Математика в компьютерной графике

URL: http://www.school30.spb.ru/cgsg/cgc/

E-mail: CGSG@yandex.ru

Галинский В.А.
Физико-математический лицей № 30
Computer Graphics Support Group

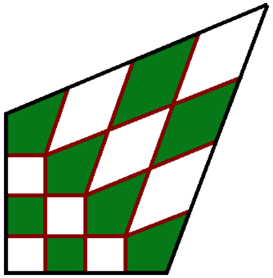
- свободные векторы, радиус векторы, операции с векторами, скалярное и векторное произведение векторов (vector dot & cross production)

- базис, координаты, декартова система координат

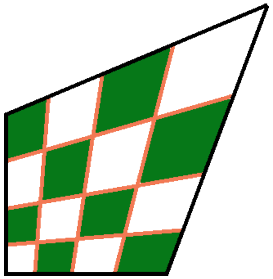
- матрицы, операции с матрицами, обращение матриц

?????????????(transformations)

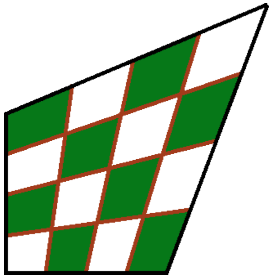
- Аффинные



- Перспективные

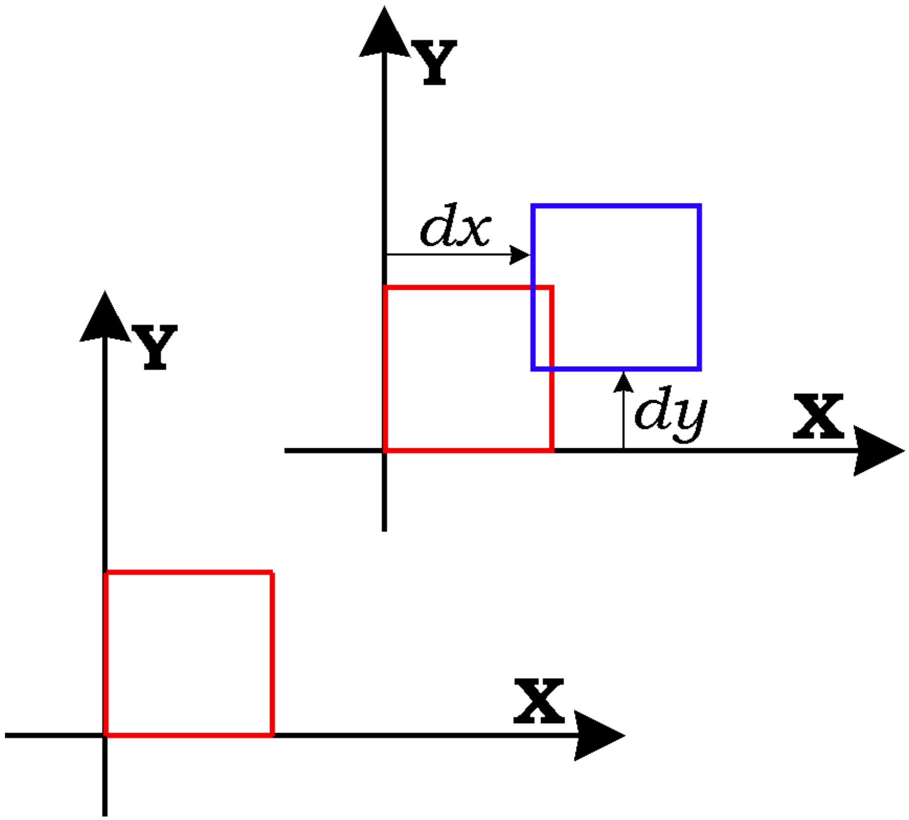


- Билинейные



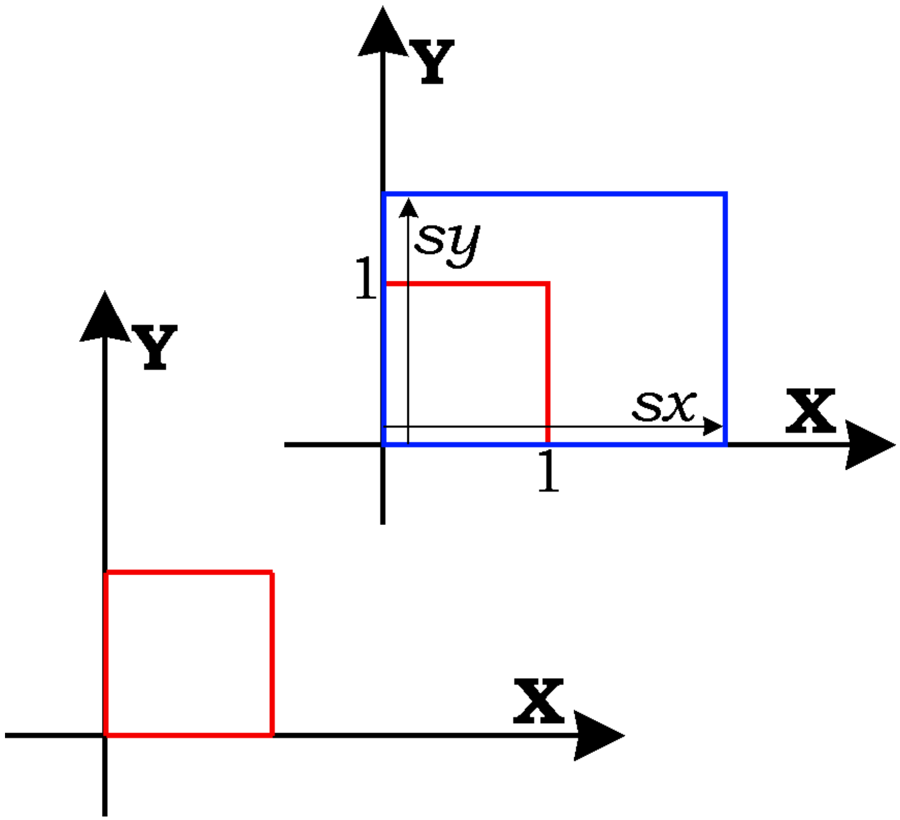
Галинский В.А.
Физико-математический лицей № 30
Computer Graphics Support Group

- *Параллельный перенос (translation)*



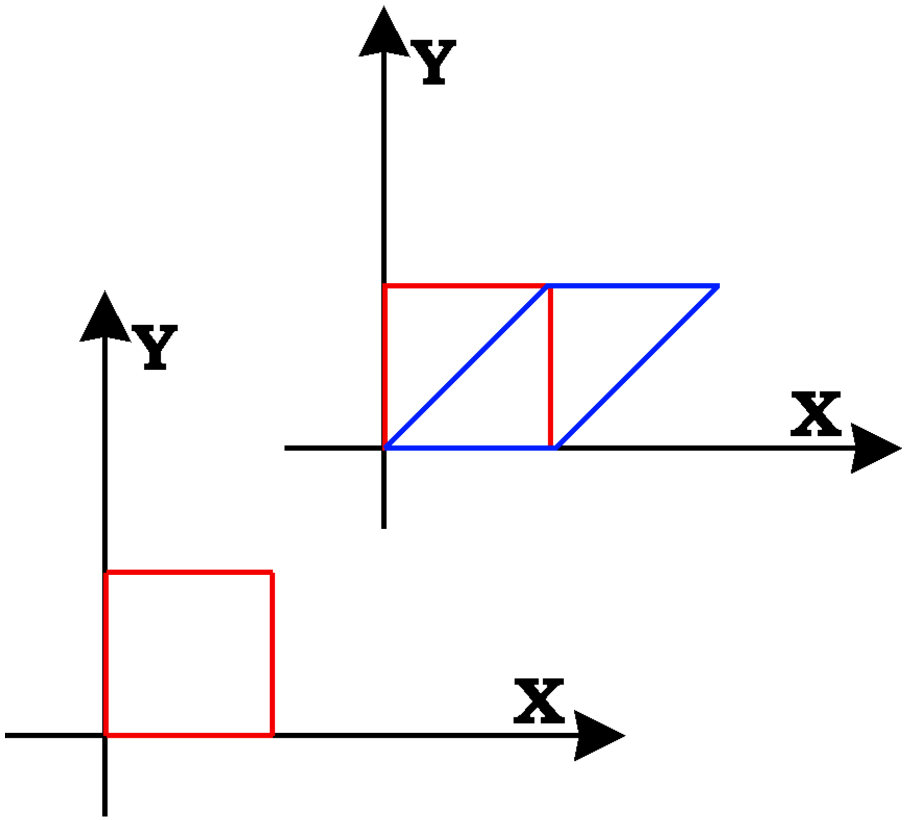
$$\begin{cases} x' = x + dx \\ y' = y + dy \end{cases}$$

- *Масштабирование (scaling)*

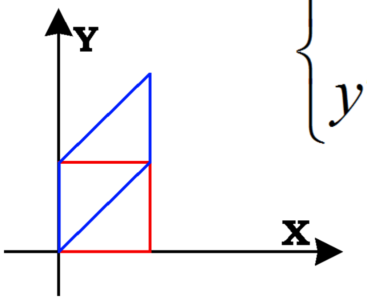


$$\begin{cases} x' = x \cdot sx \\ y' = y \cdot sy \end{cases}$$

- *Сдвиг (shearing)*

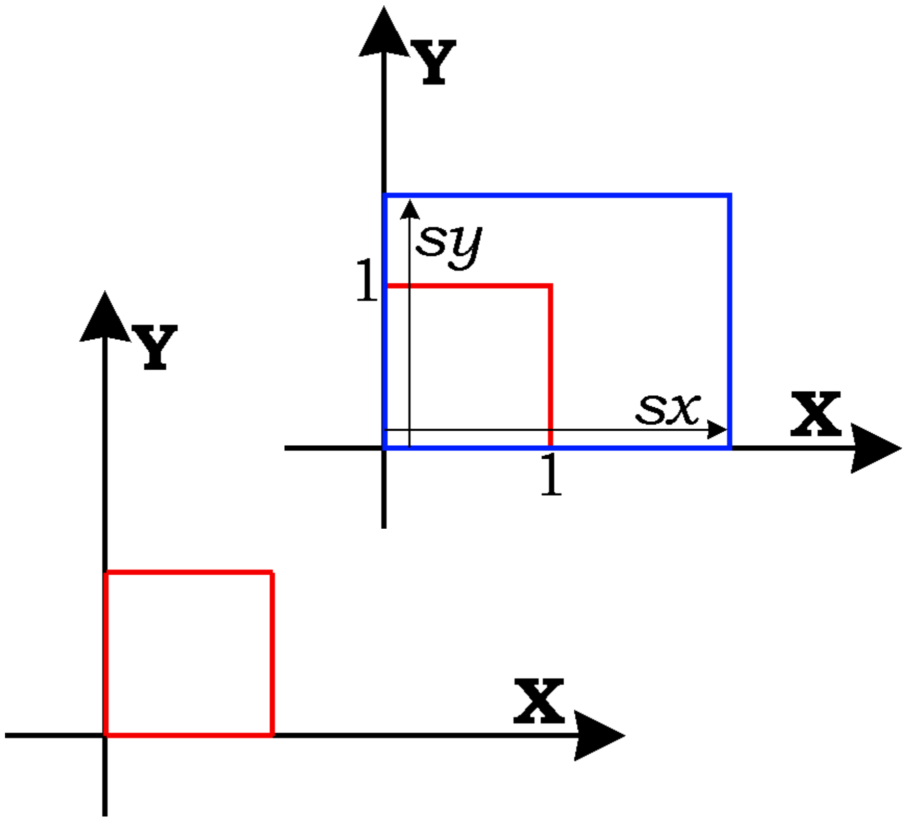


$$\begin{cases} x' = x + y \cdot sh_x \\ y' = y \end{cases}$$



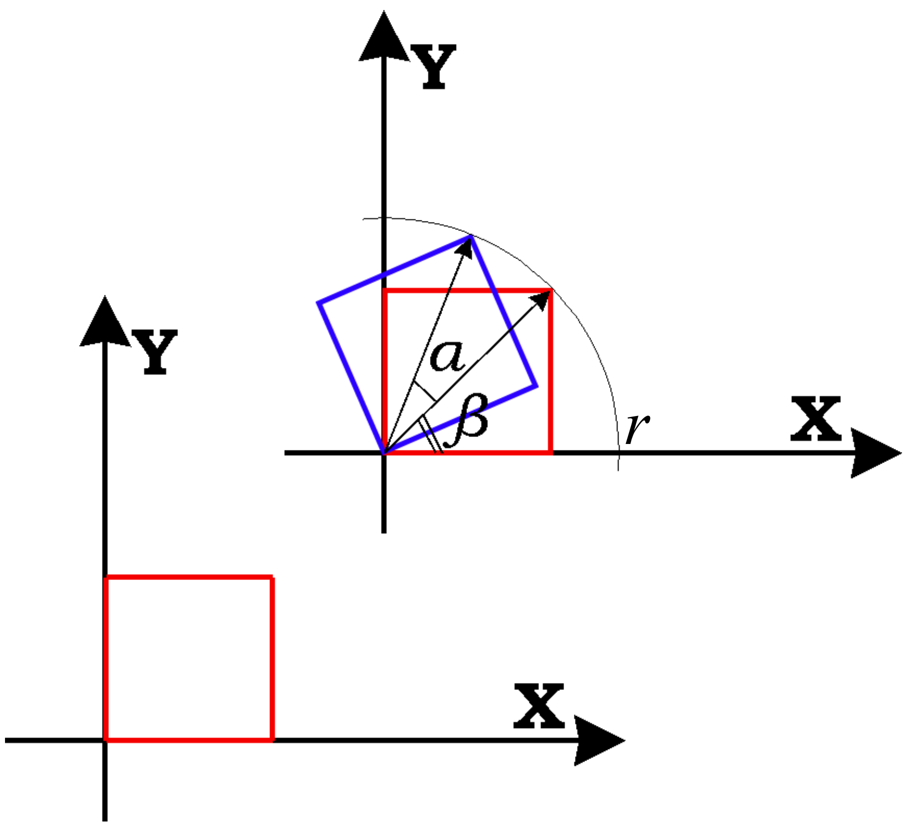
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x \cdot sh_y + y \end{cases}$$

- *Масштабирование (scaling)*



$$\begin{cases} x' = x \cdot sx \\ y' = y \cdot sy \end{cases}$$

- *Поворот относительно начала координат (rotation)*



$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\beta) \\ y = r \cdot \sin(\beta) \end{cases}, \begin{cases} x' = r \cdot \cos(\alpha + \beta) \\ y' = r \cdot \sin(\alpha + \beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \underline{r} \cdot \cos(\alpha) \cdot \underline{\cos(\beta)} - \underline{r} \cdot \sin(\alpha) \cdot \underline{\sin(\beta)} \\ y' = \underline{r} \cdot \cos(\alpha) \cdot \underline{\sin(\beta)} + \underline{r} \cdot \sin(\alpha) \cdot \underline{\cos(\beta)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha) \\ y' = x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$$

- Перепишем в матричном виде общую запись аффинных преобразований:

$$\begin{cases} x' = x \cdot a + y \cdot b + l \\ y' = x \cdot c + y \cdot d + m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l & m \end{pmatrix}$$

- представим координаты на плоскости (2D) трехкомпонентной вектор-строкой:

$$(x, y) = \begin{pmatrix} X/w & Y/w & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & w \end{pmatrix}$$

- будем полагать $w = \mathbf{1}$

$$(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}$$

- перепишем преобразование в общем виде:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix}$$

~ translation

$$T(dx, dy) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ dx & dy & 1 \end{pmatrix}$$

~ scaling

$$S(sx, sy) = \begin{pmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

~ shear by x

$$Shx(sh_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

~ rotation

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

~ shear by y

$$Shy(sh_y) = \begin{pmatrix} 1 & sh_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- подвергнем точку последовательным преобразованиям системы координат:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot M_1$$
$$\begin{pmatrix} x'' & y'' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \cdot M_2$$
$$\begin{pmatrix} x''' & y''' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' & y'' & 1 \end{pmatrix} \cdot M_3$$

- перепишем:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \left(\left(\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot M_1 \right) \cdot M_2 \right) \cdot M_3$$

- в силу ассоциативности:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \right)$$
$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot M_{transform}$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot M_{transform}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \cdot M_{transform}^{-1}$$

$$M_{transform} = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{transform}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -c & 0 \\ -b & a & 0 \\ bm - ld & lc - am & ad - bc \end{pmatrix}$$

- точка (радиус-вектор) (*p*):

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}$$

- вектор (*v*) и нормаль (*n*) (только направление):

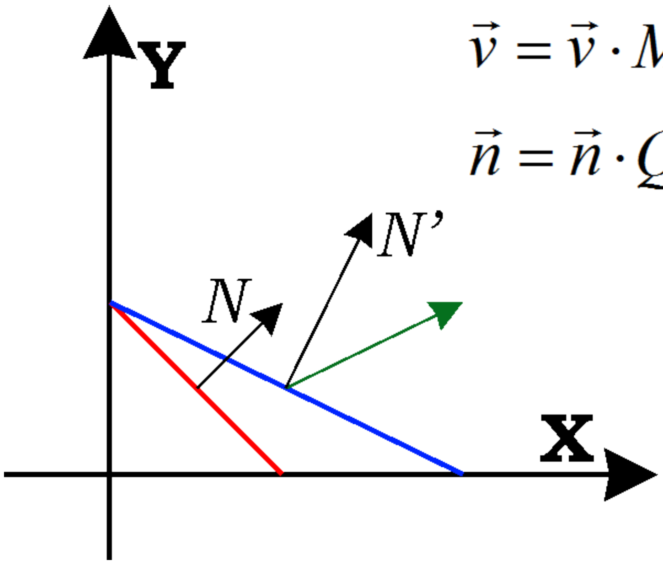
$$\begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix}$$

- преобразования:

$$\vec{p}\,' = \vec{p} \cdot M_{transform} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot M_{transform}$$

$$\vec{v} = \vec{v} \cdot M_{transform} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' & y' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix} \cdot M_{transform}$$

$$\vec{n} = \vec{n} \cdot Q_{transform} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' & y' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix} \cdot Q_{transform}$$



$$\vec{n}\cdot\vec{v}=0 \qquad \vec{n}'\cdot\vec{v}'=0$$
$$\left(\vec{n}\cdot Q_{transform}\right)\cdot\left(\vec{v}\cdot M_{transform}\right)=0$$

$$\vec{n}'=\vec{n}\cdot Q_{transform} \qquad \vec{v}'=\vec{v}\cdot M_{transform}$$

$$\vec{n}=(A,B) \quad \vec{v}=(x,y)$$

$$\begin{pmatrix}A & B & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y & 0\end{pmatrix}^T=0$$

$$\left(\begin{pmatrix}A & B & 0\end{pmatrix}\cdot Q_{transform}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}x & y & 0\end{pmatrix}\cdot M_{transform}\right)^T=0$$

$$\begin{pmatrix}A & B & 0\end{pmatrix}\cdot\left(Q_{transform}\cdot M_{transform}^T\right)\cdot\begin{pmatrix}x & y & 0\end{pmatrix}^T=0$$

$$Q_{transform}\cdot M_{transform}^T=E \Rightarrow \boxed{Q_{transform}=M_{transform}^{-1\;T}}$$

Одно преобразование:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & l \\ c & d & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

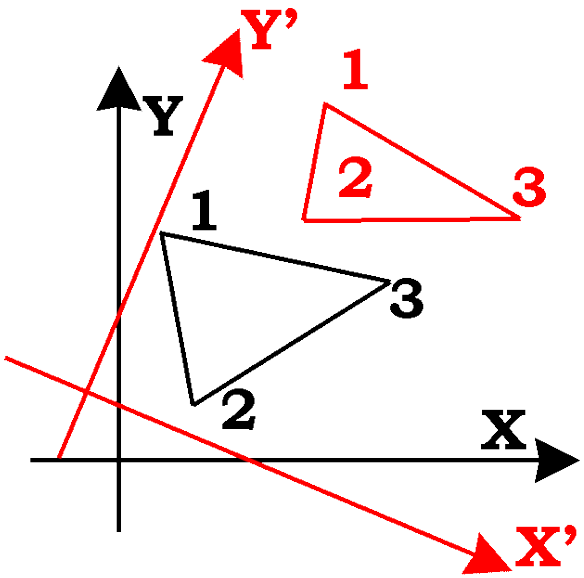
Композиция преобразований:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \right)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \left(M_3 \cdot M_2 \cdot M_1 \right) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

- заданы точки соответствия

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_0 & y'_0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_2 & y'_2 \end{pmatrix}$$



- найти «матрицу перехода»

$$P = P' \cdot M, \quad M = ?$$

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 & y'_0 & 1 \\ x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix}$$

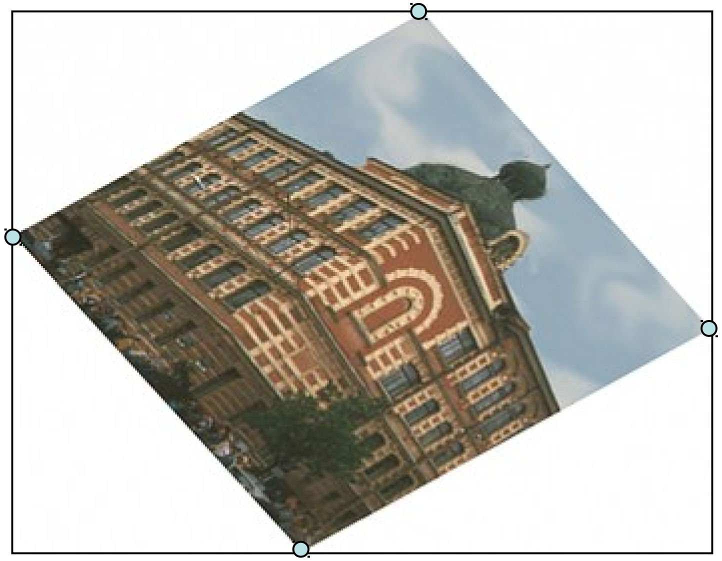
$$G = G' \cdot M$$

$$\begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det G'} \cdot \begin{pmatrix} y'_1 - y'_2 & y'_2 - y'_0 & y'_0 - y'_1 \\ x'_2 - x'_1 & x'_0 - x'_2 & x'_1 - x'_0 \\ x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1 & x'_2 y'_0 - x'_0 y'_2 & x'_2 y'_1 - x'_1 y'_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{здесь}: \det G' = x'_0 \cdot (y'_1 - y'_2) - y'_0 \cdot (x'_1 - x'_2) + (x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1)$$

=> Прямое отображение (direct mapping) =>

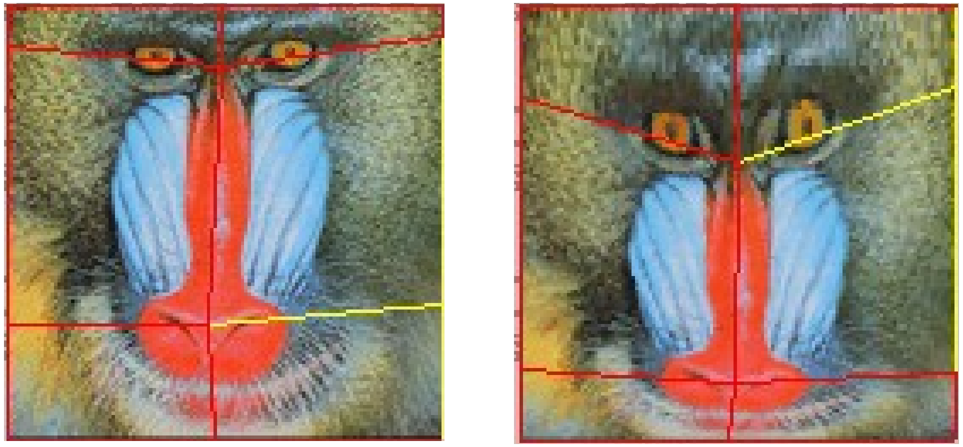
Поворот и масштабирование

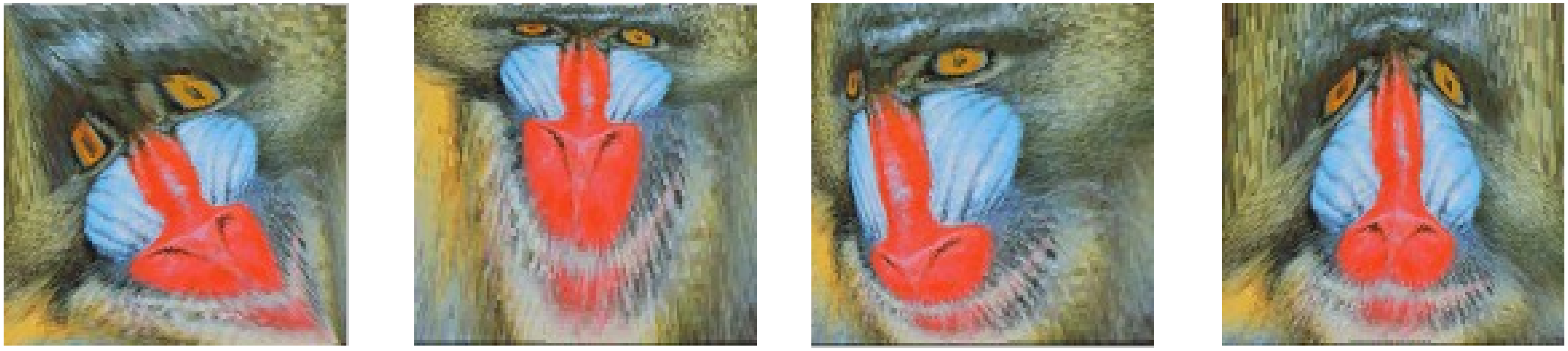


<= Обратное отображение (inverse mapping) <=

?????? warping (1)

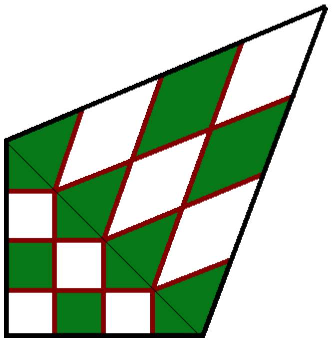
- Регулярная сетка для
  областей соответствия



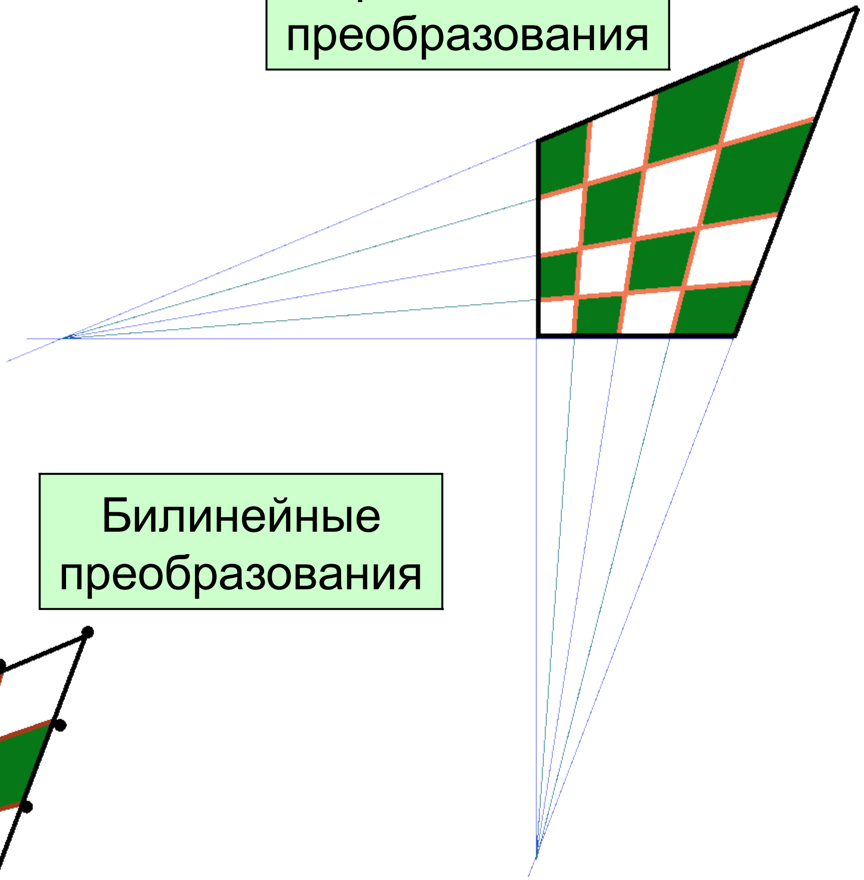


?????? warping (2)

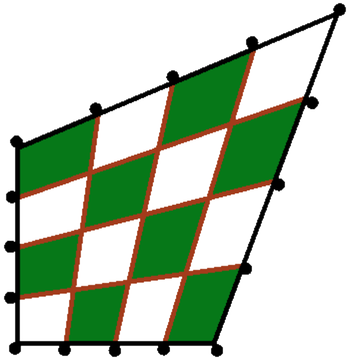
Аффинные преобразования



Перспективные преобразования

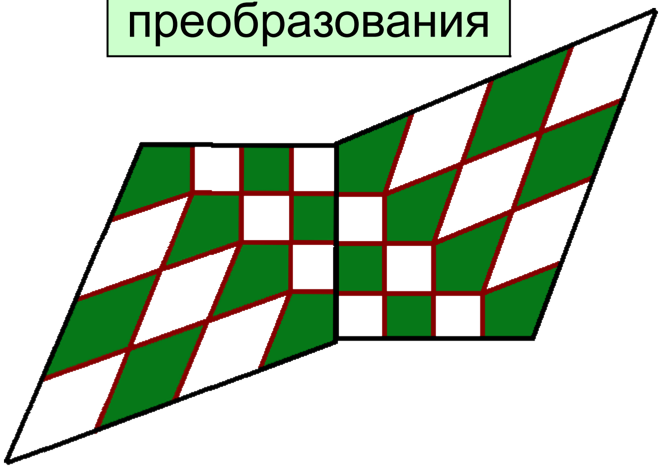


Билинейные преобразования

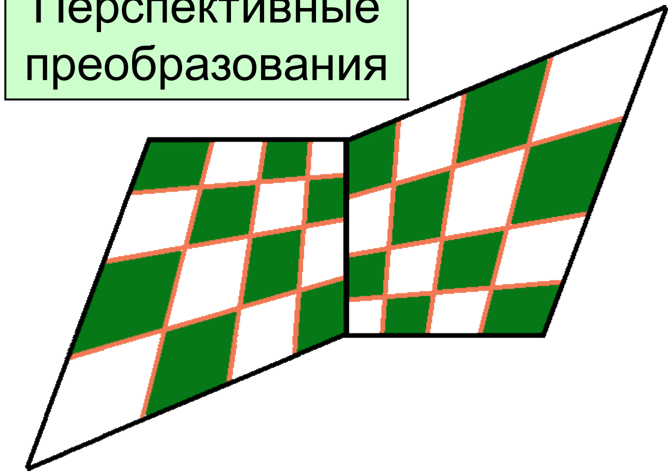


?????? warping (3)

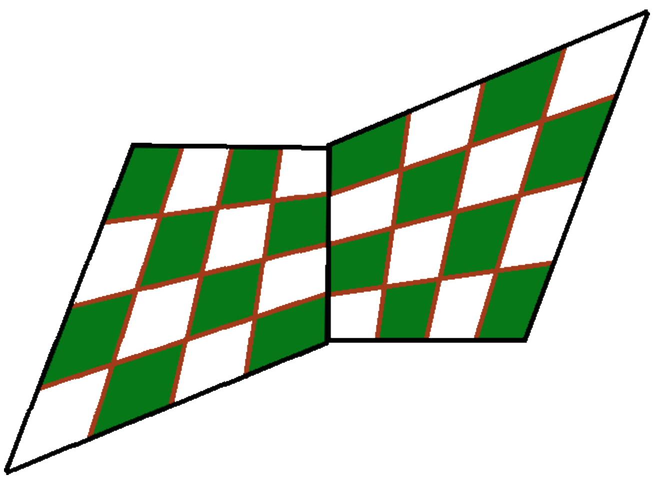
Аффинные преобразования



Перспективные преобразования



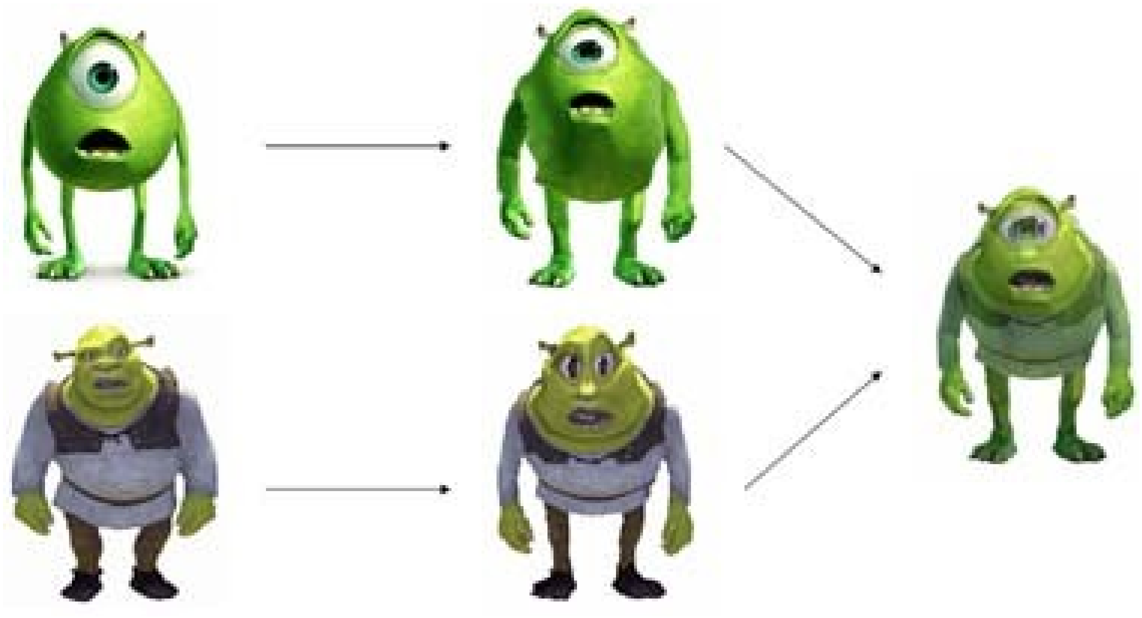
Билинейные преобразования



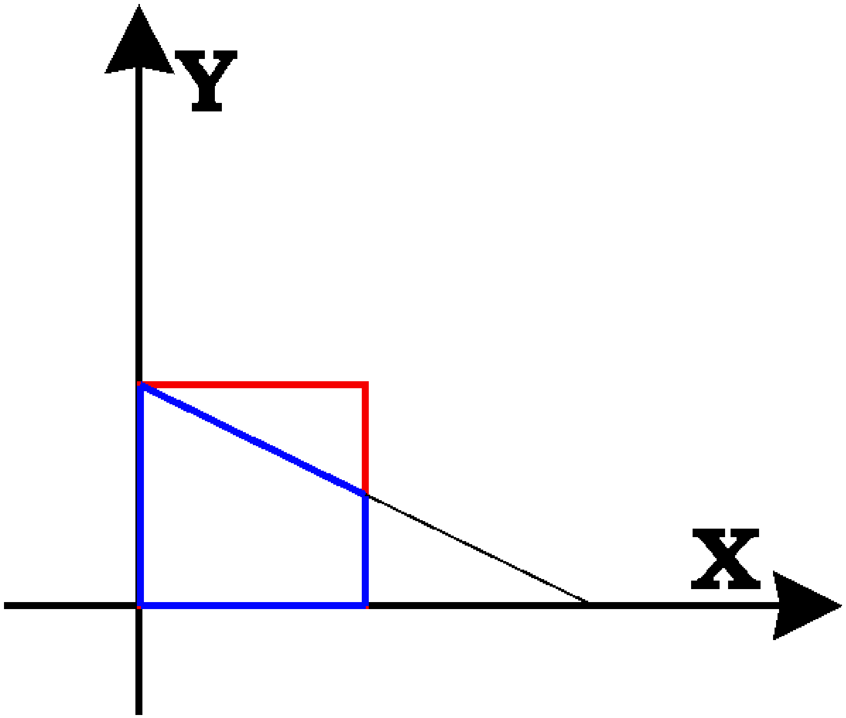
Галинский В.А.
Физико-математический лицей № 30
Computer Graphics Support Group

?????? morphing

morphing = warping + интерполяция цвета



$$\begin{pmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ l & m & 1 \end{pmatrix}$$



(1)

- общая формула:

$$\begin{pmatrix} x & y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & w' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- прямое отображение:

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}w'$$
$$y = a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}w'$$
$$w = a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}w'$$

- полагаем w=1, итоговая формула для координат:

$$\frac{x}{w} = \frac{a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}}{a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}}$$

$$\frac{y}{w} = \frac{a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}}{a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}}$$

(2)

- получаем матрицу обратного отображения
- определитель присутствует и в числителе и в знаменателе – вычислять не нужно:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & w \end{pmatrix} \cdot \breve{M} = \begin{pmatrix} x & y & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

- находим присоединенную матрицу:

$$\breve{M} = \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{32}a_{31} - a_{33}a_{21} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{21} \\ a_{21}a_{31} - a_{31}a_{22} & a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

(3)

- Задача привязки: по 4 точкам соответствия определить матрицу перехода:

$$
\begin{aligned}
(x_0 \quad y_0) &\leftrightarrow (x_0' \quad y_0') \\
(x_1 \quad y_1) &\leftrightarrow (x_1' \quad y_1') \\
(x_2 \quad y_2) &\leftrightarrow (x_2' \quad y_2') \\
(x_3 \quad y_3) &\leftrightarrow (x_3' \quad y_3')
\end{aligned}
$$

$$P = P' \cdot M, \quad M = ?$$

(4)

- запишем зависимость (выразим координаты x и y):

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31} - a_{13}x'x - a_{23}y'x$$
$$y = a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32} - a_{13}x'y - a_{23}y'y$$

- выпишем в матричной форме 8 уравнений:

$$\begin{pmatrix} x'_0 & y'_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_0x_0 & -y'_0x_0 \\ x'_1 & y'_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_1x_1 & -y'_1x_1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_2x_2 & -y'_2x_2 \\ x'_3 & y'_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_3x_3 & -y'_3x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x'_0 & y'_0 & 1 & -x'_0y_0 & -y'_0y_0 \\ 0 & 0 & 0 & x'_1 & y'_1 & 1 & -x'_1y_1 & -y'_1y_1 \\ 0 & 0 & 0 & x'_2 & y'_2 & 1 & -x'_2y_2 & -y'_2y_2 \\ 0 & 0 & 0 & x'_3 & y'_3 & 1 & -x'_3y_3 & -y'_3y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

(5)

- для упрощения задачи переход ищем из единичного квадрата:

$$\begin{aligned}
(x_0 \quad y_0) &\leftrightarrow (0 \quad 0) \\
(x_1 \quad y_1) &\leftrightarrow (1 \quad 0) \\
(x_2 \quad y_2) &\leftrightarrow (1 \quad 1) \\
(x_3 \quad y_3) &\leftrightarrow (0 \quad 1)
\end{aligned}$$

- получаем:

$$\begin{aligned}
& a_{31} = x_0 \\
& a_{11} + a_{31} - a_{13}x_1 = x_1 \\
& a_{11} + a_{21} + a_{31} - a_{13}x_2 - a_{23}x_2 = x_2 \\
& a_{21} + a_{31} - a_{23}x_3 = x_3 \\
& a_{32} = y_0 \\
& a_{12} + a_{32} - a_{13}y_1 = y_1 \\
& a_{12} + a_{22} + a_{32} - a_{13}y_2 - a_{23}y_2 = y_2 \\
& a_{22} + a_{32} - a_{23}y_3 = y_3
\end{aligned}$$

(6)

- обозначаем:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_2 \quad \Delta x_2 = x_3 - x_2 \quad \Delta x_3 = x_0 - x_1 + x_2 - x_3$$

$$\Delta y_1 = y_1 - y_2 \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2 \quad \Delta y_3 = y_0 - y_1 + y_2 - y_3$$

- и находим решение:

$$a_{13} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_3 & \Delta x_2 \\ \Delta y_3 & \Delta y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_2 \\ \Delta y_1 & \Delta y_2 \end{vmatrix}} \qquad \begin{aligned} a_{11} &= x_1 - x_0 + a_{13}x_1 \\ a_{21} &= x_3 - x_0 + a_{23}x_3 \\ a_{31} &= x_0 \end{aligned}$$

$$a_{23} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_3 \\ \Delta y_1 & \Delta y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_2 \\ \Delta y_1 & \Delta y_2 \end{vmatrix}} \qquad \begin{aligned} a_{12} &= y_1 - y_0 + a_{13}y_1 \\ a_{22} &= y_3 - y_0 + a_{23}y_3 \\ a_{32} &= y_0 \end{aligned}$$

- Аналогично случаю 2D вводим однородные координаты:

$$(x, y, z) = \begin{pmatrix} X/w & Y/w & Z/w & 1 \end{pmatrix}$$

- и преобразования в общем случае:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

?????? 3D ????????????? (??????, ??????)

~ translation

$$T(dx, dy, dz) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ dx & dy & dz & 1 \end{pmatrix}$$

~ scaling

$$S(sx, sy, sz) = \begin{pmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

~ rotation

$$Rz(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$Rx(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$Ry(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- Поворот вокруг произвольной оси, проходящей через начало координат. Ось задается нормированным радиус вектором. Вывод через кватернионы (самостоятельно).

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$X = \sin\alpha \cdot x \quad Y = \sin\alpha \cdot y \quad Z = \sin\alpha \cdot z$$

$$R(\alpha, x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 - 2(Y^2 + Z^2) & 2 \cdot X \cdot Y - 2 \cdot \cos\alpha \cdot Z & 2 \cdot \cos\alpha \cdot Y + 2 \cdot X \cdot Z & 0 \\ 2 \cdot X \cdot Y + 2 \cdot \cos\alpha \cdot Z & 1 - 2(X^2 + Z^2) & 2 \cdot Y \cdot Z - 2 \cdot \cos\alpha \cdot X & 0 \\ 2 \cdot X \cdot Z - 2 \cdot \cos\alpha \cdot Y & 2 \cdot \cos\alpha \cdot X + 2 \cdot Y \cdot Z & 1 - 2(X^2 + Y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

~ rotation

Галинский В.А.
Физико-математический лицей № 30
Computer Graphics Support Group

- камера задается: позиция C и векторы направление «вверх» V, «вправо» U и вперед N.
- ищем преобразование в виде «перенос+поворот»:

$$M = T \cdot B$$

где

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -Cx & -Cy & -Cz & 1 \end{pmatrix}$$

- после преобразования вектора отобразятся:

$$U \to (1,0,0)$$

$$V \to (0,1,0)$$

$$N \to (0,0,1)$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} Ux & Uy & Uz & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} Vx & Vy & Vz & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} Nx & Ny & Nz & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- зная

$$Ux^2 + Uy^2 + Uz^2 = 1 \;\; и \;\; т.п.$$

$$Ux \cdot Vx + Uy \cdot Vy + Uz \cdot Vz = 0 \;\; и \;\; т.п.$$

находим

$$B = \begin{pmatrix} Ux & Vx & Nx & 0 \\ Uy & Vy & Ny & 0 \\ Uz & Vz & Nz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Практические задания
  - Реализовать warping изображения (срок – 6.11.2011):
    - все изображение трансформируется билинейным преобразованием (один элемент соответствия)
    - Изображение разделяется на треугольники – зоны соответствия. Искажение получается в соответствии с изменением сетки треугольников.