



Definitionsmenge „Geben Sie die Definitionsmenge an“

- 1) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow$ Zum Lösen: Nenner = 0 setzen
 \Rightarrow Das Ergebnis ist aus der Def.menge ausgeschlossen
- 2) $f(x) = \sqrt{x}$ $\Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow$ Zum Lösen: Radikand ≥ 0 setzen (oder = 0 und Zahlenstrahl)
 \Rightarrow Das Ergebnis ist die Def.menge (mit Zahlenstrahl: Testwert einsetzen)
- 3) $f(x) = \ln(x)$ $\Rightarrow x > 0 \Rightarrow$ Zum Lösen: Innere Funktion des $\ln > 0$ setzen (oder = 0 und Zahlenstrahl)
 \Rightarrow Das Ergebnis ist die Def.menge (mit Zahlenstrahl: Testwert einsetzen)

Symmetrie „Geben Sie das Symmetrieverhalten der Funktion an“

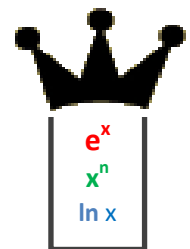
- $-x$ in $f(x)$ einsetzen, also $f(-x)$ berechnen
- Umformen, so dass möglichst wieder genau $f(x)$ entsteht
- Falls $f(-x) = f(x)$ \Rightarrow Achsensymm. (bei ganzrat. Fkt. immer, wenn nur gerade Exponenten)
- Falls $f(-x) = -f(x)$ \Rightarrow Punktsymm. (bei ganzrat. Fkt. immer, wenn nur ungerade Exponenten)
- Falls $f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$ \Rightarrow keine Symm. (bei ganzrat. Fkt. immer, wenn gemischte Exponenten)

Nullstellen & Y_s „Berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen“

- Nullstellen bedeutet: $y = 0$
 - $f(x) = 0$ setzen $\Rightarrow x$ berechnen
 - Tipp: Bei gebrochen-rationalen Funktionen ist für die Nullstellen nur der Zähler relevant
- y -Achsen-Schnittpunkt Y_s bedeutet: $x = 0$
 - 0 in $f(x)$ einsetzen $\Rightarrow y = f(0)$ berechnen

Grenzwerte „Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs“

- Def.menge betrachten und die Ränder herauslesen ($-\infty$ und $+\infty$ sind auch Ränder, außerdem die Definitionslücken). x gegen diese Werte gehen lassen:
- $x \rightarrow \pm\infty$: Grenzwerte im ∞ berechnen durch Zähler- & Nennergrad (alternativ: Einsetzen von $\pm\infty$)
 - ZG < NG x -Achse ist waagr. Asymptote, Gleichung: $y = 0$
 - ZG = NG \Rightarrow Verschobene waagr. Asymptote, abzulesen aus den Koeffizienten vor den x mit der höchsten Potenz
 - ZG = NG + 1 \Rightarrow Schräge Asymptote $y = mx + t$ (über Polynomdivision¹)
- Beim Einsetzen von ∞ beachten: e^x stärker x^n stärker $\ln x$ (siehe Krone rechts)
- $x \rightarrow$ Definitionslücke: Grenzwerte an einer Def.lücke berechnen durch Einsetzen von Näherungswerten (z.B. 3,001 für $x \rightarrow 3^+$ und 2,999 für $x \rightarrow 3^-$)
- Falls die Def.lücke gleichzeitig Zählernullstelle ist \Rightarrow Behebbarer Def.lücke \Rightarrow Loch



Umkehrfunktion

„Geben Sie an, ob die Funktion $f(x)$ umkehrbar ist. Berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.“

- Eine Funktion ist umkehrbar, wenn Sie in ganz D str. mon. fallend oder str. mon. steigend ist
 - Es dürfen in D keine Hoch-/Tiefpunkte existieren, da $f(x)$ sonst steigend und fallend wäre
 - Zur Überprüfung: $f'(x) = 0$ setzen etc.
- Berechnung von $f^{-1}(x)$: x und y vertauschen, nach y auflösen
- Def.menge und Wertemenge: Werden vertauscht: $D_{f^{-1}} = W_f$, $W_{f^{-1}} = D_f$

Stammfunktion

a) „Zeigen Sie, dass $F(x)$ eine Stammfkt. von $f(x)$ ist.“ b) „Geben Sie die Stammfkt. an, die durch $P(2/4)$ verläuft.“

- a) $F(x)$ ableiten und so umformen, dass $f(x)$ entsteht
- b) Punkt P in die Stammfunktion einsetzen und dadurch die Konstante c bestimmen

¹ Polynomdivision: Eine Nullstelle des Terms erraten (durch Einsetzen ganzzahliger Teiler der letzten Zahl des Terms). Dann mit $(x - x_0)$ die Polynomdivision durchführen. Es bleibt ein Rest. Diesen auch notieren und durch $(x - x_0)$ teilen. Der Teil davor ist die schräge Asymptote – in der Form $y = mx + t$



Extrema & Monotonieverhalten

„Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte“ bzw. „Untersuchen Sie das Monotonieverhalten“

- $f'(x)$ berechnen und $f'(x) = 0$ setzen
- Ergebnis sind die x-Werte der Extrempunkte (x_E) (z.B. $x_1 = -3$; $x_2 = 3$)
- Diese x_E in die erste Zeile der Monotonietabelle einsetzen
- Für die Spalten links und rechts von jedem x_E passende Testwerte verwenden (z.B. -5; 0; 5)
- Diese Testwerte in $f'(x)$ einsetzen und lediglich berechnen, ob das Ergebnis + oder - ist
- + oder - in die Tabelle unterhalb der Testwerte eintragen, 0 unterhalb der x_E eintragen
- Pfeile eintragen: \nearrow für streng monoton steigend, \searrow für streng monoton fallend
- Ergebnis: \nearrow HOP \searrow oder \searrow TIP \nearrow oder \nearrow TEP \searrow oder \searrow TEP \searrow
- Die zugehörigen y-Werte der Extrempunkte (y_E) berechnen
 \Rightarrow durch Einsetzen von x_E in die Originalfunktion $f(x)$
- Die Ergebnisse entsprechend als HOP(x_E/y_E), TIP(x_E/y_E), TEP(x_E/y_E) notieren, z.B. HOP(-3/2)

Alternativ zur Monotonietabelle

- Zusätzlich $f''(x)$ berechnen
- Die oben berechneten x-Werte x_E in $f''(x)$ einsetzen
 - Falls $f''(x_E) > 0$ \Rightarrow TIP
 - Falls $f''(x_E) < 0$ \Rightarrow HOP
 - Falls $f''(x_E) = 0$ \Rightarrow TEP

Wendepunkte, Krümmung & Wendetangente

„Finden Sie den Wendepkt.“ „Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_f “ „Bestimmen Sie die Wendetangente“

- $f''(x)$ berechnen und $f''(x) = 0$ setzen
- Ergebnis sind die x-Werte der Wendepunkte (x_W) (z.B. $x_W = 0$)
- Diese x_W in die Krümmungstabelle einsetzen
- Für die Spalten links und rechts von jedem x_W passende Testwerte verwenden (z.B. 2 und -2)
- Diese Testwerte in $f''(x)$ einsetzen und lediglich berechnen, ob das Ergebnis + oder - ist
- + oder - in die Tabelle unterhalb der Testwerte eintragen, 0 unterhalb der x_E eintragen
- Smilies eintragen: \odot für + (positiv), \ominus für - (negativ)
- Am Mund der Smilies die Krümmung ablesen: \odot = links-gekrümmt, \ominus = rechts-gekrümmt

x	$x < 0$ (-2)	$x_W = 0$	$x > 0$ (2)
$f''(x)$	+	0	-
	\odot	WP	\ominus
Krümmung	links	-	rechts

- Die zugehörigen y-Werte der Wendepunkte (y_W) berechnen
 \Rightarrow durch Einsetzen von x_W in die Originalfunktion $f(x)$
- Die Ergebnisse entsprechend als WP(x_W/y_W) notieren

Wendetangente: $y = mx + t$

- Bestimmung von m: x-Wert des WPs (x_W) in $f'(x)$ einsetzen: $m = f'(x_W)$
- Bestimmung von t: $y = mx + t$ nach t auflösen: $t = y - mx$
- x, y und m in t einsetzen
- Komplette Gleichung der Wendetangente notieren: m und t einsetzen (Bsp. WT: $y = 2x + 4$)