UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Análisis de Grupos y Subconjuntos

por Iván Felipe Ayala Rengifo

12 de febrero de 2023

Resumen

El documento a continuación tiene como objetivo identificar las propiedades de un Grupo, entendiéndose en el contexto de las Matemáticas Discretas. Para ello, se empleará la construcción de algunos conjuntos de elementos de ejemplo con el fin de examinar sus propiedades y determinar efectivamente si cumplen los requisitos para ser considerados como Grupos, principalmente en función del cumplimiento de la asociatividad.

1. Definición de "Grupo":

Para poder hacer el análisis descrito anteriormente de la mejor manera posible, es importante tener claridad en el concepto mismo de "Grupo". En términos simples, un Grupo es aquel conjunto de elementos regidos por una operación de grupo que cumpla con los siguientes criterios:

- El conjunto de elementos debe ser un conjunto no vacío.
- La operación del conjunto debe arrojar un resultado interno de ese conjunto.
- La operación debe ser asociativa.
- La operación debe contar con un elemento neutro.
- La operación debe contar con un elemento inverso.

Una vez entendidas las bases de un grupo, se puede proceder a la revisión de todos los requisitos, con el fin de hallar alguna discrepancia entre las reglas y el conjunto presentado.

2. Aplicación práctica de la revisión de un grupo

Determinar si un conjunto de elementos presenta las características necesarias para ser denominado como "Grupo"puede ser un proceso engañoso en algunos aspectos, o bastante sencillo en otros casos. Se prestarán a continuación dos ejemplos que permiten evidenciar mejor este comportamiento.

2.1. Primera Parte - Asociatividad en un conjunto de Reales

Para este ejemplo, se da como muestra un conjunto G, siendo G un conjunto de elementos no vacío que se rige por la siguiente composición de elementos:

$$\mathbf{G} = \{\text{a, b, c, d}\}$$

La operación de **G**, denominada µ e interpretándose como multiplicación, puede entenderse a través de la siguiente tabla de operación:

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	d	d
c	a	b	d	c
d	d	a	c	d

Cuadro 1: Cuadro de Operaciones del Conjunto **G**.

2.2. Análisis del caso n°1

Para empezar, hay que notar que dentro de la tabla solamente cuenta con elementos que se hayan dentro del conjunto original, con lo que el primer requisito enlistado en la sección anterior se cumple de manera satisfactoria.

µ permite que los elementos operados den como resultado otro elemento interno.

Ahora bien, analizar el caso de la asociatividad puede ser ligeramente más complicado y engañoso, pero para empezar, es importante notar que la operación de grupo de **G** no es conmutativa. Por ejemplo, al tomar como referencia los elementos .ªz "bz operarlos alterando el sentido, se obtiene:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{a*b} = \mathrm{b*a} \\
\mathrm{c} \neq \mathrm{b}
\end{gathered}
$$

Y si bien la ausencia de conmutatividad no es un indicador de que el conjunto en cuestión no es un grupo, sí permite sospechar que haya casos en los que la asociatividad no se cumpla adecuadamente. Evidentemente es bastante posible que haya algún caso en el que sí se cumpla correctamente, pero un solo caso erróneo basta para descartar al conjunto de elementos como un grupo. A continuación se muestran dos casos en los que se pone a prueba la asociatividad del conjunto evaluado:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{(a*b)*c} = \mathrm{a*(b*c)} \\
\mathrm{b * c} = \mathrm{a * d} \\
\mathrm{d} = \mathrm{d} \\
\text{- - - - -} \\
\mathrm{(d*b)*a} = \mathrm{d*(b*a)} \\
\mathrm{a * a} = \mathrm{d * c} \\
\mathrm{a} \neq \mathrm{c}
\end{gathered}
$$

2.3. Conclusiones del Caso n°1

Como se observa en el segundo caso, la asociatividad no se cumple en todos los casos, lo cual descarta al conjunto como un grupo. Además, al no ser conmutativa la operación de grupo, es también fácil concluir que es difícil el cumplimiento de demás criterios, como el elemento neutro, por ejemplo. Lo anterior concluye el análisis, dejando como referencia el usar las distintas propiedades de las operaciones del grupo como pista para determinar los criterios que siguen siendo incógnita.

2.4. Segunda Parte - Asociatividad en un conjunto de Complejos

Ahora bien, es posible trasladar este mismo mecanismo a otro tipo de conjunto que se rige por una operación de funcionamiento distinto; en este caso se hará con los números Complejos. El conjunto **C** puede definirse como el conjunto que encierre números expresados de la siguiente manera:

$$\mathbf{C} = \{(\mathrm{a+b}*i),...\}$$

Entiéndanse los componentes de **C** como la suma de un real con otro real multiplicado por *i*.

Siendo así, se muestra la siguiente definición de producto entre números complejos, con la cual se puede aplicar el procedimiento mostrado anteriormente para verificar o refutar la asociatividad entre el conjunto:

$$(\mathrm{a+b}*i) * (\mathrm{c+d}*i) = \mathrm{ac} + (\mathrm{bc+ad})*i - \mathrm{bd} = (\mathrm{ac-bd})+(\mathrm{bc+ad})*i$$

2.5. Análisis del Caso n°2

Para poder definir la asociatividad entre números complejos de la manera más simple posible, se definirán los siguientes términos y se operarán para remarcar un comportamiento general:

Para todos (a+bi), (c+di), (e+fi) $\in \mathbf{C}$

- a+bi · (c+di · e+fi) = (a+bi · c+di) · e+fi
- a+bi · [ce + (de + cf)i - df] = [ac + (bc + ad)i - bd] · e+fi
- a(ce-df) + (b(ce-df) + a(de-cf))i - b(de-cf) = e(ac-bd) + (e(bc-ad) + f(ac-bd))i - f(bc-ad)
- ace - adf - bde - bcf + (bce - bdf + ade + acf)i = ace - bde - bcf - adf + (bce - ade + acf + bdf)i

La propiedad en efecto se muestra asociativa.

2.6. Conclusiones del Caso n°2

En este caso, determinar si los números complejos actúan como grupo en función del producto como operación binaria es más complejo y requiere de más pasos, ya que al haber hallado que en efecto, es asociativa, restaría averiguar si el conjunto cuenta con un producto neutro o inverso. Con la información obtenida, no es posible esclarecer ninguna conclusión en particular.

2.7. Tercera Parte - Asociatividad en un conjunto de Matrices 2x2

Por último, se presenta el caso de las matrices 2x2 con respecto a la operación binaria del producto.

Es bien sabido que, al ser los miembros del conjunto ambos matrices cuadradas, el producto es interno, por lo que no supone un problema calcular la asociatividad de esta manera. De este modo, se procede a utilizar un esquema similar para determinar si dicha operación es asociativa.

2.8. Análisis del Caso n°3

$$\text{Sean } \begin{bmatrix} \text{a} & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{e} & f \\ g & h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{i} & j \\ k & l \end{bmatrix} \in \mathbf{M}^{2X2}$$

$$\begin{bmatrix} \text{a} & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (\begin{bmatrix} \text{e} & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{i} & j \\ k & l \end{bmatrix}) = (\begin{bmatrix} \text{a} & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{e} & f \\ k & g \end{bmatrix}) \cdot \begin{bmatrix} \text{i} & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{a} & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{fk+ie} & fl+je \\ ig+hk & jg+hl \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{bg+ae} & af+bh \\ dg+ce & cf+dh \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{i} & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{ibg+afk+bhk+iae} & bgj+afl+bhl+aje \\ idg+cfk+dhk+ice & dgj+cfl+dhl+cje \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ibg+afk+bhk+iae} & bgj+afl+bhl+aje \\ idg+cfk+dhk+ice & dgj+cfl+dhl+cje \end{bmatrix}$$

En efecto, la propiedad demuestra ser asociativa.

2.9. Conclusiones del Caso n°3

Viendo que la asociatividad entre matrices cuadradas se cumple, y conociendo la existencia de una matriz inversa y de una matriz identidad, en esta ocasión se puede concluir que las matrices cuadradas, o por lo menos las matrices cuadradas 2x2, sí actúan como grupo bajo la operación de producto entre matrices. En esta ocasión, diferente a la anterior, es más fácil percibir este resultado gracias a las propiedades que ya se conocen de las matrices, por lo que apoyarse en conocimientos previos puede facilitar en gran medida un proceso de investigación como este.

Referencias

Redacción Conceptodefinicion.de. "¿Qué es Propiedad Conmutativa? ≫ Su Definición y Significado [2023]". Concepto de - Definición de. https://conceptodefinicion.de/propiedad-conmutativa/ (accedido el 8 de febrero de 2023).

Colaboradores de los proyectos Wikimedia. ”Grupo (matemática) - Wikipedia, la enciclopedia libre”. Wikipedia, la enciclopedia libre. https://es.wikipedia.org/wiki/Grupo(matemática)
C. del Carmen. ”Álgebra Moderna I: Definición de Grupos - El blog de Leo”. El blog de Leo. https://blog.nekomath.com/algebra-moderna-i-definicion-de-grupos/