Formelsammlung Kinematik und Kinetik von Robotern / Roboterdynamik

Mathematische Grundlagen

Betrag eines Vektors

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Skalarprodukt:

$$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = |\boldsymbol{u}_1| \cdot |\boldsymbol{u}_2| \cdot \cos\varphi = u_{1x} \cdot u_{2x} + u_{1y} \cdot u_{2y} + u_{1z} \cdot u_{2z}$$

Kreuzprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation:

$$A \cdot B := (c_{ij})_{i=1\ldots l,\ j=1\ldots n} \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Mit der Rotationsmatrix ${}^{k}_{0}A$ kann der Vektor $v_{s,k}^{(k)}$ in die Darstellung im Koordinatensystem K_0 überführt werden

$$v_{s,k}^{(0)} = {}^{k}_{0}A \cdot v_{s,k}^{(k)}$$

Die Rotationsmatrix ${}^{k}_{0}A$ kann gebildet werden indem man zunächst die Basisvektoren von K_k in K_0 darstellt

Die Rotationsmatrix ${}^{k}_{0}A$ ist die Zusammenfassung dieser Vektoren zu einer Matrix

$${}^{k}_{0}A = \begin{pmatrix} x_k^{(o)} & y_k^{(o)} & z_k^{(o)} \end{pmatrix}$$

Allgemein:
Wenn ein freier Vektor im Koordinatensystem k gegeben ist, kann er in ein Koordinatensystem i überführt werden, wenn er mit der Rotationsmatrix ${}^{k}_{i}A$ multipliziert wird

$$a^{(i)} = \left(x_k^{(i)}, y_k^{(i)}, z_k^{(i)}\right) \cdot a^{(k)} = {}^{k}_{i}A \cdot a^{(k)}$$

Ist ein Vektor im Koordinatensystem i gegeben, muss dieser mit der Inversen von ${}^{k}_{i}A$ multipliziert werden um nach $a^{(k)}$ aufzulösen

$$a^{(k)} = \left[{}^{k}_{i}A\right]^{-1} \cdot a^{(i)} = \left[{}^{k}_{i}A\right]^{T} \cdot a^{(i)}$$

Bei Rotationsmatrizen ist die Inverse gleich der transponierten Matrix

Man kann aber auch die Rotationsmatrix über die Darstellung der Basiskoordinaten von i im Koordinatensystem k erhalten

$$= {}^{i}_{k}A \cdot a^{(i)} = \left(x_i^{(k)}, y_i^{(k)}, z_i^{(k)}\right) \cdot a^{(i)}$$

Mit homogenen Matrizen (Frames) lassen sich auch Ortsvektoren in die Darstellung des jeweils anderen KS überführen:

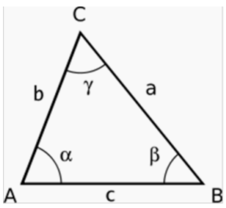
$$a^{(i)} = {}^{k}_{i}T * a^{(k)} \qquad {}^{k}_{i}T = \begin{pmatrix} x_k^{(i)} & y_k^{(i)} & z_k^{(i)} & p_{ik}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma$$

Entsprechend gilt für die anderen Winkel:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos\beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha$$



z-y-z Eulerwinkel

Ist die Rotationsmatrix R bekannt lassen sich die Winkel wie folgt berechnen:

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$$

$$\beta = \arccos(R_{33}), \quad \text{für } 0 < \beta < \pi \Rightarrow$$

$$\alpha = \arctan 2(R_{23}, R_{13}), \ \chi = \arctan 2(R_{32}, -R_{31})$$

$$\text{für } \beta = 0, \pi \Rightarrow \alpha = 0, \ \chi = \arctan 2(R_{21}, R_{11})$$

$$\operatorname{atan2}(y, x) := \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0, \ y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0, \ y < 0 \\ +\pi/2 & \text{für } x = 0, \ y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0, \ y < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0, \ y = 0 \end{cases}$$

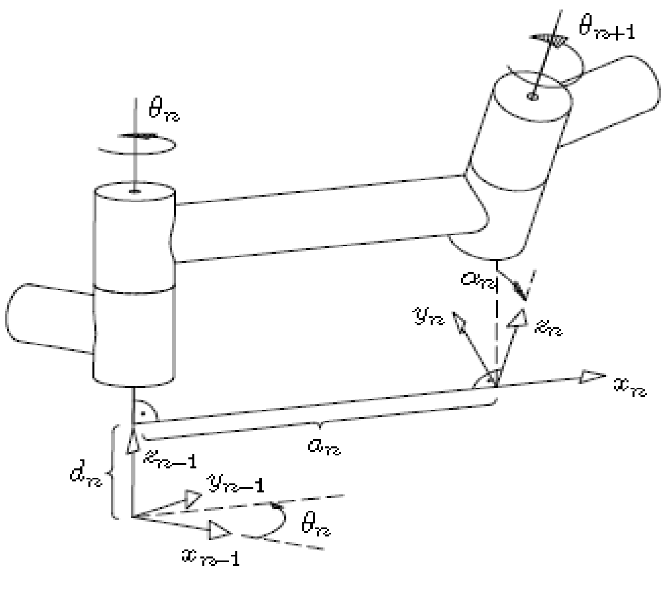
z-y-x Eulerwinkel

$$A = arctan2(R_{21}, R_{11}) \quad B = arcsin\,(-R_{31}) \quad C = arctan2\,(R_{32,}R_{33})$$

Denavit-Hartenberg Konvention

Denavit-Hartenberg-Parameterliste:

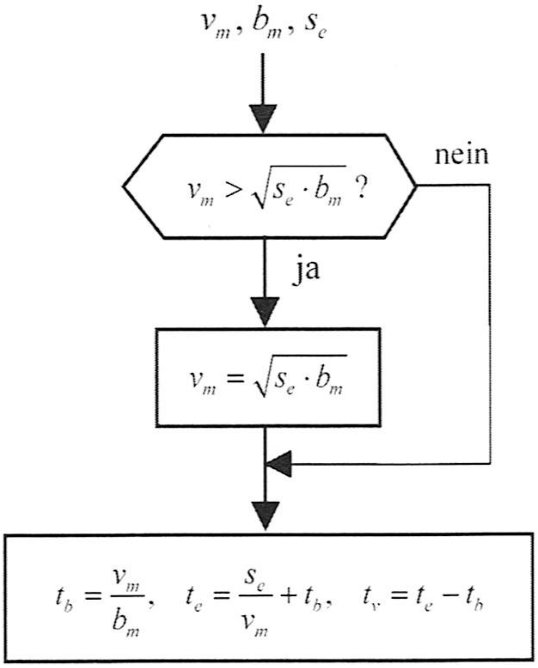
Gelenk n	Θ_n	d_n	a_n	α_n



Denavit-Hartenberg-Transformationsmatrix

$$ {}^{i}_{i-1}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_i^{(i-1)} & \boldsymbol{y}_i^{(i-1)} & \boldsymbol{z}_i^{(i-1)} & \boldsymbol{p}_{i-1,i}^{(i-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cos\alpha_i & \sin\theta_i \sin\alpha_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \sin\alpha_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PTP Bahn – Rampenprofil



Gesamtstrecke s_e $\quad s_e = |q_Z - q_{St}|$

Beschleunigungszeit t_b $\quad t_b = \frac{v_m}{b_m}$

Verfahrzeit Ende t_e $\quad t_e = \frac{s_e}{v_m} + t_b,$

Verzögerungsbeginn t_v $\quad t_v = t_e - t_b$

Beschleunigungsphase:

$$0 \le t \le t_b: \ddot{s}(t) = b_m, \quad \dot{s}(t) = b_m \cdot t, \quad s(t) = \frac{1}{2} \cdot b_m \cdot t^2$$

Phase mit gleichförmiger Geschwindigkeit

$$t_b \le t \le t_v: \ddot{s}(t) = 0, \quad \dot{s}(t) = v_m, \quad s(t) = v_m \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_m^2}{b_m}$$

Bremsphase

$$t_v \le t \le t_e: \ddot{s}(t) = -b_m, \quad \dot{s}(t) = v_m - b_m \cdot (t - t_v) = b_m \cdot (t_e - t)$$

$$s(t) = v_m \cdot t_v - \frac{b_m}{2}(t_e - t)^2$$

Mit der Signumfunktion (Vorzeichen!) wird dann aus dem Bahnparameter und dessen Ableitungen die Gelenkgrößen Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung ermittelt

$$\ddot{q}_S(t) = \operatorname{sgn}(q_Z - q_{St}) \cdot \ddot{s}(t)$$

$$\dot{q}_S(t) = \operatorname{sgn}(q_Z - q_{St}) \cdot \dot{s}(t)$$

$$q_S(t) = q_{St} + \operatorname{sgn}(q_Z - q_{St}) \cdot s(t)$$

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Spline Interpolation

PTP:

$$s(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3,$$

$$\dot{s}(t) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot t + 3 \cdot a_3 \cdot t^2,$$

$$\ddot{s}(t) = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot t$$

$a_0=0$, $a_1=v_0$

$$a_2 = \frac{3 \cdot s_e}{t_e^2} - \frac{(v_e + 2 \cdot v_0)}{t_e}$$

$$a_3 = -\frac{2 \cdot s_e}{t_e^3} + \frac{(v_0 + v_e)}{t_e^2}$$

CP

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 \cdot t + \boldsymbol{a}_2 \cdot t^2 + \boldsymbol{a}_3 \cdot t^3,$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t) = \boldsymbol{a}_1 + 2 \cdot \boldsymbol{a}_2 \cdot t + 3 \cdot \boldsymbol{a}_3 \cdot t^2,$$

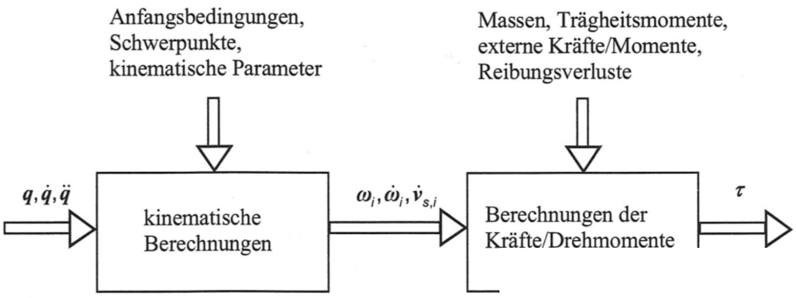
$$\ddot{\boldsymbol{p}}(t) = 2 \cdot \boldsymbol{a}_2 + 6 \cdot \boldsymbol{a}_3 \cdot t$$

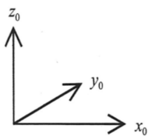
$\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{p}_{St}$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{v}_0$

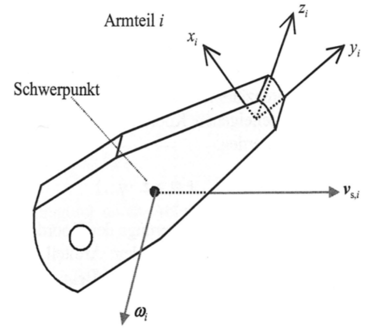
$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{3 \cdot (\boldsymbol{p}_Z - \boldsymbol{p}_{St})}{t_e^2} - \frac{(\boldsymbol{v}_e + 2 \cdot \boldsymbol{v}_0)}{t_e}$$

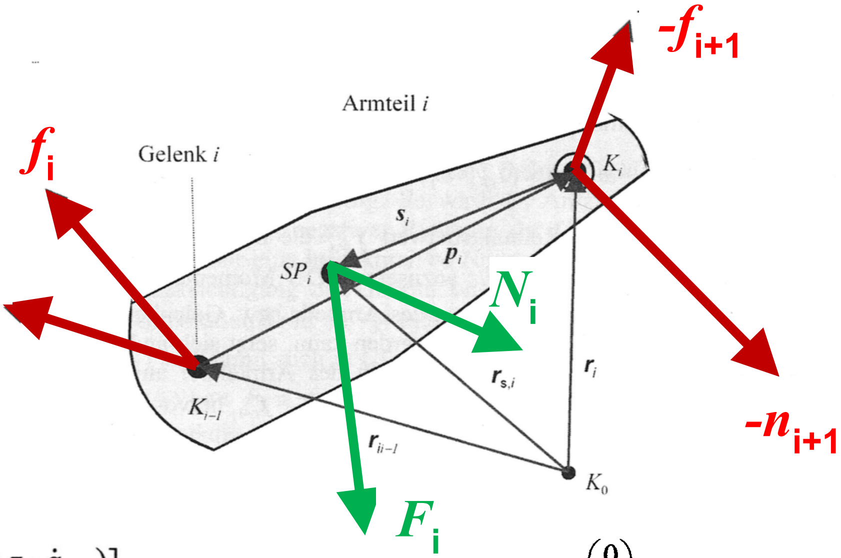
$$\boldsymbol{a}_3 = -\frac{2}{t_e^3} \cdot (\boldsymbol{p}_Z - \boldsymbol{p}_{St}) + \frac{(\boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_0)}{t_e^2}$$

Rekursives Newton-Euler Verfahren









Rotationsgelenk: h=1

Translationsgelenk: h=0

Start mit i=0

$$z_i = z_i^{(i)} = z_k = z_k^{(k)} = z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, i, k \text{ beliebig}$$

$$\omega_{i+1} = {}_{i+1}^{\;\;i}A(\omega_i + h_{i+1} \cdot z_i \cdot \dot{q}_{i+1})$$

$$\dot{\omega}_{i+1} = {}_{i+1}^{\;\;i}A[\dot{\omega}_i + h_{i+1} \cdot (z \cdot \ddot{q}_{i+1} + \omega_i \times z \cdot \dot{q}_{i+1})],$$

$$v_{i+1} = {}_{i+1}^{\;\;i}A \cdot v_i + (1 - h_{i+1}) \cdot \frac{\mathrm{d}^{(i+1)}}{\mathrm{d}t} p_{i+1} + \omega_{i+1} \times p_{i+1},$$

$$\dot{v}_{i+1} = {}_{i+1}^{\;\;i}A \cdot \dot{v}_i + \dot{\omega}_{i+1} \times p_{i+1} + \omega_{i+1} \times (\omega_{i+1} \times p_{i+1}) + \\ + (1 - h_{i+1}) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^{2,(i+1)}}{\mathrm{d}t^2} p_{i+1} + 2 \cdot \omega_{i+1} \times \frac{\mathrm{d}^{(i+1)}}{\mathrm{d}t} p_{i+1} \right),$$

$$v_{s,i+1} = v_{i+1} + \omega_{i+1} \times s_{i+1},$$

$$\dot{v}_{s,i+1} = \dot{v}_{i+1} + \dot{\omega}_{i+1} \times s_{i+1} + \omega_{i+1} \times (\omega_{i+1} \times s_{i+1}),$$

Müssen für die Berechnung von Kräften und Momenten nicht unbedingt berechnet werden

Zweite Ableitung des Vektors p_{i+1} im K_{i+1} – entspricht bei Schubachsen $\ddot{q}_{i+1} * {}_{i+1}^{\;\;i}A * \vec{z}_i$ bzw. $\ddot{d}_{i+1} * {}_{i+1}^{\;\;i}A * \vec{z}_i$

Start mit i=n

$$F_i = m_i \cdot \dot{v}_{s,i} + (1 - h_i) \cdot \hat{F}_{D,i} \, {}_{\;i}^{i-1}A \cdot z \cdot \dot{q}_i,$$

$$N_i = I_{\mathrm{SP},i} \cdot \dot{\omega}_i + \omega_i \times (I_{\mathrm{SP},i} \cdot \omega_i) + h_i \cdot F_{D,i} \cdot {}_{\;i}^{i-1}A \cdot z \cdot \dot{q}_i,$$

$$f_i = {}_{\;i}^{i+1}A \cdot f_{i+1} + F_i,$$

$$n_i = {}_{\;i}^{i+1}A \cdot [n_{i+1} + ({}_{i+1}^{\;\;i}A \cdot p_i) \times f_{i+1}] + (p_i + s_i) \times F_i + N_i,$$

$$\tau_i = [h_i \cdot n_i^T + (1 - h_i) \cdot f_i^T] \cdot {}_{\;i}^{i-1}A \cdot z,$$

$$\text{Anfangsbedingungen: } f_{n+1}, n_{n+1}$$

Gewichtskräfte werden über eine angenommene Beschleunigung der Basis entgegen der Richtung der Erdbeschleunigung berücksichtigt.