Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Finančna matematika – 1. stopnja

Tilen Humar, Urban Rupnik

Iskanje bitonične rešitve problema potujočega trgovca

Projekt OR pri predmetu Finančni praktikum

Ljubljana, 2022

1. Predstavitev problema

Problem potujočega trgovca oziroma **problem trgovskega potnika** je ponavadi zastavljen v naslednji obliki.

Obstaja n mest, za katera poznamo razdalje med poljubnim parom mest. Trgovec želi obiskati vsa mesta, pri čemer pot začne in konča v istem mestu in vsak kraj obišče natanko enkrat. Katera je najkrajša oziroma najcenejša pot, ki jo lahko izbere trgovec?

V matematičnem jeziku se problem torej prevede na iskanje najcenejšega Hamiltonovega cikla v polnem grafu K_n v ravnini, kjer ima vsaka povezava e znano utež (ceno) c_e. Ker pa je v osnovi dotični problem "NP-težek", to je, da bi za iskanje njegove rešitve potrebovali več kot polinomski čas, se omejimo na lažjo nalogo iskanja njegove najkrajše bitonične rešitve.

2. Bitonična pot

Definicija 2.1. Zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je bitonično, ko obstaja tak $k, 1 \leq k < n$, da velja

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k \geq \cdots \geq x_n.$$

Bitonična rešitev problema, bo torej pot, kjer bomo začeli v skrajno levo ležečem vozlišču, nadaljevali strogo desno do najbolj desnega vozlišča in še strogo levo nazaj do izhodišča. Bitoničnost poti lahko na grafu preverimo z navpičnicami. Vsaka navpična črta seka pot največ dvakrat.

(a) Bitonična pot (b) Nebitonična pot

Slika 1. Primer bitonične in nebitonične poti na grafu

Iskanje najkrajše bitonične poti je standardna naloga v dinamičnem programiranju, rešljiva v polinomskem času $O(n^2)$, poznamo pa tudi hitrejši algoritem s časovno zahtevnostjo $O(n \log^2 n)$.

3. Dinamično programiranje

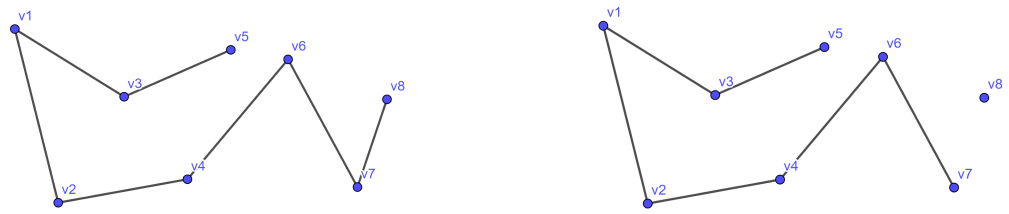
Imamo poln graf K_n z množico n vozlišč $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, urejenih po naraščajoči x koordinati. Cene povezav so enake (evklidski) razdalji med posameznima vozliščema. Naš problem iskanja najkrajše bitonične poti (po definiciji dinamičnega

programiranje) razdelimo na manjše probleme.

Naj bo $P_{i,j}$ (za $i \leq j$) najkrajša bitonična pot, ki se začne v vozlišču v_i, nadaljuje strogo levo do v_1 in nato strogo desno do v_j, kjer se konča. Slednja pot obišče vozlišča $\{v_1, v_2, \ldots, v_j\}$. Rešitev problema potujočega trgovca bo torej pot $P_{n,n}$ oziroma $P_{n-1,n} + e_{n-1,n}$, kjer je $e_{n-1,n}$ povezava med v_{n-1} in v_n. Razčlenimo do zdaj ugotovljeno na nekaj podprimerov, iz česar bomo izpeljali rekurzivno formulo.

Naj za pot $P_{i,j}$ velja $\boldsymbol{i < j - 1}$. V slednji poti bo tako v_{j-1} predhodnik v_j, zato velja, če iz poti $P_{i,j}$ odstranimo povezavo $e_{j-1,j}$, dobimo rešitev $P_{i,j-1}$.

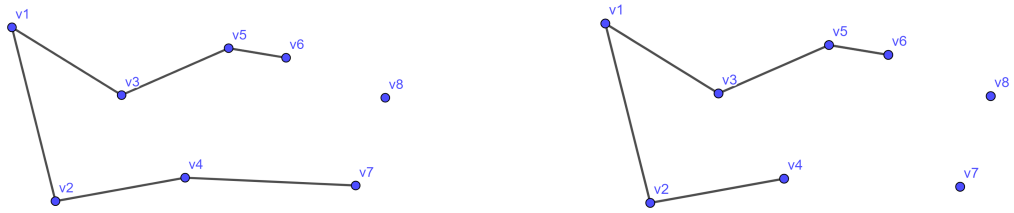
Na spodnji sliki 2 je izrisan primer poti $P_{5,8}$, kjer omenjena neenakost velja ($5 < 8 - 1$). Ko smo na poti odstranili povezavo $e_{7,8}$, nam je ostala ravno pot $P_{5,7}$ (desna slika).



(A) Graf $P_{5,8}$ (B) Graf $P_{5,7}$

SLIKA 2. Primer grafov poti $P_{i,j}$ za $i < j - 1$.

Poglejmo še primer, ko za $P_{i,j}$ velja $\boldsymbol{i = j - 1}$. Na poti $P_{i,j}$ bo imela točka v_j predhodnika v_k za $1 \leq k \leq j - 2$. Če sedaj odstranimo povezavo $e_{k,j}$ nam ostane pot $P_{k,j-1}$.



(A) Graf $P_{6,7}$ (B) Graf $P_{4,6}$

SLIKA 3. Primer grafov poti $P_{i,j}$ za $i = j - 1$

Slednji primer je prikazan na sliki 3. Za pot $P_{6,7}$ velja enakost ($6 = 7 - 1$), torej ima vozlišče v_7 predhodnika v_k (za $1 \leq k \leq 7 - 2$). V našem primeru je $k = 4$ in ko iz

poti $P_{6,7}$ odstranimo povezavo $e_{4,7}$, dobimo ravno pot $P_{4,6}$.

V zadnji primer ($i = j - 1$) spada tudi skrajni dogodek $\boldsymbol{i = 1}$ in $\boldsymbol{j = 2}$. Imamo pot z le dvema vozliščema, torej je ta enaka kar njuni povezavi $P_{1,2} = e_{1,2}$.

Zgornje izpeljave lahko sedaj združimo v rekurzivno formulo.

$$P_{i,j} = \begin{cases} e_{1,2} & i = 1,\, j = 2 \\ P_{i,j-1} + e_{j-1,j} & i < j - 1 \\ \min\limits_{1 \le k \le j-2} P_{k,j-1} + e_{k,j} & i = j - 1 \end{cases}$$

4. Program

V programskem jeziku R, sva pripravila program, ki vsebuje:

- funkcijo za generiranje točk v $\mathbb{R}^2$
- funkcijo za risanje točk
- funkcijo za izračun evklidske razdalje med točkama
- program za iskanje najkrajše bitonične poti
- funkcijo za izpis poti

4.1. **Generiranje podatkov.** Za generiranje podatkov oziroma točk v ravnini poskrbi pomožna funkcija `generiraj_tocke`, ki sprejme število želenih točk in koordinate pravokotnika (`zgornja_x`, `spodnja_x`, `zgornja_y`, `spodnja_y`) s katerim omejimo območje naših podatkov.

Predpostavila sva, da so x-koordinate točk različna cela števila znotraj izbranega pravokotnika (če je slednji premajhen za prej izbrano želeno število točk, funkcija vrne največje možno število točk znotraj pravokotnika), y-koordinate pa so realna števila.

4.2. **Program za iskanje najkrajše bitonične poti.** Glavni del programa lahko, v rahlo poenostavljeni obliki, predstavimo z naslednjo psevdokodo.

```
Razvrsti seznam_tock
Ustvari tabeli B[1...n, 1...n] in C[1...n, 1...n]
B[1,2] = razdalja(seznam_tock[1,], seznam_tock[2,])
C[1,2] = 1
for j = 3 to n
  for i = 1 to j - 2
    B[i,j] = B[i,j - 1] + razdalja(seznam_tock[j - 1,], seznam_tock[j,])
    C[i,j] = j - 1
  B[j - 1,j] = B[i,j - 1] + razdalja(seznam_tock[i,], seznam_tock[j,])
  for k = 2 to j - 2
    B[i,j] = min(B[i,j], B[k,j - 1] + razdalja(seznam_tock[k,], seznam_tock[j,]))
    C[i,j] = k
B[n,n] = B[n - 1,n] + razdalja(seznam_tock[n - 1,], seznam_tock[n,])
C[n,n] = n - 1
return B and C
```