

BÀI TOÁN ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

- Các khái niệm
- Thuật toán Dijkstra
- Thuật toán Floyd-Warshall

CÁC KHÁI NIỆM

- Cho đồ thị $G=(V, E)$ có trọng số, $|V|=n$, $|E|=m$
 - Nếu $(u, v) \in E$ thì $w(u, v) = \alpha < \infty$
 - Ngược lại $(u, v) \notin E$ thì coi $w(u, v) = \infty$
 - Trọng số của đường đi $P=v_0, v_1, \dots, v_k$ là $w(P)=\sum_{i=1, k} w(v_{i-1}, v_i)$

CÁC KHÁI NIỆM

- Trọng số của đường đi ngắn nhất từ u đến v là
- $d(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p)\}, & \text{nếu có đường đi } p \text{ từ } u \text{ đến } v \\ \infty & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$
- Một đường đi p từ u đến v mà $w(p) = d(u, v)$ gọi là đường đi ngắn nhất từ u đến v (cũng gọi $d(u, v)$ là khoảng cách từ u đến v)

THUẬT TOÁN DIJKSTRA

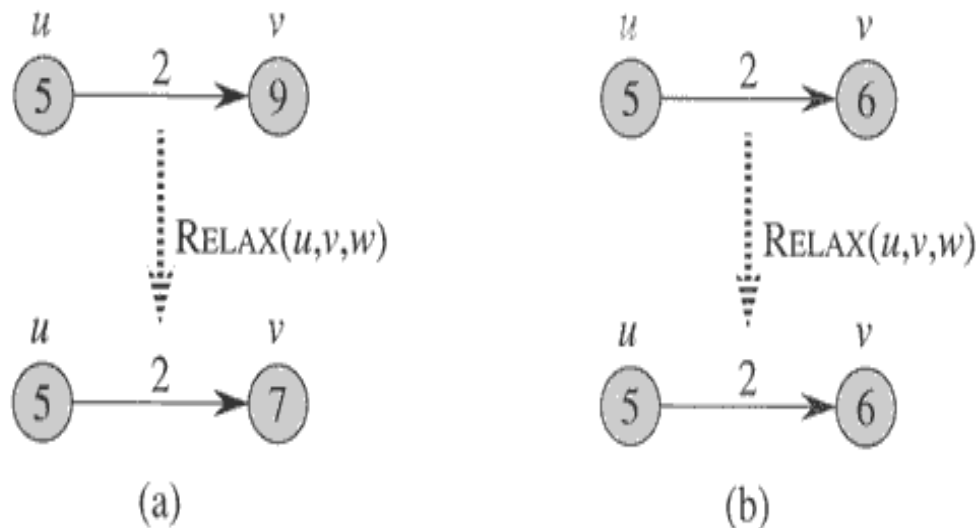
- **Bài toán:** Tìm các đường đi ngắn nhất từ một đỉnh s đến mọi đỉnh khác trong một đồ thị có trọng số không âm

THUẬT TOÁN DIJKSTRA

Ý tưởng

- Ký hiệu $d[v]$ là một cận trên của $d(s,v)$, thuật toán kiểm tra và giảm $d[v]$ cho đến khi $d[v]=d(s, v)$
 - Nếu $d[v]>d[u]+w(u,v)$ thì làm tốt cận trên $d[v]$ bằng cách gán $d[v]= d[u]+w(u,v)$ (gọi là relaxation)
 - Nếu $d[v]$ đã tốt nhất thì đưa v vào trong tập $S = \{v \in V \mid d[v] = d(s, v)\}$, lúc này $d[v]$ là độ dài đường đi ngắn nhất từ s đến v

THUẬT TOÁN DIJKSTRA



Nếu $d[v] > d[u] + w(u, v)$
thì gán $d[v] = d[u] + w(u, v)$

Figure 24.3 Relaxation of an edge (u, v) with weight $w(u, v) = 2$. The shortest-path estimate of each vertex is shown within the vertex. (a) Because $d[v] > d[u] + w(u, v)$ prior to relaxation, the value of $d[v]$ decreases. (b) Here, $d[v] \leq d[u] + w(u, v)$ before the relaxation step, and so $d[v]$ is unchanged by relaxation.

THUẬT TOÁN DIJKSTRA

RELAX(u, v, w)

```
1  if  $d[v] > d[u] + w(u, v)$   
2      then  $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$   
3           $\pi[v] \leftarrow u$ 
```

THUẬT TOÁN DIJKSTRA

DIJKSTRA(G, w, s)

```
1  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
2   $S \leftarrow \emptyset$ 
3   $Q \leftarrow V[G]$ 
4  while  $Q \neq \emptyset$ 
5      do  $u \leftarrow \text{EXTRACT-MIN}(Q)$ 
6           $S \leftarrow S \cup \{u\}$ 
7          for each vertex  $v \in \text{Adj}[u]$ 
8              do RELAX( $u, v, w$ )
```


THUẬT TOÁN DIJKSTRA

INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)

```
1  for each vertex  $v \in V[G]$ 
2      do  $d[v] \leftarrow \infty$ 
3       $\pi[v] \leftarrow \text{NIL}$ 
4   $d[s] \leftarrow 0$ 
```

THUẬT TOÁN DIJKSTRA

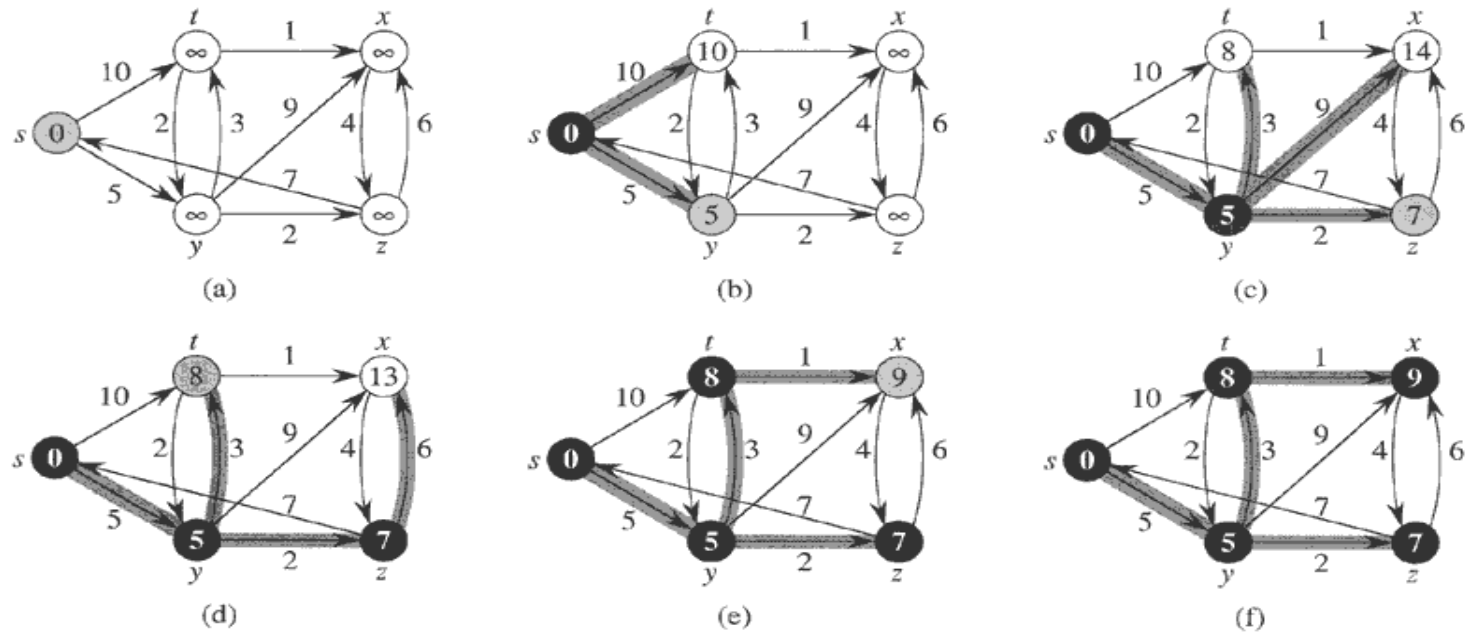


Figure 24.6 The execution of Dijkstra's algorithm. The source s is the leftmost vertex. The shortest-path estimates are shown within the vertices, and shaded edges indicate predecessor values. Black vertices are in the set S , and white vertices are in the min-priority queue $Q = V - S$. (a) The situation just before the first iteration of the **while** loop of lines 4–8. The shaded vertex has the minimum d value and is chosen as vertex u in line 5. (b)–(f) The situation after each successive iteration of the **while** loop. The shaded vertex in each part is chosen as vertex u in line 5 of the next iteration. The d and π values shown in part (f) are the final values.

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

- **Bài toán:** Tìm các đường đi ngắn nhất giữa mọi cặp đỉnh của đồ thị $G = (V, E)$

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

- **Ý tưởng**

- Gọi $d_{ij}^{(k)}$ là độ dài đường đi ngắn nhất P từ i đến j, qua nhiều nhất k đỉnh trung gian, thì

- $w(P)=d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w(i,j), & \text{nếu } k = 0 \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}), & \text{nếu } k > 0 \end{cases}$

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

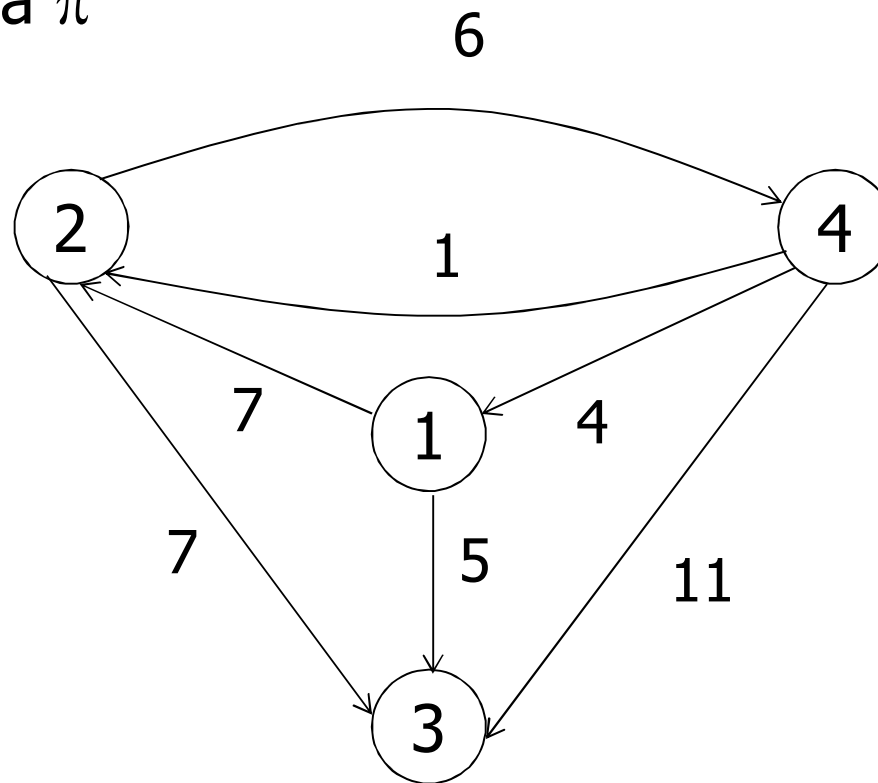
- Ma trận $D^{(n)} = (d_{ij}^{(n)})$ là ma trận khoảng cách (độ dài đường đi ngắn nhất giữa các cặp đỉnh i và j)
- Giải thuật tính $d_{ij}^{(1)}, d_{ij}^{(2)}, \dots, d_{ij}^{(n-1)}$ và $d_{ij}^{(n)}$ qua một vòng lặp $k=1, 2, \dots, n$
- Các ma trận $\pi^{(k)} = (\pi_{ij}^{(k)})$ là các ma trận đường đi tương ứng qua nhiều nhất k đỉnh trung gian (với $k=0$, $\pi_{ij}^{(0)} = j$ nếu có cạnh (i, j) và $\pi_{ij}^{(0)} = 0$ nếu ngược lại)

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

```
Floyd-Warshall(G, W)  //  $\pi_{ij}$  là đỉnh trước j (sau i)
1  n  $\leftarrow$  rows[W[G]]
2  D  $\leftarrow$  W
3  for i  $\leftarrow$  1 to n
4      do for j  $\leftarrow$  1 to n
5          do if w(i, j) <  $\infty$  then  $\pi_{ij} \leftarrow j$  else  $\pi_{ij} \leftarrow 0$ 
6  for k  $\leftarrow$  1 to n
7      do for i  $\leftarrow$  1 to n
8          do for j  $\leftarrow$  1 to n
9              do if  $d_{ij} > d_{ik} + d_{kj}$ 
9                  then  $d_{ij} \leftarrow d_{ik} + d_{kj}$ 
11                      $\pi_{ij} \leftarrow \pi_{ik}$ 
12  return D
```

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

Tính D và π



THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

k= 0

$D^{(0)}$

∞	7	5	∞
∞	∞	7	6
∞	∞	∞	∞
4	1	11	∞

$\pi^{(0)}$

0	2	3	0
0	0	3	4
0	0	0	0
1	2	3	0

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

k= 1

$D^{(1)}$

∞	7	5	∞
∞	∞	7	6
∞	∞	∞	∞
4	1	9	∞

$\pi^{(1)}$

0	2	3	0
0	0	3	4
0	0	0	0
1	2	1	0

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

k= 2

$D^{(2)}$

∞	7	5	13
∞	∞	7	6
∞	∞	∞	∞
4	1	8	7

$\pi^{(2)}$

0	2	3	2
0	0	3	4
0	0	0	0
1	2	2	2

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

k= 3

$D^{(3)}$

∞	7	5	13
∞	∞	7	6
∞	∞	∞	∞
4	1	8	7

$\pi^{(3)}$

0	2	3	2
0	0	3	4
0	0	0	0
1	2	2	2

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

k= 4

$D^{(4)}$

17	7	5	13
10	7	7	6
∞	∞	∞	∞
4	1	8	7

$\pi^{(4)}$

2	2	3	2
4	4	3	4
0	0	0	0
1	2	2	2

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

- Để tìm đường đi ngắn nhất từ i đến j , sử dụng công thức truy hồi:
- $i, \pi_{ij}, \pi_{\pi_{ij} j}, \dots, j$

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

- Ví dụ: $d(1, 4) = D^{(4)}_{1,4} = 13$ nên
 - $1 \rightarrow \pi_{1,4} = 2 \rightarrow \pi_{2,4} = 4$
 - Đường đi ngắn nhất $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

- Đồ thị có hướng sẽ **liên thông mạnh** nếu mọi phần tử không thuộc đường chéo chính trong ma trận khoảng cách có **giá trị hữu hạn**
- Nếu $D^{(n)}_{ij} < \infty$ thì đồ thị có **chu trình chứa đỉnh i**

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

- Để tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị vô hướng thì thay thế cạnh $e=(u, v)$ bởi hai cạnh có hướng (u, v) và (v, u) có cùng trọng số với e