ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

Nr. CCXXIII PRACE MATEMATYCZNE. ZESZYT 14 1969

D. V. Ionescu

L'extension d'une équation fonctionnelle de Pompeiu à l'aide d'une formule de dérivation numérique

Le but de cette communication est un extension de l'équation fonctionnelle de D. Pompeiu

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{1}$$

à une équation fonctionnelle liée avec les différences divisées généralisées

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f]$$

définies pour la fonction $f(x)$ et pour les système de noeuds

$$a < x_0 < x_0 < \dots < x_n < b$$

contenus à l'intervalle ouverte (a, b), où la fonction f est définie.

Il s'agit de l'équation fonctionnelle

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(\frac{x_0+x_1+\dots+x_n}{n+1}\right) \tag{2}$$

où $f^{(n)}$ dénote la n-ième dérivée de la fonction f. Pour $n = 1$ l'équation (2) se réduit justement à l'équation (1) de Pompeiu.

L'auteur démontre le théorème que l'ensemble de solutions de l'équation (2) se confond avec l'ensemble de tous les polynômes de dégré $n+1$.

La démonstration est basée sur une formule de L. Tchakaloff (1936), retrouvée plus tard (1957) par une autre voie par l'auteur ainsi sur une autre formule

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} - \int_{x_0}^{x_n} \varphi(\xi, s) f^{(n+1)}(s)\, ds$$

où ξ est un des noeuds x_i est le noyau $\varphi(\xi, s)$ est convenablement défini.

La démonstration détaillée sera publiée dan les „Annales Polonici Mathematici".