Taller de Ecuaciones en Diferencias

por Iván Felipe Ayala Rengifo

28 de mayo de 2023

1. Consideraciones

Para la realización de muchos ejercicios se tienen en cuenta varias fórmulas que facilitan la solución de ecuaciones en diferencias en varios escenarios distintos. Las más usadas se listarán a continuación:

- Una ecuación en diferencias de la forma $U_n = kU_{n-1}$ (Ecuación Caso I) con k una constante, tiene como solución general:

$$U_n = k^{n-1}U_1$$

- Una ecuación en diferencias de la forma $U_n = kU_{n-1} + c$ (Ecuación Caso II) con k, c constantes, tiene como solución general:

$$U_n = k^{n-1}U_1 + c(\frac{k^{n-1}-1}{k-1})$$

2. Ecuaciones en Diferencias - Preguntas

2.1. Una bomba de vacío elimina un tercio del aire restante en un cilindro con cada acción. Formule una ecuación que represente esta situación, ¿Después de cuantas acciones hay solamente 1/1000000 de aire inicial?.

Si cada acción de la bomba de vacío elimina 1/3 del aire restante con cada movimiento, entonces es preciso expresar a que cada acción de la bomba (U_n) deja 2/3 del aire del estado anterior. Puede expresarse como:

$$U_n = \frac{2}{3}U_{n-1}$$

Este planteamiento deja a la ecuación como una ecuación en diferencias Caso I con $k = \frac{2}{3}$, por lo que puede ser reescrita y resuelta de la siguiente manera:

$$\begin{gathered} U_1 = 1000000 \\ U_n = 1 = (\frac{2}{3})^{n-1} * 1000000 \\ \frac{1}{1000000} = (\frac{2}{3})^{n-1} \\ ln(\frac{1}{1000000}) = (n-1)ln(\frac{2}{3}) \\ -13,81 = (n-1)(-0,4) \\ 34,05 = n-1 \\ n = 35,05 \end{gathered}$$

El resultado indica que tomaría alrededor de 35 repeticiones de la bomba de vacío para llegar a 1/1000000 del aire original.

2.2. Una población se incrementa a una tasa de 25 por cada mil por año. Formule una ecuación en diferencias que describa esta situación. Resuelvala y encuentre la población en 15 años, asumiendo que la población ahora es de 200 millones. ¿Qué tan largo tomara que la población alcance 750 millones?

El enunciado dado puede ser expresado mediante la siguiente ecuación con diferencias:

$$U_n = 1,025 * U_{n-1}$$

La anterior representa una ecuación en diferencias de Caso I con $k = 1,025$, por lo que empezando con n = 0 como condición inicial, se tiene que:

$$U_n = 1,025^n * U_0$$
$$U_0 = 200000000$$

Una vez delimitados los parámetros de la ecuación, es posible reemplazar a n con 15 para dar con la población en 15 años:

$$U_{15} = 1,025^{15} * 200000000$$
$$U_{015} = 1{,}448 * 200000000$$
$$U_{015} = 289660000$$

Lo anterior permite concluir que la población en 15 años será de un poco más de 289 millones y medio de personas.

A continuación, nos interesa saber cuántos años demorará la población en crecer hasta los 750 millones de habitantes. La siguiente ecuación muestra este proceso:

$$750000000 = 1,025^n * 200000000$$
$$\frac{75}{20} = 1,025^n$$
$$3{,}75 = 1,025^n$$
$$log(3{,}75) = n * log(1{,}025)$$
$$n = \frac{log(3{,}75)}{log(1{,}025)}$$
$$n = 53{,}5$$

En conclusión, tomaría proximadamente 53 años y medio para que la población alcance los 750 millones de habitantes.

2.3. Resolver las ecuaciones por diferencias listadas a continuación.

- $U_n = 4U_{n-1} - 1$, para $n \geq 2$
- $u_n = 3u_{n-1} + 2$, para $n \geq 2$

Para la solución de $U_n = 4U_{n-1} - 1$, para $n \geq 2$, es importante darse cuenta de que esta ecuación representa una ecuación de Caso II con $k = 4, c = -1$. Teniendo en cuenta lo anterior, la solución sería la siguiente:

$$U_n = 4U_{n-1} - 1$$
$$U_n = 4^{n-1}U_1 - (\frac{4^{n-1}-1}{3})$$

La misma lógica aplica para el segundo problema, donde esta vez $k = 3, c = 2$. Utilizando la ecuación dada por el Caso II, se llega a:

$$U_n = 3U_{n-1} + 2$$
$$U_n = 3^{n-1}U_1 + 3^{n-1} - 1$$

2.4. Encuentre la solución general para las siguientes ecuaciones:

- $U_n + 4U_{n-1} + 3 = 0$, para $n \geq 1$
- $U_n + 2U_{n-1} - 13 = 0$, para $n \geq 1$

Para la solución de $U_n + 4U_{n-1} + 3 = 0$, para $n \geq 1$, es importante darse cuenta de que esta ecuación representa una ecuación de Caso II con $k = -4, c = -3$. Teniendo en cuenta lo anterior, la solución sería la siguiente:

$$U_n = -4U_{n-1} - 3$$
$$U_n = -4^{n-1}U_1 - 3(\tfrac{-4^{n-1}-1}{-5})$$

La misma lógica aplica para el segundo problema, donde esta vez $k = -2, c = 13$. Utilizando la ecuación dada por el Caso II, se llega a:

$$U_n = -2U_{n-1} + 13$$
$$U_n = -2^{n-1}U_1 + 13(\tfrac{-2^{n-1}-1}{-3})$$

2.5. Encuentre las soluciones particulares para las siguientes ecuaciones con diferencias:

- $U_n = 3U_{n-1} + 5$, para $n \geq 1$ $U_1 = 1$
- $U_n = -2U_{n-1} + 6$, para $n \geq 2$ $U_1 = 3$

Para la solución de $U_n = 3U_{n-1} + 5$, para $n \geq 1$ $U_1 = 1$, es importante darse cuenta de que esta ecuación representa una ecuación de Caso II con $k = 3, c = 5$. Teniendo en cuenta lo anterior, la solución sería la siguiente:

$$U_n = 3U_{n-1} + 5$$
$$U_n = 3^{n-1} + 5(\tfrac{3^{n-1}-1}{2})$$

La misma lógica aplica para el segundo problema, donde esta vez $k = -2, c = 6$. Utilizando la ecuación dada por el Caso II, se llega a:

$$U_n = -2U_{n-1} + 6$$
$$U_n = -2^{n-1} * 3 + 6(\tfrac{-2^{n-1}-1}{-3})$$
$$U_n = -2^{n-1} * 3 - 2(-2^{n-1} - 1)$$

2.6. Encuentre y resuelva la ecuación en diferencias asociada a 7, 17, 37, 77, 157,...

La sucesión de números descrita en el enunciado puede ser expresada como una ecuación en diferencias. Por lo tanto, es preciso hallar un patrón que se mantenga en cualquier iteración de n teniendo $U_1 = 7$. Para ello, se evaluarán los términos dados en la secuencia y se reescribirán de tal manera que encajen con una ecuación en diferencias:

$$U_1 = 7$$
$$U_2 = 17 = 7 + 10$$
$$U_3 = 37 = U_2 + 10 * 2$$
$$U_4 = 77 = U_3 + 10 * 4$$
$$U_5 = 157 = U_4 + 10 * 8$$

De lo anterior, podemos deducir que la ecuación en diferencias obedece el siguiente patrón:

$$U_n = U_{n-1} + 10 * 2^{n-2}$$

Una vez determinada la estructura, se pueden hacer un par de comprobaciones para dar con la solución general:

$$U_2 = U_1 + 10 * 2^0$$
$$U_2 = 7 + 10 * 2^0$$
—
$$U_3 = U_2 + 10 * 2^1$$
$$U_3 = (7 + 10 * 2^0) + 10 * 2^1$$
$$U_3 = 7 + 10 * (2^0 + 2^1)$$
—
.
.
.
$$U_n = 7 + 10 * (\sum_{m=0}^{n-2} 2^m)$$

2.7. Encuentre el pago mensual por un prestamo por 400 millones de pesos en un periodo de 3 años a una tasa de interes del 21 % por año.

Para plantear este problema como se ha hecho con anterioridad, primero hay que dar como parámetro inicial $U_0 = 400000000$ y tener en cuenta que cada año se debe pagar lo del anterior más el 21 % del mismo. Esta operación puede quedar planteada de la siguiente manera:

$$U_0 = 400000000$$

En este caso, n representa la cantidad de años transcurridos, siendo 0 el inicio del préstamo.

—
$$U_1 = 400000000 + (0,21 * 400000000)$$
$$U_1 = 400000000(1 + 0,21)$$
—
$$U_2 = U_1(1 + 0,21)$$
$$U_2 = 400000000(1 + 0,21)^2$$
—
$$U_3 \text{ (3 años)} = 400000000(1 + 0,21)^3$$
$$U_3 = 708624400$$

En tres años se tendrán que pagar 708624400 pesos.

$$708624400/36 = 19684011,11$$

Cada mes se tendrán que pagar 19684011,11 pesos.

2.8. Una plantación de café incrementa su producción un 1 % por mes desde una tasa de 200 toneladas por mes. Las ordenes (uso de café) permanecen en 1600 toneladas por mes- ¿Cuánto café se puede apilar después de un periodo de 12 meses, después de un periodo de 2 años?

$P_n \rightarrow$ Producción de Café por mes.
$O_n \rightarrow$ Órdenes de café por mes.
1 % $\rightarrow$ Tasa de incremento.
—
$$O_c = 1600$$
$$P_0 = 200$$
—
$$P_n = P_{n-1} * 0,01 + P_{n-1} = 1,01 * P_{n-1} = 1{,}01^n * P_0$$

La anterior representaría la ecuación con diferencias si no existiese un consumo constante del café. Sin embargo, es preciso tener esta variable en cuenta para calcular el apilamiento del café por mes.

$C_n \rightarrow$ Apilamiento del café mensual.
$$C_n = P_n - O_c = 1,01P_{n-1} - O_c = 1,01(1,01(1,01(1,01P_n - O_c) - O_c) - O_c) - O_c$$
$$C_n = 1,01^n P_0 - 1600(\tfrac{1{,}01^n - 1}{0{,}01}) —$$
$$C_{12} = 1,01^{12} * 200 - 1600(1,01^{12} - 1) * 0,01^{-1}$$
$$C_{12} = -20000$$

Dadas las condiciones, no es posible apilar café ni en un año, ni en dos años. Debe aumentarse la producción para satisfacer la demanda.

2.9. La productividad en una plantación de 2000 arboles se incrementa 5 % cada año por la implementación de mejores tecnicas de agricultura. El granjero tambien planta ademas 100 arboles por año. Estime el porcentaje de mejora en la productividad durante los siguientes 10 años.

Se tratará de hallar una ecuación en diferencias con un parámetro inicial $U_1 = 2000$ que exhiba el comportamiento dado por el enunciado.

$$U_1 = 2000$$
—
$$U_2 = U_1 + U_1(0,05) + 100$$
$$U_2 = U_1(1 + 0,05) + 100$$
—
$$U_3 = U_2 + U_2(0,05) + 100$$
$$U_3 = U_2(1 + 0,05) + 100$$
$$U_3 = (U_1(1 + 0,05) + 100)(1 + 0,05) + 100$$
$$U_3 = U_1(1 + 0,05)^2 + 100(1 + 0,05) + 100$$
—
$$U_n = 2000(1 + 0,05)^{n-1} + 100(n - 1 + 0,05)$$
—
$$U_{10} = 4007,656$$

En 10 años se producen aproximadamente 4007 árboles anuales, lo cual representa poco más de un 200 % de la producción inicial de 2000 árboles anuales.

2.10. Resuelva $u_n = 3u_{n-1} + n$, para $u_1 = 5$

$$U_n = 3U_{n-1} + n, \text{ para } U_1 = 5$$

Primero se deberá encontrar la solución general a la siguiente parte de la ecuación presentada:

$$U_n = 3U_{n-1}$$
$$U_n = 3^{n-1}U_1$$
$$U_n = 3^{n-1} * 5$$

Por último, se encontrará la solución particular de n con base en la solución general:

$$U_n - 3U_{n-1} = n$$
$$a + bn - 3(a + b(n - 1)) = n$$
$$a + bn - 3a - 3bn + 3b = n$$
$$-2a + 3b = n(1 + 2b)$$
$$n = \frac{-2a+3b}{(1+2b}$$
—
$$U_n = 3^{n-1} * 5 + \frac{-2a+3b}{(1+2b}$$

2.11. Encuentre la solución general para $u_n = u_{n-1} + 2^n$ y $u_n = 2u_{n-1} + n$

Para ambos ejercicios, la ruta de acción es primero encontrar la solución general de U_n, luego encontrar la solución particular de su respectivo $f(n)$, y luego sumar ambas.

Primer ejercicio (con $f(n) = 2^n$):

$$U_n = U_{n-1} + 2^n$$
—
$$U_n = 1^{n-1}U_1 \text{ —}$$

$$U_n - U_{n-1} = 2^n$$
$$a2^n - a2^{n-1} = 2^n$$
$$a2^n(1-2^{-1}) = a^{-1}$$
$$a = 2$$
—
$$Un = 1^{n-1}U_1 + 2^{n+1}$$

Segundo ejercicio (con $f(n) = n$):

$$U_n = 2U_{n-1} + n$$
—
$$U_n = 2^{n-1}U_1 \text{ —}$$
$$U_n - 2U_{n-1} = n$$
$$a + 2b - 2a - 2bn + 2b = n$$
$$-a + 4b = n(1+2b)$$
$$n = \frac{-a+4b}{1+2b}$$
—
$$Un = 2^{n-1}U_1 + \frac{-a+4b}{1+2b}$$

2.12. Si $u_n = ku_{n-1} + 5$ y $u_1 = 4$ y $u_2 = 17$ encuentre los valores de k y u_6.

Para encontrar el valor de k, es posible utilizar los datos dados de los resultados de U_1 y U_2 de la siguiente manera:

$$U_2 = kU_1 + 5$$
$$17 = 4k + 5$$
$$12 = 4k$$
$$k = 3$$

Una vez hecho eso, ya conociendo el valor de k es posible transformar la ecuación original en una de Caso II para conocer el valor de U_6 de la siguiente manera:

$$U_n = 3^{n-1} * 4 + \frac{5(3^{n-1}-1)}{2}$$
—
$$U_6 = 3^5 * 4 + \frac{5(3^5-1)}{2}$$
$$U_6 = 1577$$

2.13. Use iteración para resolver la siguiente relación de recurrencia $u_n = \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}$, para $n \geq 2$,sujeto a la condición inicial $u_1 = \frac{1}{6}$.

A partir del arreglo dado, se pueden identificar los siguientes patrones:

$$U_n = \frac{U_{n-1}}{U_{n-2}} = \frac{U_{n-2}(U_{n-3})^{-1}}{U_{n-2}} = \frac{1}{U_{n-3}}$$
$$U_{n-1} = \frac{U_{n-2}}{U_{n-3}} = \frac{U_{n-3}(U_{n-4})^{-1}}{U_{n-3}} = \frac{1}{U_{n-4}}$$
$$U_{n-2} = \frac{U_{n-3}}{U_{n-4}} = \frac{U_{n-4}(U_{n-5})^{-1}}{U_{n-4}} = \frac{1}{U_{n-5}}$$
$$U_{n-2} = \frac{U_{n-4}}{U_{n-5}} = \frac{U_{n-5}(U_{n-6})^{-1}}{U_{n-5}} = \frac{1}{U_{n-6}}$$
Se cumple siempre que:
$$U_n = \frac{1}{U_{n-3}} = \frac{1}{U_{n-6}^{-1}} = U_{n-6}$$

2.14. Investigue el límite de $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ si $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$

$$U_n = Am^n$$
—
$$Am^n = Am^{n-1} + 2Am^{n-2}$$
$$Am^n - Am^{n-1} - 2Am^{n-2} = 0$$
$$Am^{n-2}(m^2 - m - 2) = 0$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$
$$m_1 = 2$$
$$m_2 = -1$$
—
$$U_n = A(2)^n + B(-1)^n$$

El límite debe analizarse tendiendo al infinito, pues es la dirección en la que va aumentando n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(2)^n + B(-1)^n}{A(2)^{n+1} + B(-1)^{n+1}}$$

Se observa una tendencia a 0, ya que los términos del denominador siempre cuentan con mayor magnitud.

2.15. Encuentre el n-esimo termino de la siguiente secuencia: -3,21,3,129,147,...

Habiendo revisado la secuencia en varias ocasiones y discutiendo los términos con varias opiniones, se ha llegado a que la secuencia no mantiene ningún orden descifrable matemáticamente, y que como tal no puede ser resuelta ni planteada como una ecuación en diferencias. Es altamente posible que haya algún número erróneo, o que falte información relevante para atacar a la secuencia, mas con los datos disponibles resulta imposible determinar el sentido que orienta a la secuencia.

2.16. Resuelva $u_n - 6u_{n-1} + 8u_{n-2} = 0$, para $n \geq 3$ dado $u_1 = 10$ y $u_2 = 28$. Evalue u_6.

Para este ejercicio y los posteriores, es importante recordar que también existe una solución general que permite ampliar la resolución de las ecuaciones en diferencias de segundo grado. Dicha solución aporta el siguiente dato:

$$U_n = Am \text{ con A una constante.}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, es posible replantear la ecuación original dada de la siguiente manera:

$$Am^n - 6Am^{n-1} + 8Am^{n-2} = 0$$
$$Am^{n-2}(m^2 - 6m + 8) = 0$$
—
$$m = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$
$$m_1 = 4, m_2 = 2$$
—
$$U_n = Am_1^n + Bm_2^n$$
$$U_n = 4^n A + 2^n B$$

Para hallar el valor de A y B, se pueden usar los valores dados de U_1 y de U_2 para armar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} 10 = 4A + 2B \\ 28 = 16A + 2B \end{matrix}\right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene que:

$$A = 1, B = 3$$

Eso nos permite concluir una solución general para el ejercicio, así como una solución particular para U_6:

$$U_n = 4^n + 2^n * 3$$
—
$$U_6 = 4^6 + 3(2^6) = 4288$$

2.17. Encuentre la solución particular para $u_{n+2}+2u_{n+1}+u_n=0$, para $n \geq 1$, cuando $u_1=-1$, $u_2=-2$.

Se aprovecha la solución general dada para ecuaciones de segundo grado con el fin de reescribir la ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{gathered} Am^n + 2Am^{n-1} + Am^{n-2} = 0 \\ Am^{n-2}(m^2+2m+1) = 0 \\ — \\ m = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \\ m_1 = m_2 = -1 \\ — \\ U_n = C(-1)^n + Dn(-1)^n \\ U_n = (-1)^n(C+Dn) \end{gathered}$$

De lo anterior se puede armar un sistema de ecuaciones gracias a las definiciones de U_1 y de U_2, de la siguiente manera:

$$\left.\begin{matrix} -1=(-1)(C+D) \\ -2=C+2D \end{matrix}\right\}$$

Al resolver el sistema, se obtiene que:

$$\begin{gathered} C=4, D=-3 \\ U_n = 4(-1)^n - 3n(-1)^n \end{gathered}$$

2.18. Encuentre la solución general de la siguiente ecuación $u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = f(n)$, cuando $f(n)=2$, $f(n)=n$, $f(n)=5^n$ y $f(n)=1+n^2$.

- Primera Parte:

$$\begin{gathered} f(n)=2, U_n = a \\ — \\ a - 5a + 6a = 2 \\ 2a = 2 \\ a = 1 \\ — \\ U_n = 1 \end{gathered}$$

- Segunda Parte:

$$\begin{gathered} f(n) = n \\ U_n = a + bn \\ U_{n-1} = a + b(n-1) \\ U_{n-2} = a + b(n-2) \\ — \\ a + bn - 5(a + b(n-1)) + 6(a + b(n-2)) = n \\ a + bn - 5a + 5bn - 5b + 6a + 6bn - 12b = n \\ 2a - 17b + 12bn = n \end{gathered}$$

En este punto de las operaciones es posible manipular el valor de n para hallar los valores de a y b en dos ocasiones distintas, para así armar un sistema de ecuaciones y hallar sus valores para casos generales. Al reemplazar n con 0 y 1 en la última ecuación, se obtiene el siguiente sistema:

$$\left.\begin{matrix} 2a-17b=0 \\ 2a-5b=1 \end{matrix}\right\}$$

Al resolver, se obtienen los valores de a y b y se pueden reemplazar en la solución general de la siguiente manera:

$$a = \frac{17}{24}, b = \frac{1}{12}$$
$$U_n = \frac{17}{24} + \frac{1}{12}n$$

- Tercera Parte:

$$f(n) = 5^n$$
$$U_n = ak^n \text{ con k=5}$$
$$U_{n-1} = ak^{n-1} \text{ con k=5}$$
$$U_{n-2} = ak^{n-2} \text{ con k=5}$$
$$—$$
$$5^n a - 5(5^{n-1}a) + 6(5^{n-2}a) = 5^n$$

Para este punto en las operaciones se puede sustituir n para poder hallar un valor de a de manera sencilla. En este caso, por conveniencia, se sustituirá n = 2, dejando la siguiente ecuación y resultados:

$$6a = 25$$
$$a = \frac{25}{6}$$
$$—$$
$$U_n = \frac{25}{6}(5)^n$$

- Cuarta Parte:

$$f(n) = 1 + n^2$$
$$U_n = a + b(n) + c(n)^2$$
$$U_{n-1} = a + b(n-1) + c(n-1)^2$$
$$U_{n-2} = a + b(n-2) + c(n-2)^2$$
$$—$$
$$a + b(n) + c(n)^2 - 5(a + b(n-1) + c(n-1)^2) + 6(a + b(n-2) + c(n-2)^2 0) - 1 = n$$
$$2a - 17b + 29c + 12bn - 34cn + 12cn^2 - 1 = n^2$$

Para este punto en las operaciones es posible hacer tres reemplazos de n para hallar los valores de a,b y c en tres ocasiones diferentes y poder hallar un valor general para las tres incógnitas. Reemplazando n por 0, 1 y 2 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2a - 17b + 29c = 1 \\ 2a - 5b + 7c = 2 \\ 2a + 7b + 145c = 5 \end{aligned}\right\}$$

Al resolver el sistema, se llega a los siguientes valores y a la siguiente solución general:

$$a = \frac{391}{320}, b = \frac{17}{160}, c = \frac{1}{80}$$
$$—$$
$$U_n = \frac{391}{320} + \frac{17}{160}n + \frac{1}{80}n^2$$

2.19. Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias utilizando la función generatríz $u_n - 3u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$, dado $u_0 = 0$, y $u_1 = 20$, $n \geq 2$.

Sea:

$$\sigma(x) = U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + ...$$
$$\sigma(x) = 0 + 20x + U_2 x^2 + ...$$

Además, se tiene que:

$$U_2 = 3U_1 - 4U_0$$
$$U_3 = 3U_2 - 4U_1$$
$$U_4 = 3U_3 - 4U_2, \text{ etc...}$$

sustituyendo $U_2, U_3, U_4...$ en $\sigma(x)$ se tiene:

$$\sigma(x) = 0 + 20x + (3U_1 - 4U_0)x^2 + (3U_2 - 4U_1)x^3 + ...$$
$$\sigma(x) = 0 + 20x + 3x(U_1x + U_2x^2 + ...) - 4x^2(U_0 + U_1x + ...)$$
$$\sigma(x) = 0 + 20x + 3x(\sigma(x) - U_0) - 4x^2(\sigma(x))$$

—

$$\sigma(x) = +20x + 3x(\sigma(x) - U_0) - 4x^2(\sigma(x))$$
$$\sigma(x) - 3x(\sigma(x) - U_0) + 4x^2(\sigma(x)) = 20x$$
$$\sigma(x) = \frac{20x}{1-3x+4x^2}$$

Para este punto, la expresión del denominador se debería poder factorizar para conseguir dividirla con fracciones parciales, y acto seguido aplicar teorema del binomio para dar con dos expresiones que ayuden a resolver la ecuación en diferencias. Sin embargo, la expresión no se puede factorizar más, por lo que no se puede continuar mediante el método de la función generatriz.

2.20. Encuentre la función generatriz de la secuencia de Fibonacci.

La función de Fibonacci puede ser descrita como $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ con $U_0 = 1, U_1 = 1$.
Sea:

$$\sigma(x) = U_0 + U_1x + U_2x^2 + ...$$
$$\sigma(x) = 1 + x + U_2x^2 + ...$$

Además, se tiene que:

$$U_2 = U_1 + U_0$$
$$U_3 = U_2 + U_1$$
$$U_4 = U_3 + U_2, \text{ etc...}$$

sustituyendo $U_2, U_3, U_4...$ en $\sigma(x)$ se tiene:

$$\sigma(x) = 1 + x + (U_1 + U_0)x^2 + (U_2 + U_1)x^3 + ...$$
$$\sigma(x) = 1 + x + x(U_1x + U_2x^2 + ...) + x^2(U_0 + U_1x + ...)$$
$$\sigma(x) = 1 + x + x(\sigma(x) - U_0) + x^2(\sigma(x))$$

—

$$\sigma(x) = 1 + x + x\sigma(x) - x + x^2(\sigma(x))$$
$$\sigma(x) - x(\sigma(x) - U_0) - x^2(\sigma(x)) = 1$$
$$\sigma(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$

Para este punto, la expresión del denominador se debería poder factorizar para conseguir dividirla con fracciones parciales, y acto seguido aplicar teorema del binomio para dar con dos expresiones que ayuden a resolver la ecuación en diferencias. Sin embargo, la expresión no se puede factorizar más, por lo que no se puede continuar mediante el método de la función generatriz.