

Հայաստանի Ազգային Պոլիտեխնիկական Համալսարան

Կիրառական մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի ֆակուլտետ



Կուրսային աշխատանք

Առարկա՝ Թվային մեթոդներ
Դասախոս՝ Բաբայան Արմենակ
Ուսանող՝ Սևոյան Կամո
Խումբ՝ ՄԹ 940-2

Երևան 2022

Խնդիր 1

Տրված (x_k, y_k) ինտերպոլյացիոն տվյալներով:

- կառուցել Լագրանժի ինտերպոլյացիոն բազմանդամ
- կառուցել բաժանված տարբերությունների աղյուսակը
- կառուցել Նյուտոնի ինտերպոլյացիոն բազմանդամը
- համեմատել Լագրանժի և Նյուտոնի ինտերպոլյացիոն բազմանդամների արժեքները \tilde{x} կետում:

x_k	1.21	2.51	2.91	3.35	3.78	4.61	5.51	6.91
y_k	1.12	1.39	1.04	1.21	1.58	1.82	2.25	2.78

$\tilde{x} = 4.05$

Լուծում.

- Համաձայն Լագրանժի ինտերպոլյացիոն բազմանդամի սահմանման.

$$L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Տվյալ ինտերպոլյացիոն տվյալներին համապատասխան Լագրանժի բազմանդամը կլինի՝

$$\begin{aligned} L_7(x) = & 1.12 \frac{(x - 2.51)(x - 2.91)(x - 3.35)(x - 3.78)(x - 4.61)(x - 5.51)(x - 6.91)}{(1.21 - 2.51)(1.21 - 2.91)(1.21 - 3.35)(1.21 - 3.78)(1.21 - 4.61)(1.21 - 5.51)(1.21 - 6.91)} + \\ & 1.39 \frac{(x - 1.21)(x - 2.91)(x - 3.35)(x - 3.78)(x - 4.61)(x - 5.51)(x - 6.91)}{(2.51 - 1.21)(2.51 - 2.91)(2.51 - 3.35)(2.51 - 3.78)(2.51 - 4.61)(2.51 - 5.51)(2.51 - 6.91)} + \\ & 1.04 \frac{(x - 1.21)(x - 2.51)(x - 3.35)(x - 3.78)(x - 4.61)(x - 5.51)(x - 6.91)}{(2.91 - 1.21)(2.91 - 2.51)(2.91 - 3.35)(2.91 - 3.78)(2.91 - 4.61)(2.91 - 5.51)(2.91 - 6.91)} + \\ & 1.21 \frac{(x - 1.21)(x - 2.51)(x - 2.91)(x - 3.78)(x - 4.61)(x - 5.51)(x - 6.91)}{(3.35 - 1.21)(3.35 - 2.51)(3.35 - 2.91)(3.35 - 3.78)(3.35 - 4.61)(3.35 - 5.51)(3.35 - 6.91)} + \\ & 1.58 \frac{(x - 1.21)(x - 2.51)(x - 2.91)(x - 3.35)(x - 4.61)(x - 5.51)(x - 6.91)}{(3.78 - 1.21)(3.78 - 2.51)(3.78 - 2.91)(3.78 - 3.35)(3.78 - 4.61)(3.78 - 5.51)(3.78 - 6.91)} + \\ & 1.82 \frac{(x - 1.21)(x - 2.51)(x - 2.91)(x - 3.35)(x - 3.78)(x - 5.51)(x - 6.91)}{(4.61 - 1.21)(4.61 - 2.51)(4.61 - 2.91)(4.61 - 3.35)(4.61 - 3.78)(4.61 - 5.51)(4.61 - 6.91)} + \\ & 2.25 \frac{(x - 1.21)(x - 2.51)(x - 2.91)(x - 3.35)(x - 3.78)(x - 4.61)(x - 6.91)}{(5.51 - 1.21)(5.51 - 2.51)(5.51 - 2.91)(5.51 - 3.35)(5.51 - 3.78)(5.51 - 4.61)(5.51 - 6.91)} + \\ & 2.78 \frac{(x - 1.21)(x - 2.51)(x - 2.91)(x - 3.35)(x - 3.78)(x - 4.61)(x - 5.51)}{(6.91 - 1.21)(6.91 - 2.51)(6.91 - 2.91)(6.91 - 3.35)(6.91 - 3.78)(6.91 - 4.61)(6.91 - 5.51)} \end{aligned}$$

- Համաձայն բաժանված տարբերության սահմանման.

$$f(x_k, x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - f(x_i, \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

Հետևաբար աղյուսակը կլինի.

	0	1	2	3	4	5	6	7
1.21	1.12							
		0.21						
2.51	1.39		-0.64					
		-0.88		1.00				
2.91	1.04		1.51		-0.69			
		0.39		-0.77		0.23		
3.35	1.21		0.54		0.09		-0.03	
		0.86		-0.58		0.08		-0.002
3.78	1.58		-0.45		0.32		-0.04	
		0.29		0.25		-0.1		
4.61	1.82		0.10		-0.08			
		0.48		-0.04				
5.51	2.25		-0.04					
		0.38						
6.91	2.78							

3. Համաձայն սահմանման, Նյուտոնի ինտերպոլյացիոն բազմանդամը ունի հետևյալ տեսքը.

$$L_{n-1}(x) = f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) + f(x_1, x_2, x_3)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + f(x_1, \dots, x_n)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Հետևաբար վերոնշյալ ինտերպոլյացիոն տվյալների համար Նյուտոնի ինտերպոլյացիոն բազմանդամը կլինի.

$$\begin{aligned} L_7(x) = & 1.12 + 0.21(x - 1.12) - 0.64(x - 1.12)(x - 2.51) + 1(x - 1.12)(x - 2.51)(x - 2.91) - \\ & - 0.69(x - 1.12)(x - 2.51)(x - 2.91)(x - 3.35) + 0.23(x - 1.12)(x - 2.51)(x - 2.91)(x - 3.35)(x - 3.78) - \\ & - 0.03(x - 1.12)(x - 2.51)(x - 2.91)(x - 3.35)(x - 3.78)(x - 4.61) + \\ & + 0.001(x - 1.12)(x - 2.51)(x - 2.91)(x - 3.35)(x - 3.78)(x - 4.61)(x - 5.51) \end{aligned}$$

4. Լագրանժի ինտերպոլյացիա՝

$$L_7(\tilde{x}) = 1.75$$

Նյուտոնի ինտերպոլյացիա՝

$$L_7(\tilde{x}) = 1.73$$

Խնդիր 2

Տրված է f ֆունկցիա և $[a, b]$ միջակայքում և $[a, b]$ միջակայքից x_j ինտերպոլացիայի հանգույցների մի քանի հավաք: Բոլոր հավաքների համար

- կառուցել Լագրանժի ինտերպոլացիոն բազմանդամ $(x_j, f(x_j))$ ինտերպոլացիոն տվյալներով:
- գնահատել սխալը
- համեմատել կառուցված բազմանդամի և ֆունկցիայի արժեքը \tilde{x} կետում:
- Ի՞նչ քայլ պետք է ընտրել, որ գծային, քառակուսային և խորանարդային ինտերպոլացիայի սխալը $[a_1, b_1]$ միջակայքում չգերազանցի ϵ : Դիտարկեք հաստատուն և փոփոխական քայլի դեպքերը:

$$f(x) = \sin \frac{1}{x+2}, [a, b] = [10, 18], \tilde{x} = 15.4, [a_1, b_1] = [10, 1000], \epsilon = 0.0001$$

- $x_j = 10, 12, 14, 16, 18$
- $x_j = 10, 14, 18$
- $x_j = 10, 12, 14, 16$
- $x_j = 10, 12, 16, 18$

Լուծում.

- Ինտերպոլացիոն բազմանդամներ.

$$\begin{aligned} \bullet L_4(x) &= \sin \frac{1}{12} \frac{(x-12)(x-14)(x-16)(x-18)}{(10-12)(10-14)(10-16)(10-18)} + \sin \frac{1}{14} \frac{(x-10)(x-14)(x-16)(x-18)}{(12-10)(12-14)(12-16)(12-18)} + \\ &\sin \frac{1}{16} \frac{(x-10)(x-12)(x-16)(x-18)}{(14-10)(14-12)(14-16)(14-18)} + \sin \frac{1}{18} \frac{(x-10)(x-12)(x-14)(x-16)}{(16-10)(16-12)(16-14)(16-18)} + \\ &\sin \frac{1}{20} \frac{(x-10)(x-12)(x-14)(x-16)}{(18-10)(18-12)(18-14)(18-16)} \\ \bullet L_2(x) &= \sin \frac{1}{12} \frac{(x-14)(x-18)}{(10-14)(10-18)} + \sin \frac{1}{16} \frac{(x-10)(x-18)}{(14-10)(14-18)} + \sin \frac{1}{18} \frac{(x-10)(x-14)}{(18-10)(18-14)} \\ \bullet L_3(x) &= \sin \frac{1}{12} \frac{(x-12)(x-14)(x-16)}{(10-12)(10-14)(10-16)} + \sin \frac{1}{14} \frac{(x-10)(x-14)(x-16)}{(12-10)(12-14)(12-16)} + \\ &\sin \frac{1}{16} \frac{(x-10)(x-12)(x-16)}{(14-10)(14-12)(14-16)} + \sin \frac{1}{18} \frac{(x-10)(x-12)(x-14)}{(16-10)(16-12)(16-14)} \\ \bullet L_3(x) &= \sin \frac{1}{12} \frac{(x-12)(x-16)(x-18)}{(10-12)(10-16)(10-18)} + \sin \frac{1}{14} \frac{(x-10)(x-16)(x-18)}{(12-10)(12-16)(12-18)} + \\ &\sin \frac{1}{18} \frac{(x-10)(x-12)(x-18)}{(16-10)(16-12)(16-18)} + \sin \frac{1}{20} \frac{(x-10)(x-12)(x-16)}{(18-10)(18-12)(18-16)} \end{aligned}$$

- Սխալների գնահատում.

Նախ գտնենք ֆունկցիայի ածանցյալները.

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= -\frac{1}{(x+2)^2} \cos \frac{1}{x+2} \\ f^{(2)}(x) &= \frac{2}{(x+2)^3} \cos \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^4} \sin \frac{1}{x+2} \\ f^{(3)}(x) &= -\frac{6}{(x+2)^4} \cos \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^5} \sin \frac{1}{x+2} + \frac{4}{(x+2)^5} \sin \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^6} \cos \frac{1}{x+2} = \\ &= \left[\frac{1-6(x+2)^2}{(x+2)^6} \right] \cos \frac{1}{x+2} + \frac{6}{(x+2)^5} \sin \frac{1}{x+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{(4)}(x) &= \left[\frac{-12(x+2)^7 - 6(x+2)^5 + 36(x+2)^7}{(x+2)^{12}} \right] \cos \frac{1}{x+2} + \left[\frac{1 - 6(x+2)^2}{(x+2)^8} \right] \sin \frac{1}{x+2} - \\
&- \frac{30}{(x+2)^6} \sin \frac{1}{x+2} - \frac{6}{(x+2)^7} \cos \frac{1}{x+2} = \left[\frac{24(x+2)^2 - 12}{(x+2)^7} \right] \cos \frac{1}{x+2} + \left[\frac{1 - 36(x+2)^2}{(x+2)^8} \right] \sin \frac{1}{x+2} \\
f^{(5)}(x) &= \left[\frac{48(x+2)^8 - 168(x+2)^8 + 84(x+2)^6}{(x+2)^{14}} \right] \cos \frac{1}{x+2} + \left[\frac{24(x+2)^2 - 12}{(x+2)^9} \right] \sin \frac{1}{x+2} + \\
&+ \left[\frac{-72(x+2)^9 - 8(x+2)^7 + 288(x+2)^9}{(x+2)^{16}} \right] \sin \frac{1}{x+2} - \left[\frac{1 - 36(x+2)^2}{(x+2)^{10}} \right] \cos \frac{1}{x+2} = \\
&\left[\frac{-120(x+2)^4 + 120(x+2)^2 - 1}{(x+2)^{10}} \right] \cos \frac{1}{x+2} + \left[\frac{240(x+2)^2 - 20}{(x+2)^9} \right] \sin \frac{1}{x+2}
\end{aligned}$$

Այսպիսով.

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= -\frac{1}{(x+2)^2} \cos \frac{1}{x+2} \\
f^{(2)}(x) &= \frac{2}{(x+2)^3} \cos \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^4} \sin \frac{1}{x+2} \\
f^{(3)}(x) &= \left[\frac{1 - 6(x+2)^2}{(x+2)^6} \right] \cos \frac{1}{x+2} + \frac{6}{(x+2)^5} \sin \frac{1}{x+2} \\
f^{(4)}(x) &= \left[\frac{24(x+2)^2 - 12}{(x+2)^7} \right] \cos \frac{1}{x+2} + \left[\frac{1 - 36(x+2)^2}{(x+2)^8} \right] \sin \frac{1}{x+2} \\
f^{(5)}(x) &= \left[\frac{-120(x+2)^4 + 120(x+2)^2 - 1}{(x+2)^{10}} \right] \cos \frac{1}{x+2} + \left[\frac{240(x+2)^2 - 20}{(x+2)^9} \right] \sin \frac{1}{x+2}
\end{aligned}$$

Անցնենք սխալների գնահատմանը.

$$\bullet |f(x) - L_4(x)| \leq \frac{M_5}{5!} \|(x-10)(x-12)(x-14)(x-16)(x-18)\|$$

$$M_5 = \max_{x \in [10, 18]} |f^{(5)}(x)| = f^{(5)}(10) \approx 4 * 10^{-5}$$

Բազմանդամի մեծագույն արժեքը որոշելու համար կատարենք փոփոխականի փոխարինում.

$$x - 14 = t$$

Կստանանք.

$$P(t) = t(t-4)(t-2)(t+2)(t+4) = t^5 - 20t^3 + 64t$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = 5t^4 - 60t^2 + 64 = 0$$

$$t^2 = \frac{60 \pm \sqrt{2320}}{10} \implies t = \pm \sqrt{\frac{60 \pm \sqrt{2320}}{10}}$$

$$\|P(t)\| = \left| P\left(\pm \sqrt{\frac{60 + \sqrt{2320}}{10}}\right) \right| \approx 116$$

$$\text{Հետևաբար } |f(x) - L_4(x)| \leq \frac{3 * 10^{-5}}{120} 116 \approx 4 * 10^{-5}$$

$$\bullet |f(x) - L_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!} \|(x-10)(x-14)(x-18)\|$$

$$M_3 = \max_{x \in [10, 18]} |f^{(3)}(x)| = |f^{(3)}(10)| \approx 3 * 10^{-4}$$

Բազմանդամի մեծագույն արժեքը որոշելու համար կատարենք փոփոխականի փոխարինում.

$$x - 14 = t$$

Կստանանք.

$$P(t) = t(t-4)(t+4) = t^3 - 16t$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = 3t^2 - 16 = 0 \implies t = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\|P(t)\| = \left| P\left(\pm \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \right| \approx 24.63$$

$$\text{Չետևաբար } |f(x) - L_2(x)| \leq \frac{3 \cdot 10^{-4}}{6} 24.63 \approx 10^{-3}$$

$$\bullet |f(x) - L_3(x)| \leq \frac{M_4}{4!} \|(x-10)(x-12)(x-14)(x-16)\|$$

$$M_4 = \max_{x \in [10, 18]} |f^{(4)}(x)| = |f^{(4)}(10)| \approx 9 \cdot 10^{-5}$$

Բազմանդամի մեծագույն արժեքը որոշելու համար կատարենք փոփոխականի փոխարինում.

$$x - 13 = t$$

Կստանանք.

$$P(t) = (t+3)(t+1)(t-1)(t-3) = t^4 - 10t^2 + 9$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = t^3 - 5t = 0 \implies t = 0, t = \pm 5$$

$$\|P(t)\| = |P(\pm 5)| = 384$$

$$\text{Չետևաբար } |f(x) - L_3(x)| \leq \frac{9 \cdot 10^{-5}}{24} 384 \approx 15 \cdot 10^{-4}$$

$$\bullet |f(x) - L_3(x)| \leq \frac{M_4}{4!} \|(x-10)(x-12)(x-16)(x-18)\|$$

$$M_4 = \max_{x \in [10, 18]} |f^{(4)}(x)| = |f^{(4)}(10)| \approx 9 \cdot 10^{-5}$$

Բազմանդամի մեծագույն արժեքը որոշելու համար կատարենք փոփոխականի փոխարինում.

$$x - 14 = t$$

Կստանանք.

$$P(t) = (t+4)(t+2)(t-2)(t-4) = t^4 - 20t^2 + 64$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = t^3 - 10t = 0 \implies t = 0, t = \pm \sqrt{10}$$

$$\|P(t)\| = |P(0)| = 64$$

$$\text{Չետևաբար } |f(x) - L_3(x)| \leq \frac{9 \cdot 10^{-5}}{24} 60 \approx 25 \cdot 10^{-5}$$

3. Ֆունկցիայի և ինտերպոլյացիոն բազմանդամների արժեքները \tilde{x} կետում

- $f(x) \approx 0.0574$
- $L_4(15.4) \approx 0.0574$
- $L_2(15.4) \approx 0.0571$
- $L_3(15.4) \approx 0.0575$
- $L_3(15.4) \approx 0.0574$

4. Նախ դիտարկենք հաստատուն քայլերի դեպքը:

- Գծային ինտերպոլյացիա.

$$R_2 = M_2 \frac{h^2}{8}$$

$$M_2 = \max_{x \in [10, 1000]} |f^{(2)}(x)| = |f^{(2)}(10)| \approx 1.1 * 10^{-3}$$

Որտեղից h -ի համար կունենանք.

$$h = \sqrt{\frac{8\epsilon}{M_2}} \approx 0.834$$

Հանգույցների քանակը`

$$N = \left\lceil \frac{1000 - 10}{h} \right\rceil = 1188$$

- Քառակուսային ինտերպոլյացիա.

$$R_3 = M_3 \frac{h^3}{9\sqrt{3}}$$

$$M_3 = \max_{x \in [10, 1000]} |f^{(3)}(x)| = |f^{(3)}(10)| \approx 3 * 10^{-4}$$

Որտեղից h -ի համար կունենանք.

$$h = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}\epsilon}{M_3}} \approx 1.76$$

Հանգույցների քանակը`

$$N = \left\lceil \frac{1000 - 10}{h} \right\rceil_{N=2n+3} = 563$$

- Խորանարդային ինտերպոլյացիա.

$$R_4 = M_4 \frac{h^4}{24}$$

$$M_4 = \max_{x \in [10, 1000]} |f^{(4)}(x)| = |f^{(4)}(10)| \approx 9 * 10^{-5}$$

Որտեղից h -ի համար կունենանք.

$$h = \sqrt[4]{\frac{24\epsilon}{M_4}} \approx 2.24$$

Հանգույցների քանակը`

$$N = \left\lceil \frac{1000 - 10}{h} \right\rceil_{N=3n+4} = 442$$

Դիտարկենք փոփոխական քայլի դեպքը.

$[10, 1000]$ հատվածը բաժանենք $(10, 340, 670, 1000)$ հանգույցներով:

- Գծային ինտերպոլյացիա.

$$R_{2j} = M_{2j} \frac{h_j^2}{8}, j = 1, 2, 3$$

$$M_{21} = \max_{x \in [10, 340]} |f^{(2)}(x)| = |f^{(2)}(10)| \approx 1.1 * 10^{-3}$$

$$M_{22} = \max_{x \in [340, 670]} |f^{(2)}(x)| = |f^{(2)}(340)| \approx 5 * 10^{-8}$$

$$M_{23} = \max_{x \in [670, 1000]} |f^{(2)}(x)| = |f^{(2)}(670)| \approx 6.6 * 10^{-9}$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{8\epsilon}{M_{21}}} \approx 0.834, h_2 = \sqrt{\frac{8\epsilon}{M_{22}}} \approx 126.49, h_3 = \sqrt{\frac{8\epsilon}{M_{23}}} \approx 348.4$$

$$N_1 = \left\lceil \frac{340 - 10}{h_1} \right\rceil = 396, N_2 = \left\lceil \frac{670 - 340}{h_2} \right\rceil = 3, N_3 = \left\lceil \frac{1000 - 670}{h_3} \right\rceil = 1$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 400$$

- Քառակուսային ինտերպոլացիա.

$$R_{3j} = M_{3j} \frac{h_j^3}{9\sqrt{3}}$$

$$M_{31} = \max_{x \in [10, 340]} |f^{(3)}(x)| = |f^{(3)}(10)| \approx 3 * 10^{-4}$$

$$M_{32} = \max_{x \in [340, 670]} |f^{(3)}(x)| = |f^{(3)}(340)| \approx 5 * 10^{-10}$$

$$M_{33} = \max_{x \in [670, 1000]} |f^{(3)}(x)| = |f^{(3)}(670)| \approx 3 * 10^{-11}$$

$$h_1 = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}\epsilon}{M_{31}}} \approx 1.76, h_2 = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}\epsilon}{M_{32}}} \approx 146.7, h_3 = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}\epsilon}{M_{33}}} \approx 375.6$$

$$N_1 = \left\lceil \frac{340 - 10}{h_1} \right\rceil_{N=2n+3} = 189, N_2 = \left\lceil \frac{670 - 340}{h_2} \right\rceil_{N=2n+3} = 3, N_3 = \left\lceil \frac{1000 - 670}{h_3} \right\rceil_{N=2n+3} = 3$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 195$$

- Խորանարդային ինտերպոլացիա.

$$R_{4j} = M_{4j} \frac{h_j^4}{24}$$

$$M_{41} = \max_{x \in [10, 340]} |f^{(4)}(x)| = |f^{(4)}(10)| \approx 9 * 10^{-5}$$

$$M_{42} = \max_{x \in [340, 670]} |f^{(4)}(x)| = |f^{(4)}(340)| \approx 6 * 10^{-12}$$

$$M_{43} = \max_{x \in [670, 1000]} |f^{(4)}(x)| = |f^{(4)}(670)| \approx 2 * 10^{-13}$$

$$h_1 = \sqrt[4]{\frac{24\epsilon}{M_{41}}} \approx 2.24, h_2 = \sqrt[4]{\frac{24\epsilon}{M_{42}}} \approx 147.07, h_3 = \sqrt[4]{\frac{24\epsilon}{M_{43}}} \approx 342.15$$

$$N_1 = \left\lceil \frac{340 - 10}{h_1} \right\rceil_{N=3n+4} = 148, N_2 = \left\lceil \frac{670 - 340}{h_2} \right\rceil_{N=3n+4} = 4, N_3 = \left\lceil \frac{1000 - 670}{h_3} \right\rceil_{N=3n+4} = 4$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 156$$

Խնդիր 3

Տրված է f ֆունկցիա $[a, b]$ միջակայքում:

1. Հաշվել ֆունկցիայի ինտեգրալը Սիմպսոնի, սեղանների և ուղղանկյունների բանաձևերով, բաժանելով այդ ինտեգրալը 4 հավասար մասերի:
2. Գնահատել սխալը բոլոր դեպքերի համար:
3. Ի՞նչ տրոհման քայլ է պետք ընտրել, որպեսզի Սիմպսոնի, սեղանների և ուղղանկյունների բանաձևերի սխալը չգերազանցի $\epsilon = 0.001$:
4. Հաշվել f ֆունկցիայի ինտեգրալը $[a, b]$ միջակայքում Գաուսի բանաձևով 3 հանգույցներով:

$$f(x) = \sin \frac{1}{x+2}, [a, b] = [10, 18]$$

Լուծում.

1. Ինտեգրալների հաշվում:

- Ուղղանկյունների եղանակ:

$$\tilde{I}_1(f) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 2 \left[\sin \frac{1}{12} + \sin \frac{1}{14} + \sin \frac{1}{16} + \sin \frac{1}{18} \right] \approx 0.5452$$

- Սեղանների եղանակ:

$$\tilde{I}_2(f) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2} (x_{k+1} - x_k) = \sin \frac{1}{12} + \sin \frac{1}{20} + 2 \left[\sin \frac{1}{14} + \sin \frac{1}{16} + \sin \frac{1}{18} \right] \approx 0.5119$$

- Սիմպսոնի եղանակ:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_3(f) &= \sum_{k=0}^{N-1} [f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})] \frac{(x_{2k+2} - x_{2k})}{6} = \\ &= \frac{2}{3} \left(\sin \frac{1}{12} + \sin \frac{1}{20} + 4 \left[\sin \frac{1}{14} + \sin \frac{1}{18} \right] + 2 \sin \frac{1}{16} \right) \approx 0.51045 \end{aligned}$$

2. Սխալների գնահատում

- Ուղղանկյունների եղանակ:

$$R_1 = M_1 \frac{(b-a)h}{2}$$

$$M_1 = \max_{x \in [10, 18]} |f^{(1)}(x)| = |f^{(1)}(10)| \approx 6.9 * 10^{-3}$$

Որտեղից կունենանք.

$$R_1 \approx 0.055$$

- Սեղանների եղանակ:

$$R_2 = M_2 \frac{(b-a)h^2}{12}$$

$$M_2 = \max_{x \in [10, 18]} |f^{(2)}(x)| = |f^{(2)}(10)| \approx 1.1 * 10^{-3}$$

Որտեղից կունենանք.

$$R_2 \approx 3 * 10^{-3}$$

- Սիմփսոնի եղանակ:

$$R_3 = M_4 \frac{(b-a) h^4}{180}$$

$$M_4 = \max_{x \in [10, 18]} |f^{(4)}(x)| = |f^{(4)}(10)| \approx 9 * 10^{-5}$$

Որտեղից կունենանք.

$$R_3 \approx 6.7 * 10^{-5}$$

3. Ինտեգրալների հաշվում մաքսիմալ թույլատրելի սխալի պայմանով:

- Ուղղանկյունների եղանակ:

$$R_1 = M_1 \frac{(b-a) h}{2} \implies h = \frac{2\epsilon}{M_1 (b-a)} \approx 0.0361$$

- Սեղանների եղանակ:

$$R_2 = M_2 \frac{(b-a) h^2}{12} \implies h = \sqrt{\frac{12\epsilon}{M_2 (b-a)}} \approx 1.1424$$

- Սիմփսոնի եղանակ:

$$R_3 = M_4 \frac{(b-a) h^4}{180} \implies h = \sqrt[4]{\frac{180\epsilon}{M_4 (b-a)}} \approx 3.9253$$

4. Ինտեգրալի հաշվում Գաուսի բանաձևով:

$$\int_{10}^{18} f(x) = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + C_3 f(x_3)$$

$[10, 18]$ միջակայքում ուղղահայաց բազմանդամներ գտնենք օգտվելով Լեժանդրի բազմանդամներից:

$$L_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

$$L_3(x) = \frac{1}{48} \frac{d^3}{dx^3} [x^6 - 3x^4 + 3x^2 + 1] = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

$$L_3(t) = 0 \implies t = 0, t = \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Ստացված արմատները տանենք $[10, 18]$ միջակայք:

$$x_k = 4t_k + 14 \implies x_1 = 14 - 4\sqrt{\frac{3}{5}}, x_2 = 14, x_3 = 14 + 4\sqrt{\frac{3}{5}}, x_2$$

Քանի որ բանաձևը ճշգրիտ է 0, 1, 2 կարգի բազմանդամների համար՝

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = \int_{10}^{18} 1 dx \\ C_1(x_1 - 14) + C_2(x_2 - 14) + C_3(x_3 - 14) = \int_{10}^{18} (x - 14) dx \\ C_1(x_1 - 14)^2 + C_2(x_2 - 14)^2 + C_3(x_3 - 14)^2 = \int_{10}^{18} (x - 14)^2 dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 8 \\ -4\sqrt{\frac{3}{5}}C_1 + 4\sqrt{\frac{3}{5}}C_3 = 0 \\ \frac{48}{5}C_1 + \frac{48}{5}C_3 = \frac{128}{3} \end{cases} \implies C_1 = C_3 = \frac{20}{9}, C_2 = \frac{32}{9}$$

Այսպիսով՝

$$\int_{10}^{18} f(x) = \frac{20}{9} f\left(14 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{32}{9} f(14) + \frac{20}{9} f\left(14 + \sqrt{\frac{3}{5}}, x_2\right) \approx 0.51046$$

Խնդիր 4

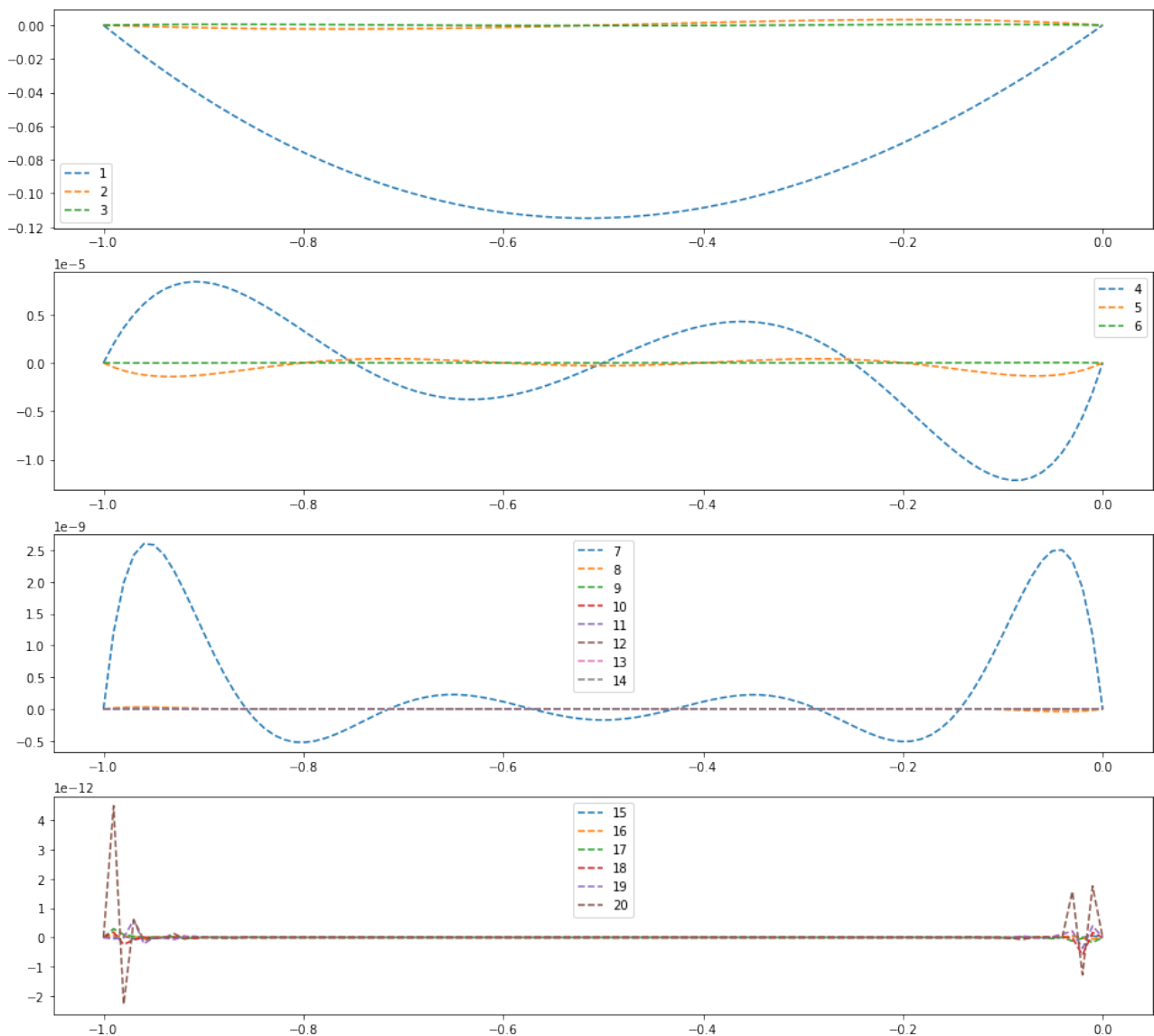
Տրված է f ֆունկցիա $[a, b]$ միջակայքում: Կառուցել ինտերպոլացիոն բազմանդամների հաջորդականություն (երբ բազմանդամի աստիճանը փոխվում է 1 ից 20)

1. հավասարահեռ հանգույցներով
2. օպտիմալ հանգույցներով

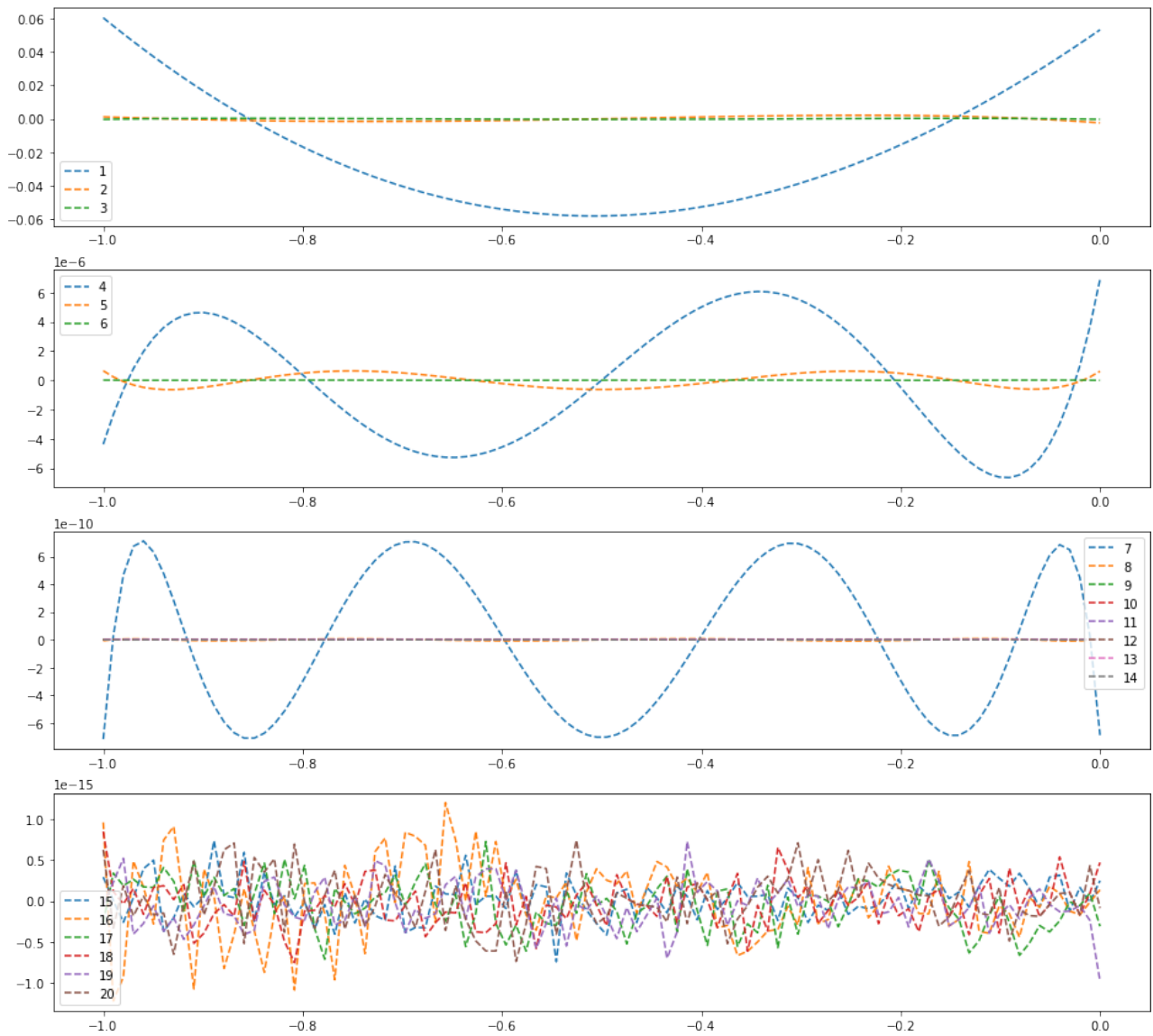
$$f(x) = \cos(x + 4), [a, b] = [-1, 0]$$

Լուծում.

Ստորև ներկայացված է $\delta_n(x) = f(x) - L_{n-1}(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները հավասարահեռ հանգույցների դեպքում:



Ստորև ներկայացված է $\delta_n(x) = f(x) - L_{n-1}(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները օպտիմալ հանգույցների դեպքում:



⁰Բազմանդամների հաշվումը և գրաֆիկների կազմումը կատարվել է *Python* ծրագրավորման լեզվի *NumPy* և *Matplotlib* գրադարանների միջոցով:

Խնդիր 5

Կառուցել բառակուսացման բանաձև I անխսկական ինտեգրալը $\epsilon = 0.001$ ճշտությամբ հաշվելու համար:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x-3)}{\sqrt[3]{x^4(2x+7)}} dx$$

Լուծում.

Քառակուսացման բանաձև կառուցելու համար ինտեգրալը բաժանենք երկու մասի:

$$I = \int_1^{\omega} \frac{\sin(x-3)}{\sqrt[3]{x^4(2x+7)}} dx + \int_{\omega}^{+\infty} \frac{\sin(x-3)}{\sqrt[3]{x^4(2x+7)}} dx \quad (1)$$

ω -ն ընտրենք այնպես, որ (1) -ի ձախ ինտեգրալում սխալը չգերազանցի $\frac{\epsilon}{2}$ -ը:

$$\begin{aligned} \int_{\omega}^{+\infty} \frac{\sin(x-3)}{\sqrt[3]{x^4(2x+7)}} dx &\leq \int_{\omega}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4(2x+7)}} dx \leq \int_{\omega}^{+\infty} x^{-5/3} dx < \frac{\epsilon}{2} \implies -\frac{3}{2} x^{-2/3} \Big|_{\omega}^{+\infty} < \frac{\epsilon}{2} \implies \\ &\implies \frac{3}{2} \omega^{-2/3} < \frac{\epsilon}{2} \implies \omega > \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^{-3/2} \approx 164317 \end{aligned}$$

Այսպիսով, եթե անխսկական ինտեգրալի փոխարեն հաշվենք (1) բանաձևի աջ մասի առաջին ինտեգրալը, ապա սխալը չի գերազանցի $\frac{\epsilon}{2}$ -ը:

Ինտեգրալը հաշվենք սեղանների բանաձևով, հավասարաչափ քայլերով:

$$I = \int_1^{\omega} \frac{\sin(x-3)}{\sqrt[3]{x^4(2x+7)}} dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2} (x_{k+1} - x_k) \equiv \tilde{I}$$

$$R_2 = M_2 \frac{(b-a)h^2}{12} \implies h = \sqrt{\frac{12 \frac{\epsilon}{2}}{M_2(b-a)}}$$

$$M_2 = \max_{x \in [10, 18]} |f^{(2)}(x)| = |f^{(2)}(1)| \approx 0.456$$

Հետևաբար.

$$h \approx 0.056$$

$$\tilde{I} \approx -0.264177$$

Ինտեգրալի արժեքը՝

$$I \approx -0.265111$$