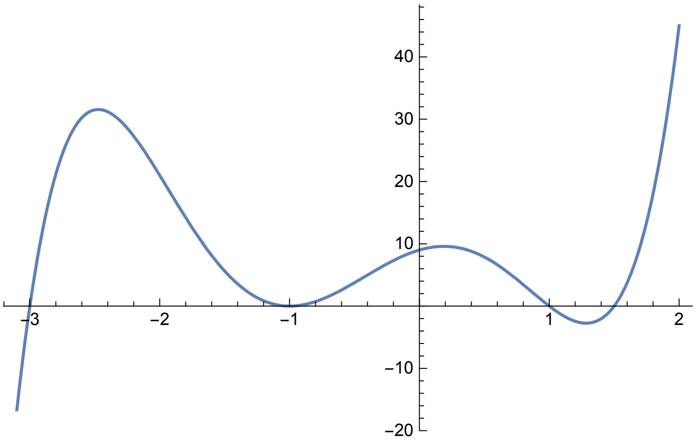
Зад.1 Докажете неравенството между средно аритметично и средно геометрично
$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x\,y}$,
където x и y са неотрицателни реални числа.

```
Simplify[(x + y)/2 ≥ √(x y), {x ≥ 0, y ≥ 0}]
```

```
True
```

Зад.2 Направете предположение за корените на полинома
$p(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$, като начертаете графиката му в подходящ интервал.
Проверете предположенията си, като разложите полинома на неразложими множители.

```
Plot[2 x^5 + 5 x^4 - 8 x^3 - 14 x^2 + 6 x + 9, {x, -3.1, 2}]
```




```
Factor[2 x^5 + 5 x^4 - 8 x^3 - 14 x^2 + 6 x + 9]
```

```
(-1 + x) (1 + x)^2 (3 + x) (-3 + 2 x)
```

Зад.3 Да се напише функция, която приема като параметър комплексно число и връща абсолютната му стойност $|z| = \sqrt{[\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2}$.

(а) Функцията да се тества с числата $z_1 = 2i + 5$ и $z_2 = 4i + 4$, като резултатът се сравни със стойността, която връща съответната вградена функция;

(б) Да се визуализират z_1 и z_2 като точки в комплексната равнина, заедно с отсечките, изобразяващи разстоянието им от центъра на координатната система (отсечките да се начертаят с прекъсната линия) и да се поставят подходящи означения на двете оси.

Допълнителна задача: Да се напише функция, която за произволно комплексно число, визуализира графиката, описана в подточка (б).

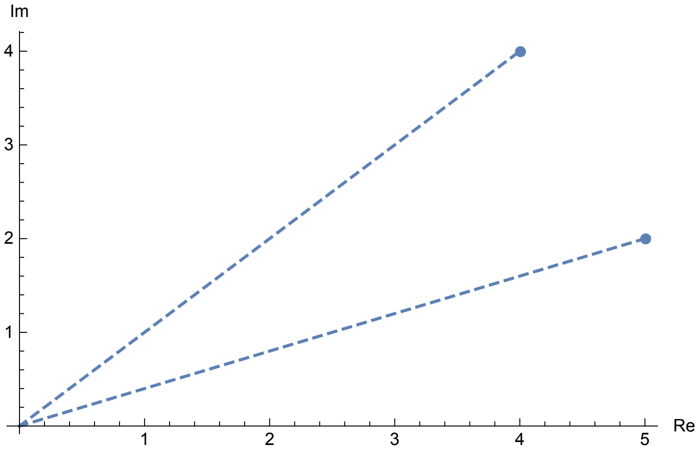
```
findModulus[z_] := √((Re[z])^2 + (Im[z])^2)
```

```
findModulus[2 ⅈ + 5] == Abs[2 ⅈ + 5]
findModulus[4 ⅈ + 4] == Abs[4 ⅈ + 4]
```

```
True
```

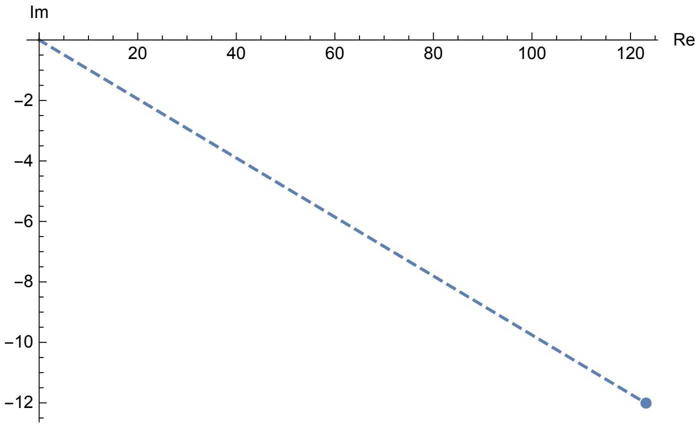
```
True
```

```
Show[ListPlot[{{5, 2}, {4, 4}}, PlotMarkers → Automatic, AxesLabel → {Re, Im}],
 Plot[x, {x, 4, 0}, PlotStyle → Dashed],
 Plot[(2 / 5 x), {x, 0, 5}, PlotStyle → Dashed],
 PlotRange → All, AxesOrigin → {0, 0}]
```




```
complexNumberVisualise[z_] := (
  Show[ListPlot[{{Re[z], Im[z]}}, PlotMarkers → Automatic, AxesLabel → {Re, Im}],
   Plot[Im[z] / Re[z] x, {x, 0, Re[z]}, PlotStyle → Dashed],
   PlotRange → All, AxesOrigin → {0, 0}]
 )
```

```
complexNumberVisualise[-12 ⅈ + 123]
```



Зад.4 В една държава, дължимият данък върху доходите на дадено лице се изчислява както следва.

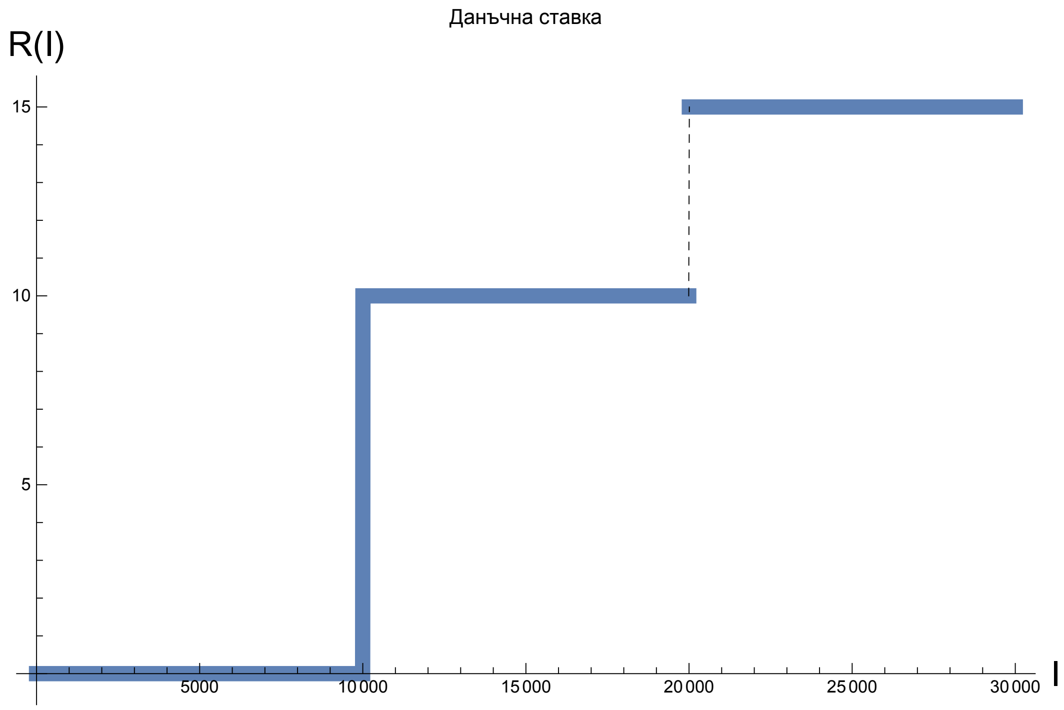
Доходи на стойност до \$10 000 не се облагат с данъци. Доходи между \$10 000 и \$20 000 се облагат с 10% от получената сума, а за доходи над \$20 000, данъкоплатците дължат на държавата 15% от получената сума.

(а) Да се дефинира данъчната ставка (дължимия данък в проценти) като функция на дохода и да се начертае графиката на тази функция;

(б) Да се начертае графика на дължимата сума по данъка като функция на дохода.

Да се свържат отделните части на функцията с прекъсната линия и да се добавят подходящи заглавия на фигурите и осите.

```
R[x_] := ⎧ 0    x ≤ 10000
         ⎨ 10   10000 < x ≤ 20000
         ⎩ 15   True
GraphicsRow[{Plot[R[x], {x, 0, 30000}, Exclusions → {10000, 20000},
   ExclusionsStyle → Dashed, PlotStyle → Thickness[0.015],
   PlotLabel → "Данъчна ставка", AxesLabel → {"I", "R(I)"}],
Plot[R[x]/100 x, {x, 0, 30000}, Exclusions → {10000, 20000},
   ExclusionsStyle → Dashed, PlotStyle → Thickness[0.015],
   PlotLabel → "Начислен данък", AxesLabel → {"I", "T(I)"}]}]
```



Зад.5 Основният математически труд на италианския математик Джироламо Кардано е свързан с решаването на полиномиални уравнения от трета и четвърта степен. Опитите му да намери аналитично решение на уравненията от трета степен водят до откриването на имагинерните числа, но те стават популярни доста по-късно, след публикации на други математици.

Формулата на Кардано

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

дава един от корените на кубично уравнение от вида

$$x^3 + p\,x + q = 0. \qquad (1)$$

Проверете дали кубичния полином (2 - $\sqrt{3}$ + x) (-4 + x)(2 + $\sqrt{3}$ + x) е от вида (1). Ако да, пресметнете един от корените му по формулата на Кардано.

```
Expand[(2 - √3 + x) (-4 + x) (2 + √3 + x)]
```

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\ \text{/. }\{p \to -15,\ q \to -4\}$$

$-4 - 15\,x + x^3$

4