidad correspondientes a todos los estados finales posibles

$$P_{n \rightarrow n+1} = \sum_k |A_{if}(t)|^2 = \frac{x_{zp}^2(n+1)}{\hbar^2} \int \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 e^{i\Omega(\tau_2 - \tau_1)} \langle F_I(\tau_1) F_I(\tau_2) \rangle, \quad (1.13)$$

donde se ha utilizado que $F(t)$ es un operador Hermitiano y que los modos del baño son completos. Se utilizan dos cambios de variable $\tau_1 = t' + \tau$ y $\tau_2 = t'$ para hacer más evidente la relación con (1.2).

$$P_{n \rightarrow n+1} = \frac{x_{zp}^2(n+1)}{\hbar^2} \int_0^t \int_{-t'}^{t-t'} dt' d\tau e^{i\Omega\tau} \langle F_I(t' + \tau) F_I(t') \rangle. \quad (1.14)$$

Si la integración se realiza con tiempos mucho más largos que los tiempos de auto-correlación del baño, los límites de la segunda integral se pueden aproximar por $\pm\infty$ y se llega a que

$$P_{n \rightarrow n+1} = \frac{x_{zp}^2(n+1)}{\hbar^2} t S_{FF}(-\Omega). \quad (1.15)$$

Si se deriva respecto a t se obtiene la tasa de transición

$$\gamma_{n \rightarrow n+1} = \frac{x_{zp}^2(n+1)}{\hbar^2} S_{FF}(-\Omega), \quad (1.16)$$

y un cálculo análogo permite encontrar la tasa de transición para $n \rightarrow n-1$ y esta resulta ser

$$\gamma_{n \rightarrow n-1} = \frac{x_{zp}^2 n}{\hbar^2} S_{FF}(\Omega). \quad (1.17)$$

Las transiciones que aumentan el número de excitaciones dependen de la parte negativa del espectro S_{FF} mientras que las transiciones que reducen el número de excitaciones dependen de la parte positiva.

En el caso clásico $S_{FF}(\Omega)$ es una función simétrica, sin embargo, esta simetría se pierde al reemplazar variables por operadores debido a las relaciones de conmutación. En el caso clásico las tasas de transición hacia estados más y menos excitados son básicamente iguales, pero en el caso cuántico esto ya no es cierto. Si se encuentra el régimen de parámetros adecuados, se puede colocar el sistema de tal forma que una de las dos tasas sea mayor a la otra y así lograr un sistema que logre calentamiento o enfriamiento. Este efecto es intrínsecamente cuántico.

1.4. Enfriamiento Optomecánico con Parámetros Dependientes del Tiempo

Este trabajo se enfoca en el enfriamiento optomecánico cuando existe disipación. Uno de los métodos empleados en la búsqueda por mejorar el enfriamiento de un oscilador mecánico acoplado a una cavidad es utilizar un oscilador mecánico cuya frecuencia natural sea función del tiempo [23]. Esta dependencia modifica el cuasi espectro de energía del sistema [24]. En el formalismo de disipación empleado en [23] esto no se toma en cuenta, el efecto de la dependencia

temporal sobre la disipación se modela mediante coeficientes con dependencia temporal que se introducen de manera ad-hoc. Sin embargo, [24] muestra que este no es el enfoque óptimo, así que se realizó un trabajo que sí toma en cuenta los efectos de la dependencia temporal de la frecuencia natural del oscilador durante la derivación de la temperatura final que se espera del sistema [25] y esta dependencia queda codificada en los operadores tanto del Hamiltoniano como los de los términos de disipación e interacción. Los resultados de este trabajo muestran diferencias cuantitativas y cualitativas en el comportamiento de la temperatura del oscilador mecánico, lo cual motiva la pregunta ¿Qué sucede al tomar en cuenta la dependencia temporal de la frecuencia natural de la cavidad en el modelo de disipación?

En esta propuesta se explican los pasos que se siguen para modelar este tipo de sistemas en términos generales y luego se explica como se obtiene la temperatura final del sistema para el caso del oscilador paramétrico. Finalmente se propone aplicar este formalismo a un sistema donde se toma en cuenta la dependencia temporal de la frecuencia de la cavidad en el modelo de disipación. Se discute la teoría de los sistemas cuánticos abiertos, del oscilador mecánico dependiente del tiempo, el enfriamiento optomecánico dependiente del tiempo y la disipación dependiente del tiempo.

Capítulo 2

Oscilador Armónico Dependiente del Tiempo y Sistemas Cuánticos Abiertos

En un trabajo previo [26] se encontró que cuando la frecuencia natural de un oscilador armónico mecánico con fricción acoplado a una cavidad óptica es una función periódica del tiempo, y el modelo de disipación toma en cuenta esta dependencia, se puede enfriar el oscilador a una temperatura menor que en el caso donde la frecuencia natural es constante. Como ya se mencionó la sección 1.3.1, por temperatura se entiende el número promedio de excitaciones del oscilador. Para poder entender este resultado es necesario poder modelar un oscilador armónico dependiente del tiempo en mecánica cuántica y poder modelar sistemas cuánticos abiertos, es decir con intercambios de energía con su ambiente. En este capítulo se discuten ambos formalismos.

Para modelar el oscilador armónico cuántico dependiente del tiempo de forma que su dependencia temporal pueda ser tomada en cuenta en el modelo de disipación es extremadamente útil emplear un formalismo que codifique la dependencia temporal dentro de los operadores utilizados. Esto se debe a que se ha demostrado [24] que el modelo de disipación es mejor si se utilizan estos operadores. Este formalismo se conoce como teoría de Floquet. Esta teoría permite obtener soluciones para las ecuaciones clásicas de movimiento del oscilador armónico dependiente del tiempo, las cuales se utilizan posteriormente en la solución del caso cuántico.

Una vez establecida la forma de modelar el oscilador armónico dependiente del tiempo se procederá a dar una breve explicación de como modelar sistemas cuánticos con disipación. Se dará una explicación del formalismo de ecuaciones maestras y de la base que se emplea para trabajar el caso específico de un oscilador armónico cuántico con disipación.

2.1. Teoría de Floquet

El primer tema a tratar es el formalismo empleado para tratar el oscilador armónico dependiente del tiempo en el caso clásico. Se desea resolver una ecuación diferencial que involucra coeficientes con dependencia temporal, tal como

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (2.1)$$

donde la función $A(t)$ es periódica con periodicidad τ . En este caso el teorema de Floquet[27] dice que la solución no necesariamente es periódica pero debe tener la forma

$$x(t) = e^{\mu t} p(t). \quad (2.2)$$

Los valores μ se conocen como los exponentes característicos o de Floquet y la función $p(t)$ es periódica con período τ , es decir el mismo periodo que el coeficiente en la ecuación diferencial. Los coeficientes μ son, en general, complejos. Claramente, el hecho de que la solución tenga la forma (2.2) puede llevar a que la solución diverja con el tiempo, por lo que se desea entender el criterio de estabilidad para este tipo de soluciones. Antes de esto, es necesario establecer algunas definiciones y propiedades, las cuales se presentan sin demostración debido a que no son el enfoque principal de este trabajo. Si el lector se encuentra interesado, el tratamiento se encuentra con mayor detalle en las notas de las cuales surge la sección siguiente [27].

2.1.1. Propiedades Básicas

Sea la ecuación (2.1) en n dimensiones. Esto es, se piensa en x como un vector de n dimensiones y en $A(t)$ como una matriz de $n \times n$. En este caso, si la ecuación tiene n soluciones x_1, x_2, \dots, x_n , se define la **matriz fundamental** como la matriz formada utilizando las soluciones como columnas, siempre y cuando estas sean linealmente independientes

$$X(t) = [[x_1][x_2] \dots [x_n]], \quad (2.3)$$

Si $X(t_0) = I$ la matriz se conoce como la **matriz fundamental principal**. Se tiene que

Lema: Si $X(t)$ es una matriz fundamental, también lo es $X(t)C$ para cualquier matriz constante y no singular C .

Y que

Lema: Sea $W(t)$, el Wronskiano de $X(t)$ y también el determinante de $X(t)$, entonces:

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr}[A(s)] ds}. \quad (2.4)$$

Se tiene entonces

Teorema: Sea $A(t)$ una matriz con periodicidad τ . Si $X(t)$ es una matriz fundamental entonces $X(t + \tau)$ también lo es y existe una única matriz constante no singular B tal que:

$$\begin{aligned} \text{i) } X(t + \tau) &= X(t)B \quad \forall t, \\ \text{ii) } \det(B) &= e^{\int_0^t \text{tr}[A(s)]ds}. \end{aligned}$$

Si se toma $X(0) = I$ entonces $B = X(\tau)$. Con esto se pueden definir los **multiplicadores característicos**, los cuales son los valores propios de la matriz B , y se denominan con la letra ρ . Estos cumplen que

$$\rho_1 = e^{\mu_1 \tau}, \quad \rho_2 = e^{\mu_2 \tau}, \dots, \rho_n = e^{\mu_n \tau}, \quad (2.5)$$

donde los valores μ son los exponentes de Floquet definidos anteriormente. Se cumplen cuatro propiedades:

1) Los multiplicadores característicos de $B = X(\tau)$ cumplen que

$$\det(B) = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n = e^{\int_0^T \text{tr}[A(s)]ds}. \quad (2.6)$$

2) Trivialmente, como la traza es la suma de los valores propios

$$\text{Tr}[B] = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n. \quad (2.7)$$

3) Los multiplicadores característicos no son únicos, ya que

$$e^{\mu \tau} = e^{(\mu + \frac{2\pi i}{\tau})\tau}. \quad (2.8)$$

4) Los multiplicadores característicos son una propiedad de la ecuación (2.1) y no dependen de la elección de matriz fundamental.

Con estas propiedades, se puede pasar a analizar la estabilidad de las soluciones para el caso específico de ecuaciones de segundo orden.

2.1.2. Estabilidad para Ecuaciones de Segundo Orden

Si se piensa en una ecuación diferencial de segundo orden del tipo

$$\ddot{x} + a(t)x = 0, \quad (2.9)$$

donde $a(t)$ tiene periodo τ . Si se toma $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$, la ecuación puede re-escribirse como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

si se toma la condición inicial $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, se obtiene una solución de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1^1(t) \\ \dot{x}_1^1(t) \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

y para la condición inicial $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, se obtiene una solución de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1^2(t) \\ \dot{x}_1^2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

esto permite generar la matriz B

$$B = \begin{bmatrix} x_1^1(\tau) & x_1^2(\tau) \\ \dot{x}_1^1(\tau) & \dot{x}_1^2(\tau) \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

lo cual permite calcular los multiplicadores característicos, ya que

$$\rho_1 \rho_2 = e^{\int_0^\tau \text{Tr}[A(s)] ds} = e^0 = 1, \quad (2.14)$$

y

$$2\phi = \rho_1 + \rho_2 = \text{Tr}[B] = x_1^1(\tau) + \dot{x}_1^{(2)}(\tau). \quad (2.15)$$

Esto permite obtener la ecuación

$$\rho = \phi \pm \sqrt{\phi^2 - 1}, \quad (2.16)$$

o en términos de μ

$$\cosh(\mu_1 \tau) = \phi. \quad (2.17)$$

Esto lleva a analizar cinco situaciones distintas.

Caso $-1 < \phi < 1$: En este caso, para algún valor σ se tiene que $\phi = \cos(\sigma\tau)$ por lo que:

$$\begin{aligned} \rho &= \phi \pm \sqrt{\phi^2 - 1}, \\ &= \cos(\sigma\tau) \pm i \sin(\sigma\tau), \\ &= e^{\pm i\sigma\tau}, \end{aligned}$$

lo cual lleva a una solución general de tipo:

$$x(t) = c_1 \text{Re}(e^{i\sigma t} p(t)) + c_2 \text{Im}(e^{i\sigma t} p(t)), \quad (2.18)$$

la cual es estable y pseudo periódica.

Caso $1 < \phi$: en este caso $\rho > 1$ y como $\rho_1 = \frac{1}{\rho_2}$, tenemos que $\mu_1 = -\mu_2$. Por esto, la solución es de la forma:

$$x(t) = c_1 e^{\mu_1 t} p_1(t) + c_2 e^{\mu_2 t} p_2(t) \quad (2.19)$$

donde las funciones $p(t)$ son periódicas con periodo τ . La solución es inestable.

Caso $\phi < -1$: en este caso se tiene una solución del tipo:

$$x(t) = c_1 e^{\gamma_1 t} q_1(t) + c_2 e^{-\gamma_2 t} q_2(t), \quad (2.20)$$

donde las funciones $q(t)$ tienen periodo 2τ y los coeficientes $\gamma = \mu + \frac{i\pi}{\tau}$. La solución de nuevo es inestable.

Caso $\phi = -1$: para este caso también se tiene una solución inestable, de la forma:

$$x(t) = (c_1 + t c_2) q_1(t) + c_2 q_2(t) \quad (2.21)$$

de nuevo la funciones $q(t)$ tienen periodo 2τ .

Caso $\phi = 1$:

para este caso también se tiene una solución inestable, de la forma:

$$x(t) = (c_1 + tc_2)p_1(t) + c_2p_2(t) \quad (2.22)$$

de nuevo la funciones $p(t)$ tienen periodo τ .

Es muy importante notar que en estos dos últimos casos, esta forma de la solución solo es correcta si la matriz B tiene un solo eigenvector linealmente independiente. Si este no es el caso, la solución tiene la forma usual con las funciones $p(t)$ o $q(t)$, estos dos casos marcan el límite entre la estabilidad y la inestabilidad en este problema. Finalmente, se verá como estos criterios aplican a una ecuación que será relevante más adelante, la ecuación de Hill.

2.1.3. Estabilidad de las Soluciones de Floquet para la Ecuación de Hill

La ecuación de Hill es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes dependientes del tiempo de forma periódica[27]

$$\ddot{x}(t) + (\delta + \epsilon b(t))x = 0, \quad (2.23)$$

nuevamente, la función $b(t)$ tiene periodo τ y se considera que δ y ϵ son constantes reales. Para el caso $\epsilon = 0$ claramente la ecuación se reduce al oscilador armónico usual y las soluciones son estables. Sin embargo, para ciertos valores de δ puede encontrarse la región donde la solución aún es periódica, esto se puede resolver para los casos $\phi = \pm 1$, donde ϕ es la función definida en la sección (2.1.2), de forma que se tiene soluciones estables y periódicas para los casos

$$\delta = (2m \frac{\pi}{\tau})^2, \quad (2.24)$$

que corresponde a $\phi = 1$ y

$$\delta = ((2m + 1) \frac{\pi}{\tau})^2, \quad (2.25)$$

que corresponde a $\phi = -1$. Estos valores representan la frontera de la región de soluciones estables, las cuales corresponden a periodo de τ y 2τ respectivamente. A continuación se buscaran soluciones en esta región para el caso donde $\epsilon \ll 1$.

2.1.4. Solución para Oscilaciones Pequeñas

A manera de ejemplo se obtienen las soluciones para un caso específico del oscilador armónico dependiente del tiempo. Estas soluciones se utilizarán más adelante para resolver el caso cuántico. Se toma como función periódica una función constante más una pequeña perturbación periódica

$$\nu(t) = \nu_0 + \epsilon \cos(2\omega t), \quad (2.26)$$

donde $\epsilon \ll \nu_0$ y ν_0 es la frecuencia natural promedio. Esto lleva a una ecuación de oscilador armónico

$$\ddot{f} + (\nu_0^2 + 2\epsilon\nu_0\cos(2\omega t))f = 0, \quad (2.27)$$

la cual es un caso particular de la ecuación de Mathieu [28]. A fin de tener la ecuación en la forma estándar hacemos $t' = \omega t$ y $\epsilon' = \frac{2\epsilon\nu_0}{\omega^2}$ y

$$\frac{\nu_0^2}{\omega^2} = n^2, \quad (2.28)$$

con $n \in \mathbb{Z}^+$ ya que como se vio esto es necesario para tener soluciones estables [27]. Bajo estas restricciones, tenemos que las soluciones para (2.27) son, a primer orden en ϵ y para $n = 1$

$$f(t) = e^{i\omega t} + \frac{\epsilon}{16} e^{3i\omega t}, \quad (2.29)$$

y su complejo conjugado, el cual es $f(-t)$.

Armados con una solución particular para el caso clásico, es posible proceder a estudiar como se resuelve el caso cuántico.

2.2. Estados de Floquet en Mecánica Cuántica

Utilizaremos los resultados obtenidos en la sección anterior para estudiar un Hamiltoniano con un parámetro con una dependencia periódica en el tiempo

$$H(t) = H(t + \tau). \quad (2.30)$$

El hecho de que el Hamiltoniano sea simétrico respecto a (ciertas) traslaciones en el tiempo, permite el uso del formalismo de Floquet [29]. Se asume que la dependencia temporal puede ser vista como una perturbación sobre un Hamiltoniano original

$$H(x, t) = H_0(x) + V(x, t) \quad V(x, t) = V(x, t + \tau). \quad (2.31)$$

Se utiliza que el Hamiltoniano no perturbado posee un conjunto completo de eigenfunciones $\{\phi_n\}$ con valores propios correspondientes E_n . La ecuación de Schrödinger tiene la forma

$$-i\hbar \dot{\Psi}(x, t) = H(x, t)\Psi(x, t). \quad (2.32)$$

El problema cumple con las condiciones necesarias para utilizar una solución del tipo visto en la sección 2.1.4

$$\Psi_n(x, t) = e^{(\frac{-i}{\hbar} \mu_n t)} \Phi_n(x, t). \quad (2.33)$$

Como se mencionó en la sección 2.1.4, μ en general es un número complejo, lo cual puede llevar a soluciones inestables. En este caso $\Phi_n(x, t)$ es la función que contiene la periodicidad en el tiempo. Sustituir la solución en la ecuación (2.32) genera una ecuación para las funciones periódicas

$$H(x, t)\Phi_n(x, t) = E_n\Phi_n(x, t). \quad (2.34)$$

La forma explícita de estos estados y de los operadores que se utilizan para describir el Hamiltoniano dependen, como ya se mencionó anteriormente, de las soluciones al caso clásico, como las obtenidas en la sección 2.1.4. En la siguiente sección se explica como entran estas soluciones clásicas al caso cuántico.

2.3. Oscilador Armónico Dependiente del Tiempo: Solución Mediante Formalismo de Floquet

En el caso clásico [24] se tiene, para un oscilador armónico unidimensional con frecuencia dependiente del tiempo y el cual experimenta una fuerza disipadora dependiente de la velocidad, que la posición cumple

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{k(t)}{m}x = 0 \quad (2.35)$$

Se asume que la función $k(t)$ es periódica con periodo T . Si se utiliza la sustitución $x = ye^{-\frac{\gamma t}{2}}$, se llega a la ecuación

$$\ddot{y} + \left(\frac{k(t)}{m} - \frac{\gamma^2}{4}\right)y = 0 \quad (2.36)$$

El teorema de Floquet para ecuaciones de segundo orden con coeficientes dependientes del tiempo [24] asegura que esta ecuación tiene dos soluciones

$$f_1(t) = e^{i\mu t}\Phi(t), \quad f_2(t) = f_1(-t), \quad (2.37)$$

Recordando que la función Φ debe tener la misma periodicidad que $k(t)$. En el caso de un Hamiltoniano con dependencia temporal como la de (2.30), existe un conjunto completo de soluciones a la ecuación de Schrödinger [30]

$$|\Psi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\mu_\alpha t} |\Phi_\alpha t\rangle, \quad |\Phi_\alpha(t)\rangle = |\Phi_\alpha(t + \tau)\rangle, \quad (2.38)$$

Estas soluciones tienen la forma explícita[31]

$$\Psi_\alpha(x, t) = \left(\frac{\sqrt{m/\pi\hbar}}{2^\alpha n! f_1^0(t)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{f_1^0(t)}{f_2^0(t)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} H_\alpha\left(x\sqrt{\frac{m}{\hbar f_1^0(t)f_2^0(t)}}\right) e^{(ix^2 \frac{f_1^0(t)}{2f_2^0(t)})} \quad (2.39)$$

donde el superíndice cero indica que se toma el límite donde γ tiende a cero. Sin embargo, estas soluciones se comportan de manera análoga a los estados de la base de Fock bajo la acción de los operadores de Floquet, los cuales pueden expresarse en términos de los operadores de momento y posición usuales en mecánica cuántica

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2i}(\hat{x}\dot{f}_1^0(t)\sqrt{\frac{2}{\hbar m}} - \hat{p}f_1^0(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m}}). \quad (2.40)$$

Así como su complejo Hermitiano. Su acción sobre la base de Floquet queda definida por

$$\begin{aligned} \Gamma(t) |\Psi_\alpha(x, t)\rangle &= \sqrt{\alpha} |\Psi_{\alpha-1}(x, t)\rangle, \\ \Gamma^\dagger(t) |\Psi_\alpha(x, t)\rangle &= \sqrt{\alpha+1} |\Psi_{\alpha+1}(x, t)\rangle. \end{aligned}$$

Es importante notar que estos operadores dependen explícitamente del tiempo. Es conveniente entender el origen de estos operadores.

Sea un Hamiltoniano usual de oscilador armónico, con la excepción de que la frecuencia natural del oscilador es una función periódica del tiempo

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}k(t)q^2. \quad (2.41)$$

Este lleva a la ecuación de movimiento usual

$$m\ddot{q}(t) + k(t)q(t) = 0, \quad (2.42)$$

para el operador $q(t)$. Lo que se busca es una transformación unitaria que lleve este problema al problema usual del oscilador armónico en mecánica cuántica. Se trabaja en el cuadro de Heisenberg [32], tal que

$$\tilde{q}(t) = U^{-1}(t)q(t)U(t), \quad (2.43)$$

$$\tilde{p}(t) = U^{-1}(t)p(t)U(t). \quad (2.44)$$

Y donde entonces el nuevo Hamiltoniano queda dado por

$$\tilde{H} = H + U^{-1}i\dot{U}. \quad (2.45)$$

Para la transformación se elige

$$U = e^{-i\chi(t)q^2(t)}, \quad (2.46)$$

donde

$$\chi(t) = \frac{m}{4}\left(\frac{\dot{f}}{f} + \frac{\dot{f}^*}{f^*}\right) \quad (2.47)$$

Las funciones f son las soluciones al problema clásico correspondiente al Hamiltoniano (2.41) el cual tiene dos soluciones linealmente independientes, pero una es la compleja conjugada de la otra. Estas soluciones corresponden a las funciones f_1^0 y f_2^0 vistas en la sección anterior. Bajo esta transformación

$$\tilde{q}(t) = q(t), \quad (2.48)$$

$$\tilde{p}(t) = p(t) - 2\chi(t)q(t). \quad (2.49)$$

Se puede escribir el Hamiltoniano en las nuevas coordenadas tomando en cuenta que $\ddot{f} = -k(t)f$

$$H = \frac{1}{2m}\tilde{p}^2 + \frac{\chi(t)}{m}(\{\tilde{q}, \tilde{p}\}) + \frac{mW^2}{|f|^2}k(t)\tilde{q}^2, \quad (2.50)$$

donde W es el Wronskiano

$$W = \frac{1}{2i}(\dot{f}(t)f^*(t) - f(t)\dot{f}^*(t)). \quad (2.51)$$

Para eliminar el término cruzado se utiliza una segunda transformación unitaria

$$U_2(t) = e^{\frac{i}{4}(\{\tilde{q}, \tilde{p}\})\ln|f|^2}. \quad (2.52)$$

Al aplicar esta transformación a las variables \tilde{q} y \tilde{p} se obtienen las variables finales Q y P las cuales son

$$Q = U_2^{-1} \tilde{q} U_2 = \frac{\tilde{q}}{|f|} = \frac{1}{|f|} q, \quad (2.53)$$

$$P = U_2^{-1} \tilde{p} U_2 = |f| \tilde{p} = |f| (p - 2\chi q), \quad (2.54)$$

El Hamiltoniano se reescribe en estas nuevas variables y se obtiene

$$\tilde{H} = \frac{1}{|f(t)|^2} \left(\frac{1}{2m} P^2(t) + \frac{1}{2} m W^2 Q^2(t) \right). \quad (2.55)$$

Este Hamiltoniano es, salvo por un coeficiente general dependiente del tiempo, el Hamiltoniano usual de oscilador armónico y se puede resolver por medio de operadores de escalera

$$\Gamma = \sqrt{\frac{mW}{2}} Q + i \sqrt{\frac{1}{2mW}} P. \quad (2.56)$$

La expresión (2.40) se obtiene expresando los operadores en las coordenadas usuales, no en las transformadas. Es de mas utilidad expresar este Hamiltoniano en términos de estos operadores $\Gamma(t)$. Se obtiene

$$\tilde{H} = \frac{W}{|f(t)|^2} \left(\Gamma^\dagger(t) \Gamma(t) + \frac{1}{2} \right). \quad (2.57)$$

Se tiene un Hamiltoniano que modela un oscilador armónico cuántico cuya frecuencia natural depende del tiempo. Tanto los operadores como la constante de escala dependen explícitamente de las soluciones al caso clásico del oscilador armónico dependiente del tiempo. A continuación se explica como se modela el sistema cuando este tiene disipación y se explica porque es de tanta importancia que la dependencia temporal del sistema quede codificada en los operadores que lo describen.

2.4. Sistemas Cuánticos Abiertos

Las ecuaciones maestras modelan la evolución temporal de un sistema donde puede haber intercambios de energía con el medio ambiente, al cual se le conoce usualmente como reservorio o baño térmico. Se busca modelar un oscilador armónico mecánico con fricción, cuya frecuencia natural depende del tiempo, e intercambia energía con una cavidad electromagnética con perdidas de energía. Para una derivación de este tipo de ecuaciones, el lector puede consultar[33]. La ecuación es muy similar a la ecuación de Liouville, ya que se estudia la evolución temporal de la matriz densidad del sistema. Normalmente este tipo de ecuaciones requieren de dos aproximaciones. La aproximación de Born donde se asume que la interacción con el reservorio es lo suficientemente débil como para descartar términos de mayor a segundo orden en la misma y la aproximación de Markov, donde se asume que el reservorio térmico no cambia su estado debido a su interacción con el resto del sistema y de esta forma no actúa como un tipo de memoria para este[34]. Estas ecuaciones tienen la forma general

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + L\rho, \quad (2.58)$$

donde ρ es la matriz densidad del sistema, H es el Hamiltoniano que modela el sistema sin tomar en cuenta intercambios de energía con un reservorio y L es el superoperador de Lindblad, el cual codifica el efecto del reservorio sobre el sistema, es decir la parte del sistema que puede interactuar con el medio ambiente y causar intercambios de energía. La forma de L depende de la forma de H y queda expresado en los mismos operadores que H por lo que la elección de operadores de H determina la forma de L .

Se busca modelar las interacciones entre un oscilador armónico mecánico y un campo electromagnético de un modo con el cual puede intercambiar energía. El campo electromagnético puede perder fotones al medio ambiente. El oscilador armónico mecánico puede perder energía debido a fricción. Esto corresponde a dos términos de Lindblad. Debido a que los Hamiltonianos para el campo dentro de la cavidad y para el oscilador armónico mecánico tienen la misma forma algebraica y sus operadores siguen las mismas reglas de conmutación los términos de Lindblad tienen formas idénticas. Estos son [35]

$$\begin{aligned} L_a\rho = & -\frac{\kappa}{2}(n_p + 1)[a^\dagger a\rho + \rho a^\dagger a - 2a\rho a^\dagger] \\ & -\frac{\kappa}{2}(n_p)[aa^\dagger\rho + \rho aa^\dagger - 2a^\dagger\rho a], \end{aligned} \quad (2.59)$$

y

$$\begin{aligned} L_\Gamma\rho = & -\frac{\gamma}{2}(n_m + 1)[\Gamma^\dagger\Gamma\rho + \rho\Gamma^\dagger\Gamma - 2\Gamma\rho\Gamma^\dagger] \\ & -\frac{\gamma}{2}(n_m)[\Gamma\Gamma^\dagger\rho + \rho\Gamma\Gamma^\dagger - 2\Gamma^\dagger\rho\Gamma] \end{aligned} \quad (2.60)$$

tal que

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + L_\Gamma\rho + L_a\rho. \quad (2.61)$$

Esta ecuación es uno de los resultados presentados en [25]. En este caso κ es el coeficiente de disipación dentro de la cavidad y γ es el coeficiente de disipación para el oscilador armónico mecánico. En estudios anteriores de este tipo de sistemas la dependencia temporal de la frecuencia se incorporaba mediante este coeficiente de manera ad-hoc [23], sin embargo el emplear operadores de Floquet toma en cuenta los efectos de la aproximación de Markov sobre el cuasi espectro de energía del sistema[24]. n_p y n_m son los números de excitaciones térmicas fotónicas y mecánicas y a y a^\dagger son los operadores de escalera usuales para el oscilador armónico, mientras que Γ y Γ^\dagger son los operadores de Floquet. Es importante observar como los dos términos L tienen la misma forma, pero uno es una función explícita del tiempo y el otro no, debido a la elección de operadores para los Hamiltonianos. A continuación se explica un poco sobre el tipo de base con la cual es conveniente trabajar cuando se trabaja con términos de Lindblad para oscilador armónico.

2.4.1. Base de Decaimiento

En el caso de ecuaciones maestras correspondientes a un Hamiltoniano que modela un oscilador armónico, una de las posibles soluciones a la ecuación de Schrödinger es mediante la base de decaimiento[35]. Esta solución es particularmente conveniente puesto que más adelante será necesario tomar trazas sobre todos los grados de libertad de la cavidad, lo cual se puede hacer de forma directa en esta base. El objetivo es resolver una ecuación de valores propios para los superoperadores de Lindblad, L , como se vieron en la sección 2.4. Es importante notar que L no es necesariamente auto-adjunto, por lo que no se puede garantizar que sus funciones propias formen una base completa del espacio ni que sus valores propios sean reales. En el caso de este tipo de operadores existen dos tipos de vectores propios[30], izquierdos y derechos

$$L\rho = \lambda\rho, \quad (2.62)$$

$$\check{\rho}L = \lambda\check{\rho}. \quad (2.63)$$

Sin embargo sus valores propios son iguales. Los vectores obtenidos no forman necesariamente una base del espacio de operadores. Los estados que se obtienen al aplicar el súper-operador por la derecha se conocen también como estados duales, y se denotan por $\check{\rho}$. También es importante notar que los vectores que se obtienen al aplicar por la izquierda y por la derecha no son simplemente conjugados Hermitianos uno del otro, son ortogonales los unos a otros bajo un producto definido mediante la traza[35]

$$Tr[\check{\rho}_\lambda \rho_{\lambda'}] = \delta_{\lambda'\lambda}. \quad (2.64)$$

Si se logra encontrar los vectores que cumplen con las ecuaciones (2.62), y se demuestra que forma una base del espacio, se puede expresar una matriz densidad en ese espacio en términos de una serie

$$\rho(0) = \sum_{\lambda} \check{c}_\lambda \rho_\lambda, \quad (2.65)$$

donde

$$\check{c}_\lambda = Tr[\check{\rho}_\lambda \rho(0)]. \quad (2.66)$$

En el caso de un oscilador armónico con pérdidas, se obtiene un conjunto de estados y otro de estados duales que sí forman una base del espacio [35]. Los estados izquierdos son ρ_n^l , los cuales corren sobre dos índices discretos y corresponden a los valores propios [35]

$$\lambda_n^l = -\kappa[n + \frac{|l|}{2}], \quad (2.67)$$

los cuales cumplen con las condiciones

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.68)$$

y estos estados son

$$a^{\dagger l} \frac{(-1)^n}{(\nu+1)^{l+1}} : L_n^l \left[\frac{a^{\dagger} a}{\nu+1} \right] e^{-[\frac{a^{\dagger} a}{\nu+1}]} : \quad l \geq 0, \quad (2.69)$$

$$\frac{(-1)^n}{(\nu+1)^{|l|+1}} : L_n^{|l|} \left[\frac{a^{\dagger} a}{\nu+1} \right] e^{-[\frac{a^{\dagger} a}{\nu+1}]} : a^{|l|} \quad l \leq 0, \quad (2.70)$$

donde L_n^l son los polinomios asociados de Laguerre. Es importante notar que esto se obtiene en el cuadro de interacción, por lo que los eigenvalores fuera de este cuadro son

$$\lambda_n^l = -\kappa \left[n + \frac{|l|}{2} \right] + i\omega n, \quad (2.71)$$

es importante notar que la parte real de esos valores nunca es positiva.

Este modelo de disipación explica la necesidad de emplear los operadores de Floquet. En [23] se emplean los operadores usuales del oscilador armónico cuántico bajo la aproximación de que si las variaciones en la frecuencia son pequeñas respecto a la frecuencia promedio se pueden tomar los operadores correspondientes a la frecuencia promedio. Luego se toma en cuenta la dependencia temporal del sistema utilizando un coeficiente con dependencia temporal en el término de Lindblad. Sin embargo, [24] demuestra que este no es el mejor modelo. Para poder tomar en cuenta la dependencia temporal del sistema en el modelo de disipación es necesario codificar esta dependencia en los operadores del Hamiltoniano. A continuación se explican los resultados obtenidos en [26] donde se emplean las técnicas desarrolladas en este capítulo para buscar una expresión para la temperatura final del oscilador armónico después del proceso de enfriamiento.

Capítulo 3

Enfriamiento Optomecánico Dependiente del Tiempo: Caso de Oscilador Armónico Dependiente del Tiempo

En este capítulo se da un breve resumen del trabajo realizado en [26] y en [25]. Se modela un oscilador armónico mecánico acoplado a una cavidad de Fabry-Perot cuando se toma en cuenta una dependencia temporal en la frecuencia natural del oscilador. Se obtienen cambios cuantitativos y cualitativos en el enfriamiento del oscilador cuando se utiliza un modelo de disipación que incorpore esta dependencia temporal. Primero se presenta el Hamiltoniano utilizado para describir al sistema y la ecuación maestra correspondiente. Esta ecuación se transforma a otro marco de referencia más conveniente y finalmente se lleva a cabo el proceso de enfriamiento bajo la aproximación adiabática a fin de obtener una expresión para la temperatura final. Esto motiva el trabajo que inicia en el capítulo siguiente.

3.1. Hamiltoniano para Enfriamiento Optomecánico con Parámetros Dependientes del Tiempo

Se estudia un sistema compuesto por una cavidad óptica de Fabry-Perot donde uno de los dos espejos se encuentra acoplado a un oscilador armónico mecánico, lo cual le permite moverse. La frecuencia natural del oscilador mecánico es una función periódica del tiempo. Se asume que el oscilador interactúa únicamente con un modo de la cavidad con frecuencia ω_{cav} , dicho modo se encuentra forzado por un láser. Se asume que el marco de referencia rota con la frecuencia del láser de forzamiento. Se modela el sistema mediante el siguiente

Hamiltoniano[23]

$$H(t) = H_{cav} + H_{mec}(t) + H_{rad} + H_{laser}. \quad (3.1)$$

En donde

$$H_{cav} = -\hbar\delta a^\dagger a, \quad (3.2)$$

$$H_{mec}(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\nu^2(t)x^2, \quad (3.3)$$

$$H_{rad} = -\hbar g a^\dagger a x, \quad (3.4)$$

$$H_{laser} = \hbar \frac{\Omega}{2} (a^\dagger + a), \quad (3.5)$$

en este caso, $\delta = \omega_{laser} - \omega_{cav}$ representa la diferencia de frecuencias entre el láser de forzamiento y la cavidad y $\hbar g$ representa la fuerza de radiación que un fotón ejerce sobre el oscilador mecánico sin modulación. El término H_{rad} modela una interacción simple entre los fotones y el espejo. Dado que en este caso la longitud de la cavidad no es fija, la frecuencia de la cavidad debe tener una dependencia en la coordenada x . Una derivación completa de este término puede encontrarse en la referencia [1]. Por (2.55), se modela al oscilador mecánico utilizando operadores de Floquet

$$H_{mec}(t) = \hbar \frac{W}{|f(t)|^2} (\Gamma^\dagger \Gamma + \frac{1}{2}). \quad (3.6)$$

Recordando la definición de los operadores de Floquet (2.40), se puede invertir la relación en términos de los operadores x y p y sustituir el resultado en el Hamiltoniano de interacción, lo cual produce un nuevo Hamiltoniano de interacción[26]

$$H(t)_{rad} = 2ig\sqrt{\frac{\hbar^3}{2m}} a^\dagger a [\gamma_+(t)\Gamma(t) + \gamma_-(t)\Gamma^\dagger(t)] \quad (3.7)$$

donde

$$\gamma(t)_+ = \frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{m\hbar^3}} \frac{f(t)^*}{(\dot{f}(t)f(t)^* - \dot{f}(t)^*f(t))}, \quad (3.8)$$

$$\gamma(t)_- = \frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{m\hbar^3}} \frac{f(t)}{(\dot{f}(t)f(t)^* - \dot{f}(t)^*f(t))}, \quad (3.9)$$

con esto, el Hamiltoniano final es el siguiente

$$H(t) = -\hbar\delta a^\dagger a + \frac{W}{|f(t)|^2} (\Gamma^\dagger \Gamma + \frac{1}{2}) + g' a^\dagger a [\gamma_+(t)\Gamma(t) + \gamma_-(t)\Gamma^\dagger(t)] + \hbar \frac{\Omega}{2} (a^\dagger + a), \quad (3.10)$$

donde

$$g' = g\sqrt{\frac{\hbar^3}{2m}}. \quad (3.11)$$

Sin embargo el Hamiltoniano no es suficiente para modelar el sistema ya que existe disipación, se utiliza el formalismo de ecuaciones maestras de la sección 2.4 a fin de modelar esta disipación. Se utiliza un modelo de disipación que incorpora los operadores de Floquet y por ende la dependencia temporal del oscilador durante todo el proceso de derivación

$$\hbar \dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [H(t), \rho] + L_a \rho + L_\Gamma \rho \quad (3.12)$$

Sin embargo es complicado trabajar con esta ecuación debido a que el término de interacción del Hamiltoniano contiene términos de tercer orden en operadores. Para eliminar estos términos se emplea una transformación unitaria a un marco de referencia desplazado. En la siguiente sección se realiza la transformación de forma detallada.

3.2. Transformación Mediante Operador de Desplazamiento

Para poder remover los términos de tercer orden en operadores del Hamiltoniano, se emplea una transformación unitaria dada por el operador

$$U_{a,\Gamma} = e^{(\alpha(t)a^\dagger - \alpha(t)^* a)} e^{(\beta(t)\Gamma^\dagger - \beta(t)^* \Gamma)}. \quad (3.13)$$

Tanto α como β dependen del tiempo, esta dependencia no se escribirá de forma explícita a futuro por brevedad. Bajo la transformación, el operador densidad es

$$\rho' = U_{a,\Gamma}^\dagger \rho U_{a,\Gamma}. \quad (3.14)$$

Se puede despejar en términos de ρ , aprovechando que la transformación es unitaria

$$\rho = U_{a,\Gamma} \rho' U_{a,\Gamma}^\dagger, \quad (3.15)$$

y derivando respecto al tiempo

$$\dot{\rho} = L\rho = \frac{d}{dt}(U_{a,\Gamma} \rho' U_{a,\Gamma}^\dagger). \quad (3.16)$$

En este caso, L representa el operador de Liouville. Esto permite obtener una ecuación maestra para ρ

$$U_{a,\Gamma}(\dot{\rho}')U_{a,\Gamma}^\dagger = L[U_{a,\Gamma}\rho'U_{a,\Gamma}^\dagger] - \dot{U}_{a,\Gamma}\rho'U_{a,\Gamma}^\dagger - U_{a,\Gamma}\rho'\dot{U}_{a,\Gamma}^\dagger \quad (3.17)$$

$$\dot{\rho} = U_{a,\Gamma}^\dagger L[U_{a,\Gamma}\rho'U_{a,\Gamma}^\dagger]U_{a,\Gamma} - U_{a,\Gamma}^\dagger \dot{U}_{a,\Gamma}\rho' - \rho'\dot{U}_{a,\Gamma}^\dagger U_{a,\Gamma}. \quad (3.18)$$

Esta transformación se emplea de nuevo y con más detalle en el capítulo siguiente. En el caso donde α y β cumplen con las ecuaciones

$$\dot{\alpha} = \alpha \left(-\frac{A}{2} + i(\delta + g'(\gamma_-(t)\beta^* + \gamma_+(t)\beta)) \right) - i\frac{\Omega}{2}, \quad (3.19)$$

$$\dot{\beta} = \beta \left(-\frac{\gamma}{2} - i\frac{W}{|f(t)|^2} \right) + ig'|\alpha|^2\gamma_+(t), \quad (3.20)$$

el Hamiltoniano resulta

$$H' = -\hbar\delta'a^\dagger a + \frac{W}{|f(t)|^2}\Gamma\Gamma^\dagger - \hbar g'[(a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a)(\gamma_-(t)\Gamma^\dagger + \gamma_+(t)\Gamma)] \\ + i\hbar(\beta^*\dot{\Gamma} - \beta\dot{\Gamma}^\dagger),$$

donde se ha hecho el cambio $\delta' = \delta + g'(\beta + \beta^*)$. Con esto se obtiene la ecuación maestra para el enfriamiento optomecánico con un oscilador con frecuencia dependiente del tiempo, en el marco de referencia desplazado

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H', \rho] + L_a\rho + L_\Gamma\rho + |\beta|^2(Re[C])\rho, \quad (3.21)$$

donde

$$C = [\dot{\Gamma}^\dagger, \Gamma] \quad (3.22)$$

Para poder encontrar expresiones explícitas para los coeficientes restantes, es necesario tener expresiones explícitas para la solución clásica al problema del oscilador armónico dependiente del tiempo, ya que estas determinan la expresión exacta de los operadores Γ entre otras cosas. Se utilizan las dos soluciones encontradas en la sección 2.1.4.

3.2.1. Solución Explícita para Pequeñas Oscilaciones

Con una solución para el caso de una frecuencia como en (2.27) en mano, es posible calcular soluciones explícitas para todos los términos que se han obtenido. Estos resultan ser [26]

$$C(t) = i[1 - \frac{\epsilon}{16}e^{-2i\omega t} - \frac{6\epsilon}{16}e^{2i\omega t}]. \quad (3.23)$$

Los coeficientes γ_\pm son

$$\gamma_\pm = \frac{1}{\omega}e^{\mp i\omega t}, \quad (3.24)$$

se hace lo mismo para el factor global en el Hamiltoniano de oscilador armónico en operadores de Floquet

$$\frac{W}{|f|^2} = \omega. \quad (3.25)$$

Y se puede obtener expresiones explícitas para los coeficientes $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ en la transformación al marco desplazado

$$\dot{\alpha} = \alpha(-\frac{A}{2} + i(\delta + g'(e^{i\omega t}\beta^* + e^{-i\omega t}\beta))) - i\frac{\Omega}{2}, \quad (3.26)$$

$$\dot{\beta} = \beta(-\frac{\gamma}{2} - i2\omega) + ig'|\alpha|^2e^{i\omega t}, \quad (3.27)$$

asumiendo que α y β lleguen a su estado estacionario de manera suficientemente rápida se puede tomar $\dot{\alpha}(t) = \dot{\beta}(t) = 0$ y se trabaja en el régimen de acoplamiento débil por lo que coeficientes de orden mayor a cero en g' se desprecian. Esto lleva a

$$0 = \alpha \left(-\frac{A}{2} + i\delta \right) - i\frac{\Omega}{2}, \quad (3.28)$$

$$0 = \beta \left(-\frac{\gamma}{2} - i2\omega \right), \quad (3.29)$$

cuya solución es trivial

$$\alpha_0 = \frac{\Omega}{2\delta - iA}, \quad (3.30)$$

$$\beta_0 = 0. \quad (3.31)$$

El subíndice 0 muestra que las soluciones son válidas a orden cero en el acoplamiento. Bajo estas condiciones el Hamiltoniano resulta

$$H(t) = -\hbar\delta a^\dagger a + \hbar\omega\Gamma^\dagger\Gamma - \hbar g'(a^\dagger a + \alpha_0 a^\dagger + \alpha_0^* a)(\gamma_-(t)\Gamma^\dagger + \gamma_+(t)\Gamma). \quad (3.32)$$

Se trabaja en el régimen donde $|\alpha_0| \gg 1$ [23], por lo que el término $a^\dagger a$ se puede despreciar y se llega a un Hamiltoniano simplificado

$$H(t) = -\hbar\delta a^\dagger a + \hbar\omega\Gamma^\dagger\Gamma + \frac{\hbar g'}{\omega}(\alpha_0 a^\dagger + \alpha_0^* a)(e^{i\omega t}\Gamma^\dagger + e^{-i\omega t}\Gamma) \quad (3.33)$$

Este Hamiltoniano genera la ecuación maestra (2.61)

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + L_a\rho + L_\Gamma\rho, \quad (3.34)$$

Ahora el Hamiltoniano tiene la forma adecuada para realizar el procedimiento de enfriamiento y para obtener una expresión para la temperatura final del oscilador armónico.

3.3. Enfriamiento Laser

En un régimen de parámetros donde la temperatura del oscilador mecánico varía de forma mucho más lenta que las pérdidas de la cavidad y que la frecuencia mecánica. Esto requiere que $\chi^2|\alpha|^2 \ll (\frac{\kappa}{\omega_m})$. Se utilizan operadores de proyección P y Q para proyectar la ecuación (3.34) al subespacio P que corresponde al estado estacionario del sistema y al resto del espacio, respectivamente. Para una derivación más detallada, ver [36]. Estos operadores se definen tal que

$$P\rho = \text{Tr}_c[\rho] \otimes \rho^0, \quad (3.35)$$

$$Q\rho = (1 - P)\rho, \quad (3.36)$$

donde ρ^0 es el estado inicial del baño térmico. El propósito de estos dos proyectores es separar los sub-espacios de acuerdo con las escalas de tiempo en la que operan y llegar a una ecuación cerrada para el sub-espacio P

$$P\dot{\rho} = PL_2P + [PL_1^+Q \int_0^\infty dt' e^{(i\omega_m + L_0)t'} QL_1^- P\rho + HC] \quad (3.37)$$

donde

$$L_1^+ = -i \frac{g'}{\omega} [(\alpha_0 a^\dagger + \alpha_0^* a) e^{i\omega t} \Gamma^\dagger, \rho] \quad (3.38)$$

$$L_1^- = -i \frac{g'}{\omega} [(\alpha_0 a^\dagger + \alpha_0^* a) e^{-i\omega t} \Gamma, \rho] \quad (3.39)$$

se traza sobre los estados de la cavidad

$$\begin{aligned} & Tr_c[PL_1^+Q \int_0^\infty dt' e^{(i\omega_m + L_0)t'} QL_1^- P\rho] \\ & \approx -\frac{(g'_m)^2}{2} [G(\omega_m, n_c)[\Gamma^\dagger, \Gamma\mu] - [G^*(-\omega_m, n_c)[\Gamma^\dagger, \mu\Gamma]] \end{aligned} \quad (3.40)$$

con $g'_m = 2\chi|\alpha|$ y $\mu = P\rho$. Las cuadraturas de la cavidad son

$$G(\nu, n_p) = \int_0^\infty dt e^{i\nu(t)t} Tr_c[X_c e^{L_c t} X_c \rho_{st}], \quad (3.41)$$

con

$$X = \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}\alpha_0}. \quad (3.42)$$

El número promedio de excitaciones, el cual se utiliza como una medida de temperatura, está dado por

$$\langle \Gamma^\dagger \Gamma \rangle = \langle m \rangle = \frac{A_+}{A_- - A_+} \quad (3.43)$$

donde A_- y A_+ son los coeficientes de enfriamiento y calentamiento respectivamente. Estos coeficientes se obtienen a partir de (3.41) y tienen la forma

$$A_{\pm\nu}(n_p) = g^2 Real(G(\mp\nu, n_p)). \quad (3.44)$$

Por lo tanto es necesario obtener una expresión explícita para (3.41) para poder obtener una expresión explícita para $\langle m \rangle$. Esta expresión resulta difícil de analizar de forma directa, así que se recurre a métodos numéricos.

3.4. Análisis Numérico

Se utiliza el desarrollo en serie de potencia de (3.41) hasta primer orden en ϵ para realizar cálculos numéricos. Se asume que la cavidad se encuentra a temperatura cero ($n_p = 0$). Los eigenvalores de la cavidad se denotan por λ_c . El resultado de la traza en (3.41) se calcula de manera directa y queda calcular la integral

$$G(\nu, 0) = \int_0^\infty dt e^{(i\nu(t) + \lambda_c)t} Tr[], \quad (3.45)$$

$$= \int_0^\infty e^{i\nu_0 + \epsilon \cos(2\omega t)t + \lambda_c t} Tr[...] dt, \quad (3.46)$$

$$= \int_0^\infty e^{i\nu_0 t + \lambda_c t} e^{i\epsilon \cos(2\omega t)t} Tr[...] dt, \quad (3.47)$$

$$\approx \int_0^\infty e^{i\nu_0 t + \lambda_c t} (1 + i\epsilon \cos(2\omega t)t) Tr[...] dt, \quad (3.48)$$

$$= \int_0^\infty e^{i\nu_0 t + \lambda_c t} Tr[...] dt \quad (3.49)$$

$$+ i\epsilon \int_0^\infty \cos(2\omega t)t e^{i\nu_0 t + \lambda_c t} Tr[...] dt. \quad (3.50)$$

Es importante notar que el desarrollo en serie es posible ya que la parte real de λ_c es negativa, lo cual evita que la integral diverja. Esto lleva a la expresión usual para 3.41, cuando no existe una dependencia temporal, más un término proporcional a ϵ que contiene el efecto de la dependencia temporal de la frecuencia

$$\frac{\chi^2}{-k + 2i(\delta + \nu_0)} + i\epsilon \frac{(-k + i(\nu_0 + \delta))^2 - 4\omega^2}{(-k + i(\nu_0 + \delta))^2 + 4\omega^2}, \quad (3.51)$$

donde $\chi = g$ y $E_0 = g\sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu_0}}$.

La parte real de esta expresión no es fácil de obtener de manera analítica, pero se puede analizar numéricamente. A fin de que sea válida la aproximación adiabática, las variaciones de la frecuencia natural del oscilador deben ser mucho menores que la frecuencia promedio, lo que implica soluciones con $\omega \ll \nu_0$ y $1 \ll n$.

Tomando como ejemplo un valor inicial de $\epsilon = \frac{\nu_0}{10}$ y debido a (2.28) se tiene la condición $\epsilon = \frac{n^2}{5}$. Dado que se desea que n sea grande se elige $n = \sqrt{\frac{\nu_0}{2}}$ redondeada al entero más cercano.

El cálculo numérico de (3.51) utiliza la proporción entre la frecuencia promedio ν_0 y el desfazamiento δ en el rango $\frac{\nu_0}{\delta} \in [-2, 2]$ como variable dependiente. Se obtiene

Como se observa en la figura 3.1 claramente se obtiene un mínimo más pequeño de excitaciones posibles y un corrimiento en el punto donde se espera encontrar este mínimo. Esto correspondería a un mayor enfriamiento del espejo, pero no en el punto donde se esperaría encontrar sin la corrección. Introducir una dependencia temporal a la frecuencia natural del oscilador y realizar el proceso de enfriamiento cuando el modelo de disipación toma en cuenta la dependencia temporal lleva a cambios cuantitativos y cualitativos en la temperatura final del oscilador armónico. Como se verá en el siguiente capítulo, la frecuencia de la cavidad a la que se acopla el oscilador tiene una dependencia temporal inherente, la cual se modela usualmente de tal forma que la disipación de la cavidad no toma en cuenta esta dependencia. Se desea estudiar que sucede si se cambia este modelo para tomar en cuenta esta dependencia.

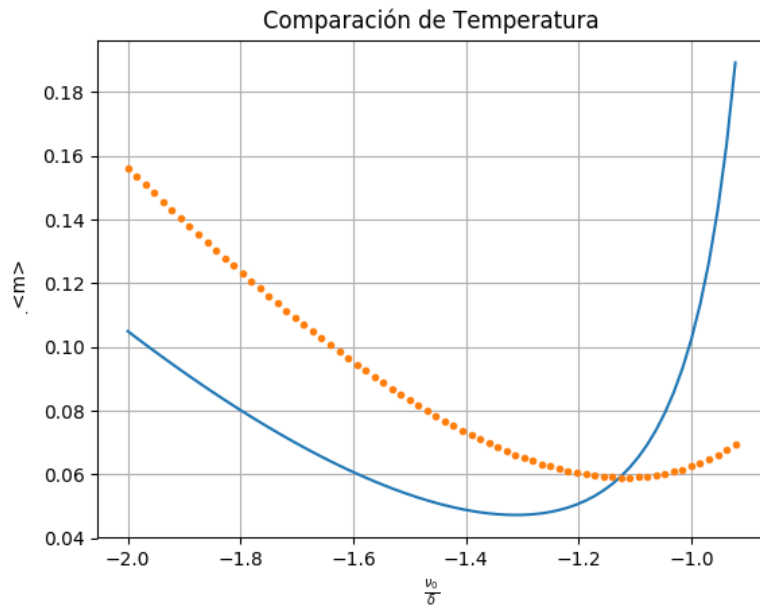


Figura 3.1: *Comparación entre predicciones con dependencia temporal y sin dependencia temporal* La línea puntuada representa la predicción sin dependencia temporal y la línea sólida representa la predicción con dependencia temporal. Se utiliza $\kappa \ll \nu_0$

Capítulo 4

Enfriamiento Optomecánico Dependiente del Tiempo: Modelo Mejorado de Disipación Aplicado a Cavidad

La frecuencia natural de los modos de la cavidad en el estado estacionario del proceso de enfriamiento es una función periódica del tiempo. En el capítulo anterior se demostró, empleando un modelo mejorado de disipación, que si la frecuencia natural del oscilador armónico mecánico es una función periódica del tiempo, la temperatura final del oscilador es menor a la obtenida si no se utiliza el modelo mejorado. Estos dos hechos nos motivan a investigar cual es el estado final del sistema optomecánico cuando se emplea el modelo mejorado de disipación aplicado a la disipación del campo electromagnético a través de los espejos de la cavidad.

La frecuencia de natural de una cavidad de Fabry-Perot, asumiendo que su interior se encuentre en el vacío, está dada por

$$\nu_c = \frac{nc}{2L}, \quad (4.1)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, n es algún entero positivo y L es la longitud de la cavidad. Al emplear un montaje optomecánico como el que lleva a los resultados del capítulo anterior, L deja de ser constante. Si el oscilador mecánico tiene oscilaciones en torno a un punto de equilibrio dadas por $x_m(t)$ y se toma a l_0 como la longitud promedio de la cavidad, la longitud de la cavidad como función del tiempo está dada por

$$L(t) = l_0 + x_m(t), \quad (4.2)$$

lo cual lleva a una frecuencia

$$\nu_c(t) = \frac{nc}{2l_0 + 2X_m(t)}, \quad (4.3)$$

$$\approx \frac{nc}{2l_0} - \frac{ncx_m(t)}{4l_0^2}, \quad (4.4)$$

$$= \frac{nc}{2l_0} - \frac{nc}{2l_0} \left(\frac{x_m(t)}{l_0} \right), \quad (4.5)$$

$$= \omega_0 + \omega_0 \epsilon(t), \quad (4.6)$$

$$= \omega_0(1 + \epsilon(t)), \quad (4.7)$$

donde la expresión se deja en primer orden del parámetro de perturbación $\epsilon = -\frac{x_m}{l_0}$. Claramente la frecuencia natural de la cavidad es una función del tiempo. Esta dependencia usualmente no se toma en cuenta en los términos empleados para modelar la disipación de la cavidad. Para intentar resolver esto, intentamos modificar la disipación de la cavidad dada por el término ya antes visto

$$\begin{aligned} L_a \rho = & -\frac{\kappa}{2}(n_p + 1)[a^\dagger a \rho + \rho a^\dagger a - 2a \rho a^\dagger] \\ & -\frac{\kappa}{2}(n_p)[a a^\dagger \rho + \rho a a^\dagger - 2a^\dagger \rho a], \end{aligned} \quad (4.8)$$

el cual corresponde a una frecuencia natural constante.

Observamos que cuando se realiza la transformación unitaria dada por los operadores de desplazamiento en la sección 3.2, el estado base en el nuevo marco de referencia corresponde al siguiente estado coherente

$$|\beta(t)\rangle = e^{(\beta(t)b^\dagger - \beta(t)^*b)} |0\rangle_D, \quad (4.9)$$

en el marco de referencia original. Esto quiere decir que al enfriar al oscilador armónico mecánico a una temperatura mínima el estado que se obtiene es muy cercano, en el marco desplazado, a $|0\rangle_D$, lo cual es muy cercano a un estado coherente en el marco de referencia inicial. El oscilador armónico mecánico tiende, en la última etapa de enfriamiento, a un estado del tipo

$$|\beta\rangle \langle \beta| + \epsilon \rho_T \quad (4.10)$$

es decir a un estado coherente más una pequeña perturbación procedente de algún estado térmico. Proponemos emplear la frecuencia de este estado coherente en el modelo mejorado para el campo dentro de la cavidad. Este proceso sería análogo a lo que se hizo con el oscilador optomecánico, pero aplicado a la disipación del campo electromagnético dentro de la cavidad. Es importante notar que consideramos que la frecuencia natural del oscilador mecánico, ω_β , es constante durante este proceso, a diferencia de $\nu_c(t)$. Si el oscilador armónico mecánico se mueve de forma

$$x_m(t) = l_0 - x \cos(\omega_\beta t) \quad (4.11)$$

se tiene que la frecuencia de la cavidad es

$$\nu_c(t) = \nu_0 + \epsilon \cos(\omega_\beta t), \quad (4.12)$$

lo cual permite el uso de operadores de Floquet directamente en la disipación

$$L_{\Gamma}\rho = -\frac{\kappa}{2}(n_c + 1)[\Gamma^\dagger\Gamma\rho + \rho\Gamma^\dagger\Gamma - 2\Gamma\rho\Gamma^\dagger] - \frac{\kappa}{2}(n_c)[\Gamma\Gamma^\dagger\rho + \rho\Gamma\Gamma^\dagger - 2\Gamma^\dagger\rho\Gamma]. \quad (4.13)$$

Este modelo de disipación es superior [24], ya que toma en cuenta la variación periódica en la frecuencia natural del campo dentro de la cavidad, debido a que el oscilador mecánico continua su movimiento incluso cuando concluye el proceso de enfriamiento, por lo que la longitud de la cavidad nunca es constante.

Para trabajar con este modelo de disipación, sin embargo, es necesario modificar el Hamiltoniano. Los términos de disipación emergen de manera natural al deducir la ecuación maestra por lo que no sería correcto introducir este modelo de disipación de manera ad-hoc.

Sin embargo, insertar estos operadores de manera directa en el Hamiltoniano para la cavidad presenta varias complicaciones. Esto se debe a que los operadores de Floquet se expresan en términos de los operadores de posición y momento de un oscilador con frecuencia natural dependiente del tiempo, mientras que los operadores a y a^\dagger usuales corresponden a un oscilador sin esta dependencia. Si se asume que la frecuencia de la cavidad es su frecuencia promedio y se expresan los operadores a en términos de operadores de Floquet para sustituir en Hamiltoniano, se obtienen términos de la forma

$$a^\dagger a = C_1(\nu_0, \omega_\beta)\Gamma^\dagger\Gamma + C_2(\nu_0, \omega_\beta)\Gamma\Gamma + C_3(\nu_0, \omega_\beta)\Gamma^\dagger\Gamma^\dagger + C_4(\nu_0, \omega_\beta)\Gamma\Gamma \quad (4.14)$$

donde los coeficientes C dependen de las dos frecuencias y de la forma específica de las soluciones $f(t)$. El tratar de esta forma la dependencia temporal de la cavidad presenta no solo complejidad añadida, también introduce una aproximación adicional. Esto señala la necesidad de intentar introducir los operadores de Floquet al Hamiltoniano desde primeros principios, después de lo cual estos surgirán de manera natural en la disipación. Para entender mejor este procedimiento conviene entender la derivación del Hamiltoniano para una cavidad optomecánica. La derivación sigue el procedimiento de [37].

4.1. Ecuación de Onda para el Potencial Vectorial en una Cavidad con Espejo Móvil

El potencial vectorial $A(x, t)$ dentro de la cavidad se define en la región $0 \leq x \leq q(t)$ donde $q(t)$ es la posición del espejo. Esta coordenada es estrictamente no negativa y se toma el potencial $V(q)$ que siente el espejo como una barrera infinita en $q = 0$. El potencial vectorial cumple la ecuación de onda con $c = 1$

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial t^2}, \quad (4.15)$$

con condiciones a la frontera que dependen del tiempo debido a la posición del espejo

$$A(0, t) = A(q(t), t) = 0. \quad (4.16)$$

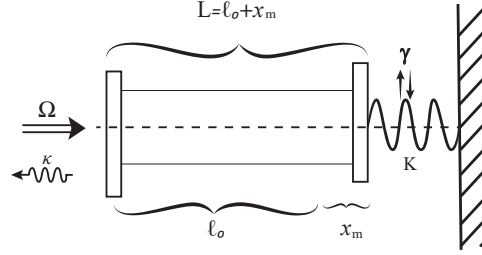


Figura 4.1: Campo electromagnético dentro de una cavidad donde uno de los espejos se encuentra acoplado a un resorte. La cavidad tiene longitud total L y se asume que el espejo que se mueve está confinado a moverse en el rango x_m . Hay un láser de bombeo con frecuencia Ω y un resorte de constante K . El decaimiento de la cavidad está dado por κ y el del resorte por γ .

Adicionalmente $q(t)$ cumple la ecuación

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A(x,t)}{\partial x}\right)^2|_{x=q(t)}. \quad (4.17)$$

El segundo término del lado derecho es la presión de radiación que siente el espejo en su marco de referencia en reposo. La dinámica del sistema queda especificada por estas tres ecuaciones. Se define un juego de coordenadas generalizadas Q_k

$$Q_k \equiv \sqrt{\frac{2}{q(t)}} \int_0^{q(t)} dx A(x,t) \sin\left(\frac{k\pi x}{q(t)}\right). \quad (4.18)$$

y se expande el potencial vectorial en términos de estas.

$$A(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) \sqrt{\frac{2}{q(t)}} \sin\left(\frac{k\pi x}{q(t)}\right). \quad (4.19)$$

Esta expansión equivale a los distintos modos determinados por la posición instantánea del espejo. Se puede sustituir esta expresión para $A(x,t)$ en (4.15), (4.17), (4.16) y se obtiene dos ecuaciones

$$\ddot{Q}_k = -\omega_k^2 Q_k + 2\frac{\dot{q}}{q} \sum_j g_{kj} \dot{Q}_j + \frac{\ddot{q}q - \dot{q}^2}{q^2} \sum_j g_{kj} Q_j \quad (4.20)$$

$$+ \frac{\dot{q}^2}{q^2} \sum_{j,l} g_{jk} g_{jl} Q_l,$$

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} + \frac{1}{q} \sum_{k,j} (-1)^{k+j} \omega_k \omega_j Q_k Q_j. \quad (4.21)$$

Las frecuencias ω_k están dadas por

$$\omega_k(q) = \frac{k\pi}{q}, \quad (4.22)$$

y los coeficientes g_{kj}

$$(-1)^{k+j} \frac{2kj}{j^2 - k^2}, k \neq j \quad (4.23)$$

$$g_{kj} = \begin{cases} 0, & k = j. \end{cases} \quad (4.24)$$

Estas ecuaciones son consecuencia de las ecuaciones de Euler-Lagrange del Lagrangiano

$$L(q, \dot{q}, Q_k, \dot{Q}_k) = \frac{1}{2} \sum_k [\dot{Q}_k^2 - \omega_k^2(q) Q_k^2] + \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \quad (4.25)$$

$$+ \frac{\dot{q}}{q} \sum_{j,k} g_{kj} \dot{Q}_k Q_j + \frac{\dot{q}^2}{2q^2} \sum_{j,k,l} g_{kj} g_{kl} Q_l Q_j,$$

de donde sigue el Hamiltoniano siguiente de manera directa.

$$H = \frac{1}{2m} (p + \frac{g}{q} PQ)^2 + V(q) + \frac{1}{2} [P^2 + \nu^2 Q^2]. \quad (4.26)$$

Donde p y q corresponden al oscilador mecánico y P y Q al campo dentro de la cavidad y g es una constante. Este es el Hamiltoniano usual para modelar este tipo de oscilador optomecánico. El procedimiento usual después de este punto consiste en cuantizar, e incluye una aproximación lineal para eliminar la dependencia de q sobre los operadores que modelan la cavidad. Al querer modelar la disipación, los operadores de la cavidad ya no contienen la dependencia temporal de la frecuencia de la cavidad, expresada en su dependencia sobre q . Por lo tanto, si se busca utilizar los resultados obtenidos anteriormente para el oscilador armónico, es necesario implementar el formalismo de operadores Γ pero ahora para modelar la cavidad.

4.2. Introducción Directa de Operadores Γ en el Hamiltoniano

Se presenta un primer intento para introducir el formalismo de Floquet al Hamiltoniano de la cavidad. Si el Hamiltoniano está expresado en términos de estos operadores, el procedimiento usual para deducir la ecuación maestra expresa la disipación en estos mismos operadores y así tenemos el modelo de disipación deseado. El teorema de Floquet permite obtener las soluciones de la ecuación

$$\ddot{f} + \nu^2(t)Q = 0, \quad (4.27)$$

las soluciones se denotan como $f(t)$ y $f(t)^*$. De acuerdo con [24] los operadores de Floquet se pueden expresar como

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2i}(Q\sqrt{\frac{2m}{\hbar}}\dot{f}(t) - P\sqrt{\frac{2}{m\hbar}}f(t)) \quad (4.28)$$

y

$$\Gamma(t)^\dagger = \frac{-1}{2i}(Q\sqrt{\frac{2m}{\hbar}}\dot{f}^*(t) - P\sqrt{\frac{2}{m\hbar}}f^*(t)). \quad (4.29)$$

A futuro se omite la dependencia temporal de los operadores Γ al darse por entendida. Se puede invertir el sistema de ecuaciones y obtener

$$Q = \frac{b^*\Gamma - b\Gamma^\dagger}{(b^*a - a^*b)}, \quad (4.30)$$

$$P = \frac{a^*\Gamma - a\Gamma^\dagger}{(b^*a - a^*b)}. \quad (4.31)$$

donde

$$a = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2m}{\hbar}}\dot{f}(t), \quad (4.32)$$

$$b = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{m\hbar}}f(t). \quad (4.33)$$

Esto se sustituye en el término PQ del Hamiltoniano y se obtiene

$$H = \frac{1}{2m}(p + g\gamma)^2 + v(q) + \frac{1}{2}[P^2 + \nu^2(t)Q^2], \quad (4.34)$$

donde

$$\gamma = \frac{\hbar^2}{W^2q}[ab^*\Gamma^\dagger\Gamma + a^*b\Gamma\Gamma^\dagger - a^*b^*\Gamma\Gamma - ab\Gamma^\dagger\Gamma^\dagger] \quad (4.35)$$

con

$$W = \frac{\dot{f}(t)f^*(t) - \dot{f}^*(t)f(t)}{2i}. \quad (4.36)$$

Esto contrasta con la aproximación realizada en el trabajo original [37] donde los operadores de creación y aniquilación de la cavidad se expanden en una serie de potencias para aproximar la dependencia de estos sobre el operador q del oscilador mecánico. En este procedimiento se asume $q = l_o + x_m$. Se hace la aproximación de tomar al término γ en el punto promedio $q = l_o$

Para simplificar con el primer término del Hamiltoniano se emplea la transformación unitaria dada por el operador

$$T = e^{\frac{ix_m\gamma}{\hbar}}. \quad (4.37)$$

Bajo esta transformación

$$\begin{aligned} T^\dagger p T &= p - \gamma, \\ T^\dagger p^2 T &= p^2 - 2p\gamma, \\ T^\dagger \gamma T &= \gamma, \end{aligned}$$

por lo que, despreciando el término γ^2 por ser del orden de $\frac{1}{l_o^2}$

$$\frac{1}{2m}(p + g\gamma)^2 \approx \frac{p^2}{2m}. \quad (4.38)$$

Se conoce que, expresados en operadores de Floquet, los operadores P y Q corresponden a un Hamiltoniano con la forma funcional de un oscilador armónico cuántico usual. Por esto, queda aplicar la transformación al término $\Gamma^\dagger \Gamma$. Cortando a primer orden en ϵ

$$\begin{aligned} e^{\frac{-ix\gamma_0}{\hbar}} \Gamma^\dagger \Gamma e^{\frac{ix_m\gamma_0}{\hbar}} &= \Gamma^\dagger \Gamma + \frac{ix_m}{\hbar} [\Gamma^\dagger \Gamma, \gamma_0], \\ &= \Gamma^\dagger \Gamma + \frac{2i\hbar x_m}{W^2 l_o} (a^* b \Gamma^\dagger \Gamma + a^* b^* \Gamma \Gamma - ab \Gamma^\dagger \Gamma^\dagger), \\ &\approx \Gamma^\dagger \Gamma + \frac{2i\hbar x_m}{W^2 l_o} a^* b \Gamma^\dagger \Gamma, \\ &= \Gamma^\dagger \Gamma - \frac{if^*(t)f(t)}{W^2 l_o} x_m \Gamma^\dagger \Gamma, \end{aligned}$$

de esta forma la constante de proporcionalidad de la presión de radiación es una cantidad dependiente del tiempo bajo este enfoque. Esto contrasta con la definición usual $F = \frac{\omega_0 \hbar}{l_o}$. Solo se trabaja con los operadores de número al estar en una aproximación de un solo modo. Tomando en cuenta el factor de amplitud global para el Hamiltoniano de oscilador armónico con frecuencia natural dependiente del tiempo $\frac{W}{|f(t)|^2}$ se obtiene

$$H_{cav} = \frac{\hbar W}{|f(t)|^2} \Gamma^\dagger \Gamma - \frac{\hbar i \dot{f}^*(t) f(t)}{|f(t)|^2 W l_o} x \Gamma^\dagger \Gamma, \quad (4.39)$$

lo cual lleva a identificar el nuevo coeficiente de fuerza F el cual es ahora una función del tiempo

$$F(t) = \frac{\hbar i \dot{f}^*(t) f(t)}{|f(t)|^2 W l_o}, \quad (4.40)$$

y a un Hamiltoniano para un oscilador optomecánico de la forma

$$H = \hbar\omega b^\dagger b + \hbar \frac{W}{|f(t)|^2} \Gamma^\dagger \Gamma - F(t) x_m \Gamma^\dagger \Gamma, \quad (4.41)$$

pero x_m es el operador de posición del espejo, el cual se puede expresar en términos de los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico mecánico

$$H = \hbar\omega b^\dagger b + \hbar \frac{W}{|f(t)|^2} \Gamma^\dagger \Gamma - g(t) \Gamma^\dagger \Gamma (b^\dagger + b), \quad (4.42)$$

donde g es una función del tiempo que modula la fuerza de la interacción y está dada por

$$g(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} F(t). \quad (4.43)$$

A este Hamiltoniano se le agrega un término correspondiente a un láser de forzamiento

$$H_{laser} = \hbar \frac{\Omega}{2} (\Gamma^\dagger + \Gamma). \quad (4.44)$$

Y lleva a un Hamiltoniano completo

$$H = \hbar\omega b^\dagger b + \hbar \frac{W}{|f(t)|^2} \Gamma^\dagger \Gamma - g(t) \Gamma^\dagger \Gamma (b^\dagger + b) + \hbar \frac{\Omega}{2} (\Gamma^\dagger + \Gamma). \quad (4.45)$$

Este Hamiltoniano asume que el cambio en la longitud de la cavidad es lo suficientemente lento para que el campo dentro de la misma se mantenga en un solo modo y asume que este modo corresponde a un movimiento periódico del oscilador mecánico. El siguiente paso en el proyecto es encontrar la solución para el comportamiento de $x_m(t)$ para así poder determinar la frecuencia natural de la cavidad y la forma explícita de los operadores de Floquet.

La ecuación maestra que corresponde a este Hamiltoniano toma en cuenta los intercambios de energía del sistema con el ambiente, tanto la pérdida de fotones de la cavidad como la re-termalización del oscilador mecánico. Esta es [23]

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] + L_b \rho + L_\Gamma \rho \quad (4.46)$$

Los términos L representan los intercambios de energía con el ambiente. Corresponden al oscilador mecánico y a la cavidad respectivamente. De forma explícita

$$\begin{aligned} L_b \rho = & -\frac{\gamma}{2} (n_m + 1) [b^\dagger b \rho + \rho b^\dagger b - 2b \rho b^\dagger] \\ & -\frac{\gamma}{2} (n_m) [b b^\dagger \rho + \rho b b^\dagger - 2b^\dagger \rho b]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} L_\Gamma \rho = & -\frac{\kappa}{2} (n_c + 1) [\Gamma^\dagger \Gamma \rho + \rho \Gamma^\dagger \Gamma - 2\Gamma \rho \Gamma^\dagger] \\ & -\frac{\kappa}{2} (n_c) [\Gamma \Gamma^\dagger \rho + \rho \Gamma \Gamma^\dagger - 2\Gamma^\dagger \rho \Gamma]. \end{aligned} \quad (4.48)$$

n_m y n_c representan el número promedio de excitaciones térmicas y γ y κ modelan la pérdida de energía ante el ambiente.

Esta derivación lleva a un resultado interesante, sin embargo existen problemas de compatibilidad con las ecuaciones originales en [37]. El problema consiste en que aplicar el formalismo de Floquet impone dos condiciones.

1. Impone que el oscilador armónico mecánico realice un movimiento armónico simple. Esta es una condición que equivale a conocer la solución para el movimiento descrito por q durante la derivación de las ecuaciones.
2. La solución para Q debe cumplir con dos ecuaciones, (4.20) y (4.27). Sería necesario encontrar una solución única que cumpliera con ambas ecuaciones.

Esto señala la necesidad de introducir el formalismo de Floquet en una etapa anterior de la derivación del Hamiltoniano. El candidato más evidente es la ecuación (4.18). Buscaremos una expansión distinta a la utilizada en este caso, a fin de generar ecuaciones compatibles con el formalismo de Floquet. Una vez el Hamiltoniano queda expresado con estos operadores, se puede utilizar el modelo de disipación correspondiente en el caso de la cavidad.

Capítulo 5

Objetivos Futuros

El Hamiltoniano (3.33) toma en cuenta la dependencia temporal de frecuencia natural la cavidad mediante una aproximación lineal. Este proceso crea un Hamiltoniano muy efectivo, pero no permite tomar en cuenta esta dependencia en la disipación del campo electromagnético dentro de la cavidad. El objetivo principal de este trabajo es encontrar una forma del Hamiltoniano (3.33) que sí permita tomar en cuenta esta dependencia temporal en la disipación. A partir de este punto se proponen tres objetivos para realizar un estudio más completo de este sistema bajo este nuevo enfoque. En todos los casos se espera obtener expresiones analíticas y resultados numéricos para la temperatura final del oscilador mecánico bajo la aproximación adiabática.

5.1. Objetivos y Calendarización

1. Llegar a una expresión para la temperatura final del espejo bajo la aproximación adiabática y compararla con la expresión usual que se obtiene al no considerar el movimiento de la cavidad en el modelo de disipación. Esto requiere deducir desde primeros principios la ecuación maestra, tomando en cuenta explícitamente una base donde sea consistente describir el sistema con operadores de Floquet, la cual contiene los coeficientes de enfriamiento y calentamiento correspondientes al oscilador mecánico así como resolver el movimiento del oscilador armónico mecánico.
2. Estudiar el sistema en un régimen distinto al establecido en los capítulos anteriores. Si no se puede tomar la interacción a orden cero durante la transformación al marco desplazado esto cambia el coeficiente α y lo convierte en una función del tiempo.
3. Estudiar el sistema cuando el parámetro ϵ debe tomarse en cuenta hasta segundo orden. Este cambio lleva a que incluso el factor global del Hamiltoniano para el campo dentro de la cavidad sea una función del tiempo, lo que lleva a estudiar el efecto sobre el oscilador de interactuar con un campo cuya frecuencia natural oscila en el tiempo.

Se asume que cada uno de estos objetivos, junto con trabajo de redacción y revisión bibliográfica adicional, sea realizable dentro de un semestre de trabajo.

Esto implicaría un último semestre únicamente dedicado a redacción a fin de elaborar la tesis doctoral en tiempo y forma, así como un segundo ¹ artículo de investigación a ser publicado en una revista internacional.

¹Un artículo de investigación que cubre los resultados de mi tesis de maestría y primer año de doctorado se encuentra en proceso de finalización.

Apéndice A

Transformación al Marco de Referencia Desplazado

Se aplica la transformación unitaria al marco desplazado al Hamiltoniano donde la cavidad está expresada en operadores Γ .

$$U_{b,\Gamma} = U_b U_\Gamma = e^{(\beta b^\dagger - \beta^* b)} e^{(\alpha \Gamma^\dagger - \alpha^* \Gamma)}. \quad (\text{A.1})$$

α y β son coeficientes complejos dependientes del tiempo que se elijen de manera conveniente para simplificar la ecuación maestra. Se busca una ecuación para la matriz densidad no transformada [26]. Bajo la transformación la matriz densidad es

$$\rho' = U_{b,\Gamma}^\dagger \rho U_{b,\Gamma}. \quad (\text{A.2})$$

Se puede despejar en términos de ρ , utilizando el hecho de que la transformación es unitaria

$$\rho = U_{b,\Gamma} \rho' U_{b,\Gamma}^\dagger, \quad (\text{A.3})$$

y derivando respecto al tiempo

$$\dot{\rho} = L\rho = \frac{d}{dt}(U_{b,\Gamma} \rho' U_{b,\Gamma}^\dagger). \quad (\text{A.4})$$

En este caso, L representa el operador de Liouville. Esto permite obtener una ecuación maestra para ρ' .

$$U_{b,\Gamma}(\dot{\rho}')U_{b,\Gamma}^\dagger = L[U_{b,\Gamma} \rho' U_{b,\Gamma}^\dagger] - \dot{U}_{b,\Gamma} \rho' U_{b,\Gamma}^\dagger - U_{b,\Gamma} \rho' \dot{U}_{b,\Gamma}^\dagger \quad (\text{A.5})$$

$$\dot{\rho} = U_{b,\Gamma}^\dagger L[U_{b,\Gamma} \rho' U_{b,\Gamma}^\dagger] U_{b,\Gamma} - U_{b,\Gamma}^\dagger \dot{U}_{b,\Gamma} \rho' - \rho' \dot{U}_{b,\Gamma}^\dagger U_{b,\Gamma}. \quad (\text{A.6})$$

A partir de este punto, se omiten los sub-índices de las transformaciones y la $'$ para la matriz densidad. La transformación afecta a los distintos operadores presentes en el Hamiltoniano de la siguiente forma

$$U^\dagger b U = b + \beta, \quad (\text{A.7})$$

$$U^\dagger \Gamma U = \Gamma + \alpha, \quad (\text{A.8})$$

$$U^\dagger b^\dagger b U = b^\dagger b + \alpha^* b + \alpha b^\dagger + |\beta|^2, \quad (\text{A.9})$$

$$U^\dagger \Gamma^\dagger \Gamma U = \Gamma^\dagger \Gamma + \alpha^* \Gamma + \alpha \Gamma^\dagger + |\alpha|^2. \quad (\text{A.10})$$

Los conjugados Hermitianos se obtienen de manera trivial. Utilizar operadores con dependencia temporal explícita añade complejidad adicional a este procedimiento debido a las derivadas temporales del operador U . El procedimiento completo puede encontrarse en [26]. Se obtiene

$$\dot{U}_b = \dot{\beta} b^\dagger U_b - U_b \dot{\beta}^* b - \frac{1}{2}(\dot{\beta} \beta^* + \dot{\beta}^* \beta) U_b, \quad (\text{A.11})$$

$$\dot{U}_b^\dagger = -\dot{\beta} b^\dagger U_b^\dagger + U_b^\dagger \dot{\beta}^* b - \frac{1}{2}(\dot{\beta} \beta^* + \dot{\beta}^* \beta) U_b^\dagger. \quad (\text{A.12})$$

El caso de U_Γ es más complejo, pero el procedimiento es equivalente. Se obtiene

$$\dot{U}_\Gamma = (\dot{\alpha} \Gamma^\dagger + \alpha \dot{\Gamma}^\dagger) U_\Gamma - U_\Gamma (\dot{\alpha}^* \Gamma + \alpha^* \dot{\Gamma}) + (\alpha^*)^2 C_{--}(t) U_\Gamma - \frac{1}{2}(\dot{\alpha} \alpha^* + \dot{\alpha}^* \alpha) U_\Gamma, \quad (\text{A.13})$$

$$\dot{U}_\Gamma^\dagger = -(\dot{\alpha} \Gamma^\dagger + \alpha \dot{\Gamma}^\dagger) U_\Gamma^\dagger + U_\Gamma^\dagger (\dot{\alpha}^* \Gamma + \alpha^* \dot{\Gamma}) - (\alpha)^2 C_{++}(t) U_\Gamma^\dagger - \frac{1}{2}(\dot{\alpha} \alpha^* + \dot{\alpha}^* \alpha) U_\Gamma^\dagger. \quad (\text{A.14})$$

Finalmente se debe calcular las transformaciones de las derivadas temporales de los operadores Γ

$$U^\dagger \dot{\Gamma} U = \dot{\Gamma} + \alpha C_{-+}(t) - \alpha^* C_{--}(t), \quad (\text{A.15})$$

$$U^\dagger \dot{\Gamma}^\dagger U = \dot{\Gamma}^\dagger - \alpha^* C_{+-}(t) + \alpha C_{++}(t). \quad (\text{A.16})$$

Los coeficientes $C(t)$ surgen debido a que los operadores Γ no necesariamente conmutan con sus derivadas temporales

$$C_{++}(t) = [\dot{\Gamma}^\dagger, \Gamma^\dagger],$$

$$C_{+-}(t) = [\dot{\Gamma}^\dagger, \Gamma],$$

$$C_{-+}(t) = [\dot{\Gamma}, \Gamma^\dagger],$$

$$C_{--}(t) = [\dot{\Gamma}, \Gamma].$$

Falta únicamente calcular los términos de la ecuación maestra que corresponden a estas derivadas temporales

$$U_b^\dagger \dot{U}_b \rho + U_\Gamma^\dagger \dot{U}_\Gamma \rho + \rho \dot{U}_b^\dagger U_b + \rho \dot{U}_\Gamma^\dagger U_\Gamma, \quad (\text{A.17})$$

los cuales resultan ser

$$U_{\Gamma}^{\dagger} \dot{U}_{\Gamma} \rho = [(\dot{\alpha} \Gamma^{\dagger} + \alpha \dot{\Gamma}^{\dagger} - \dot{\alpha}^* \Gamma - \alpha^* \dot{\Gamma}) - |\alpha|^2 C_{+-} + (\alpha)^2 C_{++} + (\alpha^*)^2 C_{--} - \frac{1}{2} |\dot{\alpha}^2| + \dot{\alpha}^* \alpha] \rho, \quad (\text{A.18})$$

$$\rho \dot{U}_{\Gamma}^{\dagger} U_{\Gamma} = \rho [(-\dot{\alpha} \Gamma^{\dagger} - \alpha \dot{\Gamma}^{\dagger} + \dot{\alpha}^* \Gamma + \alpha^* \dot{\Gamma}) + |\alpha|^2 C_{-+} - (\alpha)^2 C_{++} - (\alpha^*)^2 C_{--} - \frac{1}{2} |\dot{\alpha}^2| + \dot{\alpha} \alpha^*], \quad (\text{A.19})$$

$$U_{\Gamma}^{\dagger} \dot{U}_{\Gamma} \rho + \rho \dot{U}_{\Gamma}^{\dagger} U_{\Gamma} = [\rho, (\alpha^* \dot{\Gamma} - \alpha \dot{\Gamma}^{\dagger})] + [\rho, (\dot{\alpha}^* \Gamma - \dot{\alpha} \Gamma^{\dagger})] \quad (\text{A.20})$$

$$+ |\alpha|^2 (C_{-+} - C_{+-}). \quad (\text{A.21})$$

Los términos que involucran un conmutador con la matriz densidad se consideran parte del Hamiltoniano. El procedimiento para los términos U_b es el mismo pero resulta más sencillo

$$U_b^{\dagger} \dot{U}_b \rho + \rho \dot{U}_b^{\dagger} U_b = [\rho, (\dot{\beta}^* b - \dot{\beta} b^{\dagger})]. \quad (\text{A.22})$$

El Hamiltoniano queda entonces dado por

$$H'_{mec} = \hbar \omega (b^{\dagger} b + \beta b^{\dagger} + \beta^* b + |\beta|^2), \quad (\text{A.23})$$

$$H'_{cav} = \hbar \frac{W}{|f(t)|^2} (\Gamma^{\dagger} \Gamma + \alpha \Gamma^{\dagger} + \alpha^* \Gamma + |\alpha|^2), \quad (\text{A.24})$$

$$H'_{rad} = -\hbar g(t) [(\Gamma^{\dagger} \Gamma + \alpha \Gamma^{\dagger} + \alpha^* \Gamma + |\alpha|^2)((b^{\dagger} + \beta^*) + (b + \beta))], \quad (\text{A.25})$$

$$B' = \frac{\hbar \Omega}{2} (\Gamma^{\dagger} + \Gamma + \alpha + \alpha^*). \quad (\text{A.26})$$

Más términos adicionales generados por la transformación debido a sus derivadas temporales

$$H_T = (\alpha^* \dot{\Gamma} - \alpha \dot{\Gamma}^{\dagger}) + (\dot{\alpha}^* \Gamma - \dot{\alpha} \Gamma^{\dagger}) + (\dot{\beta}^* b - \dot{\beta} b^{\dagger}), \quad (\text{A.27})$$

y debido a los términos de Lindblad

$$U^{\dagger} [L_a U \rho U^{\dagger}] U + U^{\dagger} [L_{\Gamma} U \rho U^{\dagger}] U, \quad (\text{A.28})$$

se generan términos adicionales para el Hamiltoniano mientras que los términos de Lindblad mantienen su forma original

$$U^{\dagger} [L_b U \rho U^{\dagger}] U = L_b \rho + [\beta b^{\dagger} - \beta^* b, \rho], \quad (\text{A.29})$$

$$U^{\dagger} [L_{\Gamma} U \rho U^{\dagger}] U = L_{\Gamma} \rho + [\alpha \Gamma^{\dagger} - \alpha^* \Gamma, \rho]. \quad (\text{A.30})$$

La transformación de los términos Lindblad resulta en Hamiltoniano efectivo adicional

$$H_L = -\frac{\gamma}{2} (\beta b^{\dagger} + \beta^* b) - \frac{\kappa}{2} (\alpha \Gamma^{\dagger} + \alpha^* \Gamma). \quad (\text{A.31})$$

A fin de simplificar el Hamiltoniano, es necesario agrupar todos los términos a primer orden en operadores

$$b(\omega\beta - g(t)|\alpha|^2 + i\dot{\beta}^* + i\frac{\gamma}{2}\beta), \quad (\text{A.32})$$

$$\Gamma(\frac{W\alpha}{|f|^2} - g(t)\alpha(\beta^* + \beta) + \frac{\Omega}{2} - i\dot{\alpha} - i\frac{\kappa}{2}\alpha), \quad (\text{A.33})$$

y sus conjugados Hermitianos. Para anular estos términos es necesario que se cumpla el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\beta} = -i\omega\beta^* + ig(t)|\alpha|^2 - \frac{\gamma}{2}\beta, \quad (\text{A.34})$$

$$\dot{\alpha} = -i\frac{W}{|f|^2}\alpha^* + ig(t)\alpha(\beta + \beta^*) - i\frac{\Omega}{2} - \frac{\kappa}{2}\alpha^*. \quad (\text{A.35})$$

Debido a la forma de la frecuencia elegida, la función $f(t)$ que figura en los operadores Γ es

$$f(t) = e^{i\omega t} + \frac{\epsilon}{16}e^{3i\omega t} \quad (\text{A.36})$$

por lo que si se desprecian términos de corrección menores a epsilon

$$\dot{\Gamma}(t) = i\omega\Gamma(t), \quad (\text{A.37})$$

$$\dot{\Gamma}^\dagger(t) = -i\omega\Gamma^\dagger(t), \quad (\text{A.38})$$

y estos términos deben incluirse en las ecuaciones para α y β

$$\dot{\beta} = -i\omega\beta^* + ig(t)|\alpha|^2 - \frac{\gamma}{2}\beta, \quad (\text{A.39})$$

$$\dot{\alpha} = -i\frac{W}{|f|^2}\alpha^* + ig(t)\alpha(\beta + \beta^*) - i\frac{\Omega}{2} - \frac{\kappa}{2}\alpha^* + \omega\alpha^*. \quad (\text{A.40})$$

El caso de interés es el caso estacionario $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$. Se trabaja el límite de acoplamiento pequeño y se limita el análisis a orden 0 en el parámetro de acoplamiento $g(t)$

$$0 = -i\omega\beta^* - \frac{\gamma}{2}\beta, \quad (\text{A.41})$$

$$0 = -i\frac{W}{|f|^2}\alpha^* - i\frac{\Omega}{2} - \frac{\kappa}{2}\alpha^* + \omega\alpha^*. \quad (\text{A.42})$$

dada la expresión para $f(t)$ se tiene

$$\frac{W}{|f(t)|^2} = \omega, \quad (\text{A.43})$$

se llega a la solución, a orden 0 en acoplamiento

$$\beta_0=0, \tag{A.44}$$

$$\alpha_0 = \frac{\Omega}{-i\kappa - 2\omega(1-i)}. \tag{A.45}$$

lo cual resulta en el Hamiltoniano transformado

$$H = \hbar\omega b^\dagger b + \hbar\omega \Gamma^\dagger \Gamma - \hbar g(t)[(\alpha\Gamma^\dagger + \alpha^*\Gamma)(b^\dagger + b)] \tag{A.46}$$

donde se ha despreciado el término $\Gamma^\dagger \Gamma$ en la interacción ya que en este régimen $|\alpha| \gg 1$ y es despreciable respecto a los otros dos términos. De esta forma se tiene un nuevo Hamiltoniano para interacción optomecánica donde se modela que la intensidad de la interacción optomecánica es una función del tiempo.

Bibliografía

- [1] Thomas J. Kippenberg, Thomas Marquardt, Markus Aspelmeyer. Cavity optomechanics. *Review of Modern Physics*, 2013.
- [2] Alex Abramovici, William E. Althouse, et al. Ligo: The laser interferometer gravitational-wave observatory. *Science*, 1992.
- [3] Carlton M. Caves. Quantum-mechanical radiation-pressure fluctuations in an interferometer. *Physical Review Letters*, 1980.
- [4] Thomas Corbitt, Christopher Wipf, et al. Optical dilution and feedback cooling of a gram-scale oscillator to 6.9 mk. *Physical Review Letters*, 2007.
- [5] Zhi Xin Chen. Entanglement dynamics in double-cavity optomechanical systems. *Optics Express*, 2017.
- [6] Kerry J. Vahala. Optical microcavities. *Nature*, 2003.
- [7] E. Verhagen, et al. Quantum-coherent coupling of a mechanical oscillator to an optical cavity mode. *Nature*, 2012.
- [8] J. C. Sankey, et al. Strong and tunable nonlinear optomechanical coupling in a low-loss system. *Nature Physics*, 2010.
- [9] L. Childress. Cavity optomechanics in a levitated helium drop. *arXiv:1708.01803*, 2017.
- [10] Ivan Favero, et al. Fluctuating nanomechanical system in a high finesse optical microcavity. *Optics Express*, 2009.
- [11] Matt Eichenfield. Optomechanical crystals. *Nature*, 2009.
- [12] Michael J. Burek. Diamond optomechanical crystals. *Optica*, 2016.
- [13] V. B. Braginsky. Pondermotive effects of electromagnetic radiation. *Soviet Physics JETP*, 1968.
- [14] A. Dorsel. Optical bistability and mirror confinement induced by radiation pressure. *Physical Review Letters*, 1983.
- [15] Thiago P. Mayer Alegre. Optomechanical zipper cavity lasers: theoretical analysis of tuning range and stability. *Optics Express*, 2010.
- [16] Mahmood Bagheri. Dynamic manipulation of nanomechanical resonators in the high-amplitude regime and non-volatile mechanical memory operation. *Nature Nanotechnology*, 2011.

- [17] S. Forstner. Cavity optomechanical magnetometer. *Physical Review Letters*, 2012.
- [18] Jing Zhang. Quantum-state transfer from light to macroscopic oscillators. *Physical Review A*, 2003.
- [19] H.J. Kimble. The quantum internet. *Nature*, 2008.
- [20] Elion D. Kirson et al. Alternating electric fields arrest cell proliferation in animal tumor models and human brain tumors. *Proceedings of the National Academy of Science*, 2007.
- [21] V. Salari et al. Optomechanical proposal for monitoring microtubule mechanical vibrations. *Physical Review E*, 2017.
- [22] Warwick P. Bowen , Gerard G. Milburn. *Quantum Optomechanics*. CRC Press, 2016.
- [23] Marc Bienert, Pablo Barberis-Blostein. Optomechanical laser cooling with mechanical modulation. *Physical Review Letters A*, 2015.
- [24] Sigmund Kohler, Thomas Dittrich† , Peter Hänggi. Floquet-markov description of the parametrically driven, dissipative harmonic quantum oscillator. *Phys.Rev. E55*, 30 Sep 1998.
- [25] Pablo Yanes-Thomas , Pablo Barberis-Blostein. Optomechanical cooling with time dependent parameters. *TBD*, 2017.
- [26] Pablo Enrique Yanes Thomas. Enfriamiento optomecánico dependiente del tiempo. Master's thesis, UNAM, 2015.
- [27] M. Ward. *Supplement: Floquet Theory and the Mathieu's Equation*.
- [28] Dimitri Yurchuk. Analytical solution of mathieu equation. *arXiv:1401.5348v1*, 2014.
- [29] W.Domcke, P. Hänggi, D. Tannor. *Driven Quantum Systems*. Special Issue: Chemical Physics, Vol. 217, 1997.
- [30] Stephen Barnett, Stig Stenholm. Spectral decomposition of the lindblad operator. *Journal of Modern Optics*, 2000.
- [31] Lowell S. Brown. Quantum motion in a paul trap. *Physical Review Letters*, 1991.
- [32] J. J. Sakurai, Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Pearson, 2013.
- [33] Peter Zoller. *Quantum Noise:A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics*. Springer Science and Business Media, 2004.
- [34] Howard Carmichael. *An Open Systems Approach to Quantum Optics*. Springer-Verlag, 1993.
- [35] Hans-Jurgen Briegel, Berthold-Georg Englert. Quantum optical master equations: The use of damping bases. *PHYSICAL REVIEW A*, 1993.

- [36] I. Wilson-Rae, N. Nooshi. Theory of ground state cooling of a mechanical oscillator using dynamical backaction. *Physical Review Letters*, 2007.
- [37] C. K. Law. Interaction between a moving mirror and radiation pressure: A hamiltonian formulation. *Physical Review A*, 1995.