Հայաստանի Ազգային Պոլիտեխնիկական Համալսարան

Կիրառական մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի ֆակուլտետ

Կուրսային աշխատանք

Առարկա՝ Թվային մեթոդներ
Դասախոս՝ Բաբայան Արմենակ
Ուսանող՝ Սևոյան Կամո
Խումբ՝ ՄԹ 940-2

Երևան 2022

Տարբերակ 23

Խնդիր 1

Տրված (x_k, y_k) ինտերպոլյացիոն տվյալներով:

1. կառուցել Լագրանժի ինտերպոլյացիոն բազմանդամ
2. կառուցել բաժանված տարբերությունների աղյուսակը
3. կառուցել Նյուտոնի ինտերպոլյացիոն բազմանդամը
4. համեմատել Լագրանժի և Նյուտոնի ինտերպոլյացիոն բազմանդամների արժեքները $\tilde{x}$ կետում:

x_k	1.21	2.51	2.91	3.35	3.78	4.61	5.51	6.91
y_k	1.12	1.39	1.04	1.21	1.58	1.82	2.25	2.78

$, \tilde{x} = 4.05$

Լուծում.

1. Համաձայն Լագրանժի ինտերպոլյացիոն բազմանդամի սահմանման.

$$L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Տվյալ ինտերպոլյացիոն տվյալներին համապատասխան Լագրանժի բազմանդամը կլինի՝

$$\begin{aligned}
L_7(x) = \\
&1.12\frac{(x-2.51)(x-2.91)(x-3.35)(x-3.78)(x-4.61)(x-5.51)(x-6.91)}{(1.21-2.51)(1.21-2.91)(1.21-3.35)(1.21-3.78)(1.21-4.61)(1.21-5.51)(1.21-6.91)} + \\
&1.39\frac{(x-1.21)(x-2.91)(x-3.35)(x-3.78)(x-4.61)(x-5.51)(x-6.91)}{(2.51-1.21)(2.51-2.91)(2.51-3.35)(2.51-3.78)(2.51-4.61)(2.51-5.51)(2.51-6.91)} + \\
&1.04\frac{(x-1.21)(x-2.51)(x-3.35)(x-3.78)(x-4.61)(x-5.51)(x-6.91)}{(2.91-1.21)(2.91-2.51)(2.91-3.35)(2.91-3.78)(2.91-4.61)(2.91-5.51)(2.91-6.91)} + \\
&1.21\frac{(x-1.21)(x-2.51)(x-2.91)(x-3.78)(x-4.61)(x-5.51)(x-6.91)}{(3.35-1.21)(3.35-2.51)(3.35-2.91)(3.35-3.78)(3.35-4.61)(3.35-5.51)(3.35-6.91)} + \\
&1.58\frac{(x-1.21)(x-2.51)(x-2.91)(x-3.35)(x-4.61)(x-5.51)(x-6.91)}{(3.78-1.21)(3.78-2.51)(3.78-2.91)(3.78-3.35)(3.78-4.61)(3.78-5.51)(3.78-6.91)} + \\
&1.82\frac{(x-1.21)(x-2.51)(x-2.91)(x-3.35)(x-3.78)(x-5.51)(x-6.91)}{(4.61-1.21)(4.61-2.51)(4.61-2.91)(4.61-3.35)(4.61-3.78)(4.61-5.51)(4.61-6.91)} + \\
&2.25\frac{(x-1.21)(x-2.51)(x-2.91)(x-3.35)(x-3.78)(x-4.61)(x-6.91)}{(5.51-1.21)(5.51-2.51)(5.51-2.91)(5.51-3.35)(5.51-3.78)(5.51-4.61)(5.51-6.91)} + \\
&2.78\frac{(x-1.21)(x-2.51)(x-2.91)(x-3.35)(x-3.78)(x-4.61)(x-5.51)}{(6.91-1.21)(6.91-2.51)(6.91-2.91)(6.91-3.35)(6.91-3.78)(6.91-4.61)(6.91-5.51)}
\end{aligned}$$

2. Համաձայն բաժանված տարբերության սահմանման.

$$f(x_k, x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) - f(x_i, \ldots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

Հետևաբար աղյուսակը կլինի.

	0	1	2	3	4	5	6	7
1.21	1.12							
		0.21						
2.51	1.39		−0.64					
		−0.88		1.00				
2.91	1.04		1.51		−0.69			
		0.39		−0.77		0.23		
3.35	1.21		0.54		0.09		−0.03	
		0.86		−0.58		0.08		−0.002
3.78	1.58		−0.45		0.32		−0.04	
		0.29		0.25		−0.1		
4.61	1.82		0.10		−0.08			
		0.48		−0.04				
5.51	2.25		−0.04					
		0.38						
6.91	2.78							

3. Համաձայն սահմանման, Նյուտոնի ինտերպոլյացիոն բազմանդամը ունի հետևյալ տեսքը.

$$L_{n-1}(x) = f(x_1)+f(x_1,x_2)(x-x_1)+f(x_1,x_2,x_3)(x-x_1)(x-x_2)+\dots+f(x_1,\dots,x_n)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

Հետևաբար վերոնշյալ ինտերպոլյացիոն տվյալների համար Նյուտոնի ինտերպոլյացիոն բազմանդամը կլինի.

$L_7(x) = 1.12 + 0.21(x-1.12) - 0.64(x-1.12)(x-2.51) + 1(x-1.12)(x-2.51)(x-2.91) -$
$-0.69(x-1.12)(x-2.51)(x-2.91)(x-3.35)+0.23(x-1.12)(x-2.51)(x-2.91)(x-3.35)(x-3.78)-$

$-0.03(x-1.12)(x-2.51)(x-2.91)(x-3.35)(x-3.78)(x-4.61)+$
$+0.001(x-1.12)(x-2.51)(x-2.91)(x-3.35)(x-3.78)(x-4.61)(x-5.51)$

4. Լագրանժի ինտերպոլյացիա՝

$$L_7(\tilde{x}) = 1.75$$

Նյուտոնի ինտերպոլյացիա՝

$$L_7(\tilde{x}) = 1.73$$

Խնդիր 2

Տրված է f ֆունկցիա և $[a,b]$ միջակայքում և $[a,b]$ միջակայքից x_j ինտերպոլյացիայի հանգույցների մի քանի հավաք: Բոլոր հավաքների համար

1. կառուցել Լագրանժի ինտերպոլյացիոն բազմանդամ $(x_j, f(x_j))$ ինտերպոլյացիոն տվյալներով:
2. գնահատել սխալը
3. համեմատել կառուցված բազմանդամի և ֆունկցիայի արժեքը $\tilde{x}$ կետում:
4. Ի՞նչ քայլ պետք է ընտրել, որ գծային, քառակուսային և խորանարդային ինտերպոլյացիայի սխալը $[a_1, b_1]$ միջակայքում չգերազանցի ϵ: Դիտարկեք հաստատուն և փոփոխական քայլի դեպքերը:

$$f(x) = \sin\frac{1}{x+2}, [a,b] = [10,18], \tilde{x} = 15.4, [a_1, b_1] = [10, 1000], \epsilon = 0.0001$$

- $x_j = 10, 12, 14, 16, 18$
- $x_j = 10, 14, 18$
- $x_j = 10, 12, 14, 16$
- $x_j = 10, 12, 16, 18$

Լուծում.

1. Ինտերպոլյացիոն բազմանդամներ.
   - $L_4(x) = \sin\frac{1}{12}\frac{(x-12)(x-14)(x-16)(x-18)}{(10-12)(10-14)(10-16)(10-18)} + \sin\frac{1}{14}\frac{(x-10)(x-14)(x-16)(x-18)}{(12-10)(12-14)(12-16)(12-18)} + \sin\frac{1}{16}\frac{(x-10)(x-12)(x-16)(x-18)}{(14-10)(14-12)(14-16)(14-18)} + \sin\frac{1}{18}\frac{(x-10)(x-12)(x-14)(x-16)}{(16-10)(16-12)(16-14)(16-18)} + \sin\frac{1}{20}\frac{(x-10)(x-12)(x-14)(x-16)}{(18-10)(18-12)(18-14)(18-16)}$
   - $L_2(x) = \sin\frac{1}{12}\frac{(x-14)(x-18)}{(10-14)(10-18)} + \sin\frac{1}{16}\frac{(x-10)(x-18)}{(14-10)(14-18)} + \sin\frac{1}{18}\frac{(x-10)(x-14)}{(18-10)(18-14)}$
   - $L_3(x) = \sin\frac{1}{12}\frac{(x-12)(x-14)(x-16)}{(10-12)(10-14)(10-16)} + \sin\frac{1}{14}\frac{(x-10)(x-14)(x-16)}{(12-10)(12-14)(12-16)} + \sin\frac{1}{16}\frac{(x-10)(x-12)(x-16)}{(14-10)(14-12)(14-16)} + \sin\frac{1}{18}\frac{(x-10)(x-12)(x-14)}{(16-10)(16-12)(16-14)}$
   - $L_3(x) = \sin\frac{1}{12}\frac{(x-12)(x-16)(x-18)}{(10-12)(10-16)(10-18)} + \sin\frac{1}{14}\frac{(x-10)(x-16)(x-18)}{(12-10)(12-16)(12-18)} + \sin\frac{1}{18}\frac{(x-10)(x-12)(x-18)}{(16-10)(16-12)(16-18)} + \sin\frac{1}{20}\frac{(x-10)(x-12)(x-16)}{(18-10)(18-12)(18-16)}$
2. Սխալների գնահատում.

   Նախ գտնենք ֆունկցիայի ածանցյալները.

$$f^{(1)}(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}\cos\frac{1}{x+2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{2}{(x+2)^3}\cos\frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^4}\sin\frac{1}{x+2}$$

$$f^{(3)}(x) = -\frac{6}{(x+2)^4}\cos\frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^5}\sin\frac{1}{x+2} + \frac{4}{(x+2)^5}\sin\frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^6}\cos\frac{1}{x+2} =$$
$$= \left[\frac{1-6(x+2)^2}{(x+2)^6}\right]\cos\frac{1}{x+2} + \frac{6}{(x+2)^5}\sin\frac{1}{x+2}$$

$$f^{(4)}(x)=\left[\frac{-12(x+2)^7-6(x+2)^5+36(x+2)^7}{(x+2)^{12}}\right]\cos\frac{1}{x+2}+\left[\frac{1-6(x+2)^2}{(x+2)^8}\right]\sin\frac{1}{x+2}-$$
$$-\frac{30}{(x+2)^6}\sin\frac{1}{x+2}-\frac{6}{(x+2)^7}\cos\frac{1}{x+2}=\left[\frac{24(x+2)^2-12}{(x+2)^7}\right]\cos\frac{1}{x+2}+\left[\frac{1-36(x+2)^2}{(x+2)^8}\right]\sin\frac{1}{x+2}$$
$$f^{(5)}(x)=\left[\frac{48(x+2)^8-168(x+2)^8+84(x+2)^6}{(x+2)^{14}}\right]\cos\frac{1}{x+2}+\left[\frac{24(x+2)^2-12}{(x+2)^9}\right]\sin\frac{1}{x+2}+$$
$$+\left[\frac{-72(x+2)^9-8(x+2)^7+288(x+2)^9}{(x+2)^{16}}\right]\sin\frac{1}{x+2}-\left[\frac{1-36(x+2)^2}{(x+2)^{10}}\right]\cos\frac{1}{x+2}=$$
$$\left[\frac{-120(x+2)^4+120(x+2)^2-1}{(x+2)^{10}}\right]\cos\frac{1}{x+2}+\left[\frac{240(x+2)^2-20}{(x+2)^9}\right]\sin\frac{1}{x+2}$$

Այսպիսով.

$$f^{(1)}(x)=-\frac{1}{(x+2)^2}\cos\frac{1}{x+2}$$

$$f^{(2)}(x)=\frac{2}{(x+2)^3}\cos\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^4}\sin\frac{1}{x+2}$$

$$f^{(3)}(x)=\left[\frac{1-6(x+2)^2}{(x+2)^6}\right]\cos\frac{1}{x+2}+\frac{6}{(x+2)^5}\sin\frac{1}{x+2}$$

$$f^{(4)}(x)=\left[\frac{24(x+2)^2-12}{(x+2)^7}\right]\cos\frac{1}{x+2}+\left[\frac{1-36(x+2)^2}{(x+2)^8}\right]\sin\frac{1}{x+2}$$

$$f^{(5)}(x)=\left[\frac{-120(x+2)^4+120(x+2)^2-1}{(x+2)^{10}}\right]\cos\frac{1}{x+2}+\left[\frac{240(x+2)^2-20}{(x+2)^9}\right]\sin\frac{1}{x+2}$$

Անցնենք սխալների գնահատմանը.

- $|f(x)-L_4(x)|\leq\frac{M_5}{5!}\|(x-10)(x-12)(x-14)(x-16)(x-18)\|$

  $$M_5=\max_{x\in[10,18]}\left|f^{(5)}(x)\right|=f^{(5)}(10)\approx 4*10^{-5}$$

  Բազմանդամի մեծագույն արժեքը որոշելու համար կատարենք փոփոխականի փոխարինում.

  $$x-14=t$$

  Կստանանք.

  $$P(t)=t(t-4)(t-2)(t+2)(t+4)=t^5-20t^3+64t$$

  $$\frac{dP(t)}{dt}=5t^4-60t^2-64=0$$

  $$t^2=\frac{60\pm\sqrt{2320}}{10}\implies t=\pm\sqrt{\frac{60\pm\sqrt{2320}}{10}}$$

  $$\|P(t)\|=\left|P\left(\pm\sqrt{\frac{60+\sqrt{2320}}{10}}\right)\right|\approx 116$$

  Հետևաբար $|f(x)-L_4(x)|\leq\frac{3*10^{-5}}{120}116\approx 4*10^{-5}$

- $|f(x)-L_2(x)|\leq\frac{M_3}{3!}\|(x-10)(x-14)(x-18)\|$

  $$M_3=\max_{x\in[10,18]}\left|f^{(3)}(x)\right|=|f(10)|\approx 3*10^{-4}$$

Բազմանդամի մեծագույն արժեքը որոշելու համար կատարենք փոփոխականի փոխարինում.

$$x - 14 = t$$

Կստանանք.

$$P(t) = t(t-4)(t+4) = t^3 - 16t$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = 3t^2 - 16 = 0 \implies t = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\|P(t)\| = \left|P\left(\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\right| \approx 24.63$$

Հետևաբար $|f(x) - L_2(x)| \leq \dfrac{3 * 10^{-4}}{6} 24.63 \approx 10^{-3}$

- $|f(x) - L_3(x)| \leq \dfrac{M_4}{4!} \|(x-10)(x-12)(x-14)(x-16)\|$

$$M_4 = \max_{x\in[10,18]} \left|f^{(4)}(x)\right| = \left|f^{(4)}(10)\right| \approx 9 * 10^{-5}$$

Բազմանդամի մեծագույն արժեքը որոշելու համար կատարենք փոփոխականի փոխարինում.

$$x - 13 = t$$

Կստանանք.

$$P(t) = (t+3)(t+1)(t-1)(t-3) = t^4 - 10t^2 + 9$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = t^3 - 5t = 0 \implies t = 0, t = \pm 5$$

$$\|P(t)\| = |P(\pm 5)| = 384$$

Հետևաբար $|f(x) - L_3(x)| \leq \dfrac{9 * 10^{-5}}{24} 384 \approx 15 * 10^{-4}$

- $|f(x) - L_3(x)| \leq \dfrac{M_4}{4!} \|(x-10)(x-12)(x-16)(x-18)\|$

$$M_4 = \max_{x\in[10,18]} \left|f^{(4)}(x)\right| = \left|f^{(4)}(10)\right| \approx 9 * 10^{-5}$$

Բազմանդամի մեծագույն արժեքը որոշելու համար կատարենք փոփոխականի փոխարինում.

$$x - 14 = t$$

Կստանանք.

$$P(t) = (t+4)(t+2)(t-2)(t-4) = t^4 - 20t^2 + 64$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = t^3 - 10t = 0 \implies t = 0, t = \pm\sqrt{10}$$

$$\|P(t)\| = |P(0)| = 64$$

Հետևաբար $|f(x) - L_3(x)| \leq \dfrac{9 * 10^{-5}}{24} 60 \approx 25 * 10^{-5}$

3. Ֆունկցիայի և ինտերպոլյացիոն բազմանդամների արժեքները $\tilde{x}$ կետում

   - $f(x) \approx 0.0574$
   - $L_4(15.4) \approx 0.0574$
   - $L_2(15.4) \approx 0.0571$
   - $L_3(15.4) \approx 0.0575$
   - $L_3(15.4) \approx 0.0574$

4. Նախ դիտարկենք հաստատուն քայլերի դեպքը:

 • Գծային ինտերպոլյացիա.

$$R_2 = M_2 \frac{h^2}{8}$$

$$M_2 = \max_{x\in[10,1000]} \left|f^{(2)}(x)\right| = \left|f^{(2)}(10)\right| \approx 1.1 * 10^{-3}$$

Որտեղից h-ի համար կունենք.

$$h = \sqrt{\frac{8\epsilon}{M_2}} \approx 0.834$$

Հանգույցների քանակը՝

$$N = \left\lceil \frac{1000-10}{h} \right\rceil = 1188$$

 • Քառակուսային ինտերպոլյացիա.

$$R_3 = M_3 \frac{h^3}{9\sqrt{3}}$$

$$M_3 = \max_{x\in[10,1000]} \left|f^{(3)}(x)\right| = \left|f^{(3)}(10)\right| \approx 3 * 10^{-4}$$

Որտեղից h-ի համար կունենք.

$$h = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}\epsilon}{M_3}} \approx 1.76$$

Հանգույցների քանակը՝

$$N = \left\lceil \frac{1000-10}{h} \right\rceil_{N=2n+3} = 563$$

 • Խորանարդային ինտերպոլյացիա.

$$R_4 = M_4 \frac{h^4}{24}$$

$$M_4 = \max_{x\in[10,1000]} \left|f^{(4)}(x)\right| = \left|f^{(4)}(10)\right| \approx 9 * 10^{-5}$$

Որտեղից h-ի համար կունենք.

$$h = \sqrt[4]{\frac{24\epsilon}{M_4}} \approx 2.24$$

Հանգույցների քանակը՝

$$N = \left\lceil \frac{100010}{h} \right\rceil_{N=3n+4} = 442$$

Դիտարկենք փոփոխական քայլի դեպքը.
$[10, 1000]$ հատվածը բաժանենք $(10, 340, 670, 100)$ հանգույցներով:

 • Գծային ինտերպոլյացիա.

$$R_{2j} = M_{2j} \frac{h_j^2}{8}, j = 1, 2, 3$$

$$M_{21} = \max_{x\in[10,340]} \left|f^{(2)}(x)\right| = \left|f^{(2)}(10)\right| \approx 1.1 * 10^{-3}$$

$$M_{22} = \max_{x\in[340,670]} \left|f^{(2)}(x)\right| = \left|f^{(2)}(340)\right| \approx 5 * 10^{-8}$$

$$M_{23} = \max_{x\in[670,1000]} \left|f^{(2)}(x)\right| = \left|f^{(2)}(670)\right| \approx 6.6 * 10^{-9}$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{8\epsilon}{M_{21}}} \approx 0.834, h_2 = \sqrt{\frac{8\epsilon}{M_{22}}} \approx 126.49, h_3 = \sqrt{\frac{8\epsilon}{M_{23}}} \approx 348.4$$

$$N_1 = \left\lceil \frac{340-10}{h_1} \right\rceil = 396, N_2 = \left\lceil \frac{670-340}{h_2} \right\rceil = 3, N_3 = \left\lceil \frac{1000-670}{h_3} \right\rceil = 1$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 400$$

- Քառակուսային ինտերպոլյացիա.

$$R_{3j} = M_{3j}\frac{h_j^3}{9\sqrt{3}}$$

$$M_{31} = \max_{x\in[10,340]}\left|f^{(3)}(x)\right| = \left|f^{(3)}(10)\right| \approx 3*10^{-4}$$

$$M_{32} = \max_{x\in[340,670]}\left|f^{(3)}(x)\right| = \left|f^{(3)}(340)\right| \approx 5*10^{-10}$$

$$M_{33} = \max_{x\in[670,1000]}\left|f^{(3)}(x)\right| = \left|f^{(3)}(670)\right| \approx 3*10^{-11}$$

$$h_1 = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}\epsilon}{M_{31}}} \approx 1.76, h_2 = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}\epsilon}{M_{32}}} \approx 146.7, h_3 = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}\epsilon}{M_{33}}} \approx 375.6$$

$$N_1 = \left\lceil\frac{340-10}{h_1}\right\rceil_{N=2n+3} = 189, N_2 = \left\lceil\frac{670-340}{h_2}\right\rceil_{N=2n+3} = 3, N_3 = \left\lceil\frac{1000-670}{h_3}\right\rceil_{N=2n+3} = 3$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 195$$

- Խորանարդային ինտերպոլյացիա.

$$R_{4j} = M_{4j}\frac{h_j^4}{24}$$

$$M_{41} = \max_{x\in[10,340]}\left|f^{(4)}(x)\right| = \left|f^{(4)}(10)\right| \approx 9*10^{-5}$$

$$M_{42} = \max_{x\in[340,670]}\left|f^{(4)}(x)\right| = \left|f^{(4)}(340)\right| \approx 6*10^{-12}$$

$$M_{43} = \max_{x\in[670,1000]}\left|f^{(4)}(x)\right| = \left|f^{(4)}(670)\right| \approx 2*10^{-13}$$

$$h_1 = \sqrt[4]{\frac{24\epsilon}{M_{41}}} \approx 2.24, h_2 = \sqrt[4]{\frac{24\epsilon}{M_{42}}} \approx 147.07, h_3 = \sqrt[4]{\frac{24\epsilon}{M_{43}}} \approx 342.15$$

$$N_1 = \left\lceil\frac{340-10}{h_1}\right\rceil_{N=3n+4} = 148, N_2 = \left\lceil\frac{670-340}{h_2}\right\rceil_{N=3n+4} = 4, N_3 = \left\lceil\frac{1000-670}{h_3}\right\rceil_{N=3n+4} = 4$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 156$$

Խնդիր 3

Տրված է f ֆունկցիա $[a,b]$ միջակայքում:

1. Հաշվել ֆունկցիայի ինտեգրալը Սիմպսոնի, սեղանների և ուղղանկյունների բանաձևերով, բաժանելով այդ ինտերվալը 4 հավասար մասերի:
2. Գնահատել սխալը բոլոր դեպքերի համար:
3. Ի՞նչ տրոհման քայլ է պետք ընտրել, որպեսզի Սիմպսոնի, սեղանների և ուղղանկյունների բանաձևերի սխալը չգերազանցի $\epsilon = 0.001$:
4. Հաշվել f ֆունկցիայի ինտեգրալը $[a,b]$ միջակայքում Գաուսի բանաձևով 3 հանգույցներով:

$$f(x) = \sin\frac{1}{x+2}, [a,b] = [10,18]$$

Լուծում.

1. Ինտեգրալների հաշվում:
   - Ուղղանկյունների եղանակ:

$$\tilde{I}_1(f) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 2\left[\sin\frac{1}{12} + \sin\frac{1}{14} + \sin\frac{1}{16} + \sin\frac{1}{18}\right] \approx 0.5452$$

   - Սեղանների եղանակ:

$$\tilde{I}_2(f) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2}(x_{k+1} - x_k) = \sin\frac{1}{12} + \sin\frac{1}{20} + 2\left[\sin\frac{1}{14} + \sin\frac{1}{16} + \sin\frac{1}{18}\right] \approx 0.5119$$

   - Սիմփսոնի եղանակ:

$$\tilde{I}_3(f) = \sum_{k=0}^{N-1} [f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})]\frac{(x_{2k+2} - x_{2k})}{6} =$$
$$= \frac{2}{3}\left(\sin\frac{1}{12} + \sin\frac{1}{20} + 4\left[\sin\frac{1}{14} + \sin\frac{1}{18}\right] + 2\sin\frac{1}{16}\right) \approx 0.51045$$

2. Սխալների գնահատում
   - Ուղղանկյունների եղանակ:

$$R_1 = M_1\frac{(b-a)h}{2}$$

$$M_1 = \max_{x\in[10,18]}\left|f^{(1)}(x)\right| = \left|f^{(1)}(10)\right| \approx 6.9 * 10^{-3}$$

Որտեղից կունենանք.

$$R_1 \approx 0.055$$

   - Սեղանների եղանակ:

$$R_2 = M_2\frac{(b-a)h^2}{12}$$

$$M_2 = \max_{x\in[10,18]}\left|f^{(2)}(x)\right| = \left|f^{(2)}(10)\right| \approx 1.1 * 10^{-3}$$

Որտեղից կունենանք.

$$R_2 \approx 3 * 10^{-3}$$

- Սիմփսոնի եղանակ:

$$R_3 = M_4 \frac{(b-a)\,h^4}{180}$$

$$M_4 = \underset{x\in[10,18]}{max} \left|f^{(4)}(x)\right| = \left|f^{(4)}(10)\right| \approx 9 * 10^{-5}$$

Որտեղից կունենանք.

$$R_3 \approx 6.7 * 10^{-5}$$

3. Ինտեգրալների հաշվում մաքսիմալ թույլատրելի սխալի պայմանով:

- Ուղղանկյունների եղանակ:

$$R_1 = M_1 \frac{(b-a)\,h}{2} \implies h = \frac{2\epsilon}{M_1(b-a)} \approx 0.0361$$

- Սեղանների եղանակ:

$$R_2 = M_2 \frac{(b-a)\,h^2}{12} \implies h = \sqrt{\frac{12\epsilon}{M_2(b-a)}} \approx 1.1424$$

- Սիմփսոնի եղանակ:

$$R_3 = M_4 \frac{(b-a)\,h^4}{180} \implies h = \sqrt[4]{\frac{180\epsilon}{M_4(b-a)}} \approx 3.9253$$

4. Ինտեգրալի հաշվում Գաուսի բանաձևով:

$$\int_{10}^{18} f(x) = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + C_3 f(x_3)$$

$[10, 18]$ միջակայքում ուղղահայաց բազմանդամներ գտնենք օգտվելով Լեժանդրի բազմանդամներից:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d}{dx^n} \left[\left(x^2-1\right)^n\right]$$

$$L_3(x) = \frac{1}{48} \frac{d}{dx^3} \left[x^6 - 3x^4 + 3x^2 + 1\right] = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

$$L_3(t) = 0 \implies t = 0, t = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Ստացված արմատները տանենք $[10, 18]$ միջակայք:

$$x_k = 4t_k + 14 \implies x_1 = 14 - \sqrt{\frac{3}{5}}, x_2 = 14, x_3 = 14 + \sqrt{\frac{3}{5}}, x_2$$

Քանի որ բանաձևը ճշգրիտ է 0, 1, 2 կարգի բազմանդամների համար՝

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = \int_{10}^{18} 1dx \\ C_1(x_1 - 14) + C_2(x_2 - 14) + C_3(x_3 - 14) = \int_{10}^{18} (x-14)\,dx \\ C_1(x_1 - 14)^2 + C_2(x_2 - 14)^2 + C_3(x_3 - 14)^2 = \int_{10}^{18} (x-14)^2\,dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 4 \\ -4\sqrt{\frac{3}{5}}C_1 + 4\sqrt{\frac{3}{5}}C_3 = 0 \\ \frac{48}{3}C_1 + \frac{48}{3}C_3 = \frac{128}{3} \end{cases} \implies C_1 = C_3 = \frac{20}{9}, C_2 = \frac{32}{9}$$

Այսպիսով՝

$$\int_{10}^{18} f\left(x\right) = \frac{20}{9} f\left(14-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{32}{9} f\left(14\right) + \frac{20}{9} f\left(14+\sqrt{\frac{3}{5}}, x_2\right) \approx 0.51046$$

Խնդիր 4

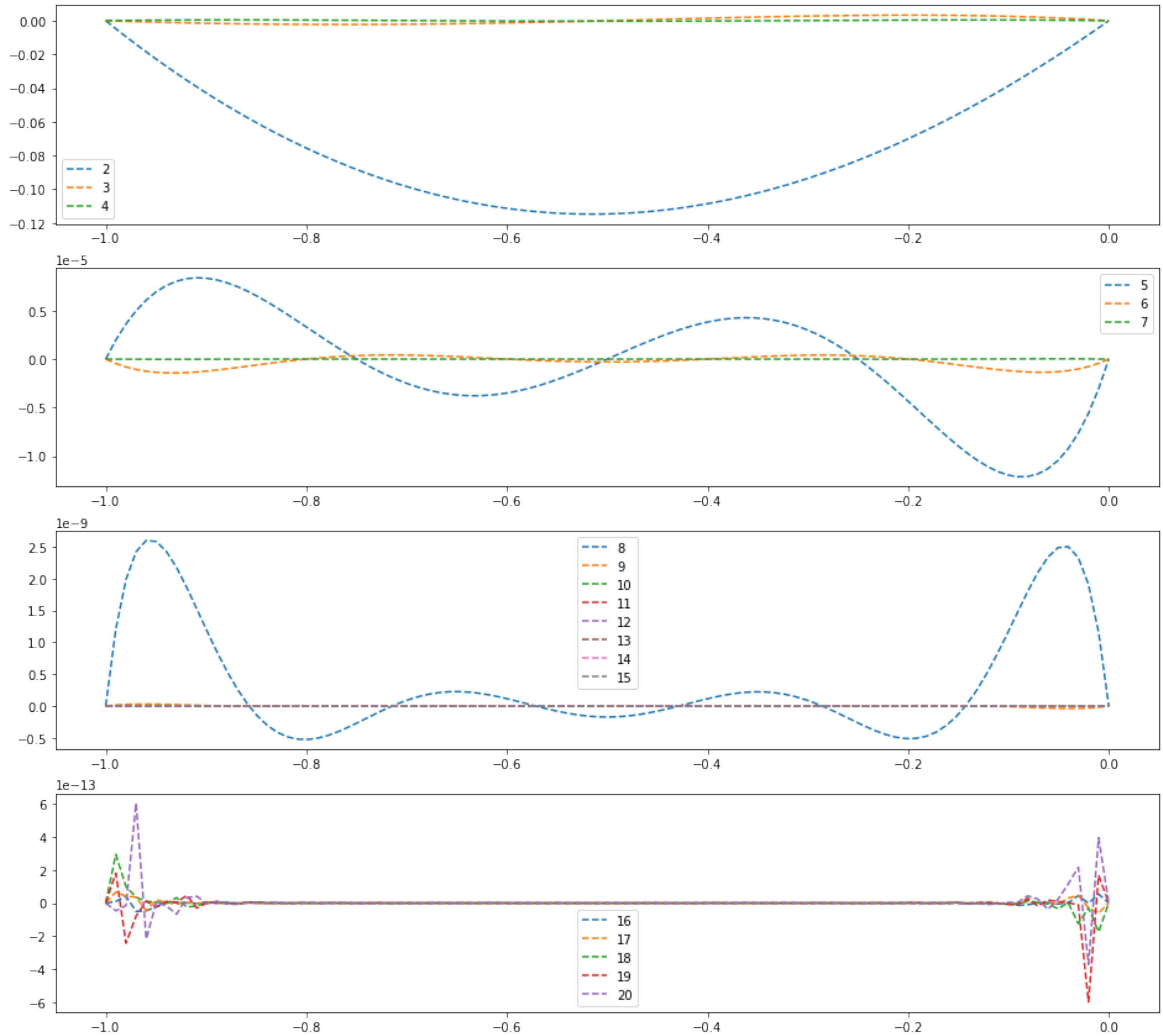
Տրված է f ֆունկցիա $[a,b]$ միջակայքում: Կառուցել ինտերպոլյացիոն բազմանդամների հաջորդականություն (երբ բազմանդամի աստիճանը փոխվում է 1 ից 20)

1. հավասարահեռ հանգույցներով
2. օպտիմալ հանգույցներով

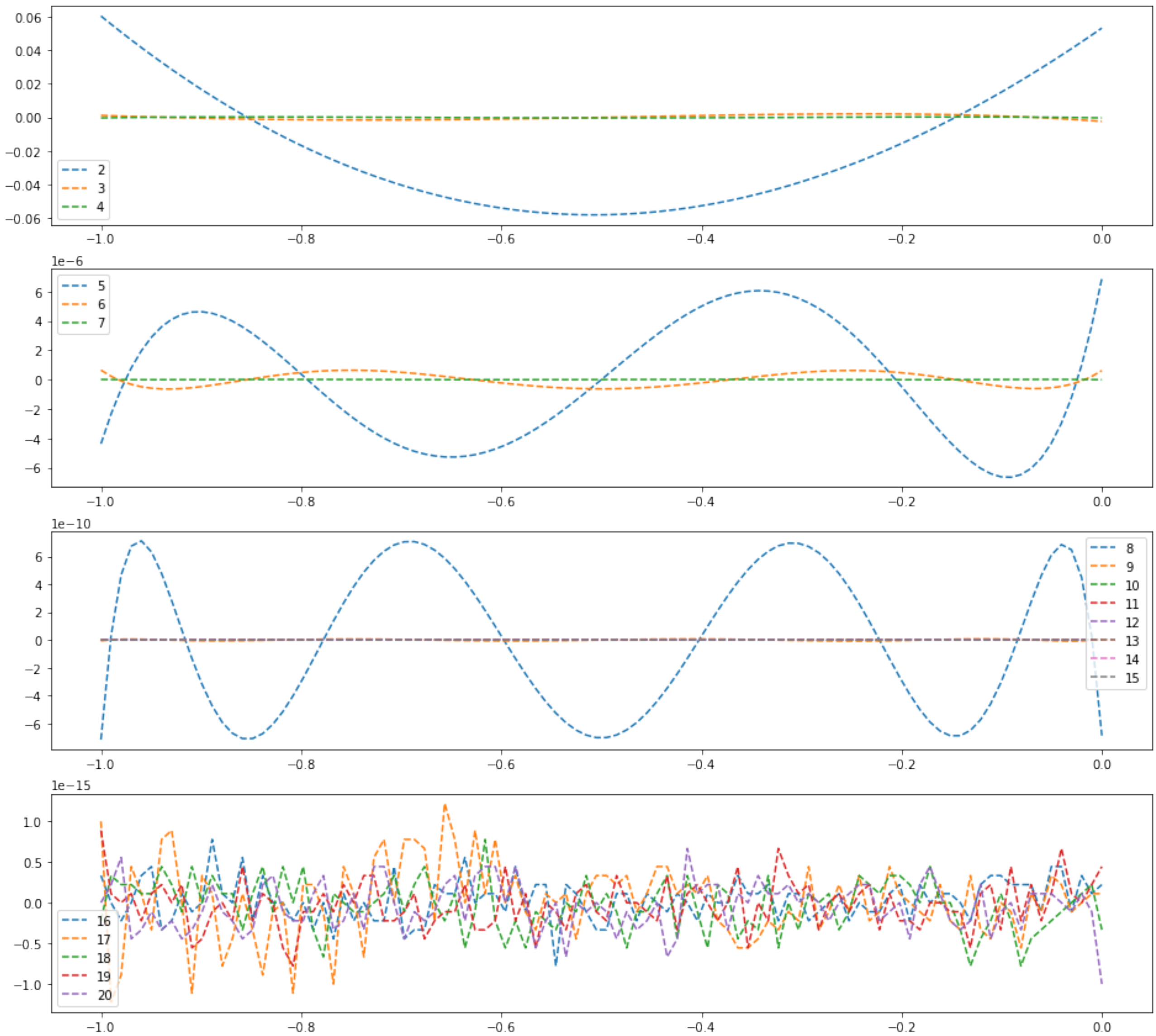
$$f\left(x\right)=\cos\left(x+4\right),\left[a,b\right]=\left[-1,0\right]$$

Լուծում.

Ստորև ներկայացված է $\delta_n\left(x\right)=f\left(x\right)-L_{n-1}\left(x\right)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները հավասարահեռ հանգույցների դեպքում:



Ստորև ներկայացված է $\delta_n(x) = f(x) - L_{n-1}(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները օպտիմալ հանգույցների դեպքում:



[0]Բազմանդամների հաշվումը և գրաֆիկների կազմումը կատարվել է $Python$ ծրագրավորման լեզվի $NumPy$ և $MatPlotLib$ գրադարանների միջոցով:

Խնդիր 5

Կառուցել քառակուսացման բանաձև I անիսկական ինտեգրալը $\epsilon = 0.001$ ճշտությամբ հաշվելու համար:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x-3)}{\sqrt[3]{x^4(2x+7)}}dx$$

Լուծում.

Քառակուսացման բանաձև կառուցելու համար ինտեգրալը բաժանենք երկու մասի:

$$I = \int_1^{\omega} \frac{\sin(x-3)}{\sqrt[3]{x^4(2x+7)}}dx + \int_{\omega}^{+\infty} \frac{\sin(x-3)}{\sqrt[3]{x^4(2x+7)}}dx \tag{1}$$

ω -ն ընտրենք այնպես, որ (1) -ի ձախ ինտեգրալում սխալը չգերազանցի $\frac{\epsilon}{2}$ -ը:

$$\int_{\omega}^{+\infty} \frac{\sin(x-3)}{\sqrt[3]{x^4(2x+7)}}dx \le \int_{\omega}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4(2x+7)}}dx \le \int_{\omega}^{+\infty} x^{-5/3}dx < \frac{\epsilon}{2} \implies -\frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}}\Big|_{\omega}^{+\infty} < \frac{\epsilon}{2} \implies$$

$$\implies \frac{3}{2}\omega^{-\frac{2}{3}} < \frac{\epsilon}{2} \implies \omega > \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^{-3/2} \approx 164317$$

Այսպիսով, եթե անիսկական ինտեգրալի փոխարեն հաշվենք (1) բանաձևի աջ մասի առաջին ինտեգրալը, ապա սխալը չի գերազանցի $\frac{\epsilon}{2}$-ը:

Ինտեգրալը հաշվենք սեղանների բանաձևով, հավասարաչափ քայլերով:

$$I = \int_1^{\omega} \frac{\sin(x-3)}{\sqrt[3]{x^4(2x+7)}}dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2}(x_{k+1} - x_k) \equiv \tilde{I}$$

$$R_2 = M_2 \frac{(b-a)h^2}{12} \implies h = \sqrt{\frac{12\frac{\epsilon}{2}}{M_2(b-a)}}$$

$$M_2 = \underset{x\in[10,18]}{max}\left|f^{(2)}(x)\right| = \left|f^{(2)}(1)\right| \approx 0.456$$

Հետևաբար.

$$h \approx 0.056$$

$$\tilde{I} \approx -0.264177$$

Ինտեգրալի արժեքը՝

$$I \approx -0.265111$$