5 Пусть $\varphi_n(k)$ – число перестановок, которые имеют ровно k неподвижных точек. Следовательно вероятность что ровно k писем попадут в свои конверты:

$$\frac{\varphi_n(k)}{n!} = p_k$$

в среднем

$$\overline{n} = \sum_{k=0}^{n} k\, p_k$$

Найдем P_k:

Выбираем из n k подвижных точек $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ способами

затем найдем число перестановок, переставляющих остальные $n-k$ элементов без неподвижных точек, оно выражается через субфакториал

$$!(n-k) = (n-k)!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right)$$

$$\Rightarrow p_n(k) = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{n!}(n-k)! \times$$

$$\times \left(\sum_{m=0}^{n-k} \frac{(-1)^m}{m!}\right) \ominus$$

$$\ominus \frac{1}{k!}\left(\sum_{m=0}^{n-k} \frac{(-1)^m}{m!}\right)$$

$$\overline{n} = \sum^{n} \sum^{n-k} \frac{k}{k!} \cdot \frac{(-1)^m}{m!} \Rightarrow$$

$k=1 \quad m=0$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{n-k} \frac{1}{(k-1)!} \frac{(-1)^m}{m!}$$

замена $k-1=l$

$$\overline{\eta} = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-l-1} \frac{1}{l!} \cdot \frac{(-1)^m}{m!}$$

Будем суммировать „по диагоналям"

$$\overline{\eta} = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{d=0}^{l} \frac{(-1)^d}{d!\,(l-d)!} =$$

$r=0$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{r!} \sum_{d=0}^{r} \frac{r!(-1)^d \cdot 1^{r-d}}{d!(r-d)!} =$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{r!} \sum_{d=0}^{r} C_r^d (-1)^d \cdot 1^{r-d} =$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r!} (1-1)^r =$$

$$= 1 + 0$$

$$\overline{n} = 1$$

Что есть в среднем дойдет

1 письмо.