Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Finančna matematika – 1. stopnja

Tilen Humar, Urban Rupnik

Iskanje bitonične rešitve problema potujočega trgovca

Projekt OR pri predmetu Finančni praktikum

Ljubljana, 2022

1. Predstavitev problema

Problem potujočega trgovca oziroma **problem trgovskega potnika** je ponavadi zastavljen v naslednji obliki.

Obstaja n mest, za katera poznamo razdalje med poljubnim parom mest. Trgovec želi obiskati vsa mesta, pri čemer pot začne in konča v istem mestu in vsak kraj obišče natanko enkrat. Katera je najkrajša oziroma najcenejša pot, ki jo lahko izbere trgovec?

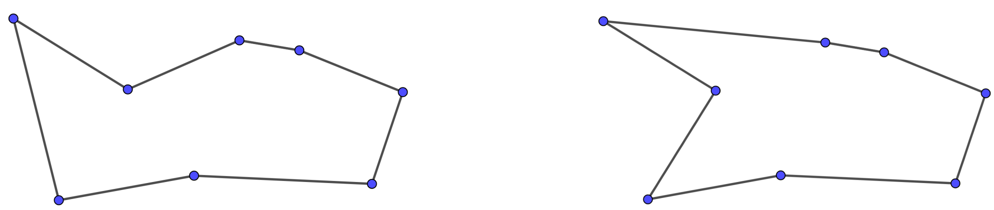
V matematičnem jeziku se problem torej prevede na iskanje najcenejšega Hamiltonovega cikla v polnem grafu K_n, kjer ima vsaka povezava e znano utež (ceno) c_e. Ker pa je v osnovi dotični problem "NP-težek", to je, da bi za iskanje njegove rešitve potrebovali več kot polinomski čas, se omejimo na lažjo nalogo iskanja njegove najkrajše bitonične rešitve.

2. Bitonična pot

Definicija 2.1. Zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je bitonično, ko obstaja tak $k, 1 \leq k < n$, da velja

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k \geq \cdots \geq x_n.$$

Bitonična rešitev problema, bo torej pot, kjer bomo začeli v skrajno levo ležečem vozlišču, nadaljevali strogo desno do najbolj desnega vozlišča in še strogo levo nazaj do izhodišča. Bitoničnost poti lahko na grafu preverimo z navpičnicami. Vsaka navpična črta seka pot največ dvakrat.



(A) Bitonična pot

(B) Nebitonična pot

Slika 1. Primer bitonične in nebitonične poti na grafu

Iskanje najkrajše bitonične poti je standardna naloga v dinamičnem programiranju, rešljiva v polinomskem času $O(n^2)$, poznamo pa tudi hitrejši algoritem s časovno zahtevnostjo $O(n \log^2 n)$.

3. Dinamično programiranje

Imamo poln graf K_n z množico n vozlišč $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, urejenih po naraščajoči x koordinati. Cene povezav so enake (evklidski) razdalji med posameznima vozliščema. Naš problem iskanja najkrajše bitonične poti (po definiciji dinamičnega programiranje) razdelimo na manjše probleme.

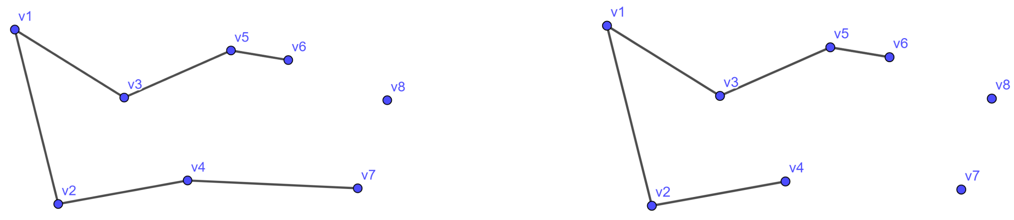
Naj bo $P_{i,j}$ (za $i \leq j$) najkrajša bitonična pot, ki se začne v vozlišču v_i, nadaljuje strogo levo do v_1 in nato strogo desno do v_j. Slednja pot obišče vozlišča $\{v_1, v_2, \ldots, v_j\}$. Rešitev problema potujočega trgovca bo torej pot $P_{n,n}$ oziroma $P_{n-1,n} + e_{n-1,n}$, kjer je $e_{n-1,n}$ povezava med v_{n-1} in v_n. Razčlenimo do zdaj ugotovljeno na nekaj podprimerov, iz česar bomo izpeljali rekurzivno formulo.

Naj za pot $P_{i,j}$ velja $\boldsymbol{i < j - 1}$. V slednji poti bo tako v_{j-1} predhodnik v_j, zato velja, če iz poti $P_{i,j}$ odstranimo povezavo $e_{j-1,j}$, dobimo rešitev $P_{i,j-1}$.

(A) neki (B) neki

Slika 2. neki

Poglejmo še primer, ko za $P_{i,j}$ velja $\boldsymbol{i = j - 1}$. Na poti $P_{i,j}$ bo imela točka v_j predhodnika v_k za $1 \leq k \leq j - 2$. Če sedaj odstranimo povezavo $e_{k,j}$ nam ostane pot $P_{k,j-1}$.



(A) neki (B) neki

Slika 3. neki

V zadnji primer ($i = j - 1$) spada tudi skrajni dogodek $\boldsymbol{i = 1}$ in $\boldsymbol{j = 2}$. Imamo pot z le dvema vozliščema, torej je ta enaka kar njuni povezavi $P_{1,2} = e_{1,2}$.

Zgornje izpeljave lahko sedaj združimo v rekurzivno formulo.

$$P_{i,j} = \begin{cases} e_{1,2} & i = 1,\ j = 2 \\ P_{i,j-1} + e_{j-1,j} & i < j - 1 \\ \min\limits_{1 \le k \le j-2} P_{k,j-1} + e_{k,j} & i = j - 1 \end{cases}$$