

1. UN PAQUETE COMPLETO DE PRIMERA Y SEGUNDA VARIACION PARA DIAGRAMAS CS

1.1. Lo que vas a lograr con este documento. La meta es que puedas hacer lo siguiente, sin adivinar nada:

- Construir la matriz completa $L(c)$ de restricciones lineales de primer orden.
- Calcular el funcional lineal de primera variacion de longitud $\Phi(\delta c, \omega)$.
- Decidir criticidad: el diagrama es critico si y solo si Φ se anula en todas las direcciones admisibles.
- (Opcional) Calcular una segunda variacion (forma cuadratica) sobre direcciones admisibles.

Lo importante: $L(c)$ solo describe movimientos permitidos (primer orden). La longitud entra por separado en Φ .

1.2. Datos del diagrama cs y convenciones.

Discos. Hay N discos unitarios D_1, \dots, D_N con centros $c_i \in \mathbb{R}^2$ y radio $R = 1$.

Piezas cs. El diagrama cs γ esta compuesto por:

- segmentos rectos (en el complemento de los discos) cuyos extremos son tangencias con discos,
- arcos circulares sobre fronteras ∂D_k cuyos extremos son tangencias con el mismo disco.

Conjuntos indice (combinatoria fija).

- \mathcal{E} = conjunto de contactos disco–disco, cada elemento es un par no ordenado $\{i, j\}$.
- \mathcal{T} = conjunto de tangencias curva–disco, cada elemento es una etiqueta α .
- \mathcal{S} = conjunto de segmentos, cada segmento es un par ordenado $\alpha \rightarrow \beta$ de tangencias.
- \mathcal{A} = conjunto de arcos, cada arco es un triple $(\alpha \rightarrow \beta, k, \sigma_a)$: extremos α, β sobre el mismo disco D_k y un signo $\sigma_a \in \{+1, -1\}$.

Datos geometricos minimos (esto SI es entrada). Para poder construir matrices y longitud, necesitas:

- los centros c_1, \dots, c_N ,
- para cada tangencia $\alpha \in \mathcal{T}$: el disco $k(\alpha) \in \{1, \dots, N\}$ y el punto $p_\alpha \in \partial D_{k(\alpha)}$,
- la lista \mathcal{S} de segmentos $\alpha \rightarrow \beta$,
- la lista \mathcal{A} de arcos $(\alpha \rightarrow \beta, k, \sigma_a)$.

Convencion de rotacion 90° . Usamos $J(x, y) = (-y, x)$.

Normal y tangente en una tangencia (calculable desde c y p). Si $\alpha \in \mathcal{T}$ ocurre en el disco $k = k(\alpha)$:

- normal unitario $n_\alpha := p_\alpha - c_k$,
- tangente unitario $t_\alpha := \varepsilon_\alpha J n_\alpha$ con $\varepsilon_\alpha \in \{+1, -1\}$.

El signo ε_α lo fijas para que t_α apunte en la direccion de recorrido de γ en α .

Chequeos inmediatos (si falla, la entrada esta mal).

- Para todo $\alpha \in \mathcal{T}$: $\|p_\alpha - c_{k(\alpha)}\| = 1$.
- Para todo $\alpha \in \mathcal{T}$: $\langle n_\alpha, t_\alpha \rangle = 0$ y $\|t_\alpha\| = 1$.
- Para todo $\{i, j\} \in \mathcal{E}$: $\|c_i - c_j\| = 2$.

1.3. Variables de primer orden.

Variacion de centros (incognita). $\delta c = (\delta c_1, \dots, \delta c_N) \in \mathbb{R}^{2N}$ con $\delta c_i \in \mathbb{R}^2$.

Variables auxiliares por tangencia (incognita). $\omega = (\omega_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{T}|}$.

Modelo cinematico (esto es una definicion operacional). El movimiento de cada punto de tangencia se modela por $\delta p_\alpha = \delta c_{k(\alpha)} + \omega_\alpha t_\alpha$.

Comentario honesto: esta es la forma mas simple y util para convertir variacion de longitud en una forma lineal en $(\delta c, \omega)$, y es la que se usa en el protocolo.

1.4. Bloque de contactos disco–disco: construccion de $A(c)$.

Vector unitario de contacto. Para cada contacto $\{i, j\} \in \mathcal{E}$ define $u_{ij} := (c_i - c_j) / \|c_i - c_j\|$.

Restriccion de primer orden. Como $\|c_i - c_j\| = 2$ se mantiene constante en el estrato de contacto, la derivada da $\langle u_{ij}, \delta c_i - \delta c_j \rangle = 0$.

Construccion de la fila. $A(c)$ tiene $|\mathcal{E}|$ filas y $2N$ columnas (bloques de tamaño 2 por disco). La fila de $\{i, j\}$ tiene:

- bloque u_{ij}^\top en las columnas del disco i ,
- bloque $-u_{ij}^\top$ en las columnas del disco j ,
- ceros en las demas columnas.

Espacio de rodadura. $\text{Roll}(c) := \ker A(c)$.

1.5. Bloques de tangencia: construccion de $T_c(c)$ y $T_\omega(c)$.

Ecuacion por tangencia. Para cada $\alpha \in \mathcal{T}$ imponemos $\langle t_\alpha, \delta c_{k(\alpha)} \rangle + \omega_\alpha = 0$.

Aclaracion para tu duda:

- t_α SI es calculable (desde p_α y $c_{k(\alpha)}$, mas el signo de orientacion).
- δc y ω NO se conocen a priori: son las incognitas del sistema lineal.
- La ecuacion no es un dato, es una restriccion.

Fila en $T_c(c)$. La fila de $T_c(c)$ asociada a α tiene un unico bloque no nulo:

- bloque t_α^\top en las columnas del disco $k(\alpha)$,
- ceros en los otros discos.

Fila en $T_\omega(c)$. La fila de $T_\omega(c)$ asociada a α tiene:

- un 1 en la columna de ω_α ,
- ceros en las demas columnas.

Conclusion. Con esta convencion $T_\omega(c) = I$.

1.6. Operador lineal completo de restricciones: $L(c)$.

Definicion. $L(c)$ es la matriz por bloques $L(c) = \begin{pmatrix} A(c) & 0 \\ T_c(c) & T_\omega(c) \end{pmatrix}$ que actua sobre $(\delta c, \omega) \in \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{T}|}$.

Significado de $L(c)$. Las direcciones admisibles a primer orden son exactamente $\ker L(c) = \{(\delta c, \omega) : L(c)(\delta c, \omega) = 0\}$.

Eliminacion explicita de ω . Como $T_\omega = I$, la segunda linea da $\omega = -T_c(c)\delta c$. Entonces, en este modelo, toda $\delta c \in \text{Roll}(c)$ tiene un lift unico a $\ker L(c)$, dado por $\omega = -T_c(c)\delta c$.

Correccion importante (esto arregla un error frecuente). No es correcto escribir un teorema de primera variacion que dependa solo de c y contactos sin usar p_α, t_α y la descomposicion \mathcal{S}, \mathcal{A} . La longitud del diagrama no depende solo del grafo de contacto; depende de la geometria del trazo γ .

1.7. Longitud del diagrama y funcional de primera variacion Φ .

Longitud. $\text{Len}(\gamma)$ es la suma de longitudes de:

- segmentos $s \in \mathcal{S}$ (distancia entre extremos),
- arcos $a \in \mathcal{A}$ (longitud angular sobre ∂D_k , con $R = 1$).

Definicion de Φ . El funcional de primera variacion es $\Phi(\delta c, \omega) := D \text{Len}(\gamma)[\delta \gamma(\delta c, \omega)]$ evaluado en una direccion admisible $(\delta c, \omega) \in \ker L(c)$.

Criticidad en el estrato cs significa: $\Phi(\delta c, \omega) = 0$ para todo $(\delta c, \omega) \in \ker L(c)$.

1.8. Contribucion de un segmento y de un arco (formulas correctas).

Segmento $s : \alpha \rightarrow \beta$.

Datos del segmento. $v_s := p_\beta - p_\alpha$, $\ell_s := \|v_s\|$, $\hat{v}_s := v_s / \ell_s$.

Primera variacion del segmento. $D \text{Len}(s) = \langle \hat{v}_s, \delta p_\beta - \delta p_\alpha \rangle$.

Usando $\delta p_\alpha = \delta c_{k(\alpha)} + \omega_\alpha t_\alpha$: $D \text{Len}(s) = \langle \hat{v}_s, \delta c_{k(\beta)} - \delta c_{k(\alpha)} \rangle + \langle \hat{v}_s, \omega_\beta t_\beta - \omega_\alpha t_\alpha \rangle$.

Arco $a = (\alpha \rightarrow \beta, k, \sigma_a)$ sobre ∂D_k .

Primera variacion del arco. En este modelo: $D \text{Len}(a) = \sigma_a(\omega_\beta - \omega_\alpha)$.

Nota de sanidad. Esta formula NO produce un termino directo en δc antes de eliminar ω . Si luego sustituyes $\omega = -T_c \delta c$, entonces si aparece dependencia en δc , pero eso es despues de la eliminacion.

1.9. Ensamblaje mecanico de Φ : reglas de acumulacion.

Forma general. $\Phi(\delta c, \omega) = g_c^\top \delta c + g_\omega^\top \omega$ para ciertos coeficientes $g_c \in \mathbb{R}^{2N}$ y $g_\omega \in \mathbb{R}^{|\mathcal{T}|}$.

Inicializacion. Partir con $g_c = 0$ y $g_\omega = 0$.

Regla por segmento $s : \alpha \rightarrow \beta$.

- En el bloque del disco $k(\alpha)$ sumar $-\hat{v}_s$ a g_c .
- En el bloque del disco $k(\beta)$ sumar $+\hat{v}_s$ a g_c .
- Sumar $-\langle \hat{v}_s, t_\alpha \rangle$ a $g_\omega[\alpha]$.
- Sumar $+\langle \hat{v}_s, t_\beta \rangle$ a $g_\omega[\beta]$.

Regla por arco $a = (\alpha \rightarrow \beta, k, \sigma_a)$.

- Sumar $-\sigma_a$ a $g_\omega[\alpha]$.
- Sumar $+\sigma_a$ a $g_\omega[\beta]$.

Resultado. Despues de procesar todas las piezas, $\Phi(\delta c, \omega) = g_c^\top \delta c + g_\omega^\top \omega$.

1.10. Test de criticidad en algebra lineal (dos metodos equivalentes).

Metodo 1: base de $\ker L(c)$.

- (1) Calcula una base de $\ker L(c)$ y juntala como columnas de una matriz K .
- (2) Calcula $(g_c, g_\omega)^\top K$.
- (3) El diagrama es critico si y solo si $(g_c, g_\omega)^\top K = 0$.

Metodo 2: criterio de espacio fila. El diagrama es critico si y solo si existe λ tal que $(g_c, g_\omega) = L(c)^\top \lambda$. Esto es resolver un sistema lineal para λ .

Explicacion para abuela (sin perder verdad). $L(c)$ dice que movimientos pequenos estan permitidos sin romper contactos ni tangencias. Φ dice si esos movimientos pequenos hacen que la curva se alargue o se acorte al primer orden. Critico significa: ningun movimiento permitido cambia la longitud al primer orden.

1.11. Segunda variacion: version util para pregrado. Aqui hay una forma correcta y ejecutable de segunda variacion, sin afirmar cosas falsas.

Idea. Primero construyes una forma cuadratica $Q_{\text{amb}}(\delta c, \omega)$ (segunda variacion en el espacio extendido). Luego la restringes a $(\delta c, \omega) \in \ker L(c)$.

Segunda variacion de un segmento. Para un segmento $s : \alpha \rightarrow \beta$ con $v_s = p_\beta - p_\alpha$ y $\ell_s = \|v_s\|$, la segunda variacion de la distancia euclidea (formula estandar) se escribe como:

$$D^2 \text{Len}(s) = \frac{1}{\ell_s} \|(I - \hat{v}_s \hat{v}_s^\top)(\delta p_\beta - \delta p_\alpha)\|^2 + \langle \hat{v}_s, \delta^2 p_\beta - \delta^2 p_\alpha \rangle.$$

En un protocolo de pregrado, normalmente se usa la aproximacion consistente de primer orden: se ignora $\delta^2 p$ y se trabaja con la parte cuadratica positiva:

$$Q_s(\delta c, \omega) := \frac{1}{\ell_s} \|(I - \hat{v}_s \hat{v}_s^\top)(\delta p_\beta - \delta p_\alpha)\|^2.$$

Esto es una forma cuadratica explicita en $(\delta c, \omega)$ porque δp es lineal en $(\delta c, \omega)$.

Segunda variacion de un arco. En este modelo, $D \text{Len}(a) = \sigma_a(\omega_\beta - \omega_\alpha)$ es lineal, por lo tanto su segunda variacion en las variables $(\delta c, \omega)$ es cero: $Q_a(\delta c, \omega) = 0$.

Forma cuadratica total. Define $Q_{\text{amb}}(\delta c, \omega) := \sum_{s \in \mathcal{S}} Q_s(\delta c, \omega)$.

La segunda variacion reducida sobre el estrato cs es la restriccion: $Q_{\text{red}} := Q_{\text{amb}}|_{\ker L(c)}$.

Comentario honesto. Esta segunda variacion capta de manera limpia la curvatura de la parte de segmentos y es suficiente para tests de estabilidad linealizados en muchos ejemplos. Si quieres la formula completa con $\delta^2 p$, hay que fijar un modelo de segundo orden del movimiento de puntos de tangencia; eso es mas avanzado.

1.12. **Checklist final (lo que debes mostrar al final, sin excepciones).**

- Centros c_1, \dots, c_N .
- Lista de contactos \mathcal{E} y verificación $\|c_i - c_j\| = 2$ para $\{i, j\} \in \mathcal{E}$.
- Lista de tangencias \mathcal{T} con $k(\alpha)$ y p_α y verificación $\|p_\alpha - c_{k(\alpha)}\| = 1$.
- Vectores n_α y t_α (con signos ε_α fijados).
- Matrices numericas $A(c)$, $T_c(c)$, $T_\omega(c)$ y $L(c)$.
- Lista de segmentos \mathcal{S} y arcos \mathcal{A} con signos σ_a .
- Coeficientes g_c, g_ω y la formula $\Phi(\delta c, \omega) = g_c^\top \delta c + g_\omega^\top \omega$.
- Test de criticidad por Metodo 1 o Metodo 2.