

# Enfriamiento Optomecánico con Parámetros Dependientes del Tiempo

Pablo Enrique Yanes Thomas

25 de enero de 2016

# Objeto de Estudio

Enfriamiento  
Optomecánico  
con  
Parámetros  
Dependientes  
del Tiempo

Pablo Enrique  
Yanes Thomas

Se estudió el enfriamiento de un sistema optomecánico compuesto por un tambor mecánico acoplado a una cavidad optica mediante un laser. En particular se trató el caso donde la frecuencia natural del tambor es una función periódica del tiempo.

# Sistemas Optomecánicos

Enfriamiento  
Optomecánico  
con  
Parámetros  
Dependientes  
del Tiempo

Pablo Enrique  
Yanes Thomas

Interacción entre un sistema mecánico y un sistema óptico, hay varios tipos posibles:

- Espejos suspendidos
- Microresonadores
- Objetos Suspendidos

Se trató con un sistema del primer tipo.

# El Sistema

Enfriamiento  
Optomecánico  
con  
Parámetros  
Dependientes  
del Tiempo

Pablo Enrique  
Yanes Thomas

Se estudió un sistema equivalente a una cavidad de Fabry-Perót con uno de los espejos sujetos a un resorte. Este se acopla de manera paramétrica al campo electromagnético de la cavidad. Se estudió un régimen donde el acoplamiento es débil.

# Estudios Anteriores

Enfriamiento  
Optomecánico  
con  
Parámetros  
Dependientes  
del Tiempo

Pablo Enrique  
Yanes Thomas

El sistema se ha estudiado antes [1], sin embargo la dependencia temporal no se tomó en cuenta durante la aproximación de Markov. Existe un procedimiento que sí toma esto en cuenta y lleva a una mejor descripción [2]. Se siguió este procedimiento y se llegó a una mejor ecuación maestra para describir este sistema particular.

# Disipación para Oscilador Dependiente del Tiempo

## Base de Decaimiento

Base de vectores propios del operador de Lindblad que se obtiene en la ecuación:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_a \rho = & -\frac{A}{2}(\nu + 1)[a^\dagger a \rho + \rho a^\dagger a - 2a \rho a^\dagger] \\ & -\frac{A}{2}(\nu)[a a^\dagger \rho + \rho a a^\dagger - 2a^\dagger \rho a].\end{aligned}\quad (1)$$

Estos son de la forma:

$$a^{\dagger l} \frac{(-1)^n}{(\nu + 1)^{l+1}} : L_n^l \left[ \frac{a^\dagger a}{\nu + 1} \right] e^{-\left[ \frac{a^\dagger a}{\nu + 1} \right]} : \quad l \geq 0, \quad (2)$$

$$\frac{(-1)^n}{(\nu + 1)^{|l|+1}} : L_n^{|l|} \left[ \frac{a^\dagger a}{\nu + 1} \right] e^{-\left[ \frac{a^\dagger a}{\nu + 1} \right]} : a^{|l|} \quad l \leq 0, \quad (3)$$

## Oscilador Armónico Dependiente del Tiempo

Se resuelve clásicamente mediante teoría de Floquet[3]. En este trabajo se trató el caso donde la frecuencia natural es de la forma:

$$k(t) = \nu_0 + \epsilon \cos(2\omega t). \quad (4)$$

La solución clásica es

$$f(t) = e^{i\omega t} + \frac{\epsilon}{16} e^{3i\omega t} \quad (5)$$

## Operadores de Floquet

Equivalentes a los operadores de escalera del oscilador armónico para el caso donde la frecuencia natural del oscilador es una función periódica del tiempo. Dependen de la solución clásica del oscilador mecánico dependiente del tiempo. Estos son

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2i}(\dot{f}(t)\sqrt{\frac{2}{\hbar m}}\hat{x} - f(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m}}\hat{p}), \quad (6)$$

y su complejo conjugado



Se tiene un mejor modelo de disipación al sustituir operadores de Floquet en la ecuación (1) y por tener la misma algebra esta queda resuelta por la base (2). La ecuación resultante es

$$\dot{\rho} = \frac{\gamma}{2}(N+1)(2\Gamma\rho\Gamma^\dagger - \Gamma^\dagger\Gamma\rho - \rho\Gamma^\dagger\Gamma) + \frac{\gamma}{2}N(2\Gamma^\dagger\rho\Gamma - \Gamma\Gamma^\dagger\rho - \rho\Gamma\Gamma^\dagger) \quad (7)$$

# Hamiltoniano de Enfriamiento Laser

Enfriamiento  
Optomecánico  
con  
Parámetros  
Dependientes  
del Tiempo

Pablo Enrique  
Yanes Thomas

Se expresó el Hamiltoniano utilizado en [1] para modelar un tambor mecánico interactuando con el campo electromagnético de una cavidad óptica mediante presión de radiación

$$H(t) = -\hbar\delta a^\dagger a + \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\nu(t)x^2 - \hbar g a^\dagger a x + \hbar \frac{\Omega}{2}(a^\dagger + a) \quad (8)$$

Y se pasó al formalismo de los operadores de Floquet

$$H(t) = -\hbar\delta a^\dagger a + \frac{W}{|f(t)|^2}(\Gamma^\dagger \Gamma + \frac{1}{2}) \\ + g' a^\dagger a [\gamma_+(t)\Gamma(t) + \gamma_-(t)\Gamma^\dagger(t)] + \hbar\frac{\Omega}{2}(a^\dagger + a) \quad (9)$$

y se obtuvo así una nueva ecuación maestra de enfriamiento laser

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + L_a\rho + L_\Gamma\rho \quad (10)$$

# Transformación al Marco Desplazado

Enfriamiento  
Optomecánico  
con  
Parámetros  
Dependientes  
del Tiempo

Pablo Enrique  
Yanes Thomas

Se utilizó una transformación unitaria a un marco de referencia desplazado para eliminar los términos de tercer orden en operadores ya que estos son no lineales

$$U_{a,\Gamma} = e^{(\alpha(t)a^\dagger - \alpha(t)^*a)} e^{(\beta(t)\Gamma^\dagger - \beta(t)^*\Gamma)}, \quad (11)$$

para aplicar la transformación se utiliza

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \dots \quad (12)$$

Con esto se obtuvieron las formas transformadas de los operadores

$$U^\dagger a U = a + \alpha, \quad (13)$$

$$U^\dagger a^\dagger U = a^\dagger + \alpha^*, \quad (14)$$

$$U^\dagger \Gamma U = \Gamma + \beta, \quad (15)$$

$$U^\dagger \Gamma^\dagger U = \Gamma^\dagger + \beta^*, \quad (16)$$

sin embargo la ecuación transformada es

$$\dot{\rho} = U_{a,\Gamma}^\dagger L[U_{a,\Gamma} \rho' U_{a,\Gamma}^\dagger] U_{a,\Gamma} - U_{a,\Gamma}^\dagger \dot{U}_{a,\Gamma} \rho' - \rho' \dot{U}_{a,\Gamma}^\dagger U_{a,\Gamma} \quad (17)$$

Se prestó especial atención a los términos que involucraban derivadas temporales ya que en este caso algunos operadores dependen explícitamente del tiempo. Esto generó términos involucrando los conmutadores entre los operadores de Floquet y sus derivadas temporales

$$\begin{aligned}
 U^\dagger \dot{U} \rho + \rho \dot{U}^\dagger U = & -(\dot{\alpha} a \rho + \rho \dot{\alpha} a^\dagger) + \dot{\alpha} a^\dagger \rho + \rho \dot{\alpha}^* a, \\
 & + \dot{\beta} \Gamma^\dagger \rho + \rho \dot{\beta}^* \Gamma - (\dot{\beta}^* \Gamma + \beta^* \dot{\Gamma}) \rho - \rho (\dot{\beta} \Gamma^\dagger + \beta \dot{\Gamma}^\dagger) \\
 & + 3(\beta^*)^2 C_{--}(t) \rho + |\beta|^2 (C_{+-}(t) - C_{-+}(t)) \rho \\
 & - \beta^2 C_{++}(t) \rho,
 \end{aligned}$$

Se agruparon los términos con un solo operador y se factorizaron para obtener ecuaciones diferenciales para  $\alpha(t)$  y  $\beta(t)$

$$\dot{\alpha} = \alpha \left( -\frac{A}{2} + i(\delta + g'(\gamma_-(t)\beta^* + \gamma_+(t)\beta)) \right) - i\frac{\Omega}{2}, \quad (18)$$

$$\dot{\beta} = \beta \left( -\frac{\gamma}{2} - i\frac{W}{|f(t)|^2} \right) + ig'|\alpha|^2\gamma_+(t), \quad (19)$$

Se pidió que se cumplieran estas ecuaciones y se obtuvo un nuevo Hamiltoniano en el Marco Desplazado

$$H' = -\hbar\delta' a^\dagger a + \frac{W}{|f(t)|^2} \Gamma \Gamma^\dagger + i\hbar(\beta^* \dot{\Gamma} - \beta \dot{\Gamma}^\dagger) - \hbar g' [(a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a)(\gamma_-(t) \Gamma^\dagger + \gamma_+(t) \Gamma)] \quad (20)$$



# Cálculo de Factores Dependientes del Tiempo

Se utilizó la solución obtenida para el oscilador dependiente del tiempo para obtener expresiones explícitas para los distintos factores con dependencia temporal que aparecen en la ecuación maestra. Comenzando con los conmutadores

$$C_{++}(t) = -\epsilon \frac{i}{8} e^{-4i\omega t}, \quad (21)$$

$$C_{--}(t) = -\epsilon \frac{i}{8} e^{4i\omega t}, \quad (22)$$

$$C_{+-}(t) = i \left[ 1 - \frac{\epsilon}{16} e^{2i\omega t} - \frac{6\epsilon}{16} e^{-2i\omega t} \right], \quad (23)$$

$$C_{-+}(t) = i \left[ 1 - \frac{\epsilon}{16} e^{-2i\omega t} - \frac{6\epsilon}{16} e^{2i\omega t} \right]. \quad (24)$$

Los coeficientes  $\gamma_{\pm}$

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{\omega} e^{\mp i\omega t}, \quad (25)$$

Los operadores  $\dot{\Gamma}$

$$\dot{\Gamma}(t) = i\omega\Gamma(t), \quad (26)$$

$$\dot{\Gamma}^{\dagger}(t) = -i\omega\Gamma^{\dagger}(t), \quad (27)$$

Y el factor del Hamiltoniano de Oscilador Armónico  
Dependiente del Tiempo

$$\frac{W}{|f|^2} = \omega. \quad (28)$$

Y finalmente soluciones para  $\alpha(t)$  y  $\beta(t)$

$$\alpha_0 = \frac{\Omega}{2\delta - iA}, \quad (29)$$

$$\beta_0 = 0. \quad (30)$$

Lo cual lleva al Hamiltoniano final para el caso de pequeñas oscilaciones en torno a una frecuencia central, a primer orden de perturbación

$$H = -\hbar\delta a^\dagger a + \hbar\omega\Gamma^\dagger\Gamma + \frac{\hbar g'}{\omega}(\alpha_0 a^\dagger + \alpha_0^* a)(e^{i\omega t}\Gamma^\dagger + e^{-i\omega t}\Gamma) \quad (31)$$

# Escalas Temporales

Enfriamiento  
Optomecánico  
con  
Parámetros  
Dependientes  
del Tiempo

Pablo Enrique  
Yanes Thomas

Debido a los parámetros involucrados, la ecuación se parte en dos escalas temporales.

$$L_0 = L_c + L_m,$$

$$L_c = \frac{1}{i\hbar} [H_c, \cdot] + L_A,$$

$$L_m = \frac{1}{i\hbar} [H_m, \cdot] + L_\gamma,$$

$$L_1 = \frac{1}{i\hbar} [H_{int}, \cdot].$$

El movimiento optomecánico es mucho más rápido que la interacción.

Se tomó como parámetro perturbativo  $\eta = \frac{g'}{\omega}$ . Se proyectó la ecuación al subespacio correspondiente al estado estacionario y se obtuvo

$$P\dot{\rho} = PL_1 \frac{Q}{\lambda_m - L_0} L_1 \rho_{st} \mu, \quad (32)$$

$\mu$  representa a  $Tr_c[P\rho]$

Al desarrollar los conmutadores involucrados en  $L_1$  se obtiene una ecuación con la misma estructura que en [1] y se llega a

$$\dot{\mu} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \mu] + \frac{A_-}{2}D[\Gamma]\mu + \frac{A_+}{2}D[\Gamma^\dagger]\mu. \quad (33)$$



Marc Bienert, Pablo Barberis-Blostein.

Optomechanical laser cooling with mechanical modulation.

*Physical Review Letters A*, 2015.



Sigmund Kohler, Thomas Dittrich† , Peter Hänggi.

Floquet-markov description of the parametrically driven,  
dissipative harmonic quantum oscillator.

*Phys.Rev. E55*, 30 Sep 1998.



M. Ward.

*Supplement: Floquet Theory and the Mathieu's Equation.*