②

a) $X_1, \dots X_n \sim N(\theta, 1)$

$$p_t = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i - t)^2} = \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum x_i^2 + t\sum x_i - \frac{n}{2}t^2}$$

Кандидат на сопряжение:

$$q_{\alpha\beta}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-\alpha)^2}{\beta^2}} - N(\alpha, \beta^2)$$

$$q(t|X) \propto p_t(X) \cdot q(t) \propto e^{-\frac{1}{2}\left[\sum x_i^2 - 2t\sum x_i + nt^2\right]} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-\alpha)^2}{\beta^2}}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum x_i^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) + t\left(\frac{\alpha}{\beta^2} + \sum x_i\right) - \frac{1}{2}t^2\left(n + \frac{1}{\beta^2}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum x_i^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) - \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{\beta^2}\right)\left(-2t\left[\frac{\alpha + \beta^2\sum x_i}{1 + n\beta^2}\right] + t^2\right)\right) \propto$$

$$\propto \exp\left(\frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{\beta^2}\right)\left(\frac{\alpha + \beta^2\sum x_i}{1 + n\beta^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{\beta^2}\right)\left[t - \left(\frac{\alpha + \beta^2\sum x_i}{1 + n\beta^2}\right)\right]^2$$

$$\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{\beta^2}\right)\left[t - \left(\frac{\alpha + \beta^2\sum x_i}{1 + n\beta^2}\right)\right]^2\right) \propto N\left(\frac{\alpha + \beta^2\sum x_i}{\dots}, \frac{1}{\dots}\right)$$

$$q(t) \sim N(\alpha, \beta^2) \Longleftrightarrow q(t|X) \sim N\left(\frac{\alpha + \beta^2 \Sigma x_i}{1 + n\beta^2}, \frac{1}{n + \frac{1}{\beta^2}}\right)$$

Значит $q(t)$ и $q(t|X)$ из одного семейства распределений $\alpha' = \frac{\alpha + \beta^2 \Sigma x_i}{1 + n\beta^2}$, $\beta^{2\prime} = \frac{1}{n + \frac{1}{\beta^2}}$

$$E(\theta|X) = \frac{\alpha + n\beta^2 \overline{X}}{1 + n\beta^2} \qquad \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

б) $X_1, \ldots X_n \sim N(0, \theta^{-1})$

$$p_t(x_1, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t}{2} x_i^2} = \frac{t^n}{2\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{t}{2} \Sigma x_i^2}$$

Предполагаем, что сопряженное имеет вид гамма распределения $\Gamma(\alpha, \beta)$

$\alpha \Longleftrightarrow n+1 \qquad \beta \Longleftrightarrow \frac{2}{\Sigma x_i^2}$

$$q(t) = t^{\alpha - 1} e^{-\frac{t}{\beta}}$$

$$q(t|x) \propto q(t)\,p_t \propto t^{\alpha-1+n} e^{-t\left(\frac{1}{\beta}+\frac{\sum x_i^2}{2}\right)} \sim$$

$$\sim \Gamma\left[\alpha+n, \left(\frac{1}{\frac{1}{\beta}+\frac{\sum x_i^2}{2}}\right)\right]$$

$$E(\theta^{-1}|x) = \frac{\alpha+n}{\frac{1}{\beta}+\frac{\sum x_i^2}{2}}$$

Методом пристального взгляда, можно предположить, что распределение с двумя неизвестными параметрами возможно будет иметь вид произведения апостериорных оценок для сигмы и среднего по отдельности, так же на это подталкивает предположение, что гамма распределение способно разобраться (красиво свернуться, когда надо) с вылезающей вне экспоненты обратной дисперсией и линейным членом в экспоненте, в то время как нормальное способно подглотить и свернуть квадратичный и линейный член. Так как задача решалась в основном методом пристального взгляда, и доказательная суть сводилось лишь к проверке взятого из каких-то соображений распределения, то в принципе рассуждений такого уровня должно хватить.

1) Б – болен, З – здоров

„+" – положительный, „–" – отрицательный

$$P(+|Б) = 0{,}99$$

$$P(+|З) = 0{,}03$$

априорная $P(Б) = 0{,}02$

$$P(Б \mid +) = \frac{P(+ \mid Б)\, P(Б)}{P(+)} =$$

$$= \frac{P(+ \mid Б)\, P(Б)}{P(З)\, P(+ \mid З) + P(Б)\, P(+ \mid Б)} \ominus$$

формула полной вероятности

$$\ominus \frac{0{,}99 \cdot 0{,}02}{0{,}98 \cdot 0{,}03 + 0{,}02 \cdot 0{,}99} =$$

$$= \underline{0{,}4024\ldots}$$