PRIMERA VARIACION DEL LARGO PARA DIAGRAMAS CS

JOSÉ AYALA AND TOMÁS AYALA

1. Parte conceptual: primera variación para diagramas cs

1.1. **Lo que vas a lograr con este documento.** La meta es que puedas hacer lo siguiente, sin adivinar nada:

- Construir la matriz completa $L(c)$ de restricciones lineales de primer orden.
- Calcular el funcional lineal de primera variacion de longitud $\Phi(\delta c, \omega)$.
- Decidir criticidad: el diagrama es critico si y solo si Φ se anula en todas las direcciones admisibles.
- (Opcional) Calcular una segunda variacion (forma cuadratica) sobre direcciones admisibles.

Lo importante: $L(c)$ solo describe movimientos permitidos (primer orden). La longitud entra por separado en Φ.

1.2. **Datos del diagrama cs y convenciones.**
Discos. Hay N discos unitarios $D_1, \ldots, D_N$ con centros $c_i \in \mathbb{R}^2$ y radio $R = 1$.
Piezas cs. El diagrama cs γ esta compuesto por:

- segmentos rectos (en el complemento de los discos) cuyos extremos son tangencias con discos,
- arcos circulares sobre fronteras ∂D_k cuyos extremos son tangencias con el mismo disco.

Conjuntos indice (combinatoria fija).

- $\mathcal{E}$ = conjunto de contactos disco–disco, cada elemento es un par no ordenado $\{i, j\}$.
- $\mathcal{T}$ = conjunto de tangencias curva–disco, cada elemento es una etiqueta α.
- $\mathcal{S}$ = conjunto de segmentos, cada segmento es un par ordenado $\alpha \to \beta$ de tangencias.
- $\mathcal{A}$ = conjunto de arcos, cada arco es un triple $(\alpha \to \beta, k, \sigma_a)$: extremos α, β sobre el mismo disco D_k y un signo $\sigma_a \in \{+1, -1\}$.

Datos geometricos minimos (esto SI es entrada). Para poder construir matrices y longitud, necesitas:

- los centros $c_1, \ldots, c_N$,
- para cada tangencia $\alpha \in \mathcal{T}$: el disco $k(\alpha) \in \{1, \ldots, N\}$ y el punto $p_\alpha \in \partial D_{k(\alpha)}$,
- la lista $\mathcal{S}$ de segmentos $\alpha \to \beta$,
- la lista $\mathcal{A}$ de arcos $(\alpha \to \beta, k, \sigma_a)$.

Convencion de rotacion 90°. Usamos $J(x, y) = (-y, x)$.
Normal y tangente en una tangencia (calculable desde c y p). Si $\alpha \in \mathcal{T}$ ocurre en el disco $k = k(\alpha)$:

- normal unitario $n_\alpha := p_\alpha - c_k$,
- tangente unitario $t_\alpha := \varepsilon_\alpha J n_\alpha$ con $\varepsilon_\alpha \in \{+1, -1\}$.

El signo ε_α lo fijas para que t_α apunte en la direccion de recorrido de γ en α.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 57M25, 57M27, 49Q10, 53C42.
Key words and phrases. Knots, links, ribbons, ribbonlength, ropelength.

Chequeos inmediatos (si falla, la entrada esta mal).

- Para todo $\alpha \in \mathcal{T}$: $\|p_\alpha - c_{k(\alpha)}\| = 1$.
- Para todo $\alpha \in \mathcal{T}$: $\langle n_\alpha, t_\alpha \rangle = 0$ y $\|t_\alpha\| = 1$.
- Para todo $\{i, j\} \in \mathcal{E}$: $\|c_i - c_j\| = 2$.

1.3. **Variables de primer orden.**

Variacion de centros (incognita). $\delta c = (\delta c_1, \dots, \delta c_N) \in \mathbb{R}^{2N}$ con $\delta c_i \in \mathbb{R}^2$.
Variables auxiliares por tangencia (incognita). $\omega = (\omega_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{T}|}$.
Modelo cinematico (esto es una definicion operacional). El movimiento de cada punto de tangencia se modela por $\delta p_\alpha = \delta c_{k(\alpha)} + \omega_\alpha t_\alpha$.

Comentario honesto: esta es la forma mas simple y util para convertir variacion de longitud en una forma lineal en $(\delta c, \omega)$, y es la que se usa en el protocolo.

1.4. **Bloque de contactos disco–disco: construccion de** $A(c)$.

Vector unitario de contacto. Para cada contacto $\{i, j\} \in \mathcal{E}$ define $u_{ij} := (c_i - c_j)/\|c_i - c_j\|$.
Restriccion de primer orden. Como $\|c_i - c_j\| = 2$ se mantiene constante en el estrato de contacto, la derivada da $\langle u_{ij}, \delta c_i - \delta c_j \rangle = 0$.
Construccion de la fila. $A(c)$ tiene $|\mathcal{E}|$ filas y $2N$ columnas (bloques de tamaño 2 por disco). La fila de $\{i, j\}$ tiene:

- bloque $u_{ij}^\top$ en las columnas del disco i,
- bloque $-u_{ij}^\top$ en las columnas del disco j,
- ceros en las demas columnas.

Espacio de rodadura. $\mathrm{Roll}(c) := \ker A(c)$.

1.5. **Bloques de tangencia: construccion de** $T_c(c)$ **y** $T_\omega(c)$.

Ecuacion por tangencia. Para cada $\alpha \in \mathcal{T}$ imponemos $\langle t_\alpha, \delta c_{k(\alpha)} \rangle + \omega_\alpha = 0$.

Aclaracion para tu duda:

- t_α SI es calculable (desde p_α y $c_{k(\alpha)}$, mas el signo de orientacion).
- δc y ω NO se conocen a priori: son las incognitas del sistema lineal.
- La ecuacion no es un dato, es una restriccion.

Fila en $T_c(c)$. La fila de $T_c(c)$ asociada a α tiene un unico bloque no nulo:

- bloque $t_\alpha^\top$ en las columnas del disco $k(\alpha)$,
- ceros en los otros discos.

Fila en $T_\omega(c)$. La fila de $T_\omega(c)$ asociada a α tiene:

- un 1 en la columna de ω_α,
- ceros en las demas columnas.

Conclusion. Con esta convencion $T_\omega(c) = I$.

1.6. **Operador lineal completo de restricciones:** $L(c)$.

Definicion. $L(c)$ es la matriz por bloques $L(c) = \begin{pmatrix} A(c) & 0 \\ T_c(c) & T_\omega(c) \end{pmatrix}$ que actua sobre $(\delta c, \omega) \in \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{T}|}$.
Significado de $L(c)$. Las direcciones admisibles a primer orden son exactamente $\ker L(c) = \{(\delta c, \omega) : L(c)(\delta c, \omega) = 0\}$.
Eliminacion explicita de ω. Como $T_\omega = I$, la segunda linea da $\omega = -T_c(c)\delta c$. Entonces, en este modelo, toda $\delta c \in \mathrm{Roll}(c)$ tiene un lift unico a $\ker L(c)$, dado por $\omega = -T_c(c)\delta c$.

Correccion importante (esto arregla un error frecuente). No es correcto escribir un teorema de primera variacion que dependa solo de c y contactos sin usar p_α, t_α y la descomposicion $\mathcal{S}, \mathcal{A}$. La longitud del diagrama no depende solo del grafo de contacto; depende de la geometria del trazo γ.

1.7. **Longitud del diagrama y funcional de primera variacion Φ.**
Longitud. $\mathrm{Len}(\gamma)$ es la suma de longitudes de:

- segmentos $s \in \mathcal{S}$ (distancia entre extremos),
- arcos $a \in \mathcal{A}$ (longitud angular sobre ∂D_k, con $R = 1$).

Definicion de Φ. El funcional de primera variacion es $\Phi(\delta c, \omega) := D\,\mathrm{Len}(\gamma)[\delta\gamma(\delta c, \omega)]$ evaluado en una direccion admisible $(\delta c, \omega) \in \ker L(c)$.

Criticidad en el estrato cs significa: $\Phi(\delta c, \omega) = 0$ para todo $(\delta c, \omega) \in \ker L(c)$.

1.8. **Contribucion de un segmento y de un arco (formulas correctas).**

Segmento $s : \alpha \to \beta$.
Datos del segmento. $v_s := p_\beta - p_\alpha$, $\ell_s := \|v_s\|$, $\hat{v}_s := v_s/\ell_s$.
Primera variacion del segmento. $D\,\mathrm{Len}(s) = \langle \hat{v}_s, \delta p_\beta - \delta p_\alpha \rangle$.

Usando $\delta p_\alpha = \delta c_{k(\alpha)} + \omega_\alpha t_\alpha$: $D\,\mathrm{Len}(s) = \langle \hat{v}_s, \delta c_{k(\beta)} - \delta c_{k(\alpha)} \rangle + \langle \hat{v}_s, \omega_\beta t_\beta - \omega_\alpha t_\alpha \rangle$.

Arco $a = (\alpha \to \beta, k, \sigma_a)$ sobre ∂D_k.
Primera variacion del arco. En este modelo: $D\,\mathrm{Len}(a) = \sigma_a(\omega_\beta - \omega_\alpha)$.
Nota de sanidad. Esta formula NO produce un termino directo en δc antes de eliminar ω. Si luego sustituyes $\omega = -T_c \delta c$, entonces si aparece dependencia en δc, pero eso es despues de la eliminacion.

1.9. **Ensamblaje mecanico de Φ: reglas de acumulacion.**
Forma general. $\Phi(\delta c, \omega) = g_c^\top \delta c + g_\omega^\top \omega$ para ciertos coeficientes $g_c \in \mathbb{R}^{2N}$ y $g_\omega \in \mathbb{R}^{|\mathcal{T}|}$.
Inicializacion. Partir con $g_c = 0$ y $g_\omega = 0$.
Regla por segmento $s : \alpha \to \beta$.

- En el bloque del disco $k(\alpha)$ sumar $-\hat{v}_s$ a g_c.
- En el bloque del disco $k(\beta)$ sumar $+\hat{v}_s$ a g_c.
- Sumar $-\langle \hat{v}_s, t_\alpha \rangle$ a $g_\omega[\alpha]$.
- Sumar $+\langle \hat{v}_s, t_\beta \rangle$ a $g_\omega[\beta]$.

Regla por arco $a = (\alpha \to \beta, k, \sigma_a)$.

- Sumar $-\sigma_a$ a $g_\omega[\alpha]$.
- Sumar $+\sigma_a$ a $g_\omega[\beta]$.

Resultado. Despues de procesar todas las piezas, $\Phi(\delta c, \omega) = g_c^\top \delta c + g_\omega^\top \omega$.

1.10. **Test de criticidad en algebra lineal (dos metodos equivalentes).**
Metodo 1: base de $\ker L(c)$.

(1) Calcula una base de $\ker L(c)$ y juntala como columnas de una matriz K.
(2) Calcula $(g_c, g_\omega)^\top K$.
(3) El diagrama es critico si y solo si $(g_c, g_\omega)^\top K = 0$.

Metodo 2: criterio de espacio fila. El diagrama es critico si y solo si existe λ tal que $(g_c, g_\omega) = L(c)^\top \lambda$. Esto es resolver un sistema lineal para λ.

Explicacion para abuela (sin perder verdad). $L(c)$ dice que movimientos pequenos estan permitidos sin romper contactos ni tangencias. Φ dice si esos movimientos pequenos hacen que la curva se alargue o se acorte al primer orden. Critico significa: ningun movimiento permitido cambia la longitud al primer orden.

1.11. **Segunda variacion: version util para pregrado.** Aqui hay una forma correcta y ejecutable de segunda variacion, sin afirmar cosas falsas.
Idea. Primero construyes una forma cuadratica $Q_{\mathrm{amb}}(\delta c, \omega)$ (segunda variacion en el espacio extendido). Luego la restringes a $(\delta c, \omega) \in \ker L(c)$.

Segunda variacion de un segmento. Para un segmento $s : \alpha \to \beta$ con $v_s = p_\beta - p_\alpha$ y $\ell_s = \|v_s\|$, la segunda variacion de la distancia euclidea (formula estandar) se escribe como:
$D^2 \operatorname{Len}(s) = \frac{1}{\ell_s} \| (I - \hat{v}_s \hat{v}_s^\top)(\delta p_\beta - \delta p_\alpha) \|^2 + \langle \hat{v}_s, \delta^2 p_\beta - \delta^2 p_\alpha \rangle$.
En un protocolo de pregrado, normalmente se usa la aproximacion consistente de primer orden: se ignora $\delta^2 p$ y se trabaja con la parte cuadratica positiva:
$Q_s(\delta c, \omega) := \frac{1}{\ell_s} \| (I - \hat{v}_s \hat{v}_s^\top)(\delta p_\beta - \delta p_\alpha) \|^2$.
Esto es una forma cuadratica explicita en $(\delta c, \omega)$ porque δp es lineal en $(\delta c, \omega)$.

Segunda variacion de un arco. En este modelo, $D \operatorname{Len}(a) = \sigma_a(\omega_\beta - \omega_\alpha)$ es lineal, por lo tanto su segunda variacion en las variables $(\delta c, \omega)$ es cero: $Q_a(\delta c, \omega) = 0$.

Forma cuadratica total. Define $Q_{\mathrm{amb}}(\delta c, \omega) := \sum_{s \in \mathcal{S}} Q_s(\delta c, \omega)$.
La segunda variacion reducida sobre el estrato cs es la restriccion: $Q_{\mathrm{red}} := Q_{\mathrm{amb}}|_{\ker L(c)}$.
Comentario honesto. Esta segunda variacion capta de manera limpia la curvatura de la parte de segmentos y es suficiente para tests de estabilidad linealizados en muchos ejemplos. Si quieres la formula completa con $\delta^2 p$, hay que fijar un modelo de segundo orden del movimiento de puntos de tangencia; eso es mas avanzado.

1.12. **Correcciones clave al borrador original (para que no se meta un error).**
(K1) Bien: definicion de $A_\gamma(c)$ como proyeccion de $\ker L(c)$. Eso es correcto y es la forma intrinseca.
(K2) Bien: advertencia de que una matriz centro-solo $B(c)$ no es canonica. Eso es correcto.
(K3) Mal: usar T como "pares de discos que son extremos de segmentos" para imponer contactos. Los extremos de un segmento pueden estar en discos que NO son contactos disco–disco. La lista de contactos debe ser $\mathcal{E}$, separada de $\mathcal{S}$.
(K4) Mal: derivada de contacto usando $\langle c_j - c_i, \delta c_j - \delta c_i \rangle = 0$. La forma correcta es con el unitario: $\langle u_{ij}, \delta c_i - \delta c_j \rangle = 0$ donde $u_{ij} = (c_i - c_j)/\|c_i - c_j\|$.
(K5) Mal: un "teorema reducido" que da $D \operatorname{Len}$ solo con u_{ij} y $n^\perp$ sin usar ω ni la lista $\mathcal{S}, \mathcal{A}$. La primera variacion correcta depende de los segmentos y arcos via p_α, t_α y del lift $(\delta c, \omega) \in \ker L(c)$. Por eso aqui la primera variacion se define por piezas y se ensambla en Φ.
(K6) Mal: suponer que $\operatorname{Len}(c) = \sum \ell_{ij}(d_{ij})$ con $d_{ij} = \|c_i - c_j\|$ como si todo dependiera solo de distancias entre centros. En cs–diagramas hay dependencia angular (arcos) y dependencia en puntos de tangencia. Por eso aqui la segunda variacion se construye por piezas usando δp.

1.13. **Checklist final (lo que debes mostrar al final, sin excepciones).**

- Centros $c_1, \ldots, c_N$.
- Lista de contactos $\mathcal{E}$ y verificacion $\|c_i - c_j\| = 2$ para $\{i, j\} \in \mathcal{E}$.
- Lista de tangencias $\mathcal{T}$ con $k(\alpha)$ y p_α y verificacion $\|p_\alpha - c_{k(\alpha)}\| = 1$.
- Vectores n_α y t_α (con signos ε_α fijados).
- Matrices numericas $A(c)$, $T_c(c)$, $T_\omega(c)$ y $L(c)$.

- Lista de segmentos $\mathcal{S}$ y arcos $\mathcal{A}$ con signos σ_a.
- Coeficientes g_c, g_ω y la formula $\Phi(\delta c, \omega) = g_c^\top \delta c + g_\omega^\top \omega$.
- Test de criticidad por Metodo 1 o Metodo 2.

2. Parte numérica: primera variación para diagramas cs

2.1. Lo que vas a lograr con este documento. Este texto es una receta ejecutable. Si sigues cada paso y haces los chequeos, al final vas a poder:

- Construir una matriz de restricciones de primer orden $L(c)$, completamente numerica.
- Construir la primera variacion de longitud como un funcional lineal $\Phi(\delta c, \omega) = g_c^\top \delta c + g_\omega^\top \omega$.
- Decidir criticidad dentro del estrato cs **definido por este protocolo** : el diagrama es critico si y solo si Φ se anula en todas las direcciones admisibles, es decir, sobre $\ker L(c)$, despues de quitar movimientos rigidos.
- (Opcional) Construir un **test cuadratico** Q_{red} sobre direcciones admisibles como evidencia de estabilidad linealizada dentro del estrato.

La idea clave, en una frase:

> $L(c)$ describe **que movimientos estan permitidos** (segun esta definicion de admisibilidad al primer orden), y Φ describe **que hace la longitud** cuando te mueves en esas direcciones.

No hay magia: todo se reduce a algebra lineal con entradas geometricas concretas.

2.2. Tolerancias numericas (obligatorio). Fija tres tolerancias positivas:

$$\mathrm{tol}_{\mathrm{met}}, \qquad \mathrm{tol}_{\mathrm{geo}}, \qquad \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}\,.$$

Regla:

- chequeos metricos usan $\mathrm{tol}_{\mathrm{met}}$,
- chequeos geometricos de interseccion usan $\mathrm{tol}_{\mathrm{geo}}$,
- residuos algebraicos usan $\mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}$.

Reporte obligatorio: toda funcion de chequeo retorna residuo y su norma.

2.3. Datos del diagrama cs y convenciones.
Discos. Hay N discos unitarios $D_1, \dots, D_N$ con centros $c_i \in \mathbb{R}^2$ y radio fijo $R = 1$.
Piezas cs. El diagrama cs γ se compone de:

- segmentos rectos en el complemento de los discos, con extremos en puntos de tangencia,
- arcos circulares contenidos en fronteras ∂D_k, con extremos en puntos de tangencia del mismo disco.

Conjuntos indice (combinatoria fija). Estos son datos combinatorios que debes tener en tu codigo:

- $\mathcal{E}$: contactos disco–disco. Cada elemento es un par no ordenado $\{i, j\}$.
- $\mathcal{T}$: tangencias curva–disco. Cada elemento es una etiqueta α.
- $\mathcal{S}$: segmentos. Cada segmento es un par ordenado $\alpha \to \beta$ de tangencias.
- $\mathcal{A}$: arcos. Cada arco se codifica como

$$a = (\alpha \to \beta, k, \Delta\theta_a),$$

  donde k es el disco y $\Delta\theta_a \in (0, 2\pi)$ es el **incremento angular orientado** (CCW) desde p_α hasta p_β.

Entradas geometricas minimas (esto SI es entrada). Para hacer cuentas numericas, necesitas exactamente:

- los centros $c_1, \dots, c_N$,
- para cada $\alpha \in \mathcal{T}$: el indice $k(\alpha) \in \{1, \dots, N\}$ y el punto $p_\alpha \in \partial D_{k(\alpha)}$,
- la lista $\mathcal{S}$ de segmentos $\alpha \to \beta$,

- la lista $\mathcal{A}$ de arcos $(\alpha \to \beta, k, \Delta\theta_a)$.

Convencion de rotacion 90°. Definimos $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $J(x, y) = (-y, x)$.
Normal en una tangencia (calculable desde c y p). Para $\alpha \in \mathcal{T}$, sea $k = k(\alpha)$ y definimos

$$n_\alpha := p_\alpha - c_k.$$

Este vector debe ser unitario.
Chequeos metricos inmediatos (si falla, la entrada esta mal). Antes de cualquier matriz, exigir:

- Para todo $\alpha \in \mathcal{T}$:
$$\big|\|p_\alpha - c_{k(\alpha)}\| - 1\big| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{met}}\,.$$
- Para todo $\{i, j\} \in \mathcal{E}$:
$$\big|\|c_i - c_j\| - 2\big| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{met}}\,.$$

2.4. **Orientacion computable: como fijar t_α sin ambiguedad.**
Principio. En este paquete, t_α se define **desde la pieza saliente** en el ciclo orientado, y luego se chequea tangencia de manera dura. Esto elimina ambiguedades de signo.
Caso 1: desde α sale un segmento $s : \alpha \to \beta$. Definimos

$$t_\alpha := \widehat{(p_\beta - p_\alpha)}.$$

Chequeos duros:

$$|\langle t_\alpha, n_\alpha\rangle| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}, \qquad \big|\|t_\alpha\| - 1\big| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}\,.$$

Caso 2: desde α sale un arco $a = (\alpha \to \beta, k, \Delta\theta_a)$. Sea $k = k(\alpha) = k(\beta)$. En este protocolo, todo arco se interpreta CCW, luego la tangente saliente en p_α es

$$t_\alpha := Jn_\alpha.$$

Chequeos duros:

$$|\langle t_\alpha, n_\alpha\rangle| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}, \qquad \big|\|t_\alpha\| - 1\big| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}\,.$$

Regla computable para $\Delta\theta_a$ (recomendado: no lo ingreses a mano). Para $a = (\alpha \to \beta, k, \Delta\theta_a)$ define

$$\theta_\alpha := \mathrm{atan2}((p_\alpha - c_k)_2, (p_\alpha - c_k)_1), \qquad \theta_\beta := \mathrm{atan2}((p_\beta - c_k)_2, (p_\beta - c_k)_1).$$

Define

$$\mathrm{wrap}_{[0,2\pi)}(x) := x + 2\pi m \text{ con el unico } m \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \mathrm{wrap}_{[0,2\pi)}(x) \in [0, 2\pi).$$

Entonces fija

$$\Delta\theta_a := \mathrm{wrap}_{[0,2\pi)}(\theta_\beta - \theta_\alpha).$$

Chequeo duro:

$$\mathrm{tol}_{\mathrm{lin}} < \Delta\theta_a < 2\pi - \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}\,.$$

Nota. Si necesitas permitir arcos CW, entonces debes codificarlos con un dato distinto. En este protocolo, **todo arco se codifica CCW** .

2.5. **Variables de primer orden y definicion operacional de admisibilidad.**
Variacion de centros (incognita). $\delta c = (\delta c_1, \dots, \delta c_N) \in \mathbb{R}^{2N}$ con $\delta c_i \in \mathbb{R}^2$.
Variables auxiliares por tangencia (incognita). $\omega = (\omega_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{T}|}$.
Modelo cinematico (definicion operacional). El movimiento de cada punto de tangencia se modela por:

$$\delta p_\alpha = \delta c_{k(\alpha)} + \omega_\alpha t_\alpha.$$

Definicion (admisibilidad cs al primer orden). En este protocolo, **definimos** que $(\delta c, \omega)$ es cs–admisible si:

- preserva contactos disco–disco al primer orden: $A(c)\delta c = 0$,
- satisface compatibilidad de tangencia:

$$\langle t_\alpha, \delta c_{k(\alpha)} \rangle + \omega_\alpha = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathcal{T}.$$

Aviso de seguridad. La ecuacion $\langle t_\alpha, \delta c_k \rangle + \omega_\alpha = 0$ es parte de la **definicion del protocolo** .

2.6. **Convencion para ω (necesaria para $D\,\mathrm{Len}(a) = \omega_\beta - \omega_\alpha$).** En este protocolo, ω_α es **desplazamiento tangencial escalar** en unidades de longitud sobre $\partial D_{k(\alpha)}$, medido en la direccion t_α. En particular, si $a = (\alpha \to \beta, k, \Delta\theta_a)$ es CCW, entonces

$$D\,\mathrm{Len}(a) = \omega_\beta - \omega_\alpha.$$

Esta formula depende de esta convencion.

2.7. **Bloque de contactos disco–disco: construccion de $A(c)$.**
Vector unitario de contacto. Para cada contacto $\{i,j\} \in \mathcal{E}$ define:

$$u_{ij} := \frac{c_i - c_j}{\|c_i - c_j\|}.$$

Restriccion de primer orden. Como $\|c_i - c_j\| = 2$ se mantiene en el estrato:

$$\langle u_{ij}, \delta c_i - \delta c_j \rangle = 0.$$

Construccion de $A(c)$. $A(c) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|\times 2N}$ tiene una fila por $\{i,j\} \in \mathcal{E}$:

- bloque $u_{ij}^\top$ en columnas del disco i,
- bloque $-u_{ij}^\top$ en columnas del disco j,
- ceros en las demas columnas.

Espacio de rodadura.

$$\mathrm{Roll}(c) := \ker A(c) \subset \mathbb{R}^{2N}.$$

Chequeos algebraicos duros. Si U es una base ortonormal de $\mathrm{Roll}(c)$:

$$\|A(c)U\| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}, \qquad \|U^\top U - I\| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}, \qquad \dim \mathrm{Roll}(c) = 2N - \operatorname{rank} A(c).$$

2.8. **Bloques de tangencia: construccion de $T_c(c)$ y $T_\omega(c)$.**
Ecuacion por tangencia. Para cada $\alpha \in \mathcal{T}$ imponemos:

$$\langle t_\alpha, \delta c_{k(\alpha)} \rangle + \omega_\alpha = 0.$$

Construccion de $T_c(c)$. $T_c(c) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{T}|\times 2N}$ tiene una fila por α con un solo bloque no nulo:

$$\text{bloque } t_\alpha^\top \text{ en las columnas del disco } k(\alpha).$$

Construccion de $T_\omega(c)$. En este protocolo:

$$T_\omega(c) = I_{|\mathcal{T}|}.$$

Chequeo duro: $\|T_\omega - I\| = 0$.

2.9. **Operador lineal completo de restricciones: $L(c)$.**
Definicion por bloques.

$$L(c) = \begin{pmatrix} A(c) & 0 \\ T_c(c) & T_\omega(c) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(|\mathcal{E}|+|\mathcal{T}|)\times(2N+|\mathcal{T}|)}.$$

Direcciones admisibles.

$$\ker L(c) = \{(\delta c, \omega) : L(c)(\delta c, \omega) = 0\}.$$

Eliminacion explicita de ω. Como $T_\omega = I$:

$$\omega = -T_c(c)\delta c,$$

y por tanto

$$(\delta c, \omega) \in \ker L(c) \quad \Longleftrightarrow \quad \delta c \in \mathrm{Roll}(c) \ \text{ y } \ \omega = -T_c(c)\delta c.$$

2.10. **Chequeos geometricos cs (duros) y chequeos globales de no interseccion.** Estos chequeos convierten tu entrada en un cs–diagrama real.

(C0) Chequeo combinatorio de cs (DURO). Exigir:

- cada $\alpha \in \mathcal{T}$ aparece exactamente como inicio de una pieza y exactamente como fin de una pieza,
- el grafo dirigido de piezas (tangencias como nodos, piezas como flechas) forma un solo ciclo orientado.

Chequeos duros para cada segmento $s : \alpha \to \beta$. Sea $v_s := p_\beta - p_\alpha$ y $\ell_s := \|v_s\|$.
(S1) Tangencia en los extremos. Exigir:

$$|\langle v_s, n_\alpha\rangle| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{geo}}, \qquad |\langle v_s, n_\beta\rangle| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{geo}}\,.$$

(S2) No interseccion con discos (despeje). Para cada disco D_i, exigir que la distancia del centro c_i al segmento $[p_\alpha, p_\beta]$ sea ≥ 1, salvo en discos extremos donde se permite igualdad en el endpoint correspondiente:

$$\mathrm{dist}(c_i, [p_\alpha, p_\beta]) \ge 1 - \mathrm{tol}_{\mathrm{geo}}\,.$$

Chequeos duros para cada arco $a = (\alpha \to \beta, k, \Delta\theta_a)$.
(A1) Endpoints en el disco correcto. Exigir:

$$k(\alpha) = k(\beta) = k, \qquad \big|\|p_\alpha - c_k\| - 1\big| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{met}}, \qquad \big|\|p_\beta - c_k\| - 1\big| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{met}}\,.$$

(A2) Incremento angular bien definido. Exigir:

$$\mathrm{tol}_{\mathrm{lin}} < \Delta\theta_a < 2\pi - \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}\,.$$

(A3) Consistencia con el ciclo orientado. Chequear que el arco a es exactamente la pieza saliente desde α y entrante a β en el ciclo.
Bug tip (arcos). Para un arco $a = (\alpha \to \beta, k, \Delta\theta_a)$, exigir tambien:

$$k(\alpha) = k(\beta) = k, \qquad \|t_\alpha - Jn_\alpha\| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}, \qquad \|t_\beta - Jn_\beta\| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}\,.$$

Chequeos globales de no interseccion (DUROS si quieres validez geometrica completa).
(G0) Lista de piezas geometricas. Representa cada pieza como un objeto geometrico:

- segmento cerrado $[p_\alpha, p_\beta]$,
- arco sobre ∂D_k con intervalo angular de longitud $\Delta\theta_a$.

(G1) Segmento–segmento. Para dos segmentos distintos:

$$\mathrm{int}([p_\alpha, p_\beta]) \cap \mathrm{int}([p_{\alpha'}, p_{\beta'}]) = \varnothing,$$

permitiendo interseccion solo en endpoints que sean la misma tangencia declarada.
(G2) Segmento–arco. Un segmento y un arco no se cruzan, salvo en endpoints compartidos declarados.
(G3) Arco–arco. Dos arcos no se cruzan, salvo en endpoints compartidos declarados.

2.11. **Longitud del diagrama y funcional de primera variacion Φ.**
Longitud total.

$$\mathrm{Len}(\gamma) = \sum_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Len}(s) + \sum_{a\in\mathcal{A}} \mathrm{Len}(a), \qquad \mathrm{Len}(s) = \|p_\beta - p_\alpha\|, \qquad \mathrm{Len}(a) = \Delta\theta_a.$$

Definicion operacional de primera variacion.

$$\Phi(\delta c, \omega) := D\,\mathrm{Len}(\gamma)[\delta\gamma(\delta c, \omega)], \qquad \delta p_\alpha = \delta c_{k(\alpha)} + \omega_\alpha t_\alpha.$$

Criticidad en el estrato cs.

$$\gamma \text{ es critico} \iff \Phi(\delta c, \omega) = 0 \;\; \forall (\delta c, \omega) \in \ker L(c),$$

despues de eliminar movimientos rigidos.

2.12. **Contribucion de un segmento y de un arco (formulas de primer orden).**

Segmento $s : \alpha \to \beta$.
Datos.

$$v_s := p_\beta - p_\alpha, \qquad \ell_s := \|v_s\|, \qquad \hat{v}_s := \frac{v_s}{\ell_s}.$$

Primera variacion del segmento.

$$D\,\mathrm{Len}(s) = \langle \hat{v}_s, \delta p_\beta - \delta p_\alpha \rangle, \qquad \delta p_\alpha = \delta c_{k(\alpha)} + \omega_\alpha t_\alpha.$$

Arco $a = (\alpha \to \beta, k, \Delta\theta_a)$.
Primera variacion del arco (convencion del protocolo). Con arcos CCW y ω como desplazamiento tangencial escalar (longitud):

$$D\,\mathrm{Len}(a) = \omega_\beta - \omega_\alpha.$$

2.13. **Ensamblaje mecanico de Φ: reglas de acumulacion.**
Objetivo. Construir $g_c \in \mathbb{R}^{2N}$ y $g_\omega \in \mathbb{R}^{|\mathcal{T}|}$ tales que:

$$\Phi(\delta c, \omega) = g_c^\top \delta c + g_\omega^\top \omega.$$

Inicializacion.

$$g_c = 0, \qquad g_\omega = 0.$$

Regla por segmento $s : \alpha \to \beta$.

- En el bloque del disco $k(\alpha)$: sumar $-\hat{v}_s$ a g_c.
- En el bloque del disco $k(\beta)$: sumar $+\hat{v}_s$ a g_c.
- En la componente α de g_ω: sumar $-\langle \hat{v}_s, t_\alpha \rangle$.
- En la componente β de g_ω: sumar $+\langle \hat{v}_s, t_\beta \rangle$.

Regla por arco $a = (\alpha \to \beta, k, \Delta\theta_a)$.

- En la componente α de g_ω: sumar -1.
- En la componente β de g_ω: sumar $+1$.

Resultado final.

$$\Phi(\delta c, \omega) = g_c^\top \delta c + g_\omega^\top \omega.$$

Version reducida (solo en δc). En $\ker L(c)$, $\omega = -T_c \delta c$, entonces:

$$\Phi(\delta c, \omega) = \big(g_c - T_c(c)^\top g_\omega\big)^\top \delta c.$$

Definimos

$$g_{\mathrm{red}} := g_c - T_c(c)^\top g_\omega \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Sobre direcciones admisibles:

$$\Phi = g_{\mathrm{red}}^\top \delta c, \qquad \delta c \in \mathrm{Roll}(c).$$

2.14. **Gauge: como eliminar traslaciones y rotacion antes de declarar criticidad.**
Movimientos rigidos en el espacio ambiente. Define $V \in \mathbb{R}^{2N \times 3}$ cuyas columnas son:

$$v^{(x)} : \;\delta c_i = (1, 0), \qquad v^{(y)} : \;\delta c_i = (0, 1), \qquad v^{(\mathrm{rot})} : \;\delta c_i = J c_i.$$

Proyeccion de rigidos a Roll(c). Sea $U \in \mathbb{R}^{2N\times d}$ una base ortonormal de Roll(c). Define

$$V_{\mathrm{Roll}} := UU^\top V.$$

Sea W una base ortonormal de $\mathrm{im}(V_{\mathrm{Roll}})$, obtenida por QR o SVD, descartando columnas con norma $\le \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}$.
Construccion de la base con gauge. Define

$$P_\perp := I - WW^\top.$$

Luego define

$$U_{\mathrm{g}} := \mathrm{orth}(P_\perp U),$$

donde $\mathrm{orth}(\cdot)$ significa re-ortonormalizar por QR o SVD.
Chequeos duros del gauge (obligatorio reportar). Reporte obligatorio:

$$\|A(c)U\|, \qquad \|U^\top U - I\|, \qquad \|W^\top W - I\|, \qquad \|U_{\mathrm{g}}^\top W\|.$$

Exigir que todas estas normas sean $\le \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}$.
Criterio de criticidad con gauge. Define

$$r := U_{\mathrm{g}}^\top g_{\mathrm{red}}.$$

Critico si y solo si

$$\|r\| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}\, \|g_{\mathrm{red}}\|.$$

2.15. **Test de criticidad en algebra lineal (dos metodos equivalentes).**
Metodo 1 (coordenadas con gauge).

$$r := U_{\mathrm{g}}^\top g_{\mathrm{red}}.$$

Critico si y solo si $\|r\| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}\, \|g_{\mathrm{red}}\|$.
Metodo 2 (proyector, robusto). Define

$$P_{\mathrm{g}} := U_{\mathrm{g}} U_{\mathrm{g}}^\top.$$

Critico si y solo si

$$\|P_{\mathrm{g}} g_{\mathrm{red}}\| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}\, \|g_{\mathrm{red}}\|.$$

Reporte obligatorio: $\|P_{\mathrm{g}} g_{\mathrm{red}}\|$ y $\|g_{\mathrm{red}}\|$.
Explicacion para abuela. $A(c)$ dice como se pueden mover los discos sin romper los contactos. Luego g_{red} mide hacia donde quiere cambiar la longitud. Critico significa: para cualquier movimiento permitido, despues de quitar traslaciones y rotacion, la longitud no cambia al primer orden.

2.16. **Test cuadratico opcional de estabilidad linealizada.** Esta parte es opcional. La afirmacion correcta es: **construimos una forma cuadratica transversal asociada a segmentos** .
Definicion del test cuadratico en el espacio extendido.

$$Q_{\mathrm{amb}}(\delta c, \omega) := \sum_{s\in\mathcal{S}} Q_s(\delta c, \omega),$$

donde para $s : \alpha \to \beta$:

$$Q_s(\delta c, \omega) := \frac{1}{\ell_s} \left\| P_s(\delta p_\beta - \delta p_\alpha) \right\|^2, \qquad P_s := I - \hat{v}_s \hat{v}_s^\top.$$

Reduccion a direcciones admisibles. Como $\omega = -T_c \delta c$ en $\ker L(c)$:

$$Q_{\mathrm{red}}(\delta c) := Q_{\mathrm{amb}}\big(\delta c, -T_c \delta c\big), \qquad \delta c \in \mathrm{Roll}(c).$$

Luego aplica gauge: escribe $\delta c = U_{\mathrm{g}} z$ y estudia $Q_{\mathrm{red}}(U_{\mathrm{g}} z)$ en z.

Uso correcto.

- Si el diagrama es critico y Q_{red} es positiva definida en el espacio con gauge, eso es evidencia fuerte de estabilidad linealizada dentro del estrato.
- Si existe una direccion admisible con gauge tal que $Q_{\mathrm{red}} < 0$, eso indica inestabilidad linealizada.

2.17. **Plantilla de implementacion (paso a paso, sin decisiones ocultas).**
(F0) Entrada.

$$\big(N,\ c,\ \mathcal{E},\ \mathcal{T},\ k(\alpha),\ p_\alpha,\ \mathcal{S},\ \mathcal{A}\big),$$

con arcos $a = (\alpha \to \beta, k, \Delta\theta_a)$ y $\Delta\theta_a$ calculado por atan2+wrap.
(F1) Geometria local. Calcular $n_\alpha = p_\alpha - c_{k(\alpha)}$, fijar t_α por pieza saliente y chequear ortogonalidad.
(F2) Matriz $A(c)$. Construir filas por contactos $\{i,j\}$ usando u_{ij}.
(F3) Matrices $T_c(c)$ y $T_\omega(c)$. Construir T_c y $T_\omega = I$.
(F4) Chequeos duros. Ejecutar metricos, (C0), (S1)–(S2), (A1)–(A3) y (G1)–(G3), reportando residuos.
(F5) Ensamble de g_c, g_ω. Acumular con reglas de segmentos y arcos.
(F6) Reduccion.

$$g_{\mathrm{red}} = g_c - T_c^\top g_\omega.$$

(F7) Gauge bulletproof. Construir U de $\mathrm{Roll}(c)$, proyectar V a V_{Roll}, obtener W y luego U_{g}.
(F8) Criticidad.

$$r = U_{\mathrm{g}}^\top g_{\mathrm{red}}, \qquad \text{reportar } \|r\| \text{ y } \|g_{\mathrm{red}}\|.$$

(F9) (Opcional) Test cuadratico. Evaluar Q_{red} en coordenadas z con $\delta c = U_{\mathrm{g}} z$.

2.18. **Chequeos duros: si alguno falla, la corrida no vale.**
Metricos (duros).

- Para cada α: $\big|\|p_\alpha - c_{k(\alpha)}\| - 1\big| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{met}}$.
- Para cada $\{i,j\} \in \mathcal{E}$: $\big|\|c_i - c_j\| - 2\big| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{met}}$.

Combinatorios cs (duros).

- (C0) el grafo dirigido de piezas es un solo ciclo orientado.

Piezas (duros).

- Segmentos: (S1)–(S2).
- Arcos: (A1)–(A3), $\mathrm{tol}_{\mathrm{lin}} < \Delta\theta_a < 2\pi - \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}$, y el bug tip de tangentes.

Globales (duros si quieres validez geometrica completa).

- (G1)–(G3) pasan dentro de $\mathrm{tol}_{\mathrm{geo}}$.

Algebraicos (duros).

- Si U es base ortonormal de $\mathrm{Roll}(c)$: $\|A(c)U\| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}$ y $\|U^\top U - I\| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}$.
- Si W es base ortonormal de $\mathrm{im}(V_{\mathrm{Roll}})$: $\|W^\top W - I\| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}$.
- Si U_{g} es base con gauge: $\|U_{\mathrm{g}}^\top W\| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}$.

Chequeo de criticidad (lo que reportas). Reporta siempre:

$$\|r\| = \|U_{\mathrm{g}}^\top g_{\mathrm{red}}\|, \qquad \|g_{\mathrm{red}}\|, \qquad \frac{\|r\|}{\|g_{\mathrm{red}}\|}.$$

Critico significa: $\|r\| \le \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}\ \|g_{\mathrm{red}}\|$.

2.19. **Correcciones clave (para que no se meta un error).**
(K1) Contactos son $\mathcal{E}$, no se infieren desde segmentos. No mezcles $\mathcal{S}$ con $\mathcal{E}$.

(K2) La ecuacion correcta de contacto usa unitarios.

$$\langle u_{ij}, \delta c_i - \delta c_j \rangle = 0, \qquad u_{ij} = \frac{c_i - c_j}{\|c_i - c_j\|}.$$

(K3) La longitud no depende solo de centros. Necesitas p_α, t_α y la descomposicion $\mathcal{S}, \mathcal{A}$.
(K4) El bloque de tangencia es definicional. $\langle t_\alpha, \delta c_{k(\alpha)} \rangle + \omega_\alpha = 0$ define admisibilidad en este protocolo.
(K5) El test cuadratico opcional no es una segunda variacion completa. Es un test transversal asociado a segmentos.

2.20. **Mini ejemplo de sanidad (para probar el codigo antes de un ejemplo grande).** Antes de correr un ejemplo grande, corre un ejemplo pequeno:

- $N = 2$ discos con un contacto $\{1, 2\}$,
- dos tangencias α, β en el disco 1 y dos tangencias γ, δ en el disco 2,
- un segmento $\alpha \to \gamma$ y un segmento $\delta \to \beta$,
- un arco $(\gamma \to \delta, 2, \Delta\theta)$ en el disco 2 y un arco $(\beta \to \alpha, 1, \Delta\theta')$ en el disco 1, con $\mathrm{tol}_{\mathrm{lin}} < \Delta\theta, \Delta\theta' < 2\pi - \mathrm{tol}_{\mathrm{lin}}$.

Verifica que:

- construyes A, T_c, T_ω, L,
- pasas chequeos metricos, (C0), piezas y globales,
- ensamblas g_c, g_ω y luego g_{red},
- obtienes $\|r\|/\|g_{\mathrm{red}}\|$.

2.21. **Checklist final (lo que se entrega, sin excepciones).**

- Tabla con N, c_i, $\mathcal{E}$, $|\mathcal{E}|$, $|\mathcal{T}|$, $|\mathcal{S}|$, $|\mathcal{A}|$.
- Verificaciones metricas: residuos de $\big|\|p_\alpha - c_{k(\alpha)}\| - 1\big|$ y $\big|\|c_i - c_j\| - 2\big|$.
- (C0) verificacion del ciclo orientado (si o no, y si no, donde falla).
- Chequeos de piezas: (S1)–(S2) y (A1)–(A3), con residuos.
- Chequeos globales: (G1)–(G3), con tolerancia declarada.
- Matrices $A(c)$, $T_c(c)$, $T_\omega(c)$, $L(c)$ (o dimensiones, rangos y normas de residuos).
- Vectores g_c, g_ω y el reducido g_{red}.
- Gauge: U, V_{Roll}, W, y U_{g}, con normas de chequeo.
- Criticidad: $r = U_{\mathrm{g}}^\top g_{\mathrm{red}}$, $\|r\|$, $\|g_{\mathrm{red}}\|$, y $\|r\|/\|g_{\mathrm{red}}\|$.
- (Opcional) Evaluacion de Q_{red} en coordenadas sobre U_{g}.