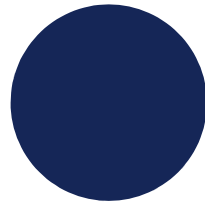


# *Einführung in die Modellierung*

Till Francke und Maik Heistermann  
*Universität Potsdam*



Seminar *Einführung in die Modellierung*  
im Modul *Versuchsplanung und Geoökologische Modellierung*

# ***Einführung in die Modellierung***

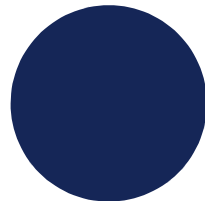
**In diesem Semester**

R als Werkzeug in der Modellierung

Ökologische Modelle

**Hydrologische Modelle**

(Ökohydrologische Modelle)



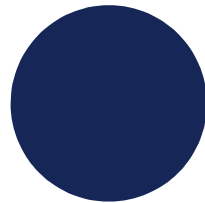
# *Einführung in die Modellierung*

**Heute**

Rekapitulation

abc & d

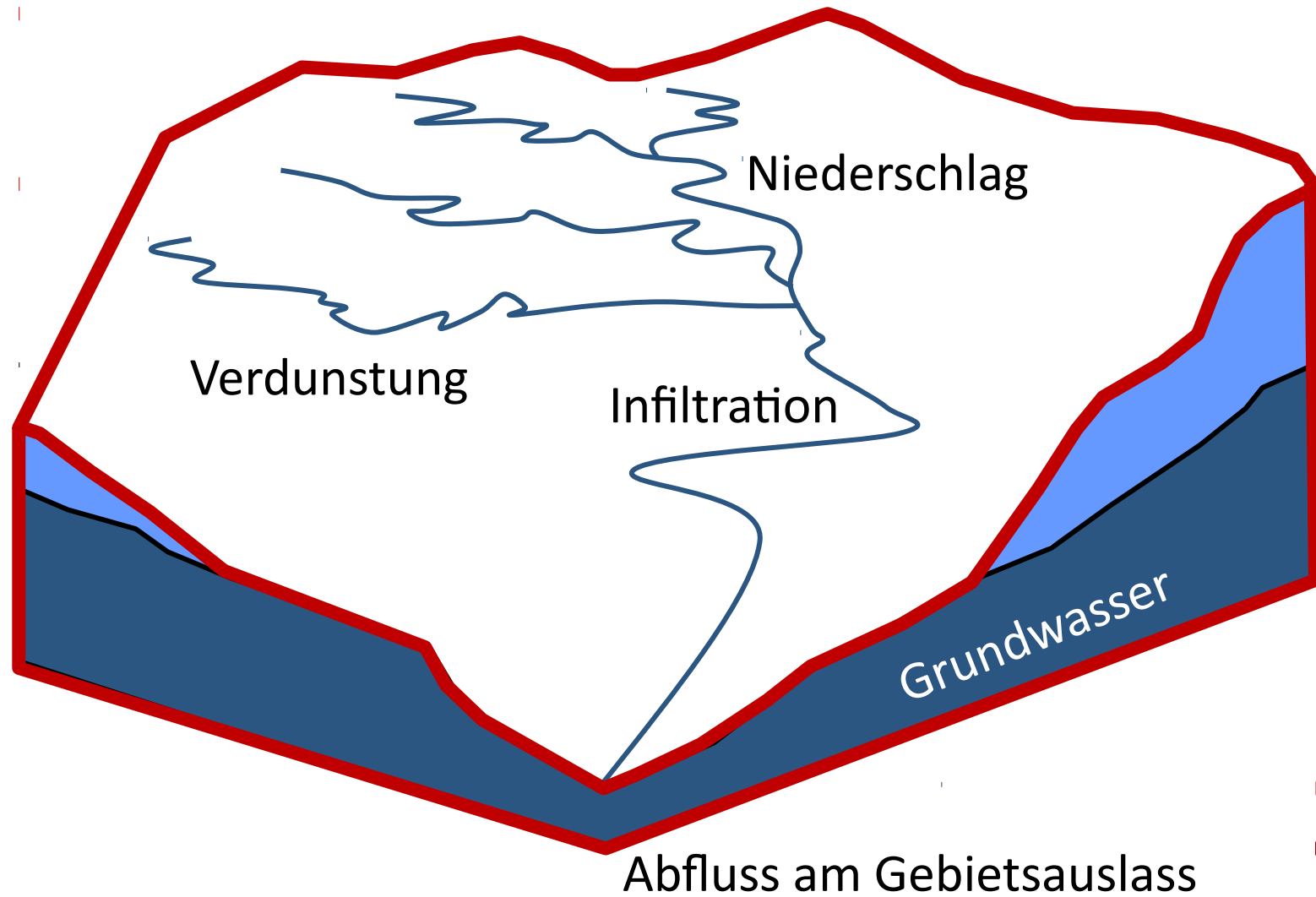
Codefight



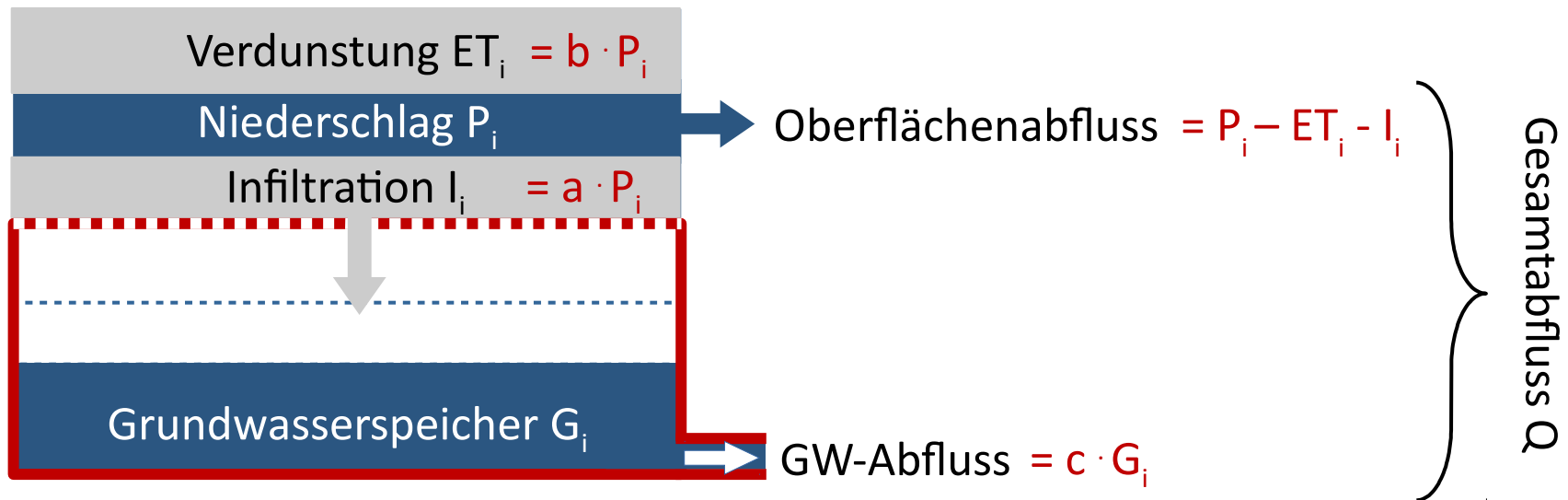
## Abfluss als Komponente des Wasserhaushalts

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = P - ET - Q$$

# Wasserhaushaltsmodelle (Wiederholung)



## Kontinuierlicher Wasserhaushalt mit dem *abc*-Modell



**Gleichung für Gesamtabfluss  $Q_i$  am Gebietsauslass**

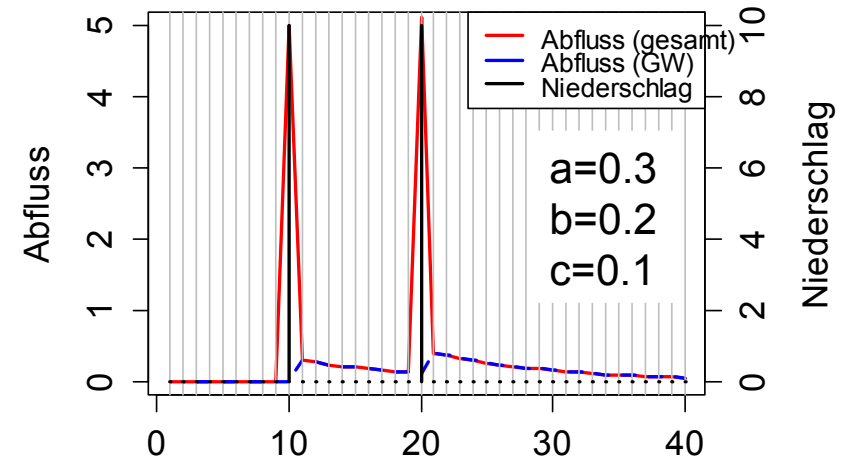
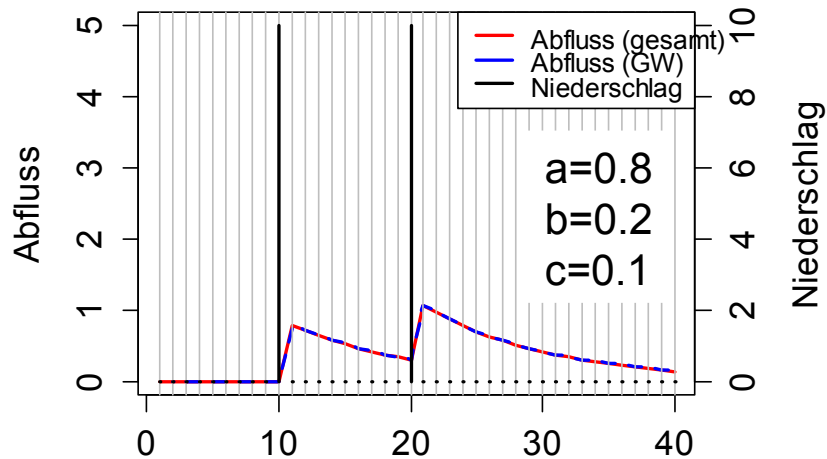
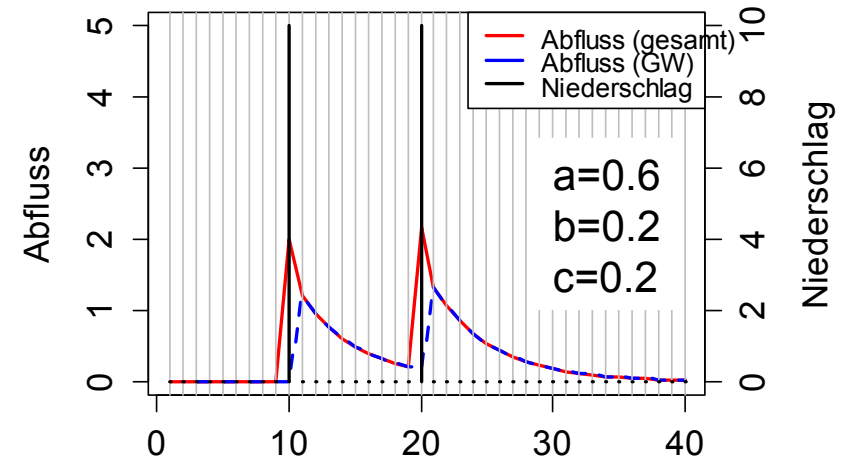
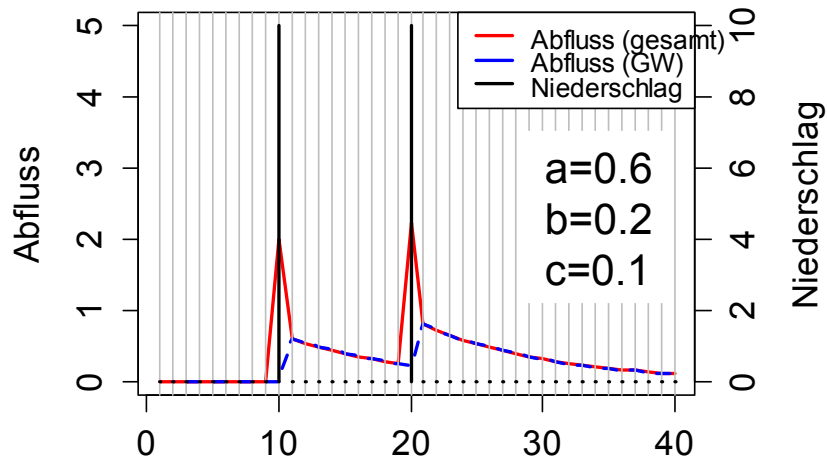
$$Q_i = AO_i + AG_i = (1-a-b)P_i + cG_{i-1}$$



**Neuberechnung des Grundwasserspeichers  $G_i$  im Zeitschritt  $i$**

$$G_i = (1-c)G_{i-1} + aP_i$$

## Kontinuierlicher Wasserhaushalt mit dem *abc*-Modell



Zeitindex

Zeitindex

## Abfluss als Komponente des Wasserhaushalts

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = P - ET - Q$$

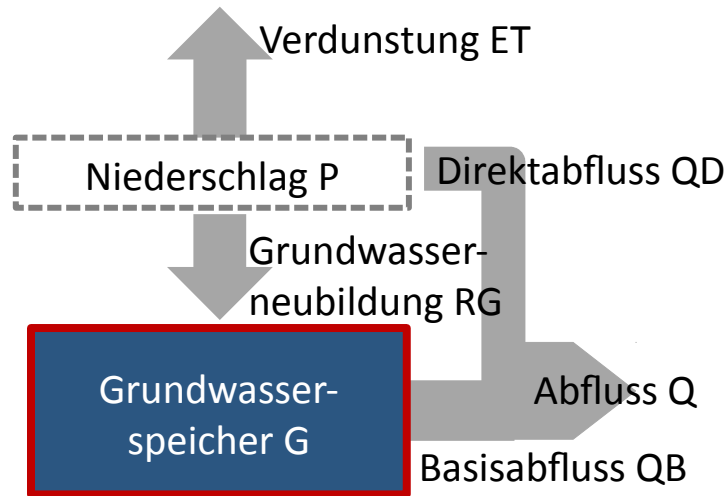
### Das abc-Modell

- ☒ Massenerhaltung als Grundprinzip
- ☐ Einfluss der Gebietsfeuchte auf Abflussbildung
- ☐ Abbildung physikalischer Prozesse (Verdunstung, Schnee)

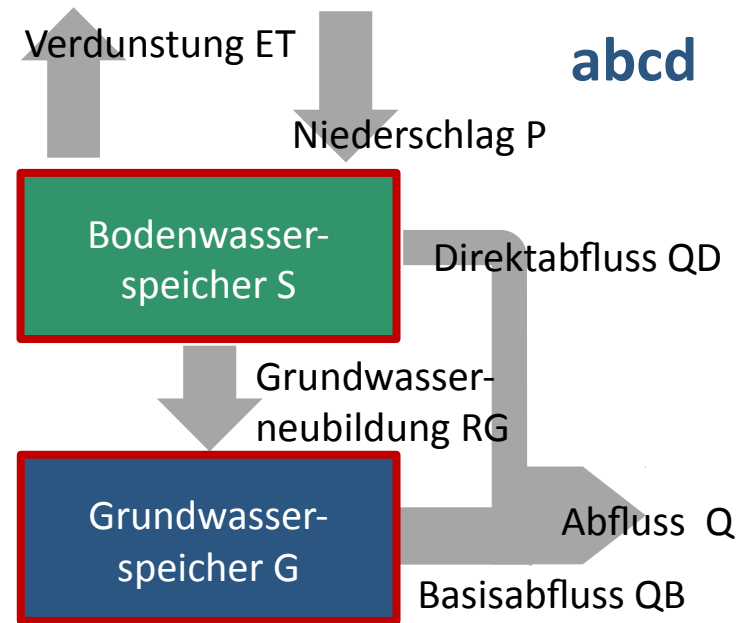


Nach *abc* kommt *abcd*...

**abc**



**abcd**



## Ansatz des abcd-Modells

### Aufteilung des monatlichen Niederschlags $P$ in

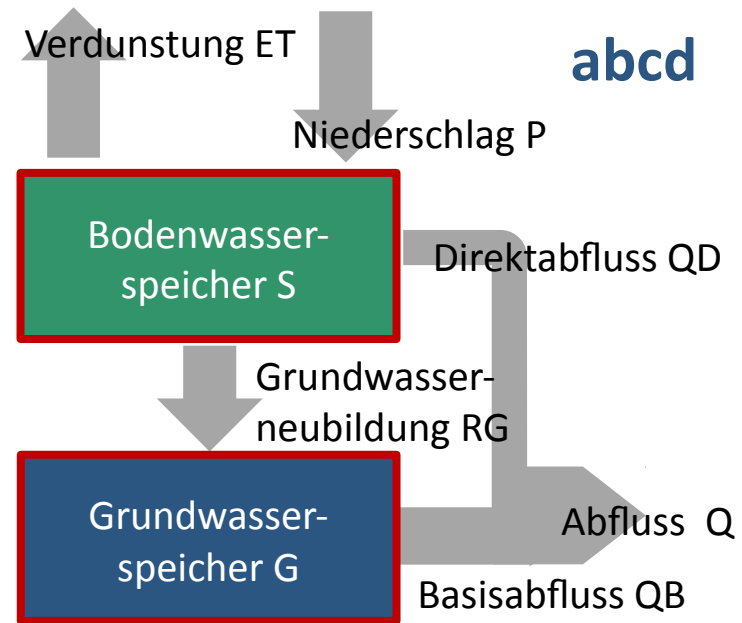
- Änderung der Bodenfeuchte  $S$
- Evapotranspiration  $ET$ ,
- Direktabfluss  $QD$ ,
- Grundwasserneubildung  $RG$

### Diese Aufteilung hängt ab von

- der Menge des Niederschlags  $P$
- der Potenziellen Evapotranspiration  $PET$
- der Anfangsbodenfeuchte  $S_{i-1}$

### Basisabfluss

- Der GW-Speicher verhält sich analog zum abc-Modell
- Basisabfluss  $QB$  ist proportional zum GW-Speicher  $G$



## Idee #1

### Verdunstung und Bodenspeicher sind beschränkt!

Im Monat  $i$  ist  $W_i = P_i + S_{i-1}$  verfügbar für

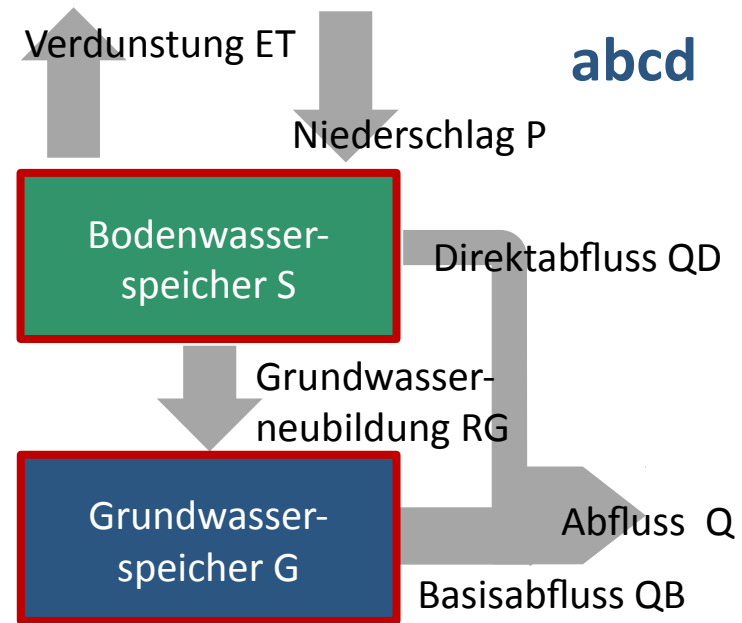
- die Auffüllung des Bodens auf  $S_i$
- für Verdunstung  $ET_i$

Die Summe aus beiden heiße  $Y_i = S_i + ET_i$

**Zunächst berechnen wir  $Y_i$  ...**

**...und dann erst die Aufteilung in  $S_i$  und  $ET_i$**

- $Y_i$  sei eine Funktion von  $W_i$



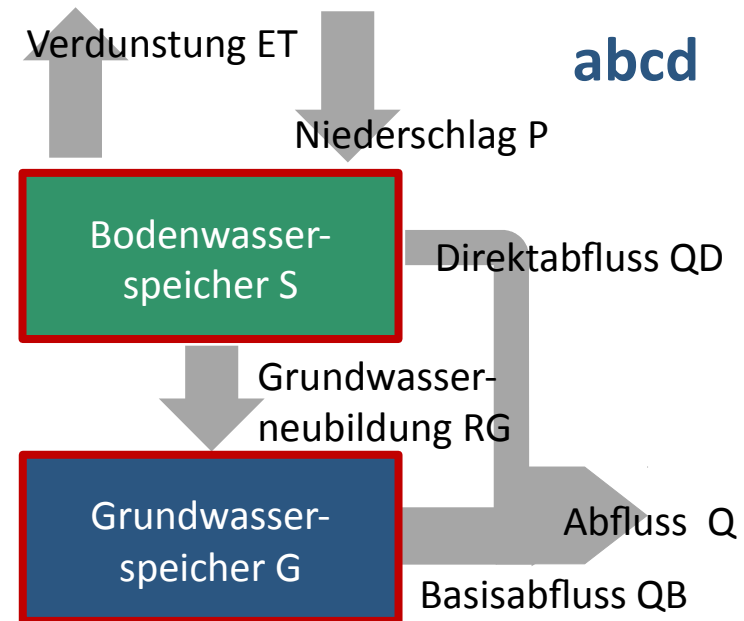
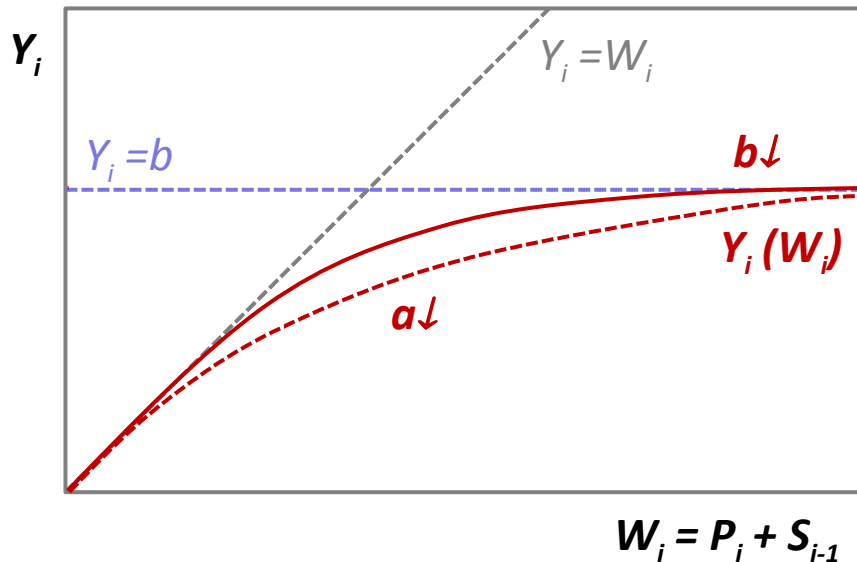
## Idee #1

### Verdunstung und Bodenspeicher sind beschränkt!

Im Monat  $i$  ist  $W_i = P_i + S_{i-1}$  verfügbar für

- die Auffüllung des Bodens auf  $S_i$
- für Verdunstung  $ET_i$

Die Summe aus beiden heiße  $Y_i = S_i + ET_i$



## Idee #1

### Verdunstung und Bodenspeicher sind beschränkt!

Im Monat  $i$  ist  $W_i = P_i + S_{i-1}$  verfügbar für

- die Auffüllung des Bodens auf  $S_i$
- für Verdunstung  $ET_i$

Die Summe aus beiden heiße  $Y_i = S_i + ET_i$

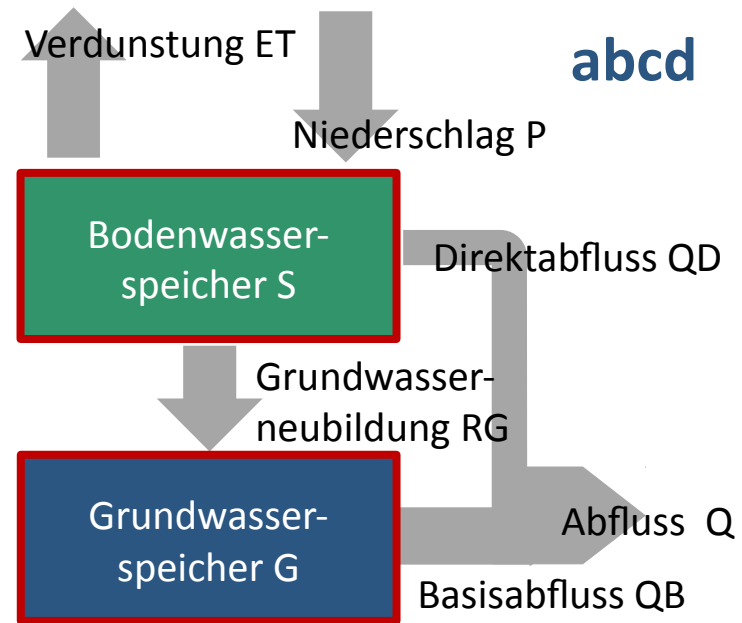
**Zunächst berechnen wir  $Y_i$  ...**

**...und dann erst die Aufteilung in  $S_i$  und  $ET_i$**

- $Y_i$  sei eine Funktion von  $W_i$
- $W_i$  klein  $\Rightarrow Y_i = W_i$
- $W_i$  groß  $\Rightarrow Y_i$  nähert sich asymptotisch dem Wert  $b$
- $a$  kontrolliert die Geschwindigkeit der Annäherung an  $b$



Was passiert mit dem Überschuss  $W_i - Y_i$ ?



## Idee #1

### Verdunstung und Bodenspeicher sind beschränkt!

Im Monat  $i$  ist  $W_i = P_i + S_{i-1}$  verfügbar für

- die Auffüllung des Bodens auf  $S_i$
- für Verdunstung  $ET_i$

Die Summe aus beiden heiße  $Y_i = S_i + ET_i$

**Zunächst berechnen wir  $Y_i$  ...**

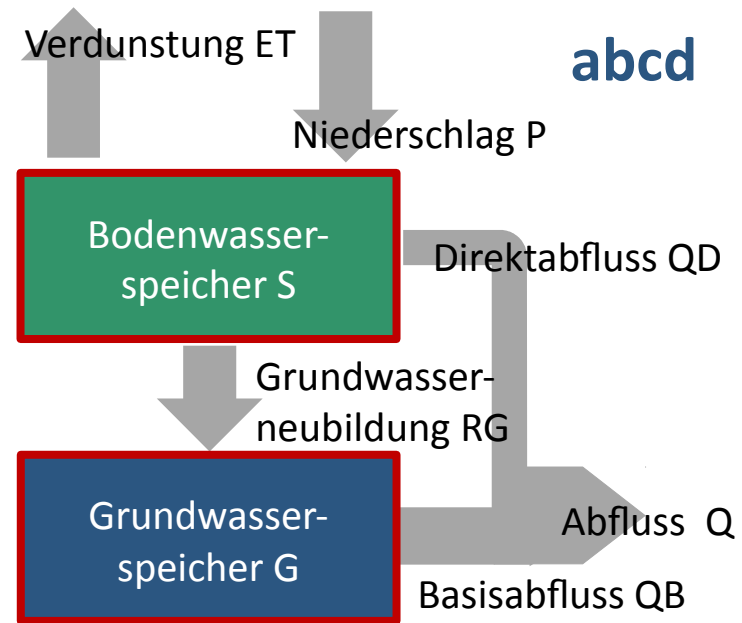
**...und dann erst die Aufteilung in  $S_i$  und  $ET_i$**

- $Y_i$  sei eine Funktion von  $W_i$
- $W_i$  klein  $\Rightarrow Y_i = W_i$
- $W_i$  groß  $\Rightarrow Y_i$  nähert sich asymptotisch dem Wert  $b$
- $a$  kontrolliert die Geschwindigkeit der Annäherung an  $b$



Implementiere die Funktion  $Y_i(W_i)$  in R (abcd.R).

Zeige, dass die Funktion die gewünschten Eigenschaften hat.



$$Y_i(W_i) = \frac{W_i + b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{W_i + b}{2a}\right)^2 - \frac{bW_i}{a}}$$

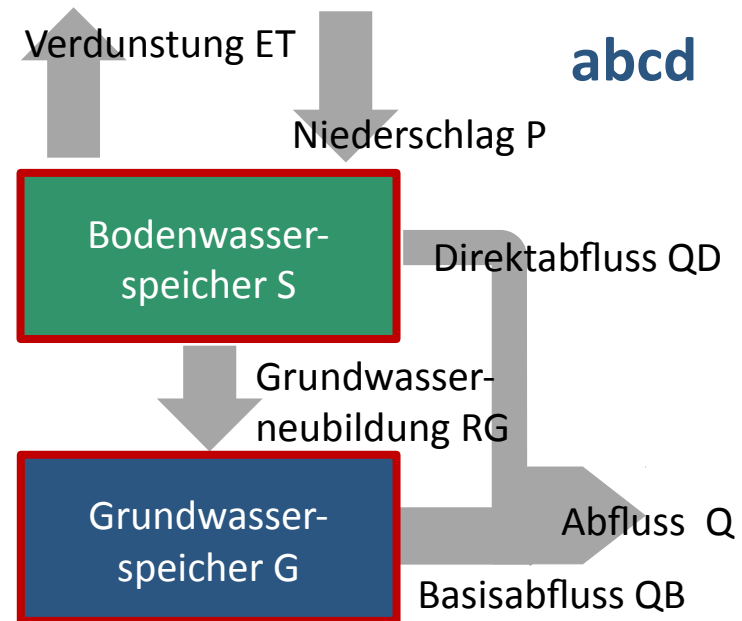
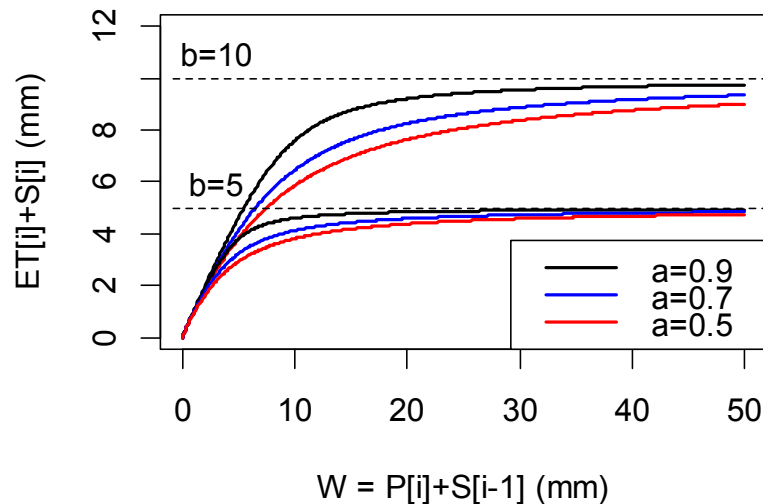
## Idee #1

### Verdunstung und Bodenspeicher sind beschränkt!

Im Monat  $i$  ist  $W_i = P_i + S_{i-1}$  verfügbar für

- die Auffüllung des Bodens auf  $S_i$
- für Verdunstung  $ET_i$

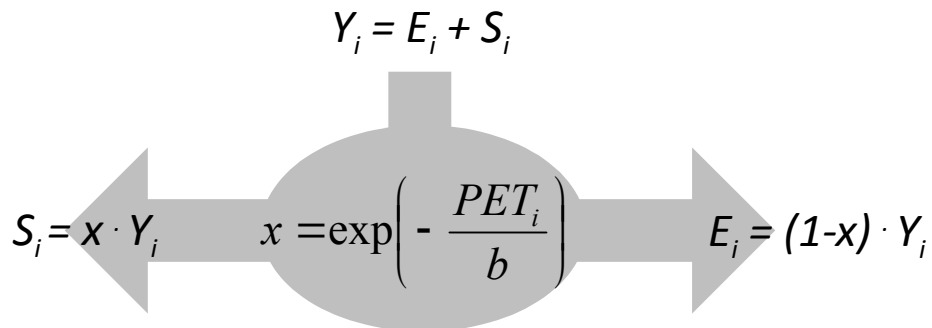
Die Summe aus beiden heiße  $Y_i = S_i + ET_i$



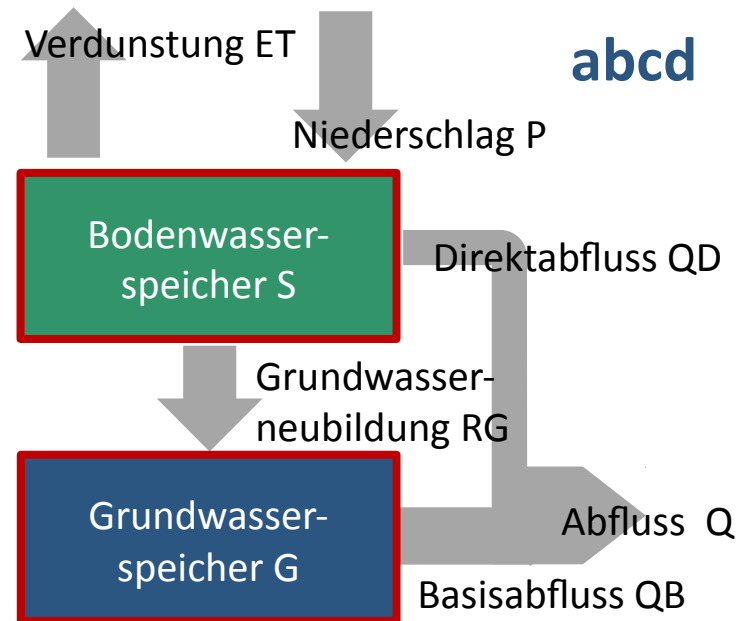
## Idee #2

**Aufteilung von  $Y_i$  zwischen Verdunstung  $E_i$  und Boden  $S_i$  hängt ab von**

- der Potenziellen Verdunstung  $PET$  und
- der Speicherfähigkeit des Bodens ( $b$ )



Vergegenwärtige Dir das Verhalten der Aufteilung auf  $E_i$  und  $S_i$  durch Betrachtung der Grenzfälle  $PET \rightarrow 0$ ,  $PET \rightarrow \infty$ ,  $b \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow \infty$ .

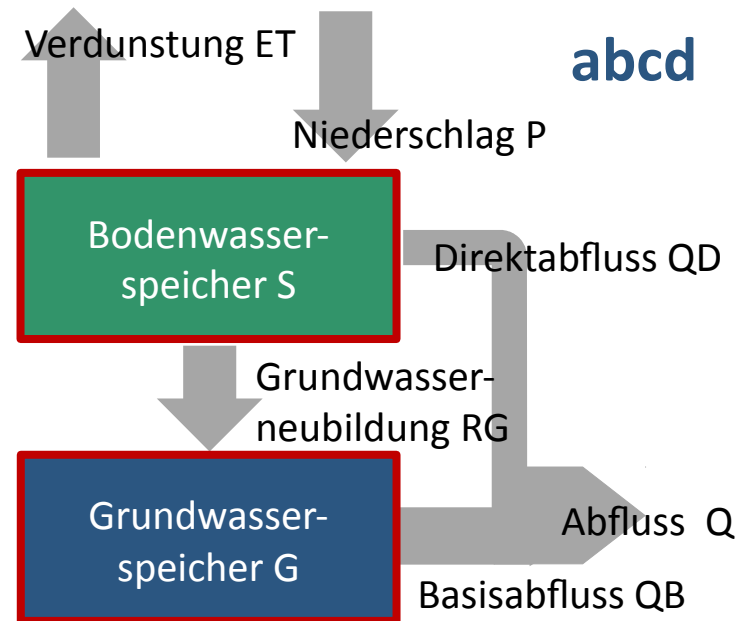
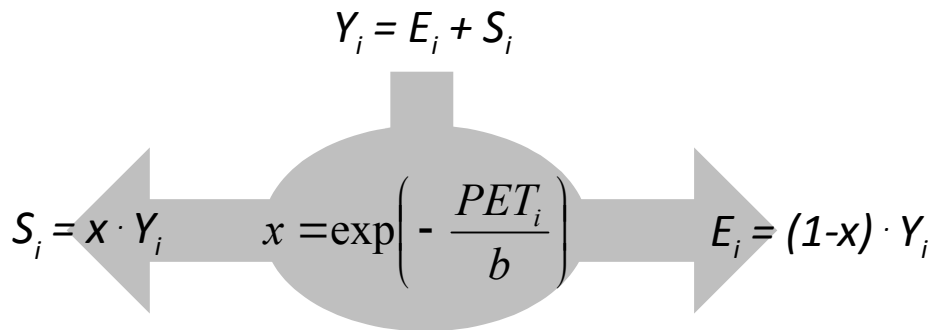




## Idee #2

**Aufteilung von  $Y_i$  zwischen Verdunstung  $E_i$  und Boden  $S_i$  hängt ab von**

- der Potenziellen Verdunstung  $PET$  und
- der Speicherkapazität des Bodens ( $b$ )



Herleitung von  $x$  aus folgender Proportionalität und der Lösung der entsprechenden DGL

$$\frac{dS}{dt} = -PET_i \frac{S}{b} \Rightarrow \int_i^S \frac{dS}{S} = \int_1^i -PET_i \frac{1}{b} dt \quad (\text{s. Thomas (1981), S. 25})$$

## Ideen #3 und #4

### Aufteilung des Überschusses $W_i - Y_i$

Der Überschuss  $W_i - Y_i$  wird in Direktabfluss  $RD_i$  und GW-Neubildung  $RG_i$  mittels  $c$  aufgeteilt:

$$RD_i = (1 - c) \cdot (Y_i - W_i)$$

$$RG_i = c \cdot (Y_i - W_i)$$

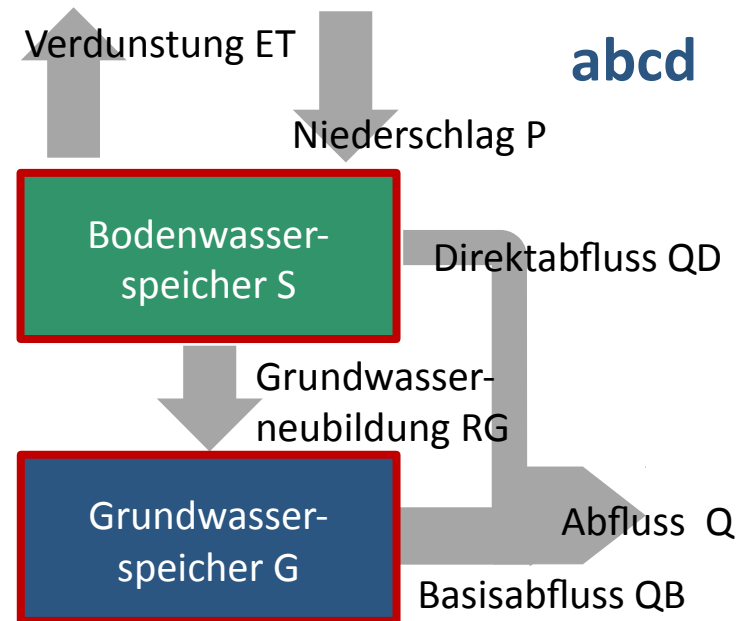
### Basisabfluss und Grundwasserspeicher

Der Basisabfluss  $RB_i$  ist proportional zum Grundwasserspeicher  $G_i$ .

$$RB_i = d \cdot G_i$$

Der neue Grundwasserspeicher  $G_i$  ergibt sich aus der Bilanzierung von  $G_{i-1}$ ,  $RG_i$  und  $RB_i$ .

$$\Rightarrow G_i = G_{i-1} + RG_i - RB_i = G_{i-1} - c \cdot (W_i - Y_i) - d \cdot G_i \Rightarrow G_i = \frac{G_{i-1} - c \cdot (W_i - Y_i)}{1 + d}$$



## Überblick über die Wasserbilanz eines Monats

0. Argumente:  $P_i$ ,  $PET_i$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$

1a. Berechne  $W_i$  gemäß  $W_i = S_{i-1} + P_i$

1b. Berechne  $Y_i(W_i)$

$$Y_i(W_i) = \frac{W_i + b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{W_i + b}{2a}\right)^2 - \frac{bW_i}{a}}$$

2. Berechne Bodenfeuchte  $S_i$  und Verdunstung  $ET_i$

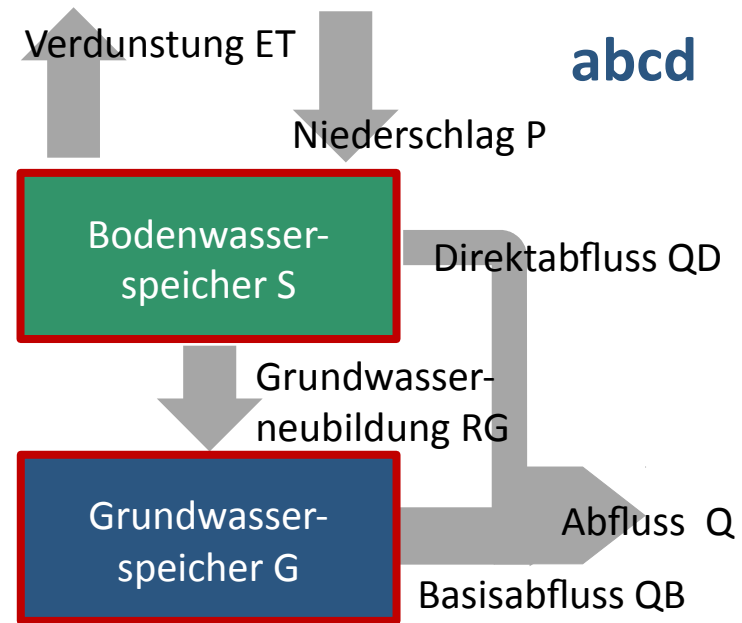
$$S_i = Y_i \cdot \exp\left(-\frac{PET_i}{b}\right), \quad E_i = Y_i \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{PET_i}{b}\right)\right)$$

3. Berechne Direktabfluss  $RD_i$  und GW-Neubildung  $RG_i$

$$RD_i = (1 - c)(Y_i - W_i) \quad RG_i = c(Y_i - W_i)$$

4. Berechne Gesamtabfluss  $Q_i$  und Grundwasserspeicher  $G_i$

$$Q_i = RD_i + RB_i = RD_i + dG_i \quad G_i = G_{i-1} + RG_i - d \cdot G_i \Rightarrow G_i = \frac{G_{i-1} + RG_i}{1 + d}$$



Wie lassen sich die Parameter  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  physikalisch interpretieren? Welche Einheiten haben sie?

## Überblick über die Wasserbilanz eines Monats

0. Argumente:  $P_i$ ,  $PET_i$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$

1a. Berechne  $W_i$  gemäß  $W_i = S_{i-1} + P_i$

1b. Berechne  $Y_i(W_i)$

$$Y_i(W_i) = \frac{W_i + b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{W_i + b}{2a}\right)^2 - \frac{bW_i}{a}}$$

2. Berechne Bodenfeuchte  $S_i$  und Verdunstung  $ET_i$

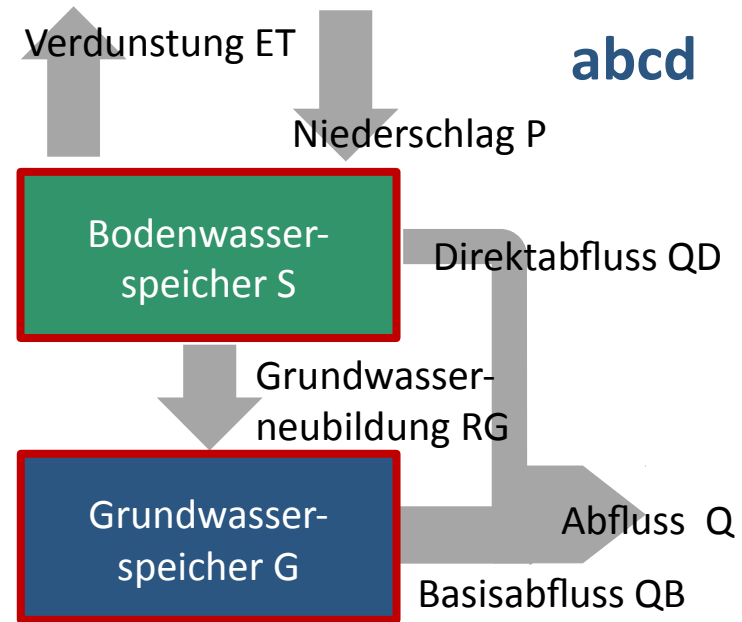
$$S_i = Y_i \cdot \exp\left(-\frac{PET_i}{b}\right), \quad E_i = Y_i \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{PET_i}{b}\right)\right)$$

3. Berechne Direktabfluss  $RD_i$  und GW-Neubildung  $RG_i$

$$RD_i = (1 - c)(Y_i - W_i) \quad RG_i = c(Y_i - W_i)$$

4. Berechne Gesamtabfluss  $Q_i$  und Grundwasserspeicher  $G_i$

$$Q_i = RD_i + RG_i = (1 - c)(Y_i - W_i) + dG_i \quad G_i = \frac{G_{i-1} + c(W_i - Y_i)}{1 + d}$$



Bearbeite die Aufgaben zum *abcd*-Modell in R (Datei *abcd.R*).