Tesis de Maestría

Pablo Yanes

9 de noviembre de 2015

Resumen

Capítulo 1

Sistemas Cuánticos Abiertos y Ecuaciones Maestras

1.1. Introducción

Modelar la pérdida de energía en un sistema clásico como un oscilador armónico es un proceso directo [6] que consiste en modificar el Hamiltoniano usual:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{1.1}$$

Al agregarle un termino dependiente de la velocidad $-\gamma p$, lo cual lleva a la conocida ecuación:

$$\ddot{q} + \gamma\dot{q} + \omega^2 q = 0 \tag{1.2}$$

Sin embargo, este enfoque no es igualmente exitosos al tratar con sistemas cuánticos. En el procedimiento anterior se llega a las ecuaciones lineales:

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \qquad \dot{p} = -\gamma p - m\omega^2 q \tag{1.3}$$

Como estás son lineales deben de seguir siendo validas al cambiar p y q por operadores, pero si se piensa en la evolución temporal del conmutador, tomando ahora a p y q como operadores:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[q,p] =& \dot{q}p + q\dot{p} - \dot{p}qp - \dot{q}\\ =& -\gamma[q,p]\end{aligned}$$

Por lo que:

$$[q(t), p(t)] = e^{-\gamma t}[q(0), p(0)] = i\hbar e^{-\gamma t} \tag{1.4}$$

El enfoque que en el caso clásico lleva a la solución correcta en el caso cuántico lleva a que la relación de conmutación canónica decaiga con el tiempo. Se busca otra forma de proceder.

1.2. Enfoque de Sitema y Baño

Este enfoque depende de asumir que el sistema no pierde energía por sí mismo, en realidad las perdidas de energía se deben un acoplamiento a un sistema mucho más grande, al cual llamamos baño. Normalmente las propiedades del baño no son de interés, más allá de propiedades básicas como temperatura. Se asume que el acoplamiento lleva a pérdidas de energía en el sistema de estudio pero que este sistema no es lo suficientemente grande como para alterar las propiedades del baño. Esto lleva a un Hamiltoniano de la forma:

$$H = H_{Sis} + H_B + H_{Int} \tag{1.5}$$

Un Hamiltoniano total formado por la suma del Hamiltoniano del sistema original sin péridas de energía, un Hamiltoniano para el baño y un Hamiltoniano de acoplamiento entre los otros dos. Dado que solo es de interés conocer las propiedades del sistema, esto sugiere el uso de matrices densidad.

1.2.1. Matriz Densidad

Si un sistema se encuentra en un estado $|\Psi\rangle$, su matriz densidad[4], usualmente denotada como ρ está dada por:

$$\rho = |\Psi\rangle \langle\Psi| \tag{1.6}$$

La matriz contiene toda la información del sistema y tiene varias propiedades de interés. Si se desea conocer el valor de expectación de un operador, este es:

$$< A >= Tr[A\rho] \tag{1.7}$$

Su evolución temporal se comporta de acuerdo con la ecuación de Liouville:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] \tag{1.8}$$

Finalmente, y de especial utilidad, existe una forma de extraer información de un subsistema de la matriz densidad. Si se conoce la matriz densidad de un sistema compuesto formado por dos sistemas A y B tal que el sistema compuesto se encuentra en un espacio formado por el producto directo de los dos subsistemas:

$$H_{AB} = H_A \otimes H_B \tag{1.9}$$

Entonces es posible encontrar la matriz densidad correspondiente a uno de los dos subespacios al tomar la traza sobre el otro:

$$\rho_A = Tr_B[\rho_{AB}] \tag{1.10}$$

Esto muestra la utilidad de este formalismo para trabajar con Hamiltonianos del tipo 1.5, ya que si se encuentra una solución basta con tomar la traza sobre los estados del baño para encontrar una solución para el sistema con pérdidas de energía.

1.3. Deducción de Ecuacion Maestra Mediante Operadores de Proyección

Se busca obtener la ecuación correspondiente a un sistema sujeto a interacción con un baño térmico:

$$\hat{H} = \hat{H}_{Sis} + \hat{H}_{Int} + \hat{H}_B \tag{1.11}$$

Lo cual implica una ecuación de evolución temporal para ρ de la forma:

$$\dot{\rho}_{total} = (L_{Sis} + L_{Int} + L_B)\rho \tag{1.12}$$

Donde:

$$L\rho(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \rho(t_0)] \tag{1.13}$$

Se busca una solución para el operador densidad únicamente del sistema, por lo que se busca una ecuación para el operador total después de tomar la traza sobre las variables del baño:

$$\rho(t) \equiv Tr_B\{\rho_{total}(t)\} \tag{1.14}$$

Se define un operador de proyección [24] que opere sobre ρ:

$$P\rho_t = Tr_B\{\rho_t(t)\} \otimes \rho_B \tag{1.15}$$

Y un operador:

$$Q = \mathbf{1} - P \tag{1.16}$$

Tal que:

$$\rho_t = P\rho_t + Q\rho_t \tag{1.17}$$

$$\equiv v(t) + u(t) \tag{1.18}$$

Se emplean las siguientes propiedades:

1. $PL_{sis} = L_{sis}P$ Ya que P y L_{sis} operan en espacios distintos.
2. $PL_B = L_BP = 0$ Por conservación de la probabilidad.
3. $PL_{int}P = 0$ Se asume que la interacción no tiene términos diagonales en las variables del baño
4. $P^2 = P \quad Q^2 = Q$ P y Q son proyectores

Por convieniencia se trabaja con la transformada de Laplace [citar arfken] de las proyecciones $v(t)$ y $u(t)$:

$$\tilde{v}(t) = \int_0^\infty e^{-st} v(t) dt \qquad \tilde{u}(t) = \int_0^\infty e^{-st} u(t) dt \tag{1.19}$$

Dado que las dos proyecciones se encuentran es espacios distintos, se puede sustituir ρ por ellas en (1.12) y resolver por separado para cada proyección. En el caso de $v(t)$ se tiene, antes de utilizar la transformada de Laplace, al aplicar el proyector P a (1.12):

$$\begin{aligned}
P\dot{p}(t)_t =& P(L_{Sis} + L_{Int} + L_B)\rho \\
\dot{v}(t) =& (PL_{Sis} + PL_{Int} + PL_B)\rho \\
=& (L_{Sis}P + PL_{Int} + \underbrace{PL_B}_{0})\rho \\
=& L_{sis}P\rho_t + PL_{int}\rho_t \\
=& L_{sis}v + \underbrace{PL_{int}(P}_{0} + Q)\rho_t \\
=& L_{sis}v + PL_{int}Q\rho_t \\
=& L_{sis}v + PL_{int}u
\end{aligned}$$

De manera análoga se obtiene una ecuación para u al proyectar con Q:

$$\begin{aligned}
Q\dot{p}(t)_t =& Q(L_{Sis} + L_{Int} + L_B)\rho \\
\dot{u}(t) =& (QL_{Sis} + QL_{Int} + QL_B)\rho \\
=& (L_{Sis}Q + QL_{Int} + L_BQ)\rho \\
=& L_{sis}Q\rho_t + L_BQ\rho_t + QL_{int}\rho_t \\
=& L_{sis}u + L_Bu + QL_{int}(Q + P)\rho_t \\
=& L_{sis}u + L_Bu + QL_{int}v + QL_{int}u\rho_t \\
=& (L_{Sis} + L_B + QL_{Int})u + QL_{Int}v
\end{aligned}$$

Al aplicar la transformada de Laplace a la ecuación para v se obtiene:

$$s\tilde{v}(s) - \tilde{v}(0) = L_{sis}\tilde{v}(s) + PL_{int}\tilde{u}(s) \tag{1.20}$$

Y en el caso de u:

$$s\tilde{u}(s) - \tilde{u}(0) = (L_{Sis} + L_B + QL_{Int})\tilde{u}(s) + QL_{Int}\tilde{v}(s) \tag{1.21}$$

Se resuelve (1.21) en términos de v:

$$\tilde{u}(s) = \frac{QL_{Int}\tilde{v}(s) + \tilde{u}(0)}{s - \underbrace{(L_{Sis} + L_B + QL_{Int})}_{\alpha}} \tag{1.22}$$

Y se sustituye el resultado en (1.20):

$$s\tilde{v}(s) - (\tilde{v}(0) + PL_{int}\alpha\tilde{u}(0)) = (L_{sis} + PL_{int}\alpha QL_{int})\tilde{v}(s) \tag{1.23}$$

En este punto se toma la aproximación de aclopamiento débil:

$$L_{int} \to \Xi L_{int} \tag{1.24}$$

Los términos asociados a $\tilde{u}0$ son únicamente correciones a la condición inicial, por lo que se desprecian. Tomando esto en cuenta, se obtiene:

$$s\tilde{v}(s) - \tilde{v}(0) = (L_{sis} + \Xi^2 \frac{PL_{int}QL_{int}}{s - L_{sis} - L_B}) s\tilde{v}(s) \tag{1.25}$$

Y al tomar la transformada inversa de Laplace:

$$\dot{v}(t) = L_{sis}v(t) + \Xi^2 PL_{int} \int_0^\infty d\tau e^{(L_{sis}+L_B)\tau} QL_{int}v(t-\tau) \tag{1.26}$$

Se busca obtener una ecuación en términos de los operadores del Hamiltoniano [24],se procede con el segundo término de la ecuación (1.26):

$$\begin{aligned} QL_{int}v =&(1-P)L_{int}v \\ =&(1-P)L_{int}P\rho \\ =&L_{int}P\rho \\ =&L_{int}v \end{aligned}$$

Con esto el segundo término de la ecuación (1.26), y tomando en cuenta la definición de los términos L dada en (1.13) y el lema de Baker-Campbell-Housedorff [15]

$$\begin{aligned} =&\Xi^2 PL_{int} \int_0^\infty d\tau e^{(L_{sis}+L_B)\tau} L_{int}v(t-\tau) \\ =&\Xi^2 PL_{int} \int_0^\infty d\tau e^{\frac{-i}{\hbar}H_B\tau} e^{\frac{-i}{\hbar}H_s\tau} L_{int}v(t-\tau) e^{\frac{i}{\hbar}H_B\tau} e^{\frac{i}{\hbar}H_s\tau} \\ =&\Xi^2 PL_{int} \int_0^\infty d\tau L_{int}v(t-\tau) \\ =&\Xi^2 PL_{int} \int_0^\infty d\tau [H^*_{int}, P\rho(t-\tau)] \\ =&\Xi^2 P[H_{int}, \int_0^\infty d\tau [H^*_{int}, tr_B(\rho(t-\tau)) \otimes \rho_B]] \end{aligned}$$

En este punto se realiza la aproximación de Markov [24], al hacer la sustitución:

$$t - \tau \to t \tag{1.27}$$

Y se traza toda la ecuación sobre las variables del baño. Con esto se llega a la ecuación:

Capítulo 2

Ecuaciones Maestras: Atomo de dos Niveles, Oscilador Armónico y la Base de Decaimiento

Se busca poder resolver ecuaciones como las encontradas en el capitulo anterior, estás en general se escriben de la forma:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + L\rho \tag{2.1}$$

Donde ρ es la matriz densidad del sistema, H es el Hamiltoniano que modela las partes del sistema donde no hay pérdidas de energía y L es el operador de Lindblat, el cual corresponde a la parte abierta del sistema. En la mecánica cuántica cerrada, el análisis se limíta al operador Hamiltoniano el cual es un operador auto adjunto. En ese caso, es suficiente resolver la ecuación de Schröedinger estacionaria:

$$H\Psi = E\Psi \tag{2.2}$$

cuya solución formal es:

$$\Psi(t) = e^{\frac{-iHt}{\hbar}}\Psi(0) \tag{2.3}$$

La función $\Psi(0)$ puede expresarse como una combinación lineal de las funciones propias de H. Al hacer esto, la ecuación anterior toma la forma:

$$\Psi(t) = \sum_j c_j e^{\frac{-iE_j t}{\hbar}}\phi_j(0) \tag{2.4}$$

Los coeficientes c_j son las proyecciones de la función $\Psi(0)$ sobre las funciones propias de H

Se busca una solución equivalente para la ecuación (2.1). Es posible transformar dicha ecuación al cuadro de interacción, donde solo importa la parte abierta del problema. En este cuadro, se busca una solución del tipo:

$$\rho(t) = \sum_{\lambda} c_\lambda e^{\lambda t} \rho_\lambda \tag{2.5}$$

Los coeficientes ahora son respecto a las funciones propias de L. Es importante notar que L no es necesariamente un operador autoadjunto, por lo que no se puede garantizar que sus funciones propias formen una base completa del espacio ni que sus valores propios sean reales. En el caso de este tipo de operadores existen dos tipos de vectores propios[18], izquierdos y derechos:

$$\begin{aligned} L\rho =& \lambda\rho \\ \rho L =& \lambda\check{\rho} \end{aligned}$$

Los estados que se obtienen al aplicar el superoperador por la derecha se conocen también como estados duales, se denotan por $\check{\rho}$. También es importante notar que Ψ es un vector de estado que pertenece al espacio de Hilbert mientras que rho es un operador que pertenece al espacio de Liouville. Por esto, se dice que L es un superoperador, los vectores que se obtienen al aplicar por la izquierda y por la derecha no son simplemente complejos conjugados uno del otro, se conocen como duales y son ortogonales los unos a otros bajo un producto definido mediante la traza[10] y sus eigenvalores son iguales.

$$Tr[\check{\rho}_\lambda \rho_{\lambda'}] = \delta_{\lambda'\lambda} \tag{2.6}$$

Esto se puede emplear para obtener las constantes de la expansión:

$$\rho(0) = \sum_{\lambda} \check{c} \rho_\lambda \tag{2.7}$$

Donde:

$$\check{c}_\lambda = Tr[\check{\rho}_\lambda \rho(0)] \tag{2.8}$$

Es importante notar que para realizar una expansion es estados de este tipo es necesario poder trazar sobre los estados duales. Por esto, estos estados se estudiarán de manera más cuidadosa en una sección posterior.

2.1. Átomo de dos Niveles

Antes de intentar resolver sistemas más complejos, es ilustrativo tratar el caso relativamente sencillo del átomo de niveles. A este sistema le corresponde el operador de Linblad:

$$\begin{aligned} L_\sigma \rho =& -\frac{B}{2}(1-s)[\sigma_+\sigma_-\rho + \rho\sigma_+\sigma_- - 2\sigma_-\rho\sigma_+] \\ & -\frac{B}{2}s[\sigma_-\sigma_+\rho + \rho\sigma_-\sigma_+ - 2\sigma_+\rho\sigma_-] \\ & -\frac{2C-B}{4}[\rho - \sigma_z\rho\sigma_z] \end{aligned} \tag{2.9}$$

Es convenitente utilizar notación de Dirac en este tratamiento. Todos los operadores involucrados pueden verse como matrices de dos por dos. σ_z es la matriz de Pauli correspondiente al eje z y:

$$\sigma_{\pm} = \sigma_x \pm \sigma_y = (\sigma_{\mp})^{\dagger} \tag{2.10}$$

Un método [18] para encontrar los vectores y valores propios de L consiste en proponer una forma adecuada para los vectores, aplicar L a la propuesta y resolver las ecuaciones resultantes. En este caso se propone:

$$\rho_{\sigma} = \alpha \left|+\right\rangle \left\langle+\right| + \beta \left|+\right\rangle \left\langle-\right| + \gamma \left|-\right\rangle \left\langle+\right| + \delta \left|-\right\rangle \left\langle-\right| \tag{2.11}$$

Ya que se conoce la forma en la cual las matrcies σ operan sobre estos elementos:

$$\begin{array}{rl} \sigma_+ \left\langle-\right| = \left\langle+\right| & \sigma_+ \left\langle+\right| = 0 \\ \sigma_- \left\langle+\right| = \left\langle-\right| & \sigma_- \left\langle-\right| = 0 \\ \sigma_z \left\langle+\right| = \left\langle+\right| & \sigma_z \left\langle-\right| = -\left\langle-\right| \end{array}$$

Al sustituir ρ_{σ} en (2.9) se obtiene, para el primer término de L:

$$-\frac{B}{2}(1-s)[2\alpha \left|+\right\rangle \left\langle+\right| + \beta \left|+\right\rangle \left\langle-\right| + \gamma \left|-\right\rangle \left\langle+\right| - 2\alpha \left|-\right\rangle \left\langle-\right|] \tag{2.12}$$

El segundo término es:

$$-\frac{B}{2}(s)[2\delta \left|+\right\rangle \left\langle+\right| + \beta \left|+\right\rangle \left\langle-\right| + \gamma \left|-\right\rangle \left\langle+\right| - 2\delta \left|-\right\rangle \left\langle-\right|] \tag{2.13}$$

Y el tercero:

$$-\frac{2C-B}{4}[2\beta \left|+\right\rangle \left\langle-\right| + 2\gamma \left|-\right\rangle \left\langle+\right|] \tag{2.14}$$

Esto se inserta en:

$$L\rho = \lambda\rho \tag{2.15}$$

Y dado que cada uno de los cuatro componentes de ρ son linealmente independientes, esto genera cuatro ecuaciones distintas:

$$B(s(\alpha+\delta)-\alpha) \left|+\right\rangle \left\langle+\right| = \lambda\alpha \left|+\right\rangle \left\langle+\right| \tag{2.16}$$
$$B(-s(\alpha+\delta)+\alpha) \left|-\right\rangle \left\langle-\right| = \lambda\delta \left|-\right\rangle \left\langle-\right| \tag{2.17}$$
$$-\beta C \left|+\right\rangle \left\langle-\right| = \lambda\beta \left|+\right\rangle \left\langle-\right| \tag{2.18}$$
$$-\gamma C \left|-\right\rangle \left\langle+\right| = \lambda\gamma \left|-\right\rangle \left\langle+\right| \tag{2.19}$$

De las cuales se obtienen los cuatro vectores propios:

$$L_{\sigma}\sigma_0 = 0 \tag{2.20}$$
$$L_{\sigma}\sigma_z = -B\sigma_z \tag{2.21}$$
$$L_{\sigma}\sigma_{\pm} = -C\sigma_{\pm} \tag{2.22}$$

donde:

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}[I + (2s-1)\sigma_z] \tag{2.23}$$

Las constantes en (2.1) son todas positivas por lo que todos los valores propios son no positivos. Esto es importante, ya que al hacer tender el tiempo a infinito solo el término que corresponde al valor propio 0 sobrevive, los demás términos decaen exponencialmente con el tiempo. Esto lleva a identificar al término con valor propio 0 como el estado estacionario del sistema. Los estados duales se obtienen de la misma forma y resultan ser[10]:

$$\check{\sigma_0} L_\sigma = 0 \tag{2.24}$$
$$\check{\sigma_z} L_\sigma = -B\check{\sigma_z} \tag{2.25}$$
$$\check{\sigma_\pm} L_\sigma = -C\check{\sigma_\pm} \tag{2.26}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\check{\sigma_0} =& 1\\
\check{\sigma_z} =& \frac{1}{2}[\sigma_z - (2s-1)]\\
\check{\sigma_\pm} =& \frac{1}{4}\sigma_\mp
\end{aligned}$$

Se puede verificar rápidamente la condición de ortogonalidad, por ejemplo utilizando $\check{\sigma_0}$:

$$\begin{aligned}
Tr[\sigma_0\check{\sigma_0}] =& Tr[\frac{1}{2}[I + (2s-1)\sigma_z]]\\
=& \frac{1}{2}Tr[I] + \frac{2s-1}{2}Tr[\sigma_z]\\
=& 1
\end{aligned}$$

Donde se utiliza el hecho de que las matrices de Pauli tienen traza cero. Con esta misma propiedad se puede verificar que los productos restantes con $\check{\sigma_0}$ se anulan.

2.2. Oscilador Armónico: Primer Ansatz

Se busca modelar interacciones que involucran un capo electromagnético. Este se modela simplemente como una suma infinita de modos de oscilador armónico. Este sistema en particular corresponde a un operador de Lindblat de la forma [10]

$$\begin{aligned}
L_a\rho =& -\frac{A}{2}(\nu+1)[a^\dagger a\rho + \rho a^\dagger a - 2a\rho a^\dagger]\\
& -\frac{A}{2}(\nu)[aa^\dagger\rho + \rho aa^\dagger - 2a^\dagger\rho a]
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Esto modela un campo electromagnético en una cavidad con acoplamiento a un reservorio térmico con un número ν promedio de fotones térmicos. $A, \nu \geq 0$. La elección de un ansatz para este sistema es mucho más compleja, ya que ahora la base estados sobre la cual actúan los operadores que forman L es infinita. En base a lo visto en la sección anterior, se propone como ansatz una base que acople estados de distinta energía:

$$\rho_n^l = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^l \left|n\right\rangle \left\langle n+l\right| \tag{2.28}$$

El objetivo de nuevo es sustituir el ansatz en (2.27) para obtener un sistema de ecuaciones para los valores y vectores propios. Se trabaja primero con el primer término de (2.27), donde se ignora el coeficiente exterior por brevedad:

$$\begin{aligned}
=&[a^\dagger a \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^l \left|n\right\rangle \left\langle n+l\right| + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^l \left|n\right\rangle \left\langle n+l\right| a^\dagger a - 2a \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^l \left|n\right\rangle \left\langle n+l\right| a^\dagger] \\
=&[\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^l a^\dagger a \left|n\right\rangle \left\langle n+l\right| + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^l \left|n\right\rangle \left\langle n+l\right| a^\dagger a - 2 \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^l a \left|n\right\rangle \left\langle n+l\right| a^\dagger] \\
=&[\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^l n \left|n\right\rangle \left\langle n+l\right| + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^l \left|n\right\rangle \left\langle n+l\right| (n+l) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^l \sqrt{n} \left|n-1\right\rangle \left\langle n+l-1\right| \sqrt{n+l}] \\
=&[\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^l (2n+l) \left|n\right\rangle \left\langle n+l\right| - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n(n+l)} Q_n^l \left|n-1\right\rangle \left\langle n+l-1\right|]
\end{aligned}$$

El segundo término actúa de una forma completamente análoga y se obtniene:

$$= [\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^l (2n+l+2) \left|n\right\rangle \left\langle n+l\right| - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(n+l+1)} Q_n^l \left|n+1\right\rangle \left\langle n+l+1\right|]$$

Como p_n^l es un vector propio los términos anteriores deben de poder igualarse a un valor propio por ρ_n^l:

$$\begin{aligned}
\lambda_n^l \rho_n^l = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^l \{ &-\frac{A}{2}(\nu+1)[(2n+l) \left|n\right\rangle \left\langle n+l\right| - 2\sqrt{n(n+l)} Q_n^l \left|n-1\right\rangle \left\langle n+l-1\right|] \\
&-\frac{A}{2}(\nu)[(2n+l+2) \left|n\right\rangle \left\langle n+l\right| - 2\sqrt{(n+1)(n+l+1)} Q_n^l \left|n+1\right\rangle \left\langle n+l+1\right|] \}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Si en el segundo término se recorre el índice de suma hacia arriba por uno y en el cuarto hacía abajo por uno, se puede utilizar independencia lineal respecto al elemento $\left|n\right\rangle \left\langle n+l\right|$ para obtener una ecuación para cada elemento de la suma. Se obtiene que los coeficientes deben cumplir con:

$$A(\nu+1)Q^l_{n+1}\sqrt{(n+1)(n+l+1)} + A(\nu)Q^l_{n-1}\sqrt{n(n+l)} \tag{2.30}$$
$$=[\lambda^l_n + A\nu(2n+l+2) + \frac{A}{2}(2n+l)]Q^l_n$$

El operador de dual Linblat para este sistema es:

$$\begin{aligned} L_a\rho = &-\frac{A}{2}(\nu+1)[a^\dagger a\rho + \rho a^\dagger a - 2a^\dagger \rho a] \\ &-\frac{A}{2}(\nu)[aa^\dagger\rho + \rho aa^\dagger - 2a\rho a^\dagger] \end{aligned} \tag{2.31}$$

Lo cual sugiere el mismo ansatz que para el caso de 2.27, y en efecto se obtiene una relación extremadamente similar, únicamente se intercambian los términos donde el operador densidad se coloca enmedio. No he logrado resolver estas relaciones de recurrencia de forma anlítica para condiciones generales. Sin embargo, en el caso de temperatura cero, se tiene que $\nu = 0$ y 2.30 se simplifica considerablemente:

$$AQ^l_{n+1}\sqrt{(n+1)(n+l+1)} = [\lambda^l_n + \frac{A}{2}(2n+l)]Q^l_n \tag{2.32}$$

Lo cual nos permite resolver para una de las dos Q:

$$Q^l_{n+1} = \frac{\lambda^l_n + \frac{A}{2}(2n+l)}{A\sqrt{(n+1)(n+l+1)}}Q^l_n \tag{2.33}$$

Lo cual tiene un número infinito de soluciones. En [18] se corta la suma con el valor de λ y se llega a una solución para A, que ahora también depende de un nuevo entero m:

$$A^l_m = \sum_{n=0}^{m}(-1)^m\frac{m!}{(m-n)!}\sqrt{\frac{l!}{n!(n+l)!}}\,|n\rangle\langle n+l| \tag{2.34}$$

Al cual le corresponde a un valor para λ de:

$$\lambda^m_l = -(2m+l) \tag{2.35}$$

Utilizando la condición de ortogonalidad con los estados duales se llega a que estos son [18]:

$$B^l_m = \sum_{n=m}^{\infty}\sqrt{\frac{n!(n+l)!}{l!}}\frac{1}{(n-m)!}\,|n\rangle\langle n+l| \tag{2.36}$$

Sin embargo esto solo es valido en el caso de temperatura cero. Para poder tratar el caso general se requiere de otro enfoque.

2.3. Oscilador Armónico: Base de Decaimiento

$$\rho_\lambda(a, a^\dagger) =: f(aa^\dagger) : a^l \tag{2.37}$$

Se puede en a^l como

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^l |n\rangle \langle n+l| \tag{2.38}$$

Es entonces posible relacionar este ansatz con el de Englert, lo cual lleva a su solución para ρ_n^l

$$a^{\dagger l} \frac{(-1)^n}{(\nu+1)^{l+1}} : L_n^l[\frac{a^\dagger a}{\nu+1}] e^{-[\frac{a^\dagger a}{\nu+1}]} : \quad l \geq 0 \tag{2.39}$$

$$\frac{(-1)^n}{(\nu+1)^{|l|+1}} : L_n^{|l|}[\frac{a^\dagger a}{\nu+1}] e^{-[\frac{a^\dagger a}{\nu+1}]} : a^{|l|} \quad l \leq 0 \tag{2.40}$$

con autovalores

$$\lambda_n^l = -A[n + \frac{|l|}{2}] \tag{2.41}$$

con las condiciones

$$n = 0, 1, 2..., \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{2.42}$$

A continuación se muestra de forma explicita como calcular estos elementos.

2.3.1. Estado Base

Este es el estado con valor propio 0, lo cual corresponde a $n = 0, \qquad l = 0$. En este caso, la solución tiene la forma

$$\frac{1}{(\nu+1)} : L_0^0[\frac{a^\dagger a}{\nu+1}] e^{-[\frac{a^\dagger a}{\nu+1}]} : \tag{2.43}$$

ya que $L_0^0 = 1$ [3] si se desarrolla la exponencial en una serie infinita se tiene, aplicando el ordenamiento normal:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(a^\dagger)^n (a)^n}{n!(\nu+1)^n} \tag{2.44}$$

si se sustituye esto en la expresión para el estado base, junto con la relación de cerradura para la base de Foch se llega a [10]

$$\rho_0^0 = \frac{1}{1+\nu} [\frac{\nu}{1+\nu}]^{a^\dagger a} \tag{2.45}$$

El cual corresponde a un estado térmico. El estado base es el estado estacionario del sistema.

2.4. Estados Duales de la base de decaimiento

La base de decaimiento [10] definida en 2.39 corresponde a eigenvalores:

$$-A[n + \frac{|l|}{2}] \tag{2.46}$$

Lo cual corresponde a una doble degeneración $\pm l$. Antes de poder realizar la expansión de estados arbitrarios en esta base es necesario conocer los eigenestados del operador dual, los cuales son aquellos que cumplen la condición[10]:

$$\bar{\rho}_\gamma L = \gamma \bar{\rho}_\gamma \tag{2.47}$$

Es decir, los eigenestados *izquierdos* del operador de Lindblat. Los estados duales cumplen con:

$$Tr[\bar{\rho}_\gamma \rho_{\gamma'}] = \delta_{\gamma\gamma'} \tag{2.48}$$

Donde la barra denota al estado dual y γ denota algún eigenvalor particular del problema. Bajo este producto es posible entonces resolver las ecuaciones para los coeficientes de una expansión de un estado particular en estados de la base de decaimiento:

$$\Psi = \sum_\gamma \bar{c}_\gamma \rho_\gamma \tag{2.49}$$

Entonces:

$$\bar{c}_\gamma = Tr[\Psi \bar{\rho}_\gamma] \tag{2.50}$$

Con esto la evolución temporal del sistema queda determinada:

$$\Psi(t) = \sum_\gamma \bar{c}_\gamma e^{\frac{-i}{\hbar}\gamma t} \rho_\gamma \tag{2.51}$$

2.4.1. Estados Duales: Forma Explícita

Ya que es necesario tomar trazas sobre los estados duales, es conveniente encontrar tanto su forma explícita en términos de operadores de creación y aniquilación, así como una relación de recurrencia que permita relacionar un estado a los estados de menor número n. Los polinomios asociados de Laguerre, en general, son de la forma[3]

$$L_n^k(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{(n+k)!}{(n-m)!(k+m)!m!} x^m \tag{2.52}$$

Recordando que en este caso la variable x corresponde a $\frac{a^\dagger a}{\nu}$, y que los estados se encuentran multiplicados por un coeficiente:

$$(\frac{-\nu}{1+\nu})^n \frac{n!}{(n+k)!} \tag{2.53}$$

Se llega a la expresión general, la cual toma en cuenta el ordenamiento normal y los operadores de aniquilación a la derecha del mismo:

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{(-\nu)^{n-m}}{(\nu+1)^n} \frac{n!}{(n-m)!(m+k)!m!} a^{\dagger m} a^{m+k} \tag{2.54}$$

Basandose en 2.54, se puede ver que para cualquier valor de n y k $geq0$ el primer término de la suma, es decir el correspondiente a $m = 0$ es:

$$(\frac{-\nu}{1+\nu})^n \frac{a^k}{k!} \tag{2.55}$$

El último término de la suma, el correspondiente a $m = n$, es:

$$\frac{1}{(\nu+1)^n} \frac{1}{(n+k)!} a^{\dagger n} a^{n+k} \tag{2.56}$$

Si se desea una representación de estos estados en la base de Foch, se puede recurrir a:

$$I = \sum_{n}^{\infty} |n\rangle \langle n| \tag{2.57}$$

Y aplicar todos los operadores desde la derecha. En el caso del primer término ya antes mencionado, se obtiene:

$$(\frac{-\nu}{1+\nu})^n \sqrt{\frac{n!}{(n-k)!}} \sum_{l=k}^{\infty} |l-k\rangle \langle l| \tag{2.58}$$

Los estados con número de ocupación menor a k se anulan por la definición del operadore de aniquilación. En el caso del último término de la suma, se obtiene:

$$(\frac{1}{1+\nu})^n \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{l=n+k}^{\infty} |l-k\rangle \langle l| \tag{2.59}$$

Puede verse que ambos términos involucran la misma diferencia en el número de ocupación del ket y del bra, pero la suma correspondiente al último término no cubre tantos estados, pues ahora todo estado con número menor a $n + k$ es anulado.

2.4.2. Relación de Recurrencia para Estados Duales

A fin de obtener una relación de recurrencia para los estados duales, es posible basarse en una de las muchas relaciones de recurrencia de los polinomios asociados de Laguerre [3]:

$$L_n^{k+1}(x) = \frac{n-x}{n} L_{n-1}^{k+1}(x) + \frac{n+k}{n} L_{n-1}^{k}(x) \tag{2.60}$$

Si se sustituye esto en la expresión para el estado dual correspondiente se tiene, recordando que se utiliza x para la variable únicamente por simplicida:

$$\hat{\rho}_n^{k+1} =[\frac{-\nu}{1+\nu}]^n \frac{n!}{(n+k+1)!} : L_n^{k+1} : a^{k+1} \tag{2.61}$$

$$=[\frac{-\nu}{1+\nu}]^n \frac{n!}{(n+k+1)!} : \frac{n-x}{n} L_{n-1}^{k+1}(x) + \frac{n+k}{n} L_{n-1}^{k}(x) : a^{k+1} \tag{2.62}$$

$$=[\frac{-\nu}{1+\nu}]^n \frac{n!}{(n+k+1)!} [: L_{n-1}^{k+1}(x) + L_{n-1}^{k}(x) : + \frac{1}{n} : -x L_{n-1}^{k+1}(x) + L_{n-1}^{k}(x) :] a^{k+1} \tag{2.63}$$

$$=[(\frac{-\nu}{1+\nu}) \frac{1}{(n+k+1)} + \frac{(n+k)}{-\nu(\nu+1)} a^{\dagger} \bullet a] \hat{\rho}_{n-1}^{k+1} + [(\frac{-\nu}{1+\nu})(n+1)(n+k+1)(n+k)] \hat{\rho}_{n-1}^{k} \tag{2.64}$$

Donde $\bullet$ indica que el estado dual va entre el operador de creación y el de aniquilación.

Capítulo 3

Solución de la Ecuación Maestra Mediante Estados de Floquet

Para resolver el problema correspondiente a un oscilador armónico amortiguado con frequencia dependiente del tiempo, se utiliza la teoría de Floquet [22]y se busca una forma de la ecuación maestra (eq capitulo anterior) expresada mediante operadores de Floquet, que se definirán más adelante.

3.1. Teoría de Floquet

Se desea resolver una ecuación diferencial respecto al tiempo que involucra coeficientes con dependencia temporal, tal como:

$$x' = A(t)x, \tag{3.1}$$

donde la función $A(t)$ es periódica con periodicidad τ. En este caso el teorema de Floquet[22] dice que la solución no necesariamente es periódica pero debe tener la forma:

$$x(t) = e^{\mu t} p(t). \tag{3.2}$$

Los valores μ se conocen como los exponentes característicos o de Floquet y la función $p(t)$ es periódica con período τ, es decir el mismo periodo que el coeficiente en la ecuación diferencial. Los coeficientes μ son, en general, complejos. Claramente, el hecho de que la solución tenga la forma 3.2 puede llevar a que la solución se dispare con el tiempo, por lo que se desea entender el criterio de estabilidad de este tipo de soluciones. Antes de esto, es necesario establecer algunas definiciones y propiedades, las cuales se presentan sin demostración debido a que no son el enfoque principal de este trabajo. Si el lector se encuentra interesado, el tratamiento se encuentra con mayor detalle en la referencia [22].

3.1.1. Propiedades Básicas

Sea la ecuación 3.1 en n dimensiones. Esto es, se piensa en x como un vector de n dimensiones y en $A(t)$ como una matriz de $n \times n$. En este caso, si la ecuación tiene n soluciones $x_1, x_2, ..., x_n$, se define la **matriz fundamental** como la matriz formada utilizando las soluciones como columnas, siempre y cuando estas sean linealmente independientes:

$$X(t) = [[x_1][x_2]...[x_n]], \tag{3.3}$$

Si $X(t_0) = I$ la matriz se conoce como la **matriz fundamental principal**. Se tiene que

Lema: *Si $X(t)$ es una matriz fundamental, también lo es $X(t)B$ para cualquier matriz constante y no singular B.*

Y que:

Lema: *Sea $W(t)$ el Wronskiano de $X(t)$ el determinante de X(t), entonces:*

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} tr[A(s)]ds}. \tag{3.4}$$

Se tiene entonces un teorema:

Teorema: *Sea A(t) una matriz con periodicidad τ. Si $X(t)$ es una matriz fundamntal entonces $X(t+\tau)$ también lo es y existe una única matriz constante no singular B tal que:*

i) $X(t+\tau) = X(t)B \qquad \forall t,$
ii) $det(B) = e^{\int_0^t tr[A(s)]ds}.$

Si se toma $X(0) = I$ entonces $B = X(\tau)$. Con esto se pueden definir los **multiplicadores característicos**, los cuales son los eigenvalores de la matriz B, y se denominan con la letra ρ. Estos cumplen que:

$$\rho_1 = e^{\mu_1 \tau}, \quad \rho_2 = e^{\mu_2 \tau}, ..., \rho_n = e^{\mu_n \tau}, \tag{3.5}$$

donde los valores μ son los exponentes de Floquet definidos anteriormente. Se cumplen cuatro propiedades:

1) Los multiplicadores característicos de $B = X(\tau)$ cumplen que:

$$det(B) = \rho_1 \rho_2 ... \rho_n = e^{\int_0^T tr[A(s)]ds}. \tag{3.6}$$

2) Trivialmente, como la traza es la suma de los eigenvalores:

$$Tr[B] = \rho_1 + \rho_2 + ... + \rho_n. \tag{3.7}$$

3) Los multiplicadores característicos no son únicos, ya que:

$$e^{\mu \tau} = e^{(\mu + \frac{2\pi i}{\tau})\tau}. \tag{3.8}$$

4) Los multiplicadores característicos son una propidad de la ecuación 3.1 y no dependen de la elección de matriz fundamental.

Con estas propiedades, se puede pasar a analizar la estabilidad de las soluciones para el caso específico de ecuaciones de segundo orden.

3.1.2. Estabilidad para Ecuaciones de Segundo Orden

Si se piensa en una ecuación diferencial de segundo orden del tipo:

$$\ddot{x} + a(t)x = 0, \tag{3.9}$$

donde $a(t)$ tiene periodo τ. Si se toma $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$, la ecuación puede re-escribirse como:

$$\left[\begin{array}{c} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right], \tag{3.10}$$

si se toma la condición inicial $\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right]$, se obtiene una solución de la forma:

$$\left[\begin{array}{c} x_1^1(t) \\ \dot{x_1^1}(t) \end{array} \right], \tag{3.11}$$

y para la condición inicial $\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right]$, se obtiene una solución de la forma:

$$\left[\begin{array}{c} x_1^2(t) \\ \dot{x_1^2}(t) \end{array} \right], \tag{3.12}$$

esto permite generar la matriz B:

$$B = \left[\begin{array}{cc} x_1^1(\tau) & x_1^2(\tau) \\ \dot{x_1^1}(\tau) & \dot{x_1^2}(\tau) \end{array} \right], \tag{3.13}$$

lo cual permite calcular los multiplicadores característicos, ya que:

$$\rho_1\rho_2 = e^{\int_0^\tau Tr[A(s)]ds} = e^0 = 1, \tag{3.14}$$

y:

$$\rho_1 + \rho_2 = Tr[B] = x_1^1(\tau) + \dot{x_1^{(2)}}(\tau) = 2\phi. \tag{3.15}$$

Esto permite obtener la ecuación:

$$\rho = \phi \pm \sqrt{\phi^2 - 1}, \tag{3.16}$$

o en términos de mu:

$$cosh(\mu_1\tau) = \phi. \tag{3.17}$$

Esto lleva a analizar cinco situaciones distintas.

Caso $-1 < \phi < 1$: En este caso, para algun valor σ se tiene que $\phi = cos(\sigma\tau)$ por lo que:

$$\rho = \phi \pm \sqrt{\phi^2 - 1}, // = \qquad cos(\sigma\tau) \pm isen(\sigma\tau), // = e^{\pm i\sigma\tau},$$

lo cual lleva a una solución general de tipo:

$$x(t) = c_1 Re(e^{i\sigma t}p(t)) + c_2 Im(e^{i\sigma t}p(t)), \tag{3.18}$$

la cual es estable y pseudo periódica.

Caso $1 < \phi$**:** en este caso $\rho > 1$ y como $\rho_1 = \frac{1}{\rho_2}$, tenemos que $\mu_1 = -\mu_2$. Por esto, la solución es de la forma:

$$x(t) = c_1 e^{\mu_1 t} p_1(t) + c_2 e^{\mu_2 t} p_2(t) \tag{3.19}$$

donde las funciones $p(t)$ son periódicas con periodo π. La solución es inestable.

Caso $\phi < -1$**:** en este caso se tiene una solución del tipo:

$$x(t) = c_1 e^{\gamma_1 t} q_1(t) + c_2 e^{-\gamma_2 t} q_2(t), \tag{3.20}$$

donde las funciones $q(t)$ tienen periodo 2π y los coeficientes $\gamma = \mu + \frac{i\pi}{\tau}$. La solucion de nuevo es inestable.

Caso $\phi = -1$**:** para este caso también se tiene una solución inestable, de la forma:

$$x(t) = (c_1 + tc_2) q_1(t) + c_2 q_2(t) \tag{3.21}$$

de nuevo la funciones $q(t)$ tienen periodo 2π.

Caso $\phi = 1$**:**

para este caso también se tiene una solución inestable, de la forma:

$$x(t) = (c_1 + tc_2) p_1(t) + c_2 p_2(t) \tag{3.22}$$

de nuevo la funciones $p(t)$ tienen periodo π.

Es muy importante notar que en estos dos ultimos casos, esta forma de la solución solo es correcta si la matriz B tiene un solo eigenvector linealmente independiente. Si este no es el caso, la solución tiene la forma usual con las funciones $p(t)$ o $q(t)$, estos dos casos marcan el límite entre la estabilidad y la inestabilidad en este problema. Finalmente, se verá como estos criterios aplican a una ecuación que será relevante más adelante, la ecuación de Hill.

3.1.3. Estabilidad de las Soluciones de Floquet para la Ecuación de Hill

La ecuación de Hill es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes dependientes del tiempo de forma periódica:

$$\ddot{x}(t) + (\delta + \epsilon b(t))x = 0, \tag{3.23}$$

nuevamente, la función $b(t)$ tiene periodo τ y se considera que δ y ϵ son constantes reales. Para el caso $\epsilon = 0$ claramente la ecuación se reduce al oscilador armónico usual y las soluciones son estables. Sin embargo, para ciertos valores de δ puede encontrarse la región donde la solución aún es periódica, esto se puede resolver para los casos $\phi = \pm 1$, a forma que se tiene soluciones estables y periódicas para los casos:

$$\delta = (2m\frac{\pi}{\tau})^2, \tag{3.24}$$

que corresponde a $phi = 1$ y

$$\delta = ((2m+1)\frac{\pi}{\tau})^2, \tag{3.25}$$

que corresponde a $phi = -1$. Estos valores representan la frontera de la región de soluciones estables, las cuales corresponden a periódo de τ y 2τ respectivamente. Más adelante se buscaran soluciones en esta región para el caso donde $\epsilon \ll 1$.

3.2. Estados de Floquet en Mecánica Cuántica

Ahora se busca estudiar Hamiltonianos con una dependencia periódica en el tiempo:

$$H(t) = H(t + \tau) \tag{3.26}$$

El hecho de que el Hamiltoniano sea simétrico respecto a (ciertas) traslaciones en el tiempo, permite el uso del formalismo de Floquet [23]. Se asume que la dependencia temporal puede ser vista como una perturbación sobre un Hamiltoniano original:

$$H(x, t) = H_0(x) + V(x, t) \qquad V(x, t) = V(x, t + \tau) \tag{3.27}$$

También se asume que el Hamiltoniano no perturbado poseé un conjunto completo de eigenfuciones $\{\phi_n\}$ con eigenvalores correspondientes E_n. En este caso, la ecuación de Schrödinger tiene la forma:

$$-i\hbar\dot{\Psi}(x, t) = H(x, t)\Psi(x, t) \tag{3.28}$$

El problema admite una solución del tipo visto en la sección anterior:

$$\Psi_n(x, t) = e^{(\frac{-i}{\hbar}\mu_n t)}\Phi_n(x, t) \tag{3.29}$$

Como se mencionó en la sección anterior, μ en general es un número complejo, lo cual puede llevar a soluciones inestables. En este caso $\Phi_n(x, t)$ es la función que contiene la periodícidad en el tiempo. Sustituir la solución en la ecuación 3.28 genera una ecuación para las funciones periódicas:

$$H(x, t)\Phi_n(x, t) = \Xi_n\Phi_n(x, t) \tag{3.30}$$

3.3. Oscilador Armónico Dependinte del Tiempo: Solución Mediante Formalismo de Floquet

En el caso clásico [17] se tiene, para un oscilador armónico unidimensional con frecuencia dependiente del tiempo y el cual experimenta una fuerza disipativa dependiente de la velocidad, que la posición cumple:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \frac{k(t)}{m}x = 0 \tag{3.31}$$

Se asume que la función $k(t)$ tiene es periódica con periódo T Si se utiliza la sustitución $x = ye^{-\frac{\gamma t}{2}}$, se llega a la ecuación:

$$\ddot{y} + (\frac{k(t)}{m} - \frac{\gamma^2}{4})y = 0 \tag{3.32}$$

El teorema de Floquet para ecuaciones de segundo orden con coeficientes del tiempo (ver Hanngi para referencia) asegura que esta ecuación tiene dos soluciones:

$$E_1(t) = e^{i\mu t}\phi(t), \quad E_2(t) = E_1(-t) \tag{3.33}$$

Recordando que la función ϕ debe tener la misma periodicidad que $k(t)$. Dado que la función cumple con esta condición, es posible realizar una expansión de Fourier [3] de la misma:

$$\phi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \tag{3.34}$$

Para fijar los coeficientes se elije una normalización tale que el Wronskiano sea:

$$W = \dot{E}_1(t)E_2(t) - E_1(t)\dot{E}_2(t) = 2i. \tag{3.35}$$

Esto genera la regla de suma:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n^2(\mu + n\omega) = 1, \tag{3.36}$$

y permite calcular las constantes de la expansión para un caso general. A continuación se trata el caso en mecánica cuántica.

3.4. Caso Cuántico

En el caso de un Hamiltoniano con dependencia temporal como la vista anteriormente, existe un conjunto completo de soluciones [18]:

$$|\Psi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\mu_\alpha t} |\phi_\alpha t\rangle\,, \qquad |\phi_\alpha(t)\rangle = |\phi_\alpha(t+\tau)\rangle\,, \tag{3.37}$$

Estas soluciones tienen la forma explícita[5]

$$\Psi_\alpha(x,t) = (\frac{\sqrt{m/\pi\hbar}}{2^\alpha n! E_1^0(t)})^{\frac{1}{2}}(\frac{E_1^0(t)}{E_2^0(t)})^{\frac{\alpha}{2}} H_\alpha(x\sqrt{\frac{m}{\hbar E_1^0(t)E_2^0(t)}})e^{(ix^2\frac{E_1^0(t)}{2E_2^0(t)})} \tag{3.38}$$

donde el superíndice 0 indica que se toma el límite donde γ tiende a cero. Sin embargo, estas soluciones se comportan de manera análoga a los estados de la base de Foch bajo la acción de los operadores de Floquet:

$$\begin{aligned}
\Gamma(t)\,|\Psi_\alpha(x,t)\rangle &= \sqrt{\alpha}\,|\Psi_{\alpha-1}(x,t)\rangle\,, \\
\Gamma^\dagger(t)\,|\Psi_\alpha(x,t)\rangle &= \sqrt{\alpha+1}\,|\Psi_{\alpha+1}(x,t)\rangle\,.
\end{aligned}$$

Es importante notar que estos operadores dependen explicitamente del tiempo, en términos de los operadores de momento y posición, pueden expresarse de manera análoga a los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico:

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2i}(\hat{x}\dot{E}_1^0(t)\sqrt{\frac{2m}{\hbar}} - \hat{p}E_1^0(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m}}). \tag{3.39}$$

Es conveniente entender el origen de estos operadores. Si se comienza con un Hamiltoniano con frecuencia dependiente del tiempo, se puede seguir el procedimiento de [5]:

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}k(t)q^2 \tag{3.40}$$

Este lleva a la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{q}(t) + k(t)q(t) = 0 \tag{3.41}$$

Para el operador $q(t)$. Lo que se busca es una transformación unitaria que lleve este problema al problema usual del oscilador armónico en mecánica cuántica. Es decir, se busca U tal que, trabajando en el cuadro de Heisenberg [15]

$$\tilde{q}(t) = U^{-1}(t)q(t)U(t) \tag{3.42}$$

$$\tilde{p}(t) = U^{-1}(t)p(t)U(t) \tag{3.43}$$

Y donde entonces el nuevo Hamiltoniano queda dado por:

$$\tilde{H} = H + U^{-1}i\dot{U} \tag{3.44}$$

Para la transformación se elije:

$$U = e^{-i\chi(t)q^2(t)} \tag{3.45}$$

Donde:

$$\chi(t) = \frac{m}{4}(\frac{\dot{f}}{f} + \frac{\dot{f}^*}{f^*}) \tag{3.46}$$

Las funciones f son las soluciones al problema clásico correspondiente al Hamiltoniano 3.40 el cual tiene dos soluciones linealmente independientes, pero una es la compleja conjugada de la otra. Estas soluciones corresponden a E_1^0 y E_2^0 vistas en la sección anterior. Bajo esta transformación:

$$\tilde{q}(t) = q(t), \tag{3.47}$$

$$\tilde{p}(t) = p(t) - 2\chi(t)q(t). \tag{3.48}$$

Utilizando esto se puede escribir el Hamiltoniano en las nuevas coordenas tomando en cuenta que $\ddot{f} = -k(t)f$ y el Wronskiano:

$$H = \frac{1}{2m}\tilde{p}^2 + \frac{\chi(t)}{m}(\{\tilde{q}, \tilde{p}\}) + \frac{mW^2}{|f|^2}k(t)\tilde{q}^2. \tag{3.49}$$

Para eliminar el término cruzado se utiliza una segunda transformación:

$$U_2(t) = e^{\frac{i}{4}(\{\tilde{q},\tilde{p}\})ln|f|^2}. \tag{3.50}$$

Esto es una transformación de escala que deja como variables finales:

$$Q = U_2^{-1}\tilde{q}U_2 = \frac{1}{|f|}q(t), \tag{3.51}$$

$$P = U_2^{-1}\tilde{p}U_2 = |f|(p - 2\chi q), \tag{3.52}$$

en estas variables, el Hamiltoniano es:

$$\tilde{H} = \frac{1}{|f(t)|^2}(\frac{1}{2m}P^2(t) + \frac{1}{2}mW^2Q^2(t)) \tag{3.53}$$

Este Hamiltoniano es, salvo por un coeficiente general dependiente del tiempo, el Hamiltoniano usual de oscilador armónico y se puede resolver por medio de operadores de creación y aniquilación. Estos operadores son los operadores de Floquet ya mencionados.

3.5. Ecuación Maestra Mejorada: Solución con Base de Decaimiento

Se busca obtener una mejor ecuación maestra al tomar en cuenta la dependencia temporal del Hamiltoniano antes de realizar la aproximación de Markov [23]. Como el Hamiltoniano es explícitamente dependiente del tiempo, no pueden usarse los operadores usuales de creación y aniquilación, es aquí donde entra la teoría de Floquet de la sección anterior. Utilizando dichos operadores, los elementos de matríz del operador de posición son:

$$X_{\alpha\beta}(t) = e^{i(\mu_\alpha - \mu_\beta)} \langle\phi_\alpha(t)| x |\phi_\beta(t)\rangle, \tag{3.54}$$

$$= \sum k e^{i\Delta_{\alpha\beta k}t} X_{\alpha\beta k}, \tag{3.55}$$

Con:

$$X_{\alpha\beta k} = \frac{1}{T}\int_0^T dte^{-ik\Omega t} \langle\phi_\alpha(t)| x |\phi_\beta(t)\rangle,$$

$$\Delta_{\alpha\beta k} = \mu_\alpha - \mu_\beta + k\Omega.$$

Debido a la periodicidad de los estados de Floquet, es posible hacer un desarrollo en series de Fourier. Con esto, es posible expresar los elementos de matriz de la forma:

$$X_{\alpha\beta k} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m}}(\sqrt{\beta}c_{-k}\delta_{\alpha,\beta-1} + \sqrt{\alpha}c_k\delta_{\alpha,\beta+1}). \tag{3.56}$$

Si se regresa ahora a la ecuacion maestra en el límite de acoplamiento débil, asumiendo que el baño es Ohmico, es decir de la forma $I(\omega) = m\gamma\omega$:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H(t)_{sis}, \rho] + \frac{1}{\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega)n_{th}(\omega)\int_0^{\infty} e^{i\omega t}[\tilde{x}(t-\tau, t)\rho, x] + C.H.. \tag{3.57}$$

Aquí $C.H.$ indica el conjugado Hermitiano de la parte disipativa y $n(\omega)$ es la ocupación térmica de los osciladores del baño. Utilizando que los estados de Floquet son la solución a la parte no disipativa, se llega a la ecuación en representación de Floquet:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{\alpha\beta} =& \frac{1}{\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) n_{th}(\omega)\int_{0}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau},\\ &\times\sum_{\alpha'\beta'}[X_{\alpha\alpha'}(t-\tau)\rho_{\alpha'\beta'}X^{*}_{\beta\beta'}(t),\\ &-X^{*}_{\alpha'\alpha}(t)X_{\alpha'\beta'}(t-\tau)\rho_{\beta'\beta}] + C.H..\end{aligned}$$

Y se llega a:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{\alpha\beta} =& \frac{1}{\hbar}\sum_{\alpha'\beta'}\sum_{kk'}[-I(\Delta_{\alpha'\beta'k'})n_{th}(\Delta_{\alpha'\beta'k'}),\\ &\times e^{i(\Delta_{\alpha'\beta'k'}-\Delta_{\alpha\alpha'k})t}X^{*}_{\alpha'\alpha k}X_{\alpha'\beta'k'}\rho_{\beta\beta'} + I(\Delta_{\alpha\alpha'k}),\\ &\times n_{th}(\Delta_{\alpha\alpha'k})e^{i(\Delta_{\alpha\alpha'k}-\Delta_{\beta\beta'k})}X_{\alpha\alpha'k}\rho_{\alpha'\beta'}X^{*}_{\beta\beta'k'}],\\ &+C.H..\end{aligned}$$

La función $\Delta_{\alpha\beta k}$ contiene las cuasienergías del sistema sin pérdidas de energía [23]. Se utiliza la aproximación de onda rotante, sin embargo en este sistema no se desprecian todos los términos, ya que $(\alpha-\beta,k)=(\alpha'-\beta',k')$ es suficiente para asegurar que $\Delta_{\alpha\beta k}=\Delta_{\alpha'\beta'k'}$, de esta forma se obtiene la ecuación:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{\alpha\beta} =& \frac{\gamma}{2}(N+1)[2\sqrt{(\alpha+1)(\beta+1)}\rho_{\alpha+1,\beta+1}-(\alpha+\beta)\rho_{\alpha\beta}],\\ &+N[2\sqrt{\alpha\beta}\rho_{\alpha-1,\beta-1}-(\alpha+\beta+2)\rho_{\alpha\beta}].\end{aligned}$$

Utilizando las propiedades de los operadores definidos en **??** se obtiene la ecuación en términos de operadores:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} =& -\frac{i}{\hbar}[H_S(t),\rho] + \frac{\gamma}{2}(N+1)(2\Gamma\rho\Gamma^{\dagger}-\Gamma^{\dagger}\Gamma\rho-\rho\Gamma^{\dagger}\Gamma)\\ &+N(2\Gamma^{\dagger}\rho\Gamma-\Gamma\Gamma^{\dagger}\rho-\rho\Gamma\Gamma^{\dagger}).\end{aligned}$$

Formalmente, la parte disipativa de la ecuación tiene la misma forma que la ecuación que genera la base 2.39, así que transformando al cuadro de interacción, donde se toma el Hamiltoniano del sistema como 3.53, el cual puede expresarse como[5]:

$$H_S = \frac{W}{|f(t)|^2}(\Gamma^{\dagger}\Gamma + \frac{1}{2}). \tag{3.58}$$

Dado que los operadores de Floquet conmutan con este Hamiltoniano, se puede realizar la transformación al cuadro de interacción con el operador unitario [15]:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\frac{W}{|f(t)|^2}t(\Gamma^{\dagger}\Gamma+\frac{1}{2})}, \tag{3.59}$$

lo que lleva a la ecuación:

$$\dot{\rho} = \frac{\gamma}{2}(N+1)(2\Gamma\rho\Gamma^\dagger - \Gamma^\dagger\Gamma\rho - \rho\Gamma^\dagger\Gamma) + N(2\Gamma^\dagger\rho\Gamma - \Gamma\Gamma^\dagger\rho - \rho\Gamma\Gamma^\dagger) \tag{3.60}$$

La cual queda formalmente resuelta mediante la base de decaimiento. En el capitulo siguiente se utilizará este resultado para modelar enfriamiento optomecánico.

Capítulo 4

Enfriamiento Optomecánico

4.1. Introducción

Se desea describir un sistema optomecánico donde un oscilador armónico macroscópico se acopla de forma paramétrica a un oscilador armónico bosónico que permite enfriar el sistema macroscópico [12]. En esencia, se busca un efecto análogo al enfriamiento láser de átomos, pero para la preparación de estados base mecánicos. El objetivo es enfriar un único modo de un oscilador armónico mecánico mediante su interacción con un láser. Por ejempl, se ha reportado enfriamiento de un micro oscilador armónico de forma toroidal desde temperatura ambiente a 11K mediante técnicas de enfriamiento basadas en la presión de radiación[1]. En esta tesis se piensa en un sistema que consiste de una cavidad optomecánica de Fabry-Perot, en la cual uno de los dos espejos en los extremos se encuentra a su vez acoplado a un resorte. Este acoplamiento permite la utilización de medios ópticos para controlar el objeto mecánico, los cuales pueden llevar a enfriamiento laser del objeto mecánico[12]. En analogía con sistemas de enfriamiento láser de átomos, el movimiento del espejo lleva a que este vea dos frecuencias distintas debido al efecto Doppler[20], la diferencia de las frecuencias del láser y de la frecuencia resonante de la cavidad permiten controlar cual de las dos frecuencias Doppler domina. Una de estas frecuencias lleva a que el sistema mecánico se caliente y la otra lo enfría. En efecto, el láser y su ambiente funcionan como un baño térmico para enfriar al oscilador armónico mecánico. A la absorción de quantos de movimiento (enfriamiento) se le asocia con procesos de dispersión de Raman donde un quanto se sube de nivel mientras que los procesos de emisión (calentamiento) se le asocia con dispersión de Raman donde un fotón decae [11]. Este enfriamiento es posible siempre y cuando el ancho de banda de la cavidad sea mucho menor que la frecuencia de oscilación mecánica. [11] [9] Este regimen solo es válido cuando el acoplamiento optomecánico puede ser tratado como una perturbación, así que el esquema deja de ser valido cuando el acoplamiento es comparable al ancho de banda de la cavidad o a la frecuencia del oscilador mecánico.

4.2. Posibles Sistemas Optomecánicos

Existen muchas implementaciones posibles de acoplamientos entre elementos ópticos y elementos mecánicos [20]. En esta sección se detallan algunas de las posibilidades.

4.2.1. Espejos Suspendidos

Estos sistemas consisten en cavidades opticas donde uno o mas de los espejos pueden cambiar de posicion y asi alteran la longitud de la cavidad. La primera realización experimental de este tipo de sistemas se debe a los primeros esfuerzos para detectar ondas gravtiacionales [2]. El sistema consiste en un interferometro con los espejos fijos en masas suspendidas, a manera que una onda gravitacional, al interactuar con las masas cambiaría la posición de los espejos y así la longitud de camino óptico. El propósito de suspender las masas no es optomecánico, sin embargo, las fluctuaciones en la potencia del laser, debido a la incretidumbre en el número de fotones, son un efecto cuántico que impone un límite a la precisión de las mediciones[7]. Experimentos en este tipo de sistemas han demostrado varios efectos, entre ellos el enfriamiento mediante presión de radiación [19].

4.2.2. Microresonadores

Otro tipo posible de sistema son los microresonadore o microcavidades. En este tipo de sistemas, es posible confinar a la luz a viajar en modos *Whispering Gallery*, los cuales implican que la luz es guiada a lo largo del perímetro del resonador,el cual puede tener forma esférica, circular, o toroidal[21]. Si este vibra, esto puede alterar el camino óptico de la luz y se logra un acoplamiento optomecánico. Debido a su tamaño, es posible obtener acoplamiento fuerte entre sistemas cuánticos y el resonador[8].

4.2.3. Objetos Suspendidos o Levitados

En este tipo de sistemas, se considera una cavidad optica rigida donde se coloca un objeto mecánico dentro de la cavidad. Este esquema permite el acoplamiento de objetos mecánicos de tamaños inferiores a la longitud de onda de la luz [20], como por ejemplo una membrana dieléctrica de SI_3N_4 de $1mm \times 1mm \times 50nm$ de dimensión[14]. En ese caso, se puede observar que parámetros de la cavidad como el detuning y la finesa dependen del desplazamiento de la membrana. Otra posibilidad consiste en un nano cable de carbón, de aproximadamente 10^9 átomos, el cual se coloca dentro de una micro cavidad de Fabri-Perot. Las propiedades de la cavidad cambian no solo dependiendo de la posición del objeto, sino también de sus modos vibracionales[13].

4.3. Hamiltoniano para Enfriamiento Optomecánico

En particular, se desea analizar el sistema cuando la frecuencia del oscilador armónico depende del tiempo. Se asume que el oscilador se encuentra acoplado a un único modo forzado de la cavidad el cual tiene frecuencia ω_{cav}. Se asume que el marco de referencia rota con la frecuencia de la bomba. Se modela el sistema mediante el siguiente Hamiltoniano[16]:

$$H(t) = H_{cav} + H_{mec}(t) + H_{rad} + B. \tag{4.1}$$

En donde:

$$\begin{aligned}
H_{cav} =& -\hbar\delta a^\dagger a, &(4.2)\\
H_{mec}(t) =& \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\nu(t)x^2, &(4.3)\\
H_{rad} =& -\hbar g a^\dagger a x, &(4.4)\\
B =& \hbar\frac{\Omega}{2}(a^\dagger + a), &(4.5)
\end{aligned}$$

en este caso, $\delta = w_{bomba} - w_{cav}$ representa la diferencia de frecuencias entre la bomba de fotones y la cavidad y $\hbar g$ representa la fuerza de radiación que un fotón aplica sobre el oscilador mecánico sin modulación. El término H_{rad} modela una interacción simple entre los fotones y el espejo. Dado que en este caso la longitud de la cavidad no es fija, la frecuencia de la cavidad debe tener una dependencia en la coordenada x, entonces, tomando el hamiltoniano para el oscilador que modela la cavidad y expandiendo hasta primer orden en x[20]:

$$\hbar w_{cav}(x)a^\dagger a \simeq \hbar(w_{cav} - g_0 x)a^\dagger a, \tag{4.6}$$

lo cual acopla los dos sistemas. Por 3.53, se modela al oscilador mecánico utilizando operadores de floquet:

$$H_{mec}(t) = \frac{W}{|f(t)|^2}(\Gamma^\dagger\Gamma + \frac{1}{2}). \tag{4.7}$$

Recordando la definición de los operadores de Floquet **??**, se puede invertir la relación en términos de los operadores x y p:

$$\begin{aligned}
\Gamma(t)\left|\Psi_\alpha(x,t)\right\rangle =& \sqrt{\alpha}\left|\Psi_{\alpha-1}(x,t)\right\rangle,\\
\Gamma^\dagger(t)\left|\Psi_\alpha(x,t)\right\rangle =& \sqrt{\alpha+1}\left|\Psi_{\alpha+1}(x,t)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Si se toma la suma y la resta de los operadores:

$$\begin{aligned}
2i(\Gamma(t) + \Gamma^\dagger(t)) =& (\dot{E}(t) - \dot{E}^*(t))\sqrt{\frac{2m}{\hbar}}x + (E^*(t) - E(t))\sqrt{\frac{2}{m\hbar}}p,\\
2i(\Gamma(t) - \Gamma^\dagger(t)) =& (\dot{E}(t) + \dot{E}^*(t))\sqrt{\frac{2m}{\hbar}}x - (E^*(t) + E(t))\sqrt{\frac{2}{m\hbar}}p,
\end{aligned}$$

renombrando los coeficientes esto es simplemente:

$$\begin{aligned}
2i(\Gamma(t) + \Gamma^\dagger(t)) =& ax + bp,\\
2i(\Gamma(t) - \Gamma^\dagger(t)) =& cx - dp,
\end{aligned}$$

si se toma la primera ecuación multiplicada por $\frac{d}{b}$ y se suma a la segunda, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
(\frac{da}{b}+c)x =& 2i\frac{d}{b}(\Gamma(t)+\Gamma^{\dagger}(t))+2i(\Gamma(t)-\Gamma^{\dagger}(t)),\\
=& 2i[(\frac{d}{b}+1)\Gamma(t)+(\frac{d}{b}-1)\Gamma^{\dagger}(t)]\\
\therefore x =& \frac{2i[(\frac{d}{b}+1)\Gamma(t)+(\frac{d}{b}-1)\Gamma^{\dagger}(t)]}{\frac{da}{b}+c},
\end{aligned}
$$

o lo que es equivalente:

$$
x = 2i\sqrt{\frac{\hbar}{2m}}[(\frac{A(t)+1}{B(t)})\Gamma(t)+(\frac{A(t)-1}{B(t)})\Gamma^{\dagger}(t)], \tag{4.8}
$$

donde:

$$
\begin{aligned}
A(t) =& \frac{d}{b} = \frac{(E^*(t)+E(t))}{(E^*(t)-E(t))}, && (4.9)\\
B(t) =& \frac{da}{b}+c && (4.10)\\
=& \frac{(E^*(t)+E(t))(\dot{E}(t)-\dot{E}^*(t))\sqrt{\frac{2m}{\hbar}}}{(E^*(t)-E(t))}+(\dot{E}(t)+\dot{E}^*(t))\sqrt{\frac{2m}{\hbar}} && (4.11)\\
=& \sqrt{\frac{2m}{\hbar}}\frac{(E^*(t)+E(t))(\dot{E}(t)-\dot{E}^*(t))+(E^*(t)-E(t))(\dot{E}(t)+\dot{E}^*(t))}{(E^*(t)-E(t))}. && (4.12)
\end{aligned}
$$

Con esto, es posible sustituir el operador x en el Hamiltoniano de radiación con operadores de Floquet, lo cual produce un nuevo Hamiltoniano:

$$
H(t)_{rad} = \frac{g}{-2i}\sqrt{\frac{\hbar^3}{2m}}a^{\dagger}a[(\frac{A(t)+1}{B(t)})\Gamma(t)+(\frac{A(t)-1}{B(t)})\Gamma^{\dagger}(t)] \tag{4.13}
$$

con esto, el Hamiltoniano final es el siguiente:

$$
H(t) = -\hbar\delta a^{\dagger}a+\frac{W}{|f(t)|^2}(\Gamma^{\dagger}\Gamma+\frac{1}{2})+g'a^{\dagger}a[\gamma_+(t)\Gamma(t)+\gamma_-(t)\Gamma^{\dagger}(t)]+\hbar\frac{\Omega}{2}(a^{\dagger}+a), \tag{4.14}
$$

, donde se hicieron las redefiniciones:

$$
\begin{aligned}
g' =& g\sqrt{\frac{\hbar^3}{2m}},\\
\gamma_+(t)(t) =& \frac{A(t)+1}{-2iB(t)},\\
\gamma_-(t) =& \frac{A(t)-1}{-2iB(t)},
\end{aligned}
$$

Ahora se desea resolver la ecuación maestra correspondiente a este Hamiltoniano. Los términos de Lindblat que corresponden a este Hamiltoniano son L_a para la cavidad y L_Γ para el oscilador, ambos tienen la misma forma funcional, la cual es la de 3.60. Esto lleva a la ecuación maestra:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + L_a\rho + L_\Gamma\rho \tag{4.15}$$

Capítulo 5

Solución para la Ecuación Maestra de Enfriamiento Laser con Frecuencia Dependiente del Tiempo

5.1. Transformación Mediante Operador de Desplazamiento

Para poder encontrar una solución a 4.15 es necesario eliminar los términos de tercer orden en operadores, ya que estos son no-lineales y causan dificultades. Esto puede lograrse mediante una transformación unitaria. Se utiliza la transformación:

$$U_{a,\Gamma} = e^{(\alpha a^{\dagger} - \alpha^{*} a)} e^{(\beta \Gamma^{\dagger} - \beta^{*} \Gamma)}, \tag{5.1}$$

la cual claramente es unitaria. Es importante notar que tanto α como β dependen del tiempo. Bajo la transformación, el operador densidad es:

$$\rho' = U^{\dagger}_{a,\Gamma} \rho U_{a,\Gamma}. \tag{5.2}$$

Se puede despejar en términos de ρ, utilizando el hecho de que la transformación es unitaria:

$$\rho = U_{a,\Gamma} \rho' U^{\dagger}_{a,\Gamma}, \tag{5.3}$$

y derivando respecto al tiempo:

$$\dot{\rho} = L\rho = U_{a,\Gamma} \dot{\rho'} U^{\dagger}_{a,\Gamma}. \tag{5.4}$$

En este caso, L representa el operador de Liouville. Esto permite obtener una ecuación maestra para ρ'.

$$
\begin{aligned}
U_{a,\Gamma}\dot{\rho'}U_{a,\Gamma}^{\dagger} =& L[U_{a,\Gamma}\rho' U_{a,\Gamma}^{\dagger}] - \dot{U}_{a,\Gamma}\rho' U_{a,\Gamma}^{\dagger} - U_{a,\Gamma}\rho'\dot{U}_{a,\Gamma}^{\dagger} && (5.5)\\
\dot{\rho} =& U_{a,\Gamma}^{\dagger} L[U_{a,\Gamma}\rho' U_{a,\Gamma}^{\dagger}]U_{a,\Gamma} - U_{a,\Gamma}^{\dagger}\dot{U}_{a,\Gamma}\rho' - \rho'\dot{U}_{a,\Gamma}^{\dagger}U_{a,\Gamma}. && (5.6)
\end{aligned}
$$

A partir de este punto, se omiten los sub-índices de las transformaciones y la $'$ para el operador densidad. Para ver los cálculos de la transformación en detalle, ver los apéndices, en esta sección únicamente se ilustrara el procedimiento. Para entender el efecto de la transformación se utiliza la fórmula de Baker-Campdell-Housdorff[15], para dos operadores A y B:

$$
e^{A}Be^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2}[A,[A,B]] + ... \tag{5.7}
$$

Debido a que los operadores involucrados si conmutan con sus conmutadores, la serie se corta de manera automática. Aplicando esta regla a los operadores que forman la ecuación maestra se obtiene:

$$
\begin{aligned}
U^{\dagger}aU =& a + \alpha, && (5.8)\\
U^{\dagger}a^{\dagger}U =& a^{\dagger} + \alpha^{*}, && (5.9)\\
U^{\dagger}\Gamma U =& \Gamma + \beta, && (5.10)\\
U^{\dagger}\Gamma^{\dagger}U =& \Gamma^{\dagger} + \beta^{*}, && (5.11)
\end{aligned}
$$

Con esto, los Hamiltonianos transforman en:

$$
\begin{aligned}
H'_{cav} =& -\hbar\delta(a^{\dagger}a + \alpha a^{\dagger} + \alpha^{*}a + |\alpha|^{2}), && (5.12)\\
H'_{mec} =& \frac{W}{|f(t)|^{2}}(\Gamma^{\dagger}\Gamma + \beta\Gamma^{\dagger} + \beta^{*}\Gamma + |\beta|^{2}), && (5.13)\\
H'_{rad} =& -\hbar g'[(a^{\dagger}a + \alpha a^{\dagger} + \alpha^{*}a + |\alpha|^{2})(\gamma_{+}(t)(\Gamma^{\dagger} + \beta^{*}) + \gamma_{-}(t)(\Gamma + \beta))], && (5.14)\\
B' =& \frac{\hbar\Omega}{2}(a^{\dagger} + a + \alpha + \alpha^{*}), && (5.15)
\end{aligned}
$$

Los terminos de Lindblat que modelan el decaimiento se convierten en:

$$
\begin{aligned}
L'_{a} =& L_{a} + \frac{A}{2}[(\alpha a^{\dagger} - \alpha^{*}a), \rho], && (5.16)\\
L'_{\Gamma} =& L_{\Gamma} + \frac{\gamma}{2}[(\beta\Gamma^{\dagger} - \beta^{*}\Gamma), \rho]. && (5.17)
\end{aligned}
$$

Finalmente es necesario tomar en cuenta los términos provenientes de las derivadas temporales. Estos cálculos requieren de especial atención debido a la dependencia temporal de los operadores de Floquet. Si el lector desea ver los detalles, se encuentran en el apendice. Los términos obtenidos son:

$$
\begin{aligned}
U^{\dagger}\dot{U}\rho + \rho\dot{U}^{\dagger}U =& -(\dot{\alpha}a\rho + \rho\dot{\alpha}a^{\dagger}) + \dot{\alpha}a^{\dagger}\rho + \rho\dot{\alpha}^{*}a,\\
&+ \dot{\beta}\Gamma^{\dagger}\rho + \rho\dot{\beta}^{*}\Gamma - (\dot{\beta}^{*}\Gamma + \beta^{*}\dot{\Gamma})\rho - \rho(\dot{\beta}\Gamma^{\dagger} + \beta\dot{\Gamma}^{\dagger}) + \beta\dot{\Gamma}^{\dagger} + \rho\beta^{*}\dot{\Gamma},\\
&+ 3(\beta^{*})^{2}C_{--}(t)\rho + |\beta|^{2}(C_{+-}(t) - C_{-+}(t))\rho - \beta^{2}C_{++}(t)\rho,
\end{aligned}
$$

donde las funciones $C_{\pm\pm}(t)$ son los conmutadores entre los operadores de Floquet y sus derivadas temporales, ya que estos no son nulos:

$$
\begin{aligned}
C_{++}(t) =&[\dot{\Gamma}^\dagger, \Gamma^\dagger], \\
C_{+-}(t) =&[\dot{\Gamma}^\dagger, \Gamma], \\
C_{-+}(t) =&[\dot{\Gamma}, \Gamma^\dagger], \\
C_{--}(t) =&[\dot{\Gamma}, \Gamma].
\end{aligned}
$$

Es interesante notar que toda la dependencia relacionada con estás funciones va acompañada de coeficientes de orden $|\beta|^2$. Por el momento ests términos se traran de forma separada. Todos los demás términos se pueden expresar como conmutadores:

$$
-(U^\dagger \dot{U}\rho + \rho \dot{U}^\dagger U) = [\dot{\alpha}^* a - \dot{\alpha} a^\dagger + \dot{\beta}^*\Gamma - \dot{\beta}\Gamma^\dagger, \rho] + [\beta^*\dot{\Gamma} - \beta\dot{\Gamma}^\dagger, \rho], \tag{5.18}
$$

lo cual sugiere tratarlos, junto con los términos adicionales que surgen al transformar los términos de Lindblat, como parte del Hamiltoniano. Esto lleva a que el Hamiltoniano total en el marco transformado incluya nuevos términos:

$$
\begin{aligned}
H_{rot} =& i\hbar(\dot{\alpha}^* a - \dot{\alpha} a^\dagger + \dot{\beta}^*\Gamma - \dot{\beta}\Gamma^\dagger), & (5.19) \\
H_{dec} =& i\hbar(\frac{A}{2}(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) + \frac{\gamma}{2}(\beta\Gamma^\dagger - \beta^*\Gamma)), & (5.20) \\
H_{temp} =& i\hbar(\beta^*\dot{\Gamma} - \beta\dot{\Gamma}^\dagger), & (5.21)
\end{aligned}
$$

si se escribe el Hamiltoniano total del sistema en el nuevo marco de referencia, se llega a que este es:

$$
\begin{aligned}
H =& -\hbar\delta(a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a) + \frac{W}{|f(t)|^2}(\Gamma^\dagger\Gamma + \beta\Gamma^\dagger + \beta^*\Gamma) \\
& - \hbar g'[(a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a + |\alpha|^2)(\gamma_+(t)(\Gamma^\dagger + \beta^*) + \gamma_-(t)(\Gamma + \beta))] \\
& + \frac{\hbar\Omega}{2}(a^\dagger + a) + i\hbar(\dot{\alpha}^* a - \dot{\alpha} a^\dagger + \dot{\beta}^*\Gamma - \dot{\beta}\Gamma^\dagger) \\
& + i\hbar(\frac{A}{2}(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) + \frac{\gamma}{2}(\beta\Gamma^\dagger - \beta^*\Gamma)) + i\hbar(\beta^*\dot{\Gamma} - \beta\dot{\Gamma}^\dagger),
\end{aligned}
$$

aquí es importante notar que se eliminaron los términos que no contenían ningún operador, puesto que estos claramente conmutan con ρ y por lo tanto no contribuyen a la ecuación maestra. Se desea eliminar los términos que únicamente contienen un operador de creación o aniquilación, por lo que se agrupan todos estos términos:

$$a(-\hbar\delta\alpha^* - \hbar g'\alpha^*(\gamma_+(t)\beta^* + \gamma_-(t)\beta) + \frac{\hbar\Omega}{2} + i\hbar\dot{\alpha}^* - i\hbar\frac{A}{2}\alpha^*), \tag{5.22}$$

$$a^\dagger(-\hbar\delta\alpha - \hbar g'\alpha(\gamma_+(t)\beta^* + \gamma_-(t)\beta) + \frac{\hbar\Omega}{2} - i\hbar\dot{\alpha} + i\hbar\frac{A}{2}\alpha), \tag{5.23}$$

$$\Gamma(\frac{W}{|f(t)|^2}\beta^* - \hbar g'|\alpha|^2\gamma_- + i\hbar\dot{\beta}^* + i\hbar\frac{\gamma}{2}\beta^*), \tag{5.24}$$

$$\Gamma^\dagger(\frac{W}{|f(t)|^2}\beta - \hbar g'|\alpha|^2\gamma_+ - i\hbar\dot{\beta} - i\hbar\frac{\gamma}{2}\beta), \tag{5.25}$$

si se desea eliminar todos estor términos, los términos asociados a cada operador deben eliminarse de manera independiente,lo cual genera ecuaciones diferenciales para los coeficientes α y β. Es importante notar que solo se obtienen dos ecuaciones, ya que las ecuaciones para los conjugados se obtienen al conjugar. Estas son:

$$\dot{\alpha} = \alpha(-\frac{A}{2} + i(\delta + g'(\gamma_+(t)\beta^* + \gamma_-(t)\beta)) - i\frac{\Omega}{2}, \tag{5.26}$$

$$\dot{\beta} = \beta(-\frac{\gamma}{2} - i\frac{W}{\hbar|f(t)|^2}) + ig'|\alpha|^2\gamma_+(t), \tag{5.27}$$

si estas ecuaciones se cumplen, entonces se obtiene el Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H' = &- \hbar\delta' a^\dagger a + \frac{W}{|f(t)|^2}\Gamma\Gamma^\dagger - \hbar g'[(a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a)(\gamma_+(t)\Gamma^\dagger + \gamma_-(t)\Gamma)] \\ &+ i\hbar(\beta^*\dot{\Gamma} - \beta\dot{\Gamma}^\dagger), \end{aligned}$$

donde se ha hecho el cambio $\delta' = \delta + g'(\beta + \beta^*)$. Con esto se obtiene la ecuación maestra para el enfriamiento optomecánico con un oscilador con frecuencia dependiente del tiempo, en el marco de referencia desplazado:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H', \rho] + L_a\rho + L_\Gamma\rho + C(t)\rho, \tag{5.28}$$

en donde $C(t)$ representa los términos de conmutadores vistos anteriormente. Para poder avanzar más allá, se requiere una forma escpecífica para la dependencia funcional de la frecuencia del oscilador.

5.2. Solución para Oscilaciones Pequeñas Respecto a una Frecuencia Promedio

La ecuación 5.28 depende fuertemente de las soluciones clásicas del problema del oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo. Estas soluciones no solo determinan la forma exacta de los operadores Γ, también determinan la forma de los términos denominados $C(t)$. En esta sección se trabajará con el supuesto de que la dependencia temporal en la frecuencia se puede tratar como pequeñas variaciones périódicas en torno a una frecuencia promedio:

$$k(t) = \nu_0 + \epsilon cos(2\omega t) \tag{5.29}$$

Si se hace esta sustitución, en la ecuación de movimiento correspondiente al Hamiltoniano 3.40, se llega a:

$$m\ddot{x} + (\nu_0 + \epsilon cos(2\omega t))x = 0, \tag{5.30}$$

la cual es muy similar a la ecuación de Mathieu, la cual es un caso particular de la ecuacion de Hill vista anteriormente. A continuación se resuelve el caso donde $\epsilon \ll \nu_0$. En particular, se buscaran soluciones periódicas para los casos donde $\nu \simeq n^2$ con n un número entero. Se resolverá el caso donde $n \simeq 1$. Primero se debe transformar la ecuacion a la forma estandard:

$$\ddot{x} + (\delta + \epsilon cos(2t))x = 0, \tag{5.31}$$

para esto primero se hace un cambio de variables $t' = wt$ lo cual lleva a la ecuación:

$$m\omega^2\ddot{(x)} + (\nu_0 + \epsilon cos(2t'))x = 0, \tag{5.32}$$

y se divide toda la ecuacion por $m\omega^2$. Con esto la ecuacion queda en la forma deseada si se toma $\epsilon' = \frac{\epsilon}{m\omega^2}$ y se pide $\frac{\nu_0}{m\omega^2} = n^2$, omitiendo los superindices primos por simplicidad, se tiene:

$$\ddot{x} + (n^2 + \epsilon cos(2t))x = 0. \tag{5.33}$$

Para encontrar una solución a primer orden en ϵ, se hacen desarrollos en términos de esta:

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + ..., \tag{5.34}$$

$$\delta = n^2 + \epsilon\delta_1 + \epsilon^2\delta_2 + ..., \tag{5.35}$$

al sustituir estos términos en la ecuación 5.33, se obtienen dos ecuaciones distintas, si únicamente se consideran términos hasta primer orden en ϵ:

$$\ddot{x_0} + n^2 x_0 = 0, \tag{5.36}$$

$$\ddot{x_1} + n^2 x_1 = -\delta_1 x_0 - x_0 cos(2t), \tag{5.37}$$

al agrupar de acuerdo a la potencia de la dependencia en ϵ. La primera ecuación es simplemente el oscilador armónico usual y su solución es:

$$x_0(t) = acos(nt) + bsin(nt), \tag{5.38}$$

, esta solución puede sustituirse en la segunda ecuación y se obtiene que:

$$\ddot{x_1} + n^2 x_1 = -\delta_1(acos(nt) + bsin(nt)) - (acos(nt) + bsin(nt))cos(2t), \tag{5.39}$$

utilizando identidades trigonometricas, se tiene:

$$\ddot{x_1} + n^2 x_1 = -\delta_1 acos(nt) - \delta_1 bsin(nt) - \frac{a}{2}(cos((n+2)t) + cos((n-2)t) - \frac{b}{2}((sin((n+2)t) + sin((n-2)t)), \tag{5.40}$$

y ahora se toma el caso $n = 1$:

$$\ddot{x_1} + x_1 = -\delta_1 acos(t) - \delta_1 bsin(t) - \frac{a}{2}(cos(3t) + cos(t)) - \frac{b}{2}((sin(3t) - sin(t)), \tag{5.41}$$

para asegurar que la solución no se dispare, se debe asegurar que la solución para x_1 sea más pequeña que la solución para x_0, por lo que se pide que $-\delta_1 a - \frac{a}{2} = 0$ y que $-\delta_1 b + \frac{b}{2} = 0$, con esto se obtiene la ecuación:

$$\ddot{x_1} + x_1 = -\frac{a}{2}cos(3t) - \frac{a}{2}sin(3t), \tag{5.42}$$

se propone una solución en forma de combinación lineal de senos y cosenos. Por independencia lineal de estas funciones, del lado izquierdo solo pueden ser no nulos los términos con $n = 3$. Esto lleva a que:

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2} =& c_3 - 9c_3, \\ =& 8c_3, \\ \therefore \frac{a}{16} =& c_3, \end{aligned}$$

y de forma completamente análoga para los coeficientes de seno. Con esto, si se toma $a = 1$ y $b = i$ para expresar las soluciones de forma exponencial, se tiene que la solución a orden ϵ es:

$$f(t) = E_1^0(t) = e^{i\omega t} + \frac{\epsilon}{16}e^{3i\omega t}, \tag{5.43}$$

esta función es la función mencionada en el tratamiento de los operadores Γ. La otra solución que se debe obtener según esa sección es la forrespondiente a $f(-t)$ que en este caso equivale al complejo conjugado. Esta solución es la que corresponde a $E_2^0(t)$. Con este resultado se pueden calcular los términos correspondientes a los conmutadores de los operadores Γ y sus derivadas.

5.2.1. Cálculo de Conmutadores

Se comienza con el conmutador $C_{++}(t)$, recordando que en este contexto x y p son los operadores usuales en mecánica cuántica:

$$
\begin{aligned}
C_{++}(t) =&[\dot{\Gamma}^\dagger, \Gamma] \\
=&[\frac{-1}{2i}(x\sqrt{\frac{2m}{\hbar}}\ddot{f}^* - p\sqrt{\frac{2}{m\hbar}}\dot{f}^*), \frac{-1}{2i}(x\sqrt{\frac{2m}{\hbar}}\dot{f}^* - p\sqrt{\frac{2}{m\hbar}}f^*)], \\
=&[\frac{-1}{2i}x\sqrt{\frac{2m}{\hbar}}\ddot{f}^*, \frac{1}{2i}p\sqrt{\frac{2}{m\hbar}}f^*] + [\frac{1}{2i}p\sqrt{\frac{2}{m\hbar}}\dot{f}^*, \frac{-1}{2i}x\sqrt{\frac{2m}{\hbar}}\dot{f}^*], \\
=&(\frac{-1}{2i})(\frac{1}{2i})\sqrt{\frac{2m}{\hbar}}\sqrt{\frac{2}{m\hbar}}\ddot{f}^* f^*[x,p] + (\frac{1}{2i})(\frac{-1}{2i})\sqrt{\frac{2m}{\hbar}}\sqrt{\frac{2}{m\hbar}}\dot{f}^*\dot{f}^*[p,x], \\
=&\frac{1}{2\hbar}(\ddot{f}^* f^*(i\hbar) - \dot{f}^*\dot{f}^*(i\hbar)), \\
=&\frac{i\omega^2}{2}[(-e^{-i\omega t} - \frac{9\epsilon}{16}e^{-3i\omega t})(e^{-i\omega t} + \frac{\epsilon}{16}e^{-3i\omega t}) - (ie^{-i\omega t} + \frac{3i\epsilon}{16}e^{-3i\omega t})(ie^{-i\omega t} + \frac{3i\epsilon}{16}e^{-3i\omega t})], \\
=&\frac{i\omega^2}{2}[-e^{-2i\omega t} - \frac{\epsilon}{16}e^{-4i\omega t} - \frac{9\epsilon}{16}e^{-4i\omega t}) - (-e^{-2i\omega t} - \frac{6\epsilon}{16}e^{-4i\omega t})], \\
=&\frac{i\omega^2}{2}[-\frac{10\epsilon}{16}e^{-4i\omega t} + \frac{6\epsilon}{16}e^{-4i\omega t}], \\
=&\frac{i\omega^2}{2}[-\frac{4\epsilon}{16}e^{-4i\omega t}], \\
=&-\epsilon\frac{i}{8}e^{-4i\omega t}.
\end{aligned}
$$

El factor ω^2 queda absorbido en ϵ, recordando que al transformar la ecuación se dividió por ω^2. La nueva ϵ es entonces $\frac{\epsilon}{m}$. Para calcular el conmutador $C_{--}(t)$ es útil notar que:

$$
\begin{aligned}
([a,b])^\dagger =&(ab - ba)^\dagger, \\
=&(b^\dagger a^\dagger - a^\dagger b^\dagger), \\
=&[b^\dagger, a^\dagger], \\
=&-[a^\dagger, b^\dagger],
\end{aligned}
$$

por lo que:

$$
\begin{aligned}
([a,b])^\dagger =&(C_{++}(t))^\dagger, \\
=&-[a^\dagger, b^\dagger], \\
\Rightarrow&[a^\dagger, b^\dagger] = -(C_{++}(t))^\dagger
\end{aligned}
$$

lo que lleva a:

$$
C_{--}(t) = -\epsilon\frac{i}{8}e^{4i\omega t}.
$$

El calculo de los otros dos conmutadores es completamente análogo, y se llega a:

$$\begin{aligned}
C_{++}(t) =& - \epsilon\frac{i}{8}e^{-4i\omega t}, && (5.44)\\
C_{--}(t) =& - \epsilon\frac{i}{8}e^{4i\omega t}, && (5.45)\\
C_{+-}(t) =& i[1 - \frac{\epsilon}{16}e^{2i\omega t} - \frac{6\epsilon}{16}e^{-2i\omega t}], && (5.46)\\
C_{-+}(t) =& i[1 - \frac{\epsilon}{16}e^{-2i\omega t} - \frac{6\epsilon}{16}e^{2i\omega t}]. && (5.47)
\end{aligned}$$

con esto, el término correspondiente a los conmutadores es:

$$C(t)\rho = -\beta^2\epsilon\frac{i}{8}e^{4i\omega t}\rho + |\beta|^2(-\frac{\epsilon}{16}e^{2i\omega t} - \frac{6\epsilon}{16}e^{-2i\omega t} + \frac{\epsilon}{16}e^{-2i\omega t} - \frac{6\epsilon}{16}e^{2i\omega t})\rho + (\beta^*)^2\epsilon\frac{i3}{8}e^{-4i\omega t}\rho, \tag{5.48}$$

ya que ϵ es en realidad $\frac{\epsilon}{m}$ y todos los términos tienen una amplitud aún menor que esto, se desprecian estos términos. Aún es necesario calcular la forma explícita del resto de los términos con dependencia temporal, ya que todos estos quedan determinados por la solución del problema clásico.

5.2.2. Coeficientes $\gamma_{\pm}$

Se trata el caso de los factores $\gamma_{\pm}(t)$. Para esto primero es necesario calcular los factores $A(t)$ y $B(t)$. Recordando su forma explícita:

$$\begin{aligned}
A(t) =& \frac{(f^*(t) + f(t))}{(f^*(t) - f(t))}, && (5.49)\\
B(t) =& \sqrt{\frac{2m}{\hbar}}\frac{(f^*(t) + f(t))(\dot{f}(t) - \dot{f}^*(t)) + (f^*(t) - f(t))(\dot{f}(t) + \dot{f}^*(t))}{(f^*(t) - f(t))}. && (5.50)
\end{aligned}$$

Se procede primero con el calculo correspondiente a $A(t)$. Se tiene que los factores son:

$$\begin{aligned}
(f^*(t) + f(t)) =& 2cos(\omega t) + \frac{\epsilon}{8}cos(3\omega t),\\
(f^*(t) - f(t)) =& - 2isin(\omega t) - i\frac{\epsilon}{8}sin(3\omega t),
\end{aligned}$$

si de nuevo se desprecian los términos con amplitud menor que ϵ, se tiene que:

$$A(t) = i\frac{cos(\omega t)}{sin(\omega t)}. \tag{5.51}$$

Se procede de igual forma y se obtiene, despreciando como siempre los términos menores que ϵ:

$$\begin{aligned}
(\dot{f}^*(t) + \dot{f}(t)) =& - 2\omega sin(\omega t),\\
(\dot{f}(t) - \dot{f}^*(t)) =& - 2\omega icos(\omega t),
\end{aligned}$$

con lo que se puede calcular el valor de $B(t)$:

$$B(t) = \frac{-2\omega}{sen(wt)}. \tag{5.52}$$

Recordando ahora la forma explícita de los coeficientes $\gamma_\pm$:

$$\begin{aligned}\gamma_+(t) =& \frac{A(t)+1}{-2iB(t)},\\ \gamma_-(t) =& \frac{A(t)-1}{-2iB(t)},\end{aligned}$$

simplemente se sustituyen los valores obtenidos:

$$\begin{aligned}\gamma_\pm =& \frac{A(t)\pm 1}{-2iB(t)}, & (5.53)\\ =& \frac{i\frac{cos(\omega t)}{sin(\omega t)} \pm 1}{\frac{-2\omega}{sen(wt)}}, & (5.54)\\ =& \frac{i\frac{cos(\omega t)}{sin(\omega t)}}{\frac{-2\omega}{sen(wt)}} \pm \frac{1}{\frac{-2\omega}{sen(wt)}}, & (5.55)\\ =& \frac{cos(\omega t)}{-4\omega} \pm \frac{isen(\omega t)}{-4\omega}, & (5.56)\\ =& -\frac{1}{4\omega}e^{\pm i\omega t}. & (5.57)\end{aligned}$$

Falta la forma explícita de los operadores $\dot{\Gamma}$ para poder continuar con los cálculos.

5.2.3. Operadores Γ

Dado que se tiene una forma explícita para la solución clásica, es posible dar una forma explícita de las derivadas temporales de los operadores Γ. Se puede ver que las derivadas temporales de la solución clásica pueden expresarse de una forma particularmente conveniente:

$$\dot{f} = i\omega e^{i\omega t} + 3i\omega\frac{\epsilon}{16}e^{3i\omega t} = i\omega f + 2i\omega\frac{\epsilon}{16}e^{3i\omega t}, \tag{5.58}$$

y de forma análoga:

$$\ddot{f} = i\omega\dot{f} - 6\omega^2\frac{\epsilon}{16}e^{3i\omega t}. \tag{5.59}$$

Si se recuerda la expresión explícita del operador Γ y se desprecian los terminos menores a ϵ, se llega al resultado:

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}(t) =& i\omega\Gamma(t), & (5.60)\\ \dot{\Gamma}^\dagger(t) =& -i\omega\Gamma^\dagger(t), & (5.61)\end{aligned}$$

lo cual convierte el termino que depende de estas derivadas en el Hamiltoniano en:

$$i\hbar(\beta^*\dot{\Gamma} - \beta\dot{\Gamma}^\dagger) = \hbar\omega(\beta^*\Gamma + \beta\Gamma^\dagger), \tag{5.62}$$

, esto lleva necesariamente a modificar las ecuaciones diferenciales de los coeficientes β puesto que estos términos deben cancelarse también. Finalmente, es necesario obtener una forma explícita para el factor $\frac{W}{|f|^2}$ que acompaña al oscilador armónico expresado en operadores Γ.

5.2.4. Factor General para el Oscilador Dependiente del Tiempo

Se busca calcular el factor $\frac{W}{|f|^2}$, primero se calcula el denominador:

$$\begin{aligned}
|f|^2 =& ff^*, \\
=& (e^{i\omega t} + \frac{\epsilon}{16}e^{3i\omega t})(e^{-i\omega t} + \frac{\epsilon}{16}e^{-3i\omega t}), \\
=& 1 + \frac{\epsilon}{16}(e^{2i\omega t} + e^{-2i\omega t}), \\
\simeq& 1
\end{aligned}$$

donde de nuevo se han descartado terminos debido a ser oscilaciones con amplitud menor que ϵ. Falta calcular el Wronskiano W,tomando en cuenta que [5] define como:

$$2iW = \dot{f}f^* - f\dot{f}^*, \tag{5.63}$$

utilizando los resultados para $\dot{f}$ de la sección anterior, esto puede expresarse como:

$$2iW = i\omega ff^* + i\omega ff^* = 2i\omega ff^*, \tag{5.64}$$

al utilizar el resultado apenas obtenido, se llega a:

$$W = \omega, \tag{5.65}$$

lo que resulta que el factor general entonces, despreciando las correcciones menores a ϵ:

$$\frac{W}{|f|^2} = \omega. \tag{5.66}$$

Se puede ahora proceder a resolver las ecuaciones para los coeficientes α y β.

5.2.5. Solución para α y β

Las ecuaciones a resolver, tomando en cuenta el nuevo término correspondiente a las derivadas temporales de los operadores Γ y las formas explícitas de los coeficientes son:

Bibliografía

[1] et al A. Schliesser, P. Del Haye. Radiation pressure cooling of a micromechanical oscillator using dynamical backaction. *Physical Review Letters*, 2006.

[2] et. al Alex Abramovici, William E. Althouse. Ligo: The laser interferometer gravitational-wave observatory. *Science*, 1992.

[3] George B. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists, Seventh Edition: A Comprehensive Guide*. Academic Press, •.

[4] Karl Blum. *Density Matrix Theory and Applications*. Springer, 2012.

[5] Lowell S. Brown. Quantum motion in a paul trap. *Physical Review Letters*, 1991.

[6] Howard Carmichael. *Statistical Methods in Quantum Optics, Vol 1*. Springer, 1999.

[7] Carlton M. Caves. Quantum-mechanical radiation-pressure fluctuations in an interferometer. *Physical Review Letters*, 1980.

[8] et al E. Verhagen. Quantum-coherent coupling of a mechanical oscillator to an optical cavity mode. *Nature*, 2012.

[9] Joe P. Chen Florian Marquardt. Quantum theory of cavity-assisted sideband cooling of mechanical motion. *Physical Review Letters*, 2007.

[10] Berthold-Georg Englert Hans-Jurgen Briegel. Quantum optical master equations: The use of damping bases. *PHYSICAL REVIEW A*, 1993.

[11] et al I Wilson-Rae, N. Nooshi. Cavity-assisted back action cooling of mechanical resonators. *New Journal of Physics*, 2008.

[12] N. Nooshi I. Wilson-Rae. Theory of ground state cooling of a mechanical oscillator using dynamical backaction. *Physical Review Letters*, 2007.

[13] et al Ivan Favero. Fluctuating nanomechanical system in a high finesse optical microcavity. *Optics Express*, 2009.

[14] et. al J. C. Sankey. Strong and tunable nonlinear optomechanical coupling in a low-loss system. •, •.

[15] Jim Napolitano J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Pearson, 2013.

[16] Pablo Barberis-Blostein Marc Bienert. Optomechanical laser cooling with mechanical modulation. *Physical Review Letters A*, 2015.

[17] Peter Hänggi Sigmund Kohler, Thomas Dittrich†. Floquet-markov description of the parametrically driven, dissipative harmonic quantum oscillator. *Phys.Rev. E55*, 30 Sep 1998.

[18] Stig Stenholm Stephen Barnett. Spectral decomposition of the lindblad operator. *Journal of Modern Optics*, 2000.

[19] et al Thomas Corbitt, Christopher Wipf. Optical dilution and feedback cooling of a gram-scale oscillator to 6.9 mk. *Physical Review Letters*, 2007.

[20] Markus Aspelmeyer Thomas J. Kippenberg, Thomas Marquardt. Cavity optomechanics. *Review of Modern Physics*, 2013.

[21] Kerry J. Vahala. Optical microcavities. *Nature*, 2003.

[22] M. Ward. *Supplement: Floquet Theory and the Mathieu's Equation.* •, •.

[23] P. Hänggi W.Domcke and D. Tannor. *Driven Quantum Systems.* Special Issue: Chemical Physics, Vol. 217, 1997.

[24] Peter Zoller. *Quantum Noise:A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics.* Springer Science and Business Media, 2004.