Зад. 1 Да се пресметне производната на функцията

f(x) = x^3- cos x $\sqrt{2x-8}$,

като се използва дефиницията за производна. Резултатът да се провери с помощта на вградената функция за диференциране.

```
f[x_] := x^3 - Cos[x] Sqrt[2 x - 8]
Limit[(f[x + h] - f[x])/h, h → 0] // Factor
D[f[x], x] // Factor
```

$$\frac{6\sqrt{-4+x}\,x^2-\sqrt{2}\,\mathrm{Cos}[x]-8\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}[x]+2\sqrt{2}\,x\,\mathrm{Sin}[x]}{2\sqrt{-4+x}}$$

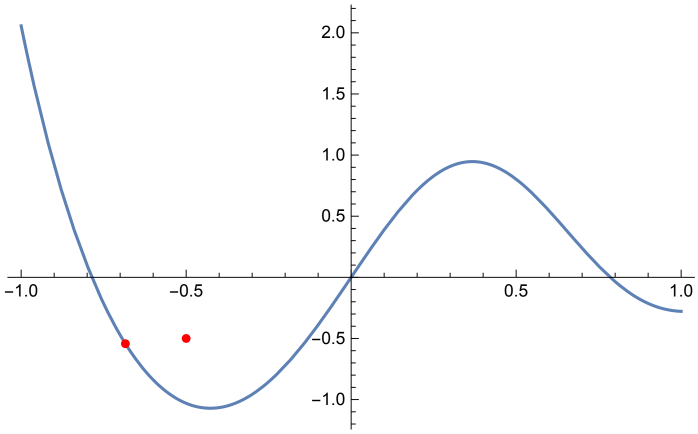
$$\frac{6\sqrt{-4+x}\,x^2-\sqrt{2}\,\mathrm{Cos}[x]-8\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}[x]+2\sqrt{2}\,x\,\mathrm{Sin}[x]}{2\sqrt{-4+x}}$$

Зад.2 Да се анимира приближението на функцията sin(x) + cos(x) в интервала [0,10], с полиноми на Тейлър от степени от 1 до 30 последователно, около т. $x_0 = 0$.
На всяка стъпка от анимацията да се визуализират едновременно графиката на функцията и графика на съответното приближение.

```
f[x_] := Sin[x] + Cos[x];
x0 = 0;
Manipulate[Plot[
  {f[x], f[x0] + Sum[ReplaceAll[D[f[xx], {xx, k}], xx → x0] (x - x0)^k / k!, {k, 1, order}]},
  {x, 0, 10}, PlotRange → {{0, 10}, {-3, 3}}],
 {order, 1, 30, 1}
]
```

Зад. 3 Да се намери точката от графиката на функцията $g(x) = \frac{\sin(4x)}{e^{x^3}}$, намираща се на най-малко разстояние от точката с координати (-0.5, 0.5).

```
g[x_] := Sin[4 x]/Exp[x^3];
distance[x_] := Sqrt[(x + 0.5)^2 + (g[x] + 0.5)^2]
mindData = Minimize[distance[x], x];
Show[Plot[Sin[4 x]/Exp[x^3], {x, -1, 1}],
 ListPlot[{{x, g[x]} /. mindData[[2]], {-0.5, -0.5}}, PlotStyle → Red]
]
```



Зад.4 Телескопът Хъбъл е изстрелян на 24.04.1990 от космическата совалка Discovery. Скоростта на Discovery по време на тази мисия от момента на изстрелване *t=0,* до момента на отделяне на ракетните двигатели *t=126*, може да се моделира с помощта на функцията

$v(t) = 0.001302\, t^3 - 0.09029\, t^2 + 23.61\, t - 3.083.$

Като изпозлвате този модел, оценете стойностите на минималното и максималното ускорение на совалката между моментите на излитане и отделяне на ракетните двигатели.

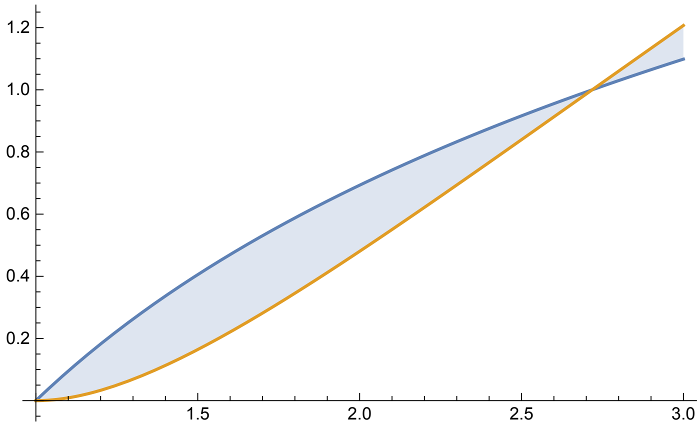
```
v[t_] := 0.001302 t^3 - 0.09029 t^2 + 23.61 t - 3.083;
Maximize[v'[t], 0 ≤ t ≤ 126, t]
Minimize[v'[t], 0 ≤ t ≤ 126, t]
```

```
{62.8686, {t → 126.}}

{21.5229, {t → 23.1157}}
```

Зад.5 Да се намери лицето на фигурата, заградена от графиките на функциите y=ln(x) и $y = \ln^2(x)$.

```
Plot[{Log[x], Log[x]^2}, {x, 1, 3}, Filling → {1 → {2}}]
Solve[Log[x] == Log[x]^2, x]
area = Integrate[Log[x] - Log[x]^2, {x, 1, E}]
```



{{x → 1}, {x → e}}

3 - e

Зад.2 Известно е, че червените кръвни телца (еритроцити) на бозайниците, в спокойно състояние имат формата на двойно-сплеснат диск. Благодарение на тази форма, площта на повърхнината на еритроцитите е много голяма в сравнение с обема им.

Това спомага кислородът и въглеродният диоксид да дифундират по-лесно през мембранта на клетките, като същеврменно размерите и гъвкавостта им, им позволяват да преминават дори през най-малките кръвоносни съдове. Един възможен начин да се опише геометричната форма на еритроцитите е следният:

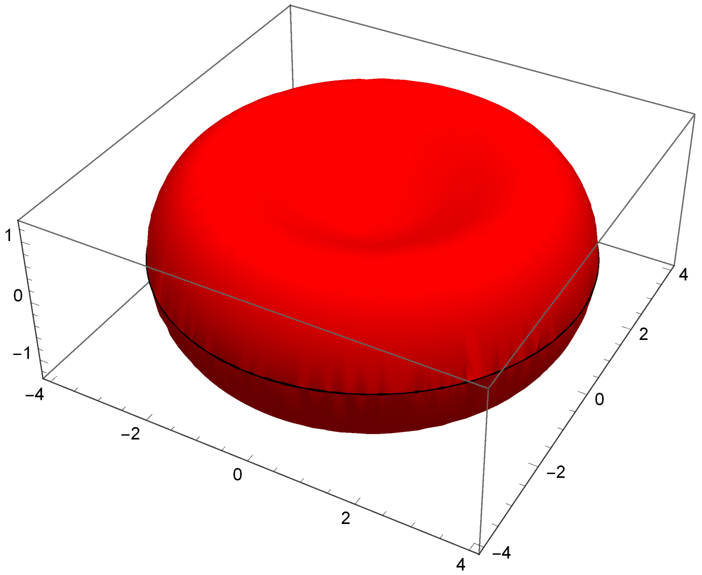
$$z = \pm D_0 \sqrt{1 - \frac{4(x^2+y^2)}{D_0^2}} \left(a_0 + \frac{a_1(x^2+y^2)}{D_0^2} + \frac{a_2(x^2+y^2)^2}{D_0^4}\right),$$

където $D_0 = 7.82\,\mu m$ е диаметърът на клетката, а $a_0 = 0.0518$, $a_1 = 2.0026$, и $a_2 = -4.491$ са експериментално установени параметри. Да се изобрази графично формата на клетката и да се пресметне обема и.

```
D0 = 7.82; a0 = 0.0518; a1 = 2.0026; a2 = -4.491;
```

$$\text{RBCshape}[x\_,\ y\_] := D0\sqrt{1-\frac{4\left(x^2+y^2\right)}{D0^2}}\left(a0+\frac{a1\left(x^2+y^2\right)}{D0^2}+\frac{a2\left(x^2+y^2\right)^2}{D0^4}\right)$$

```
Plot3D[{-RBCshape[x, y], RBCshape[x, y]},
 {x, -4, 4}, {y, -4, 4}, PlotStyle → Red, Mesh → None]
```




```
(*Първи начин: Намираме проекцията на двете повърхнини в равнината x-
   y и определяме границите на интегриране*)
```

$$\text{Quiet}\left[\text{Reduce}\left[D0\sqrt{1-\frac{4\left(x^2+y^2\right)}{D0^2}}\left(a0+\frac{a1\left(x^2+y^2\right)}{D0^2}+\frac{a2\left(x^2+y^2\right)^2}{D0^4}\right) == 0,\ \{x,\ y\},\ \text{Reals}\right]\right]$$

$$-3.91 \le x \le 3.91\ \&\&\ \left(y == -0.01\sqrt{152881.-10000.\ x^2}\ \|\ y == 0.01\sqrt{152881.-10000.\ x^2}\right)$$

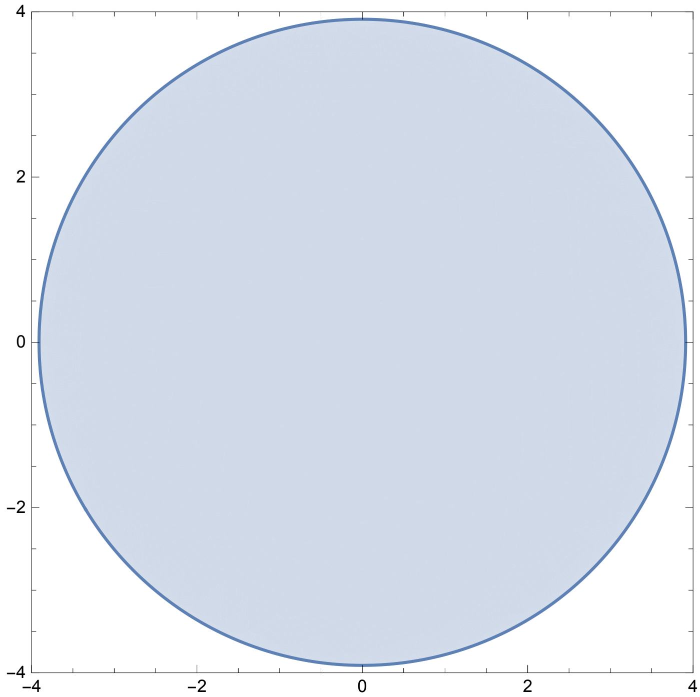
$$\text{volume} = 2 * \text{NIntegrate}\left[\text{RBCshape}[x,\ y],\ \{x,\ -3.91,\ 3.91\},\ \left\{y,\ -0.01\text{`}\sqrt{152881.\text{`}-10000.\text{`}\ x^2},\ 0.01\text{`}\sqrt{152881.\text{`}-10000.\text{`}\ x^2}\right\}\right]$$

94.0984

```
(*Втори начин: С помощта на получения резултат, дефинираме геометричната област,
представялваща проекцията, и я използваме директно във функцията Integrate*)
```

$$\text{reg} = \text{ImplicitRegion}\left[-3.91 \le x \le 3.91\ \&\&\ -0.01\text{`}\sqrt{152881-10000\,x^2} \le y <= 0.01\text{`}\sqrt{152881-10000\,x^2},\ \{x,\ y\}\right];$$

```
RegionPlot[reg, PlotRange → {{-4, 4}, {-4, 4}}]
```




```
volume = 2 * NIntegrate[RBCshape[x, y], {x, y} ∈ reg]
```

94.0984

```
(*Трети и четвърти начин: троен интеграл*)
```

$$\text{NIntegrate}\Big[1, \{x, -3.91, 3.91\}, \{y, -0.01\grave{}\sqrt{152881.\grave{} - 10000.\grave{}\, x^2}, 0.01\grave{}\sqrt{152881.\grave{} - 10000.\grave{}\, x^2}\}, \left\{z, -D0\sqrt{1-\frac{4\left(x^2+y^2\right)}{D0^2}}\left(a0+\frac{a1\left(x^2+y^2\right)}{D0^2}+\frac{a2\left(x^2+y^2\right)^2}{D0^4}\right), D0\sqrt{1-\frac{4\left(x^2+y^2\right)}{D0^2}}\left(a0+\frac{a1\left(x^2+y^2\right)}{D0^2}+\frac{a2\left(x^2+y^2\right)^2}{D0^4}\right)\right\}\Big]$$

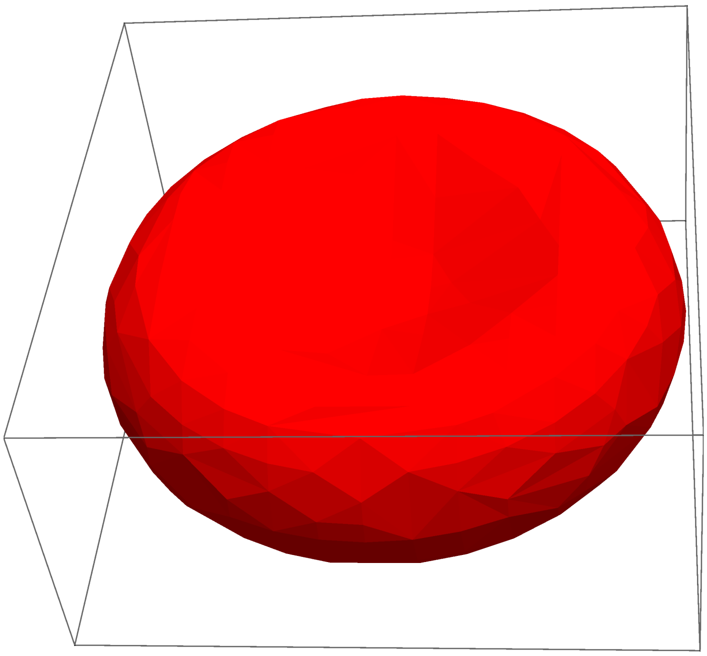
94.0984

```
reg3D = ImplicitRegion[-3.91 ≤ x ≤ 3.91 &&
    -0.01` Sqrt[152881.` - 10000.` x^2] ≤ y <= 0.01` Sqrt[152881.` - 10000.` x^2] &&
```

$$-D0\sqrt{1-\frac{4\left(x^2+y^2\right)}{D0^2}}\left(a0+\frac{a1\left(x^2+y^2\right)}{D0^2}+\frac{a2\left(x^2+y^2\right)^2}{D0^4}\right)\le$$

$$z\le D0\sqrt{1-\frac{4\left(x^2+y^2\right)}{D0^2}}\left(a0+\frac{a1\left(x^2+y^2\right)}{D0^2}+\frac{a2\left(x^2+y^2\right)^2}{D0^4}\right),\ \{x,y,z\}];$$

```
RegionPlot3D[reg3D, PlotRange → {{-4, 4}, {-4, 4}, {-2, 2}}, PlotStyle → Red]
```



```
NIntegrate[1, {x, y, z} ∈ reg3D]
```

94.0984

```
(*Пети начин: функцията Volume*)
Volume[reg3D]
```

94.0984

```
(*Можем да пресметнем и лицето на повърхнината на клетката*)
2 * NIntegrate[Sqrt[D[RBCshape[x, y], x]^2 + D[RBCshape[x, y], y]^2 + 1],
   {x, -3.91, 3.91}, {y, -0.01` Sqrt[152881.` - 10000.` x^2], 0.01` Sqrt[152881.` - 10000.` x^2]}]
```

134.093