

Въведение

Wolfram Mathematica е интерактивна система за компютърна алгебра. Тя е базирана на езикът за програмиране **Wolfram Language**. С помощта на системата, разбира се, могат да се правят сравнително прости пресмятания - такива, каквито бихме могли да направим с обикновен калкулатор:

`7 + 5` (*Оценяване на стойността на израз: Shift + Enter/Numeric Enter*)

12

`3 / 5`

`7 * 12`

`7 x 12`

`Sqrt[5]`

$\sqrt{5}$

`8`

120

`10^5`

10^5

$\frac{3}{5}$

84

84

84

$\sqrt{5}$

$\sqrt{5}$

$\frac{1}{15}$

15

100 000

100 000

Една от ключовите функционалности на системата *Mathematica* е, че може да работи със символни изрази. Нещо повече, по подразбиране тя смята символно, освен ако не е указано друго.

`x + 5 y + x + y - x`

`x + 6 y`

`Simplify[Sin[x]^2 + Cos[x]^2]`

1

`Integrate[$\frac{1}{1+x^4}$, x]`

$$\frac{-2 \operatorname{ArcTan}\left[1 - \sqrt{2} x\right] + 2 \operatorname{ArcTan}\left[1 + \sqrt{2} x\right] - \operatorname{Log}\left[1 - \sqrt{2} x + x^2\right] + \operatorname{Log}\left[1 + \sqrt{2} x + x^2\right]}{4 \sqrt{2}}$$

Приоритет на операциите

$$3 * 4 + 1$$

$$13$$

$$3 * (4 + 1)$$

$$15$$

$$-3^2$$

$$-9$$

$$(-3)^2$$

$$9$$

Вградени функции (команди)

Правила при въвеждане на команди:

* Името на всяка вградена команда започва с главна буква. Ако името се състои от повече от една дума (напр. *ArcSin*), то всяка отделна дума започва с главна буква, без разстояние помежду им.

* Аргументите на командите се поставят в единични квадратни скоби.

* Ако дадена функция приема повече от един аргумент, всеки следващ се отделя със запетая от предходния.

$$\text{Max}[1, 2, 4, 8, 0]$$

$$8$$

$$\text{Log}[1]$$

$$0$$

$$\text{Log}(1) \text{ (*Червени скоби - некоректен синтаксис*)}$$

$$\text{Log}$$

$$\log[1] \text{ (*Името на функцията е оцветено в син цвят - не се разпознава командата*)}$$

$$\log[1]$$

$$\text{Mod}[20, 3] \text{ (*Двуаргументна команда - дава остатък при деление*)}$$

$$2$$

(*Вградените тригонометрични функции приемат аргумент в радиани*)

$$\text{Cos}\left[\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Sin}[2 \text{ Pi}]$$

$$0$$

Log[e]

1

Log[E]

1

D[x^2 + 5, x]

2 x

Integrate[1 / (x^3 + 1), x]

$\frac{\text{ArcTan}\left[\frac{-1+2x}{\sqrt{3}}\right]}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \text{Log}[1+x] - \frac{1}{6} \text{Log}[1-x+x^2]$

Integrate[$\frac{1+x^3}{4}$, {x, 1, 5}]

40

Повечето вградени функции носят имена, които са съществували думи в английския език, или техни съкращения. Когато искаме да открием дали съществува дадена функция, вградена в езика, е удобно да използваме документацията, като е достатъчно просто да въведем реалното название на операцията, която искаме да изпълним (напр. *Integrate*, *FindMaximum*, *FindRoot* и т.н.)

Оператори за сравнение и логически операции

$4 \geq 5$

False

$\sqrt{785875} \leq 45$

False

$(23 < 57) \ \&\& \ (\pi \in \text{Integers})$

False

$(23 < 57) \ || \ (\pi \in \text{Integers})$

True

$(23 < 57) \ \&\& \ ! \ (\pi \in \text{Integers})$

True

Структура на системата

Системата е разделена на две подпрограми - *kernel* и *front-end*. Front end-ът е свързан с потребителския интерфейс - начинът, посредством който потребителят комуникира със системата.

Интерфейсът предоставя възможност за създаване и редактиране на файлове (*Mathematica notebooks*). Тези файлове са с разширение *.nb*. Ядрото (*the kernel*) интерпретира изрази от езика *Wolfram* и връща резултатни такива. Ядрото се зарежда

автоматично при оценяване на първата въведена команда. Поради тази причина би могло да има значително забавяне по време на първото изчисление.

Както забелязваме, всеки *notebook* е разделен на отделни единици, наречени клетки (*cells*). Обхвата на дадена клетка се обозначава от квадратните скоби в дясната част на файла. Клетките са вложени една в друга йерархично и служат за структуриране на документа.

Сливане на клетки --> Ctrl+Shift +M

Разделяне на клетки --> Ctrl+Shift+D

500 * 100

50 000

20 * 10

200

% (*Извиква последно изведения резултат*)

1000

%^2

1 000 000

Символни и числени пресмятания

По подразбиране *Mathematica* смята символно, следователно - точно. Това обаче невинаги възможно. Понякога може да доведе и до сериозни проблеми с изчисленията.

$\sin[\pi/5]$

$$\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}$$

$\text{Log}[15]$

$\text{Log}[15]$

$\text{Log}[15.]$ (*По подразбиране, изведеният резултат се закръглява до 6 знака.*)

2.70805

$N[\text{Log}[15]]$ (*Функцията N връща числена апроксимация на търсения резултат.*)

2.70805

$\text{Log}[15] // N$

2.70805

$$(\sqrt{3})^2$$

3

$(\sqrt{3.})^2$ (*Тъй като това е числена апроксимация, получаваме резултат с ограничена точност.*)

3.

2.9999999999999996`

255^{30}

1 571 105 731 713 312 715 511 913 444 948 824 285 516 982 702 388 429 082 930 088 043 212 890 625

$N[255^{30}]$ (*Scientific notation. Очевидно апроксимация, значещите цифри са ограничени до 6-тия знак.*)

 1.57111×10^{72}

$N[255^{30}, 50]$ (*Указване на точност*)

$1.5711057317133127155119134449488242855169827023884 \times 10^{72}$

(*1245878541254^(10000000)*)

The Basic Math Palette

Системата дава възможност за въвеждане на стандартни математически означения, които могат да участват в пресмятанията. Въвеждането на математически символи може да стане с помощта на менюто *Palettes->Basic Math Assistant*, или с помощта на съответни кодове за бърз достъп от клавиатурата.

 $\sqrt{\pi}$
 $\sqrt{\pi}$

? Pi

Pi is π , with numerical value ≈ 3.14159 . >>

 $\int_0^1 x^2 dx$
 $\frac{1}{3}$
 $\int \sin[x] dx$
 $-\cos[x]$
 $\text{Det}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}\right]$
 -10
 $\sqrt{\oint \Delta \xi \beta \nabla}$
 $\int \square d\square (*\text{Esc} + \text{intt} + \text{Esc}*)$

Някои често използвани shortcut-и:

$\text{Esc} + a + \text{Esc} = \alpha$

$\text{Esc} + b + \text{Esc} = \beta$

$\text{Ctrl} + / = \frac{\square}{\square}$

$\text{Ctrl} + ^ = \square^{\square}$

$$\text{Ctrl} + 2 = \sqrt{\square}$$

Езикът *Mathematica*

Everything is an Expression

Основната градивна единица на езикът *Mathematica* са изразите (*expressions*). Тяхната структура и представянето им в паметта на системата са съществени за разбирането на работата и.

Всички обекти с които работим в *Mathematica* (просто изчисление, графика, вградена функция, клетка, дори notebook) са **изрази** и имат сходна структура в паметта на системата.

Представяне на изразите в паметта на системата

Системата групира въведените изрази по *тип данни*, независимо че този тип не се указва изрично от потребителя. Типът на даден израз може да се види с помощта на функцията **Head**:

```
Head[7]
```

```
Integer
```

```
{Head[5], Head[1/5], Head[7.0], Head[0.2 + 3 I]} (*4 типа за числа*)
```

```
{Integer, Rational, Real, Complex}
```

Всъщност, функцията Head дава информация за вида на всеки въведен израз:

```
Head[a + b]
```

```
Plus
```

```
Head[a * b]
```

```
Times
```

```
Head[{1, 2, 3}]
```

```
List
```

Трите основни градивни единици на изразите (т.нар атоми (*atoms*)) са символи (*symbols*), числа (*numbers*) и символни низове (*strings*).

```
Head[a]
```

```
Symbol
```

```
Head[Integrate]
```

```
Symbol
```

```
Head[FindMaximum]
```

```
Symbol
```

```
Head["Hello"]
```

```
String
```

```
Head[a + b + b] (*Един израз може да съдържа произволен брой операции в себе си.*)
```

```
Plus
```

За да видим пълното представяне на даден израз в паметта на системата можем да използваме **FullForm**:

```
FullForm[a + b + c]
```

```
Plus[a, b, c]
```

```
FullForm[a^b]
```

```
Power[a, b]
```

```
FullForm[a / b]
```

```
Times[a, Power[b, -1]]
```

Както забелязваме, всички изрази имат сходно представяне в паметта. Те имат структурата на вградени функции.

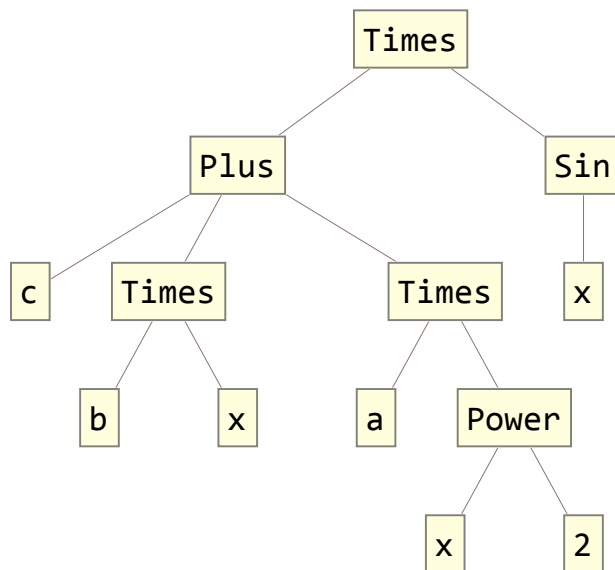
```
expression = Sin[x] (a x2 + b x + c);
```

```
FullForm[expression]
```

```
Times[Plus[c, Times[b, x], Times[a, Power[x, 2]]], Sin[x]]
```

Когато разглеждаме по-сложни изрази, удобно е да използваме дървовидното им представяне - то дава по-ясна представа за последователността на операциите.

TreeForm[expression]



Дефиниране на променливи и функции от потребителя

```
a = 5; (*";" - потиска резултата от операцията*)
```

```
b = 10;
```

```
a + b
```

```
15
```

```
? a
```

```
Global`a
```

Важно е да обърнем внимание, че дадена променлива не се дефинира само за текущия файл, а за цялата сесия на програмата, т.е. ако отворим друг файл и в него използваме променливата *a*, то тя ще има стойност 5. Съществуват механизми за специфициране на обхвата на действие на дадена променлива, с които ще се запознаем по-нататък.

```
Clear[a] (*Изчиства от паметта записаната в a стойност*)
```

```
a
```

```
a
```

```
list = {1, 2, 3, 4, 5};
```

В *Mathematica* елементите на списъците се достъпват с помощта на **двойни** квадратни скоби и индексването започва от 1.


```
list[[5]]
```

```
5
```

```
list[5]
```

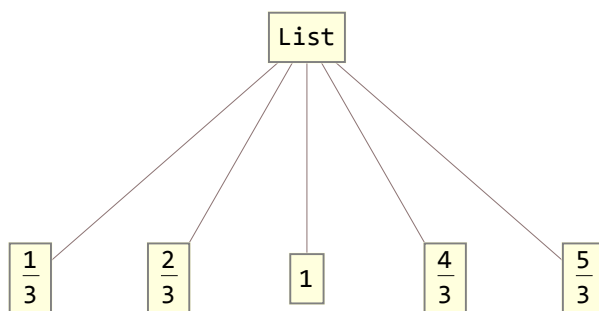
```
{1, 2, 3, 4, 5}[5]
```

Тъй като вътрешното представяне на всички изрази има списъчна структура, то при опит да достъпим нулев индекс от даден списък, получаваме като резултата *Head* на този израз:

```
list[[0]]
```

```
List
```

```
TreeForm[list/3]
```



```
list2 = {1, 2, abv, {a, rr}, 55}; (*елементи от произволен тип*)
```

```
list/3 (*Поелементно пресмятане*)
```

```
{1/3, 2/3, 1, 4/3, 5/3}
```

Работа с множества

```
A = {a, a, c, f, f, 1};
```

```
B = {a, c, d, d, f};
```

```
Union[A, B]
```

```
{a, c, d, f, 1}
```

```
A ∪ B
```

```
{a, c, d, f, 1}
```

```
Intersection[A, B]
```

```
{a, c, f}
```

```
A ∩ B
```

```
{a, c, f}
```

```
{a, c, f}
```

```
{a, c, f}
```

```
Complement[A, B]
```

```
{1}
```

Дефиниране на функции

$$f[x_] = \frac{1}{1+x};$$

Изразът $f[x_]$ в лявата част на дефиницията се нарича *образец (pattern)* и служи за индикация на класа от изрази, върху които функцията може да действа. В частност, $x_$ е образец, който означава *произволен израз (any expression)*, т.е. функцията може да приема като параметър произволен обект от системата.

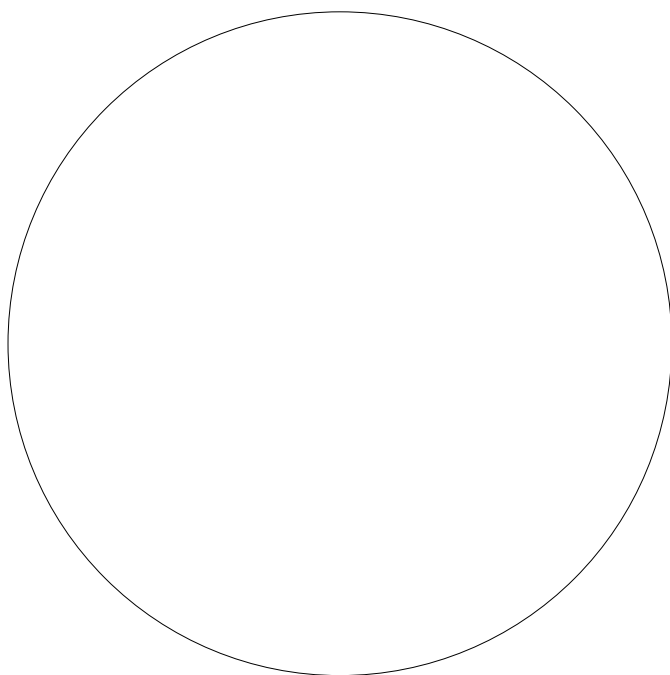
`f[5]`

$\frac{1}{6}$

`f[0.7]`

0.588235

`circle = Graphics[Circle[{0, 0}, 0.1]]`



`f[circle]`

$$\frac{1}{1 + \text{circle}}$$

Има два начина за дефиниране на функции (и изобщо за присвояване на стойност): $lhs=rhs$ и $lhs:=rhs$. Основната разлика между двете е *кога* се пресмята изразът rhs .

$lhs=rhs$ е незабавно присвояване (*immediate assignment*), при което изчислението,

записано в *rhs* се прави еднократно, в момента на присвояване.

lhs:=rhs е отложено присвояване (*delayed assignment*), при което оценяването на дясната страна **не** се извършва в момента на присвояване, а се прави всеки път, коагто *lhs* е извикана.

```
randRealSet = RandomReal[]
```

```
0.0729306
```

```
randRealSetDelayed := RandomReal[]
```

```
randRealSetDelayed
```

```
0.913745
```

```
randRealSetDelayed
```

```
0.550765
```

```
randRealSet
```

```
0.0729306
```

```
f[x_] = Expand[(x + 1)^2];
```

```
q[x_] := Expand[(x + 1)^2];
```

```
? f
```

```
Global`f
```

```
f[x_] = 1 + 2 x + x^2
```

```
? q
```

```
Global`q
```

```
q[x_] := Expand[(x + 1)^2]
```

```
f[5]
```

```
q[5]
```

```
36
```

```
36
```

```
Trace[f[5]]
```

```
{f[5], 1 + 2 × 5 + 5^2, {2 × 5, 10}, {5^2, 25}, 1 + 10 + 25, 36}
```

```
Trace[q[5]]
```

```
{q[5], Expand[(5 + 1)^2], {{5 + 1, 6}, 6^2, 36}, Expand[36], 36}
```

Обикновено, когато знаем конкретната стойност, която искаме да присвоим на дадена променлива, използваме “=”. Ако искаме да зададем правило, по което тази стойност да се пресмята, използваме “:=”.

При дефиниране на функции, е по-добре да се използва “:=”, тъй като често пъти, за пресмятанията в тялото на функцията е необходимо да се знае фактическата стойност на някой от параметрите. Ако тя е неизвестна, това би могло да доведе до некоректни

резултати:

```
func[1_] = Length[1]^2;
testList = {1, 2, 3};
func[testList]
0

func2[1_] := Length[1]^2;
func2[testList]
9
```

Въпреки че при дефиниране на функции стандартно трябва да се използва “:=”, има случаи, в които употребата му може да доведе до нежелани ефекти. Това се дължи на факта, че при отложеното оценяване, първо се замества същинската стойност на параметъра, а след това се извършват пресмятанията:

```
fff[x_] := D[Log[Sin[x]]^2, x]
fff[1]
General: 1 is not a valid variable.
 $\partial_1 \text{Log}[\text{Sin}[1]]^2$ 

ff[x_] = D[Log[Sin[x]]^2, x]
2 Cot[x] Log[Sin[x]]

ff[1]
2 Cot[1] Log[Sin[1]]
```

Типът на израза, който дадена функция приема като аргумент, може да бъде указан изрично при дефиницията. За да бъдем съвсем точни - след долната черта се указва *Head* на съответния израз:

```
g[x_Real] := Sqrt[5] * x^2
g[0.2]
0.0894427

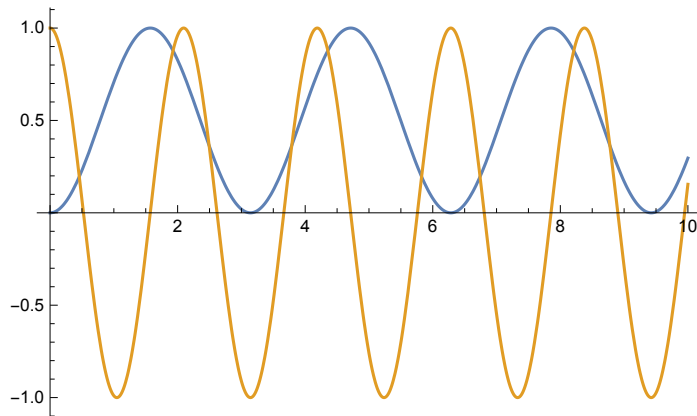
g[2] (*Ако извикаме функцията със същински параметър,
който не принадлежи към съответния клас,
указан в дефиницията, изчислението няма да бъде изпълнено.*)
g[2]

cc
```

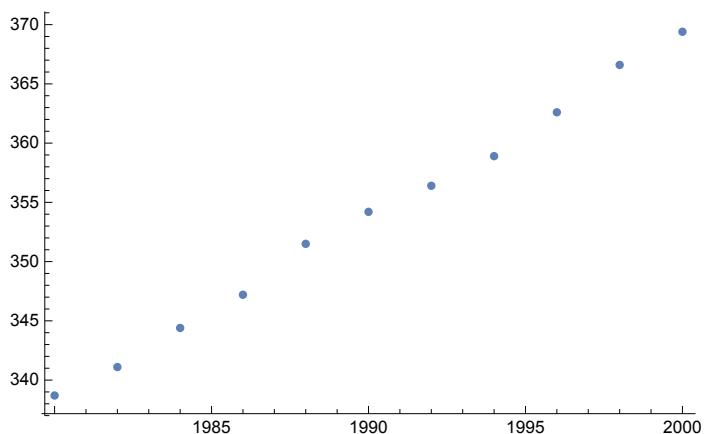
Графики на функции

```
func[x_] := Sin[x]^2
func2[x_] := Cos[3 x];
```

```
Plot[{func[x], func2[x]}, {x, 0, 10}]
```



```
data1 = {{1980, 338.7}, {1982, 341.1}, {1984, 344.4},
         {1986, 347.2}, {1988, 351.5}, {1990, 354.2}, {1992, 356.4},
         {1994, 358.9}, {1996, 362.6}, {1998, 366.6}, {2000, 369.4}};
plot1 = ListPlot[data1]
```



Четири вида скоби

Кръгли скоби () - определят приоритета на операциите;
 Квадратни скоби [] - заграждат аргументите на функция/команда;
 Фигурни скоби { } - заграждат елементите на списък;
 Двойни квадратни скоби [[]] - задават операция по достъпване на елемент от списък.
 (Двойните квадратни скоби са съкратен запис на функцията **Part**.)

Задачи

Зад. 1 Пресметнете:

а) $\sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{x-y}$ за $x=5.1$ и $y=3.14$;

б) $\sqrt{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}}$ при $x=1.1$ и $y=3.14$.

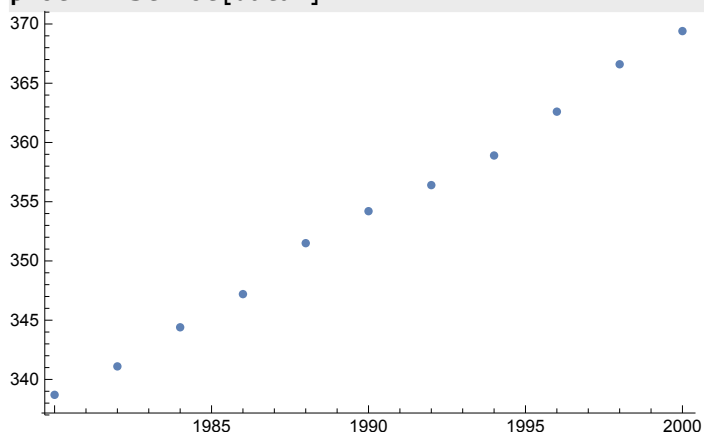
Зад. 2 Пресметнете точно, а след това и числено стойността на следните изрази:

а) $\frac{[23^3 - 3(117-48)^2]}{\sqrt{7^5 - 5^7}}$; б) $\cos \frac{319\pi}{12}$; в) $\frac{83!}{111!}$; г) $\ln 2981$;

Зад. 3 Да се пресметне втората производна на функцията $f(x) = \arctg(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})$ и да се начертае графиката на тази производна в интервала $[0, 1]$.

Зад. 4 Дадени са данни за изменението на нивото на въглеродния диоксид в атмосферата. На база на тези данни да се намери функция, която описва процесът. За целта да се използва вградената функция **Fit**. Графиката на получената функция да се начертае на една графика с данните.

```
data1 = {{1980, 338.7}, {1982, 341.1}, {1984, 344.4}, {1986, 347.2}, {1988, 351.5}, {1990, 355.8}, {1992, 359.1}, {1994, 362.4}, {1996, 365.7}, {1998, 369.0}, {2000, 372.3}};
plot1 = ListPlot[data1]
```



Зад. 5 Да се напише функция, която намира корените на квадратно уравнение. Функцията да приема като параметри 3 **реални** числа - коефициентите на квадратния тричлен. С помощта на функцията да се намерят корените на уравнението $2x^2 + 5x + 3 = 0$. Резултатът да се провери графично като се начертаят графиката на квадратната функция заедно с точките в равнината, отговарящи на получените корени.