

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Finančna matematika – 1. stopnja

Tilen Humar, Urban Rupnik

Iskanje bitonične rešitve problema potujočega trgovca

Projekt OR pri predmetu Finančni praktikum

Ljubljana, 2022

1. PREDSTAVITEV PROBLEMA

Problem potujočega trgovca oziroma **problem trgovskega potnika** je ponavadi zastavljen v naslednji obliki.

Obstaja n mest, za katera poznamo razdalje med poljubnim parom mest. Trгоvec želi obiskati vsa mesta, pri čemer pot začne in konča v istem mestu in vsak kraj obišče natanko enkrat. Katera je najkrajša oziroma najcenejša pot, ki jo lahko izbere trgovec?

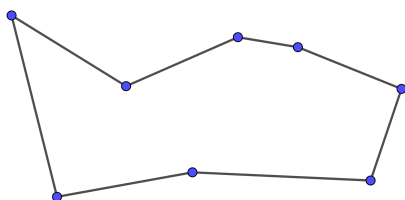
V matematičnem jeziku se problem torej prevede na iskanje najcenejšega Hamiltonovega cikla v polnem grafu K_n , kjer ima vsaka povezava e znano utež (ceno) c_e . Ker pa je v osnovi dotični problem “NP-težek”, to je, da bi za iskanje njegove rešitve potrebovali več kot polinomski čas, se omejimo na lažjo nalogo iskanja njegove najkrajše bitonične rešitve.

2. BITONIČNA POT

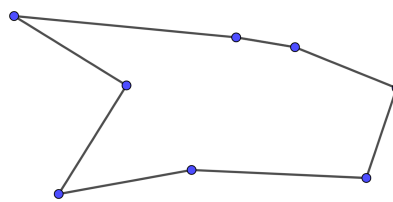
Definicija 2.1. Zaporedje $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je bitonično, ko obstaja tak $k, 1 \leq k < n$, da velja

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \geq \dots \geq x_n.$$

Bitonična rešitev problema, bo torej pot, kjer bomo začeli v skrajno levo ležečem vozlišču, nadaljevali strogo desno do najbolj desnega vozlišča in še strogo levo nazaj do izhodišča. Bitoničnost poti lahko na grafu preverimo z navpičnicami. Vsaka navpična črta seka pot največ dvakrat.



(A) Bitonična pot



(B) Nebitonična pot

SLIKA 1. Primer bitonične in nebitonične poti na grafu

Iskanje najkrajše bitonične poti je standardna naloga v dinamičnem programiranju, rešljiva v polinomskem času $O(n^2)$, poznamo pa tudi hitrejši algoritem s časovno zahtevnostjo $O(n \log^2 n)$.

3. DINAMIČNO PROGRAMIRANJE

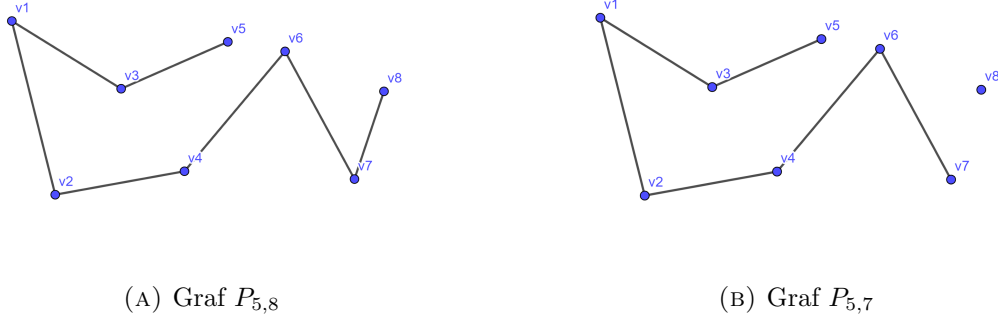
Imamo poln graf K_n z množico n vozlišč $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, urejenih po naraščajoči x koordinati. Cene povezav so enake (evklidski) razdalji med posameznima vozliščema. Naš problem iskanja najkrajše bitonične poti (po definiciji dinamičnega

programiranje) razdelimo na manjše probleme.

Naj bo $P_{i,j}$ (za $i \leq j$) najkrajša bitonična pot, ki se začne v vozlišču v_i , nadaljuje strogo levo do v_1 in nato strogo desno do v_j , kjer se konča. Slednja pot obišče vozlišča $\{v_1, v_2, \dots, v_j\}$. Rešitev problema potujočega trgovca bo torej pot $P_{n,n}$ oziroma $P_{n-1,n} + e_{n-1,n}$, kjer je $e_{n-1,n}$ povezava med v_{n-1} in v_n . Razčlenimo do zdaj ugotovljeno na nekaj podprimerov, iz česar bomo izpeljali rekurzivno formulo.

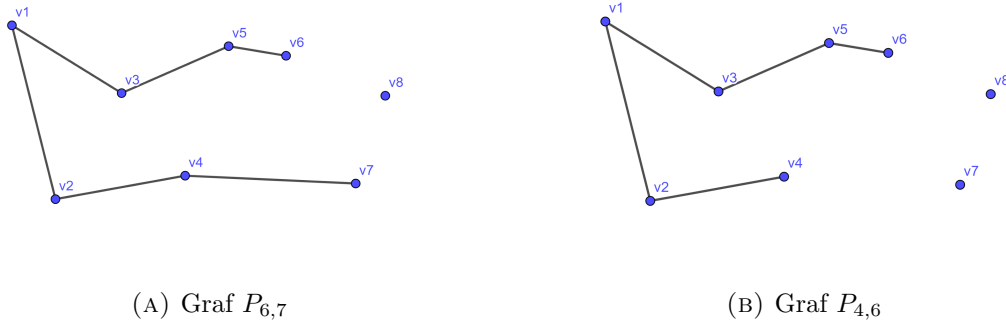
Naj za pot $P_{i,j}$ velja $i < j - 1$. V slednji poti bo tako v_{j-1} predhodnik v_j , zato velja, če iz poti $P_{i,j}$ odstranimo povezavo $e_{j-1,j}$, dobimo rešitev $P_{i,j-1}$.

Na spodnji sliki 2 je izrisan primer poti $P_{5,8}$, kjer omenjena neenakost velja ($5 < 8 - 1$). Ko smo na poti odstranili povezavo $e_{7,8}$, nam je ostala ravno pot $P_{5,7}$ (desna slika).



SLIKA 2. Primer grafov poti $P_{i,j}$ za $i < j - 1$.

Poglejmo še primer, ko za $P_{i,j}$ velja $i = j - 1$. Na poti $P_{i,j}$ bo imela točka v_j predhodnika v_k za $1 \leq k \leq j - 2$. Če sedaj odstranimo povezavo $e_{k,j}$ nam ostane pot $P_{k,j-1}$.



SLIKA 3. Primer grafov poti $P_{i,j}$ za $i = j - 1$.

Slednji primer je prikazan na sliki 3. Za pot $P_{6,7}$ velja enakost ($6 = 7 - 1$), torej ima vozlišče v_7 predhodnika v_k (za $1 \leq k \leq 7 - 2$). V našem primeru je $k = 4$ in ko iz

poti $P_{6,7}$ odstranimo povezavo $e_{4,7}$, dobimo ravno pot $P_{4,6}$.

V zadnji primer ($i = j - 1$) spada tudi skrajni dogodek $i = 1$ in $j = 2$. Imamo pot z le dvema vozliščema, torej je ta enaka kar njuni povezavi $P_{1,2} = e_{1,2}$.

Zgornje izpeljave lahko sedaj združimo v rekurzivno formulo.

$$P_{i,j} = \begin{cases} e_{1,2} & i = 1, j = 2 \\ P_{i,j-1} + e_{j-1,j} & i < j - 1 \\ \min_{1 \leq k \leq j-2} P_{k,j-1} + e_{k,j} & i = j - 1 \end{cases}$$

4. PROGRAM

V programskem jeziku R, sva pripravila program, ki vsebuje:

- funkcijo za generiranje točk v \mathbb{R}^2 (predpostavka: x koordinate so različna cela števila, y pa poljubna realna)
- funkcijo za risanje točk
- funkcijo za izračun evklidske razdalje med točkama
- program za iskanje najkrajše bitonične poti
- funkcijo za izpis poti

Program za iskanje najkrajše bitonične poti lahko, v rahlo poenostavljeni obliki, predstavimo z naslednjo psevdokodo.