BÀI TOÁN LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

- Mạng và luồng mạng
- Bài toán luồng cực đại
- Phương pháp Ford-Fulkerson

MẠNG VÀ LUỒNG MẠNG

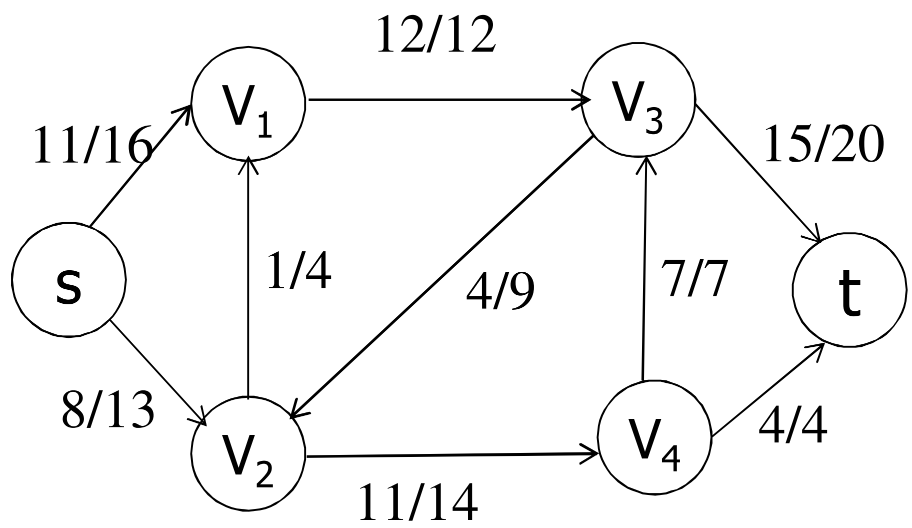
- Mạng (network) là một đồ thị có hướng $G=(V, E)$, có một đỉnh duy nhất không có cung đi vào, gọi là điểm phát (source), có một đỉnh duy nhất không có cung đi ra, gọi là điểm thu (sink) và mỗi cung $e= (u, v) \in E$ được gán một số không âm $c(e)=c(u, v)$ gọi là khả năng thông qua (capacity) của cung e
- Qui ước: Nếu $(u, v) \in E$, thì $(v, u) \notin E$, nếu $(u, v) \notin E$, thì $c(u, v) = 0$, $\forall v \in V$, ta phải có $s \rightsquigarrow v \rightsquigarrow t$

MẠNG VÀ LUỒNG MẠNG

- Giả sử G=(V, E) là một mạng, với các điểm phát và thu là s và t, một luồng mạng (flow network) trong G là một ánh xạ $f: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ thỏa mãn hai tính chất sau:
  - Capacity constraint: $\forall u, v \in V, \; 0 \le f(u,v) \le c(u, v)$
  - Flow conservation: $\forall u \in V-\{s, t\}$, $\sum_{v \in V} f(v,u) = \sum_{v \in V} f(u,v)$
- Khi $(u, v) \notin E$ thì coi $f(u, v)=0$

MẠNG VÀ LUỒNG MẠNG

Một luồng f trên G



MẠNG VÀ LUỒNG MẠNG

- Giá trị một luồng trên mạng G = (V, E) là

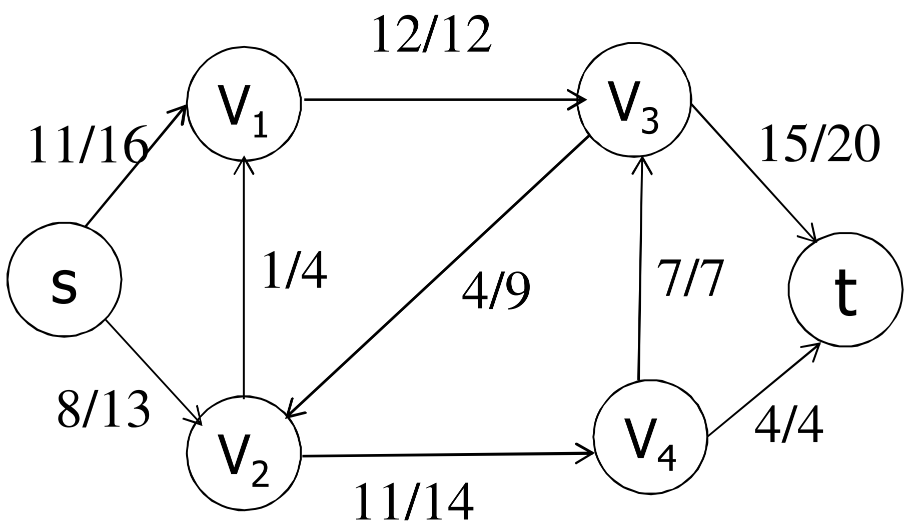
$$|f| = \Sigma_{v \in V} f(s,v) - \Sigma_{v \in V} f(v,s)$$

- Lưu ý: Trường hợp không có cung vào s thì

$$|f| = \Sigma_{v \in V} f(s,v)$$

MẠNG VÀ LUỒNG MẠNG

Giá trị của $|f|=f(s, V_1)+f(s, V_2)=11+8=19$



BÀI TOÁN LUỒNG CỰC ĐẠI

- **Bài toán** (maximum-flow problem): Tìm một luồng mạng có giá trị |f| lớn nhất

PHƯƠNG PHÁP FORD-FULKERSON

- Đồ thị tăng luồng
- Đường tăng luồng
- Lát cắt của luồng mạng
- Giải thuật Ford-Fulkerson

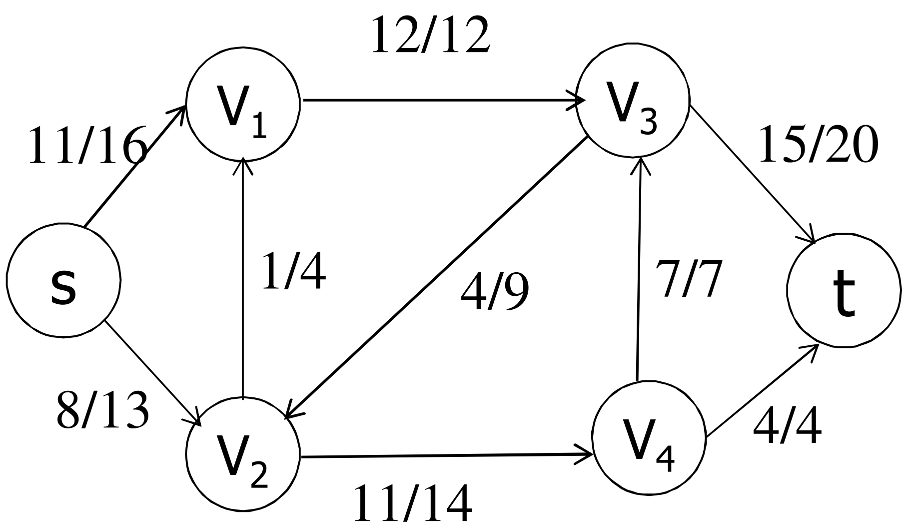
ĐỒ THỊ TĂNG LUỒNG

- Cho một luồng f trong mạng G=(V, E)
  - Với cặp u, v $\in$V, khả năng thông qua còn lại $c_f(u, v)$ của cạnh (u, v) theo f là

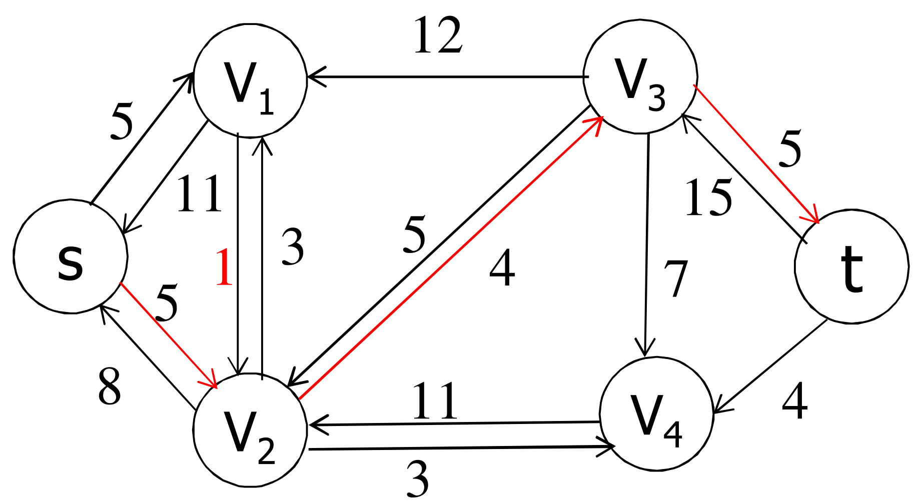
$$c_f(u, v) = \begin{cases} c(u, v)-f(u, v), & \text{nếu } (u, v) \in E \\ f(v, u), & \text{nếu } (v, u) \in E \\ 0, & \text{nếu ngược lại} \end{cases} \qquad (1)$$

  - Đồ thị tăng luồng (residual network) của G theo f là $G_f=(V, E_f)$ trong đó $E_f=\{(u, v)\in V\times V | c_f(u, v)>0\}$

ĐỒ THỊ TĂNG LUỒNG



Luồng mạng



Đồ thị tăng luồng

ĐỒ THỊ TĂNG LUỒNG

- Giả sử f là một luồng trong G=(V, E), f′ là một luồng trong G_f, tăng luồng f theo f′ được định nghĩa như một hàm ($f \uparrow f'$) từ $V \times V$ đến **R** và được xác định

$$(f \uparrow f')(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + f'(u, v) - f'(v, u) & \text{nếu } (u, v) \in E \\ 0, & \text{nếu ngược lại} \end{cases} \qquad (2)$$

ĐỒ THỊ TĂNG LUỒNG

- **Bổ đề 1**: Giả sử f là một luồng trong mạng G=(V, E) và G_f là đồ thị tăng luồng của G theo f, nếu f′ là một luồng trong G_f thì hàm (f↑f’) được định nghĩa trong (2) là một luồng trong G với giá trị |(f↑f’)|=|f|+|f′|
- Chứng minh?

ĐỒ THỊ TĂNG LUỒNG

Chứng minh

- $\forall u, v \in V$

$(f \uparrow f')(u, v) = f(u, v) + f'(u, v) - f'(v, u)$

$\geq f(u, v) + f'(u, v) - f(u, v)$ (vì $f'(v,u) \leq c_f(v,u) = f(u,v)$)

$= f'(u,v) \geq 0$

ĐỒ THỊ TĂNG LUỒNG

- $\forall u, v \in V$, từ định nghĩa của $c_f(u, v)$ ta có

$(f\uparrow f')(u, v) = f(u, v) + f'(u, v) - f'(v, u)$

$\leq f(u, v) + f'(u, v)$

$\leq f(u, v) + c_f(u, v)$ (thỏa ràng buộc thông qua)

$= f(u, v) + c(u, v) - f(u, v)$ (định nghĩa $c_f(u, v)$)

$= c(u, v)$

ĐỒ THỊ TĂNG LUỒNG

- Từ tính chất bảo toàn luồng, $\forall u \in V-\{s, t\}$, ta có
- $\Sigma_{v\in V} (f\uparrow f')(u, v) = \Sigma_{v\in V} (f(u, v)+f'(u, v)-f'(v, u))$

$= \Sigma_{v\in V} f(u, v)+ \Sigma_{v\in V} f'(u, v)-\Sigma_{v\in V} f'(v, u)$

$= \Sigma_{v\in V} f(v, u)+ \Sigma_{v\in V} f'(v, u)-\Sigma_{v\in V} f'(u, v)$

$= \Sigma_{v\in V} (f(v, u)+f'(v, u)-f'(u, v))$

$= \Sigma_{v\in V} (f\uparrow f')(v, u)$

ĐỒ THỊ TĂNG LUỒNG

- Đặt $V_1=\{v|\ (s, v) \in E$, $V_2=\{v|\ (v, s) \in E$, thì $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, từ ĐN giá trị của luồng ta có
- $|f \uparrow f'| = \Sigma_{v\in V} (f\uparrow f')(s, v) - \Sigma_{v\in V} (f\uparrow f')(v, s)$

$$= \Sigma_{v\in V_1} (f\uparrow f')(s, v) - \Sigma_{v\in V_2} (f\uparrow f')(v, s)$$

$$= \Sigma_{v\in V_1} f(s, v) + \Sigma_{v\in V_1} f'(s, v) - \Sigma_{v\in V_1} f'(v, s)$$

$$- \Sigma_{v\in V_2} f(v, s) - \Sigma_{v\in V_2} f'(v, s) + \Sigma_{v\in V_2} f'(s, v)$$

ĐỒ THỊ TĂNG LUỒNG

- $|f \uparrow f'| = \Sigma_{v \in V_1} f(s, v) - \Sigma_{v \in V_2} f(v, s) + \Sigma_{v \in V_1} f'(s, v)$

  $+ \Sigma_{v \in V_2} f'(s, v) - \Sigma_{v \in V_1} f'(v, s) - \Sigma_{v \in V_2} f'(v, s)$

  $= \Sigma_{v \in V_1} f(s, v) - \Sigma_{v \in V_2} f(v, s) + \Sigma_{v \in V_1 \cup V_2} f'(s, v)$

  $- \Sigma_{v \in V_1 \cup V_2} f'(v, s)$

  $= \Sigma_{v \in V} f(s, v) - \Sigma_{v \in V} f(v, s) + \Sigma_{v \in V} f'(s, v) - \Sigma_{v \in V} f'(v, s)$

  $= |f| + |f'|$

ĐƯỜNG TĂNG LUỒNG

- Một đường đi đơn từ s đến t trong đồ thị tăng luồng G_f gọi là một đường tăng luồng

ĐƯỜNG TĂNG LUỒNG

- Mỗi cạnh $(u, v) \in p$ trên G_f có thể nhận một luồng từ u đến v không vượt quá khả năng thông qua $c_f(u, v)$ của nó (và không vi phạm ràng buộc khả năng thông qua $c(u, v)$ trên G)
- Giá trị cực đại có thể tăng luồng thêm (residual capacity) trên đường tăng luồng p trong G_f là

$$c_f(p)= \min\{c_f(u, v) | (u, v) \in p\}$$

ĐƯỜNG TĂNG LUỒNG

- **Bổ đề 2** Giả sử f là một luồng trong mạng G=(V, E) và p là một đường tăng luồng trong G_f, nếu hàm f_p: $V \times V \rightarrow$ **R** được định nghĩa

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p), \text{ nếu } (u, v) \in p \\ 0, \text{ nếu ngược lại} \end{cases} \qquad (3)$$

thì, f_p là một luồng trong G_f có giá trị $|f_p| = c_f(p) > 0$

- Chứng minh (bài tập)

ĐƯỜNG TĂNG LUỒNG

- **Hệ quả 1**: Giả sử f là một luồng trong mạng G=(V, E) và p là một đường tăng luồng trong G_f, nếu hàm f_p được định nghĩa như trong (3) và giả sử f được tăng bởi f_p thì $f \uparrow f_p$ là một luồng trong G có giá trị $|(f \uparrow f_p)| = |f| + |f_p| > |f|$
- Chứng minh (trực tiếp suy ra từ bổ đề 1 và 2)

ĐƯỜNG TĂNG LUỒNG

```
FORD-FULKERSON-METHOD(G, s, t)
initialize flow f to 0
while there exists an augmenting path p
      do augment flow f along p
return f
```

LÁT CẮT CỦA LUỒNG MẠNG

- Một lát cắt của một luồng mạng G=(V, E) là một phân hoạch tập V thành hai tập S và T=V-S sao cho $s \in S$ và $t \in T$
- Nếu f là một luồng, thì giá trị luồng mạng băng qua lát cắt (S, T) được định nghĩa

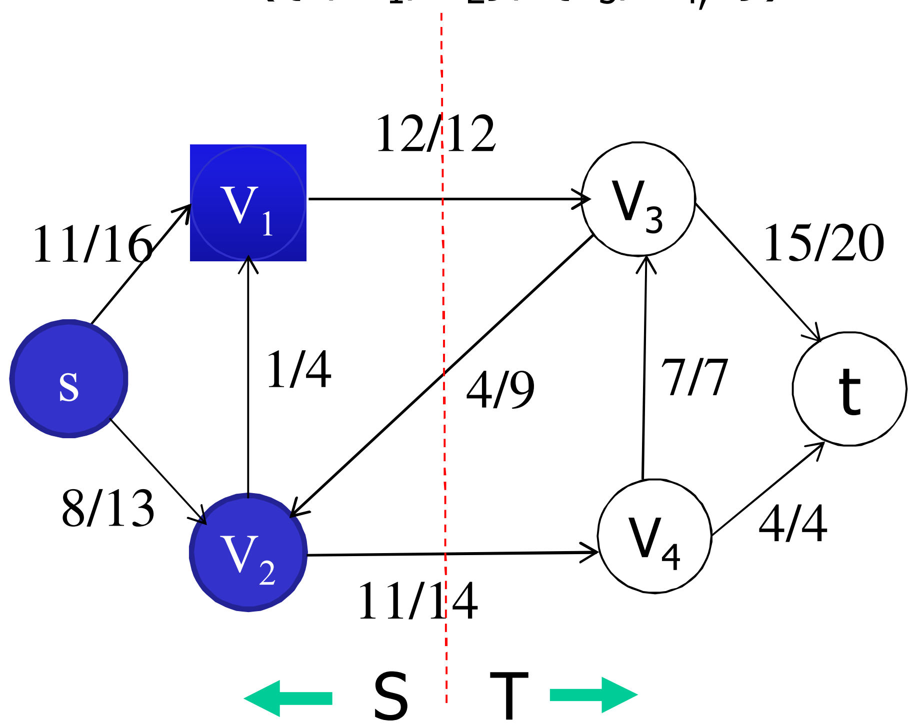
  $$f(S, T)=\sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v)-\sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v,u)$$

- Khả năng thông qua của lát cắt (S, T) là

  $$c(S, T)= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v)$$

LÁT CẮT CỦA LUỒNG MẠNG

Lát cắt ({s, v_1, v_2}, {v_3, v_4, t})



LÁT CẮT CỦA LUỒNG MẠNG

- Luồng qua lát cắt

  $f(S, T)=f(v_1, v_3)+f(v_2, v_4)-f(v_3, v_2)=12+11 - 4=19$

- Khả năng thông qua của lát cắt

  $C(S, T)= c(v_1, v_3)+c(v_2, v_4)=12+14=26$

LÁT CẮT CỦA LUỒNG MẠNG

- **Bổ đề 3**: Giả sử f là một luồng trong G=(V, E) và (S, T) là một lát cắt của G, thì $f(S, T)=|f|$

LÁT CẮT CỦA LUỒNG MẠNG

- **Chứng minh**: Từ điều kiện bảo toàn luồng, $\forall\ u \in V\text{-}\{s.\ t\}$

  ta có $\Sigma_{v\in V}\ f(u, v) - \Sigma_{v\in V}\ f(v, u) = 0$, nên

  $$|f| = \Sigma_{v\in V}\ f(s, v) - \Sigma_{v\in V} f(v, s) + \Sigma_{u\in S-\{s)}(\Sigma_{v\in V}\ f(u, v) - \Sigma_{v\in V}\ f(v,u))$$

  $$= \Sigma_{v\in V}\ f(s, v) - \Sigma_{v\in V} f(v, s) + \Sigma_{u\in S-\{s)}\Sigma_{v\in V}\ f(u, v) - \Sigma_{u\in S-\{s)}\Sigma_{v\in V}\ f(v,u)$$

  $$= \Sigma_{v\in V}\ (f(s, v) + \Sigma_{u\in S-\{s)} f(u, v)) - \Sigma_{v\in V}\ (f(v, s) - \Sigma_{u\in S-\{s)} f(v,u))$$

  $= \Sigma_{v\in V}\ \Sigma_{u\in S} f(u, v) - \Sigma_{v\in V}\ \Sigma_{u\in S} f(v,u)$, vì $V=S\cup T$ và $S\cap T=\varnothing$, nên

  $$= \Sigma_{v\in S}\Sigma_{u\in S} f(u, v) + \Sigma_{v\in T}\Sigma_{u\in S} f(u, v) - \Sigma_{v\in S}\ \Sigma_{u\in S} f(v,u) - \Sigma_{v\in T}\Sigma_{u\in S} f(v,u)$$

LÁT CẮT CỦA LUỒNG MẠNG

- **Chứng minh** (tiếp)

$|f| = \Sigma_{v\in T}\Sigma_{u\in S} f(u, v) - \Sigma_{v\in T}\Sigma_{u\in S} f(v, u)$

$+(\Sigma_{v\in S}\Sigma_{u\in S} f(u, v) - \Sigma_{v\in S}\Sigma_{u\in S} f(v,u))$

Do $= \Sigma_{v\in S}\Sigma_{u\in S} f(u, v) - \Sigma_{v\in S}\Sigma_{u\in S} f(v,u) = 0$

Nên $|f| = \Sigma_{v\in T}\Sigma_{u\in S} f(u, v) - \Sigma_{v\in T}\Sigma_{u\in S} f(v,u) = f(S, T)$

LÁT CẮT CỦA LUỒNG MẠNG

- **Hệ quả 2**: Giá trị của mọi luồng f bị chặn trên bởi khả năng thông qua của lát (S, T) cắt bất kỳ trong mạng G
- Chứng Minh?

LÁT CẮT CỦA LUỒNG MẠNG

Chứng Minh:

- $|f| = f(S, T)$

$= \Sigma_{u\in S}\Sigma_{v\in T}f(u, v) - \Sigma_{u\in S}\Sigma_{v\in T}f(v,u)$

$\leq \Sigma_{u\in S}\,\Sigma_{v\in T}f(u, v)$

$\leq \Sigma_{u\in S}\,\Sigma_{v\in T}c(u, v)$

$= c(S,T)$

LÁT CẮT CỦA LUỒNG MẠNG

- **Định lý**: Nếu f là một luồng trong G=(V, E), với các điểm phát thu s và t, thì các mệnh đề sau là tương đương
  1. f là một luồng mạng cực đại trong G
  2. Đồ thị tăng luồng G_f không có đường tăng luồng
  3. Tồn tại một lát cắt (S, T) sao cho |f| =c(S, T)

LÁT CẮT CỦA LUỒNG MẠNG

Chứng minh

- (1)$\Rightarrow$(2): Giả sử f là luồng cực đại trong G nhưng có đường tăng luồng p trong G_f khi đó tồn tại luồng ($f \uparrow f_p$) trong G bằng cách tăng f theo f_p mà $|(f \uparrow f_p)| > |f|$ $\Rightarrow$ mâu thuẫn $\Rightarrow$ không có đường tăng luồng trong G_f

LÁT CẮT CỦA LUỒNG MẠNG

Chứng minh

- (2)$\Rightarrow$(3): Giả sử G_f không có đường tăng luồng, khi đó G_f không chứa đường đi từ s đến t
  - Gọi S={v$\in$V| có đường đi từ s đến v trong G_f} và T=V-S, thì (S, T) là một lát cắt (t$\notin$S do không có đường đi từ s đến t)
  - Với u $\in$ S và v$\in$T, nếu (u, v)$\in$E ta phải có f(u, v)=c(u, v) (ngược lại thì (u, v)$\in$ E_f và v$\in$ S mâu thuẫn), nếu (v, u)$\in$E ta phải có f(v, u)=0 (ngược lại c_f(u, v)=f(v, u), nên (u, v)$\in$ E_f và v$\in$ S mâu thuẫn)

LÁT CẮT CỦA LUỒNG MẠNG

Chứng minh

- (2)$\Rightarrow$(3): từ đó ta có

$$f(S, T) = \Sigma_{u\in S}\Sigma_{v\in T} f(u, v) - \Sigma_{u\in S}\Sigma_{v\in T} f(v,u)$$

$$= \Sigma_{u\in S}\Sigma_{v\in T} c(u, v) - \Sigma_{u\in S}\Sigma_{v\in T} 0$$

$$= c(S,T)$$

Vậy $|f| = f(S, T) = c(S, T)$

LÁT CẮT CỦA LUỒNG MẠNG

Chứng minh

- (3)$\Rightarrow$(1): Theo hệ quả 2, ta có $|f| \le c(S, T)$ với mọi lát cắt (S, T), theo giả thiết $|f|=c(S, T)$ nên f là luồng cực đại

THUẬT TOÁN FORD-FULKERSON

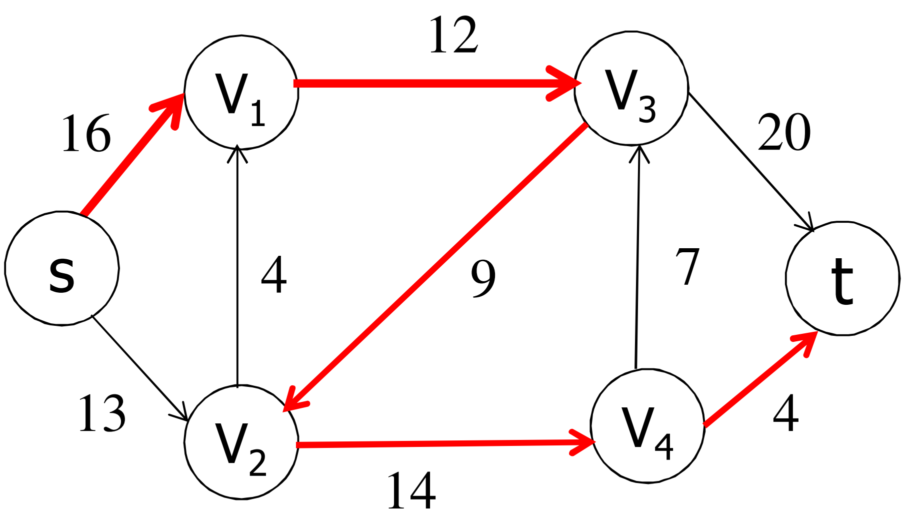
- Mỗi lần lặp theo phương pháp Ford-Fulkerson, tìm một đường tăng luồng p và tăng luồng f theo p
- Giả định luồng f khởi đầu có $f(u, v) = 0$ với mọi $u, v \in V$
- G_f và $c_f(u, v)$ và $c_f(p)$ được tính toán theo các định nghĩa của G_f và $c_f(u, v)$

THUẬT TOÁN FORD-FULKERSON

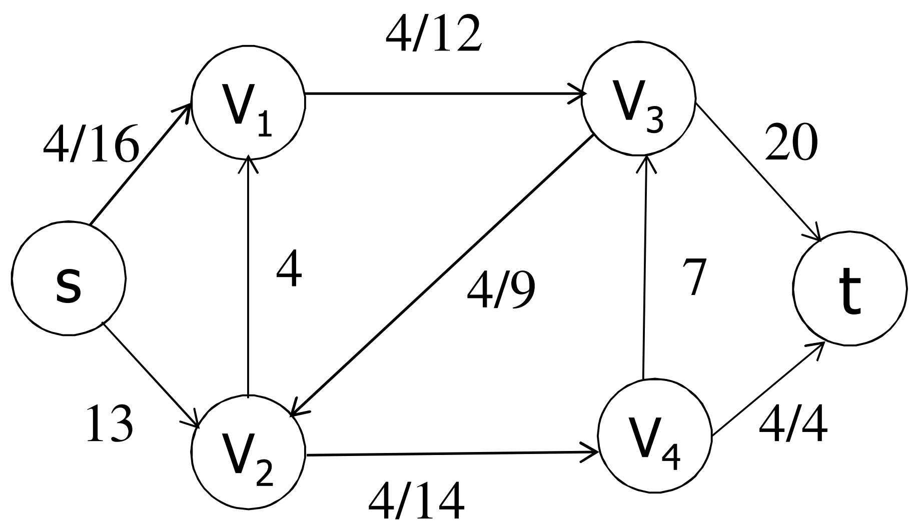
```
FORD-FULKERSON(G, s, t)
for each edge (u, v) ∈G.E
  do  f(u, v) ← 0
while there exists a path p from s to t in G_f
  do  c_f(p) ← min{c_f(u, v)| (u, v) is in p}
      for each edge (u, v) in p
          do  if (u, v) ∈E
                then  f(u, v) ← f(u, v) + c_f(p)
                else   f(v, u) ← f(v,u) - c_f(p)
```

THUẬT TOÁN FORD-FULKERSON

Đồ thị G_f với đường tăng luồng P_1
luồng khởi tạo $f(u, v)=0, \forall (u,v) \in E$

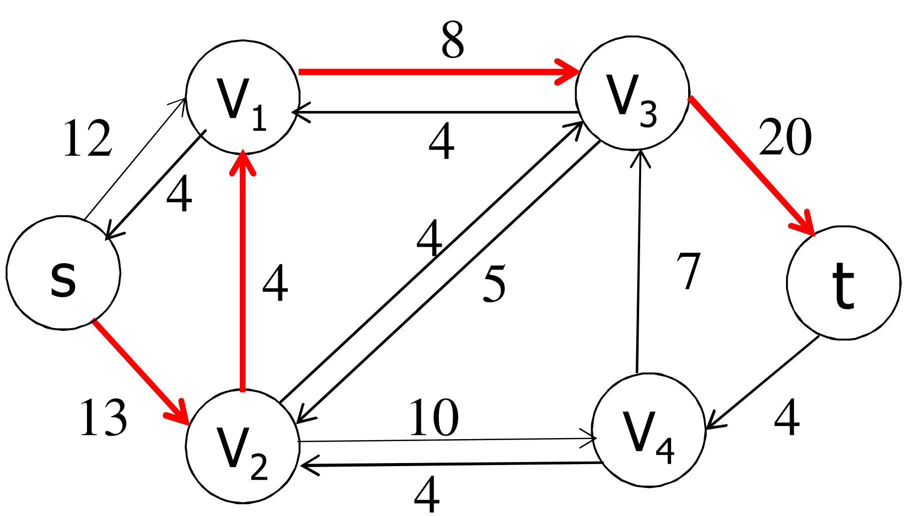


Tăng luồng f trên G

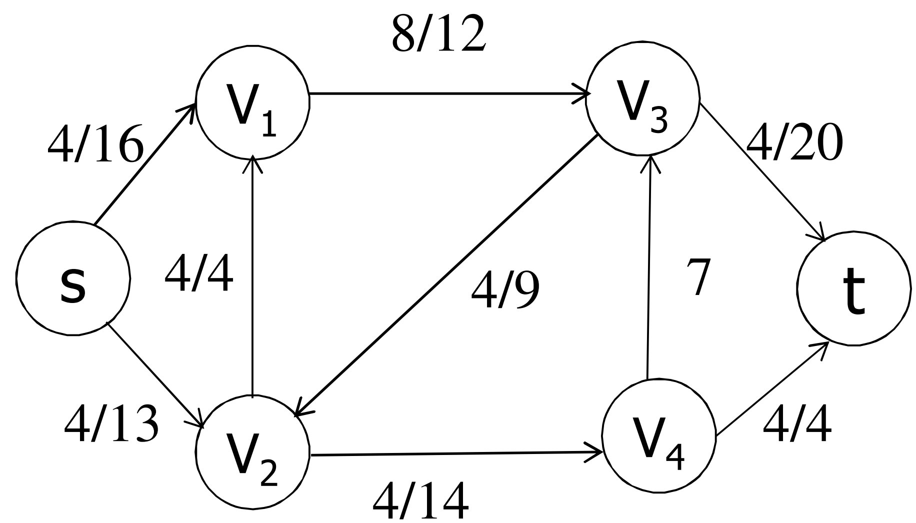


THUẬT TOÁN FORD-FULKERSON

Đồ thị G_f với đường tăng luồng P_2

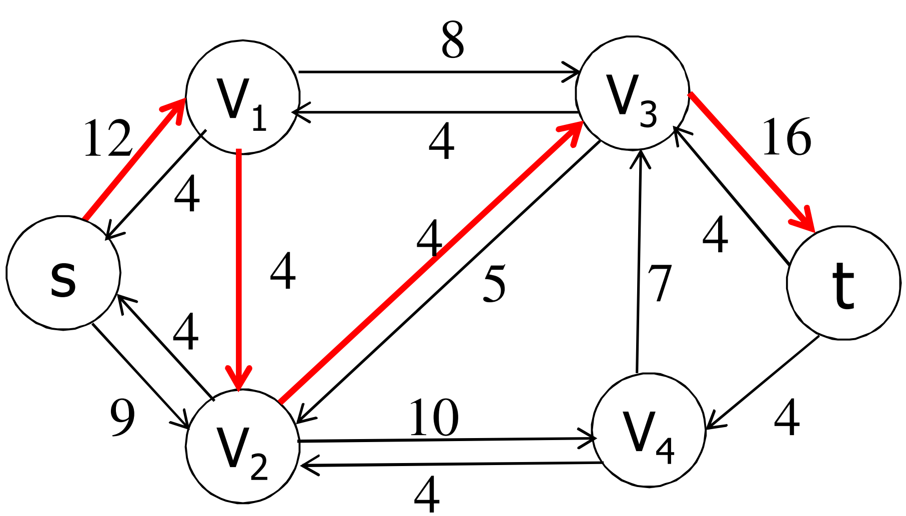


Tăng luồng f trên G

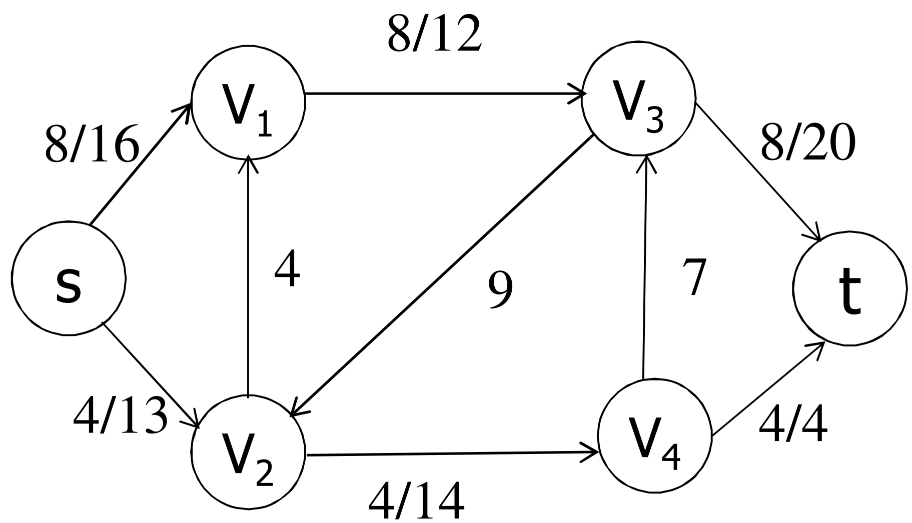


THUẬT TOÁN FORD-FULKERSON

Đồ thị G_f với đường tăng luồng P_3

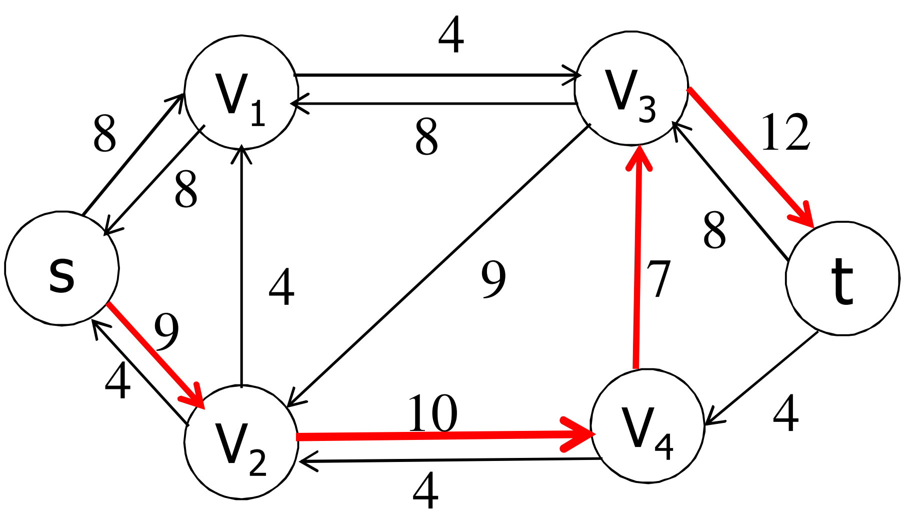


Tăng luồng f trên G

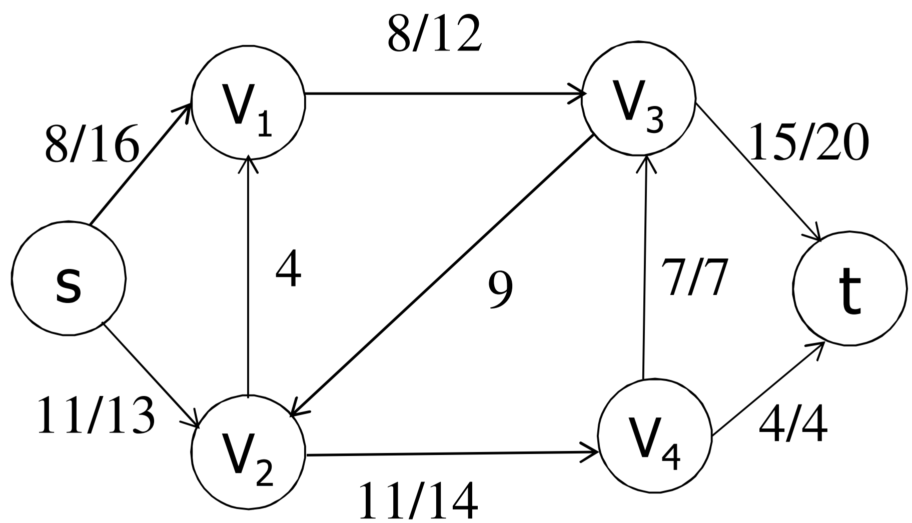


THUẬT TOÁN FORD-FULKERSON

Đồ thị G_f với đường tăng luồng P_4

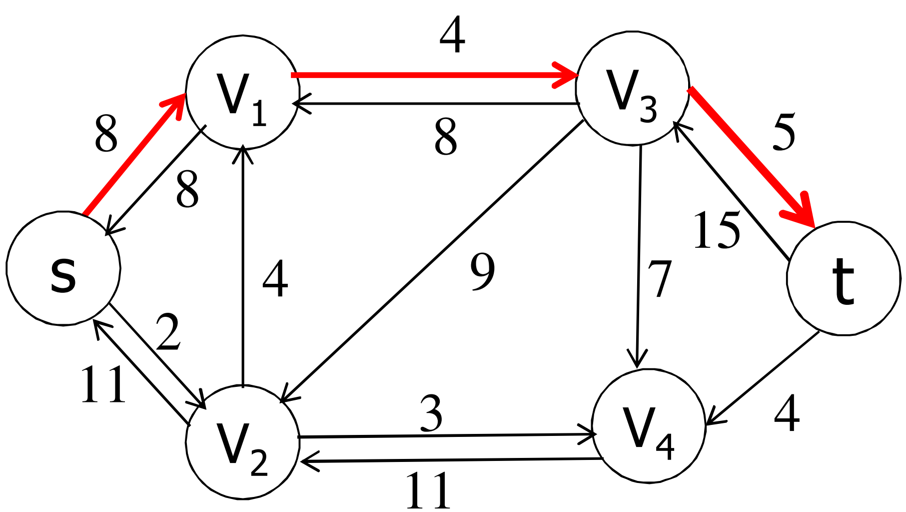


Tăng luồng f trên G

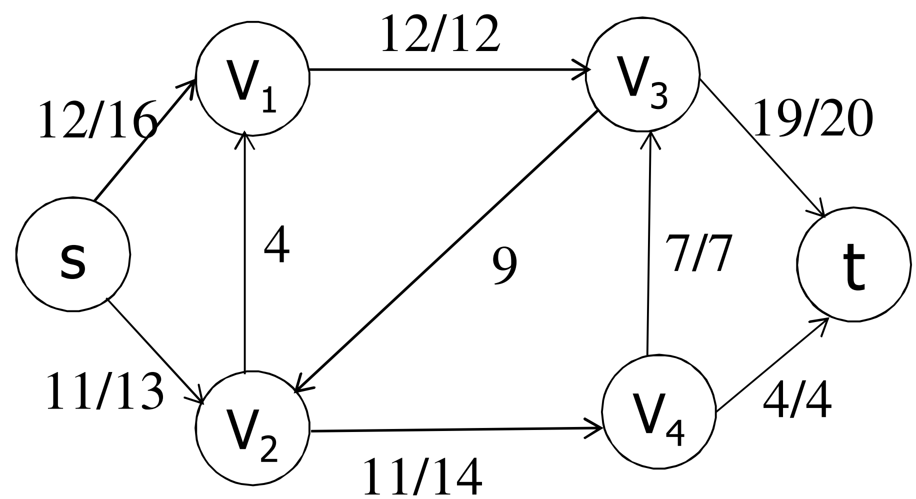


THUẬT TOÁN FORD-FULKERSON

Đồ thị G_f với đường tăng luồng P_5

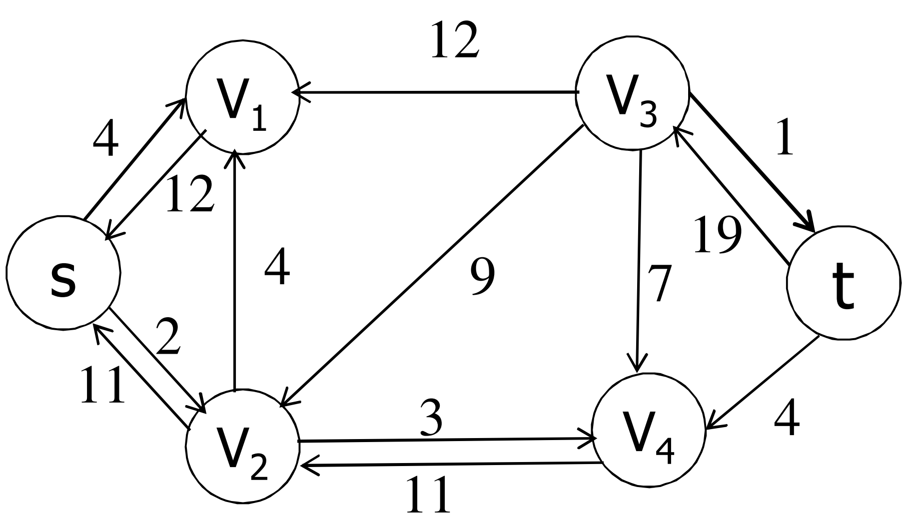


Tăng luồng f trên G

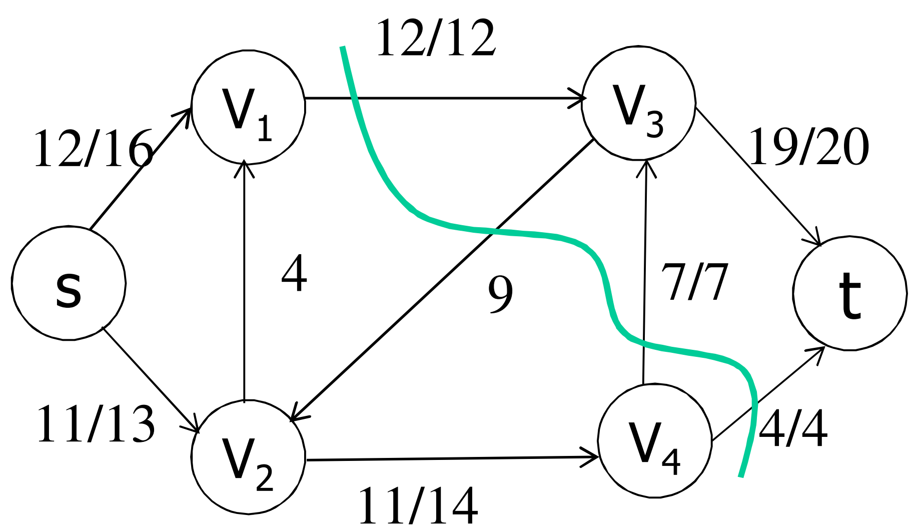


THUẬT TOÁN FORD-FULKERSON

Đồ thị G_f không có đường tăng luồng



Luồng f cực đại trên G



|f|=c (S,T)=23

THUẬT TOÁN FORD-FULKERSON

- Độ phức tạp thời gian của thuật toán là xấp xỉ $O(V^2E)$, $O(VE^2)$ hoặc $O(V^3)$
- Lưu ý: Có thể tìm đường tăng luồng bằng giải thuật tìm kiếm theo chiều rộng hoặc tìm kiếm theo chiều sâu