Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Finančna matematika – 1. stopnja

Tilen Humar, Urban Rupnik

Iskanje bitonične rešitve problema potujočega trgovca

Projekt OR pri predmetu Finančni praktikum

Ljubljana, 2022

1. Predstavitev problema

Problem potujočega trgovca oziroma **problem trgovskega potnika** je ponavadi zastavljen v naslednji obliki.

Obstaja n mest, za katera poznamo razdalje med poljubnim parom mest. Trgovec želi obiskati vsa mesta, pri čemer pot začne in konča v istem mestu in vsak kraj obišče natanko enkrat. Katera je najkrajša oziroma najcenejša pot, ki jo lahko izbere trgovec?

V matematičnem jeziku se problem torej prevede na iskanje najcenejšega Hamiltonovega cikla v polnem grafu K_n, kjer ima vsaka povezava e znano utež (ceno) c_e. Ker pa je v osnovi dotični problem "NP-težek", to je, da bi za iskanje njegove rešitve potrebovali več kot polinomski čas, se omejimo na lažjo nalogo iskanja njegove najkrajše bitonične rešitve.

2. Bitonična pot

Definicija 2.1. Zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je bitonično, ko obstaja tak $k, 1 \leq k < n$, da velja

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k \geq \cdots \geq x_n.$$

Bitonična rešitev problema, bo torej pot, kjer bomo začeli v skrajno levo ležečem vozlišču, nadaljevali strogo desno do najbolj desnega vozlišča in še strogo levo nazaj do izhodišča. Bitoničnost poti lahko na grafu preverimo z navpičnicami. Vsaka navpična črta seka pot največ dvakrat.

SLIKA... graf z bitonicno potjo in en z navadno

Iskanje najkrajše bitonične poti je standardna naloga v dinamičnem programiranju, rešljiva v polinomskem času $O(n^2)$, poznamo pa tudi hitrejši algoritem s časovno zahtevnostjo $O(n \log^2 n)$.

3. Dinamično programiranje

Imamo poln graf K_n z množico n vozlišč $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, urejenih po naraščajoči x koordinati. Cene povezav so enake (evklidski) razdalji med posameznima vozliščema. Naš problem iskanja najkrajše bitonične poti (po definiciji dinamičnega programiranje) razdelimo na manjše probleme.

Naj bo $P_{i,j}$ (za $i \leq j$) najkrajša bitonična pot, ki se začne v vozlišču v_i, nadaljuje strogo levo do v_1 in nato strogo desno do v_j. Slednja pot obišče vozlišča $\{v_1, v_2, \ldots, v_j\}$. Rešitev problema potujočega trgovca bo torej pot $P_{n,n}$.