

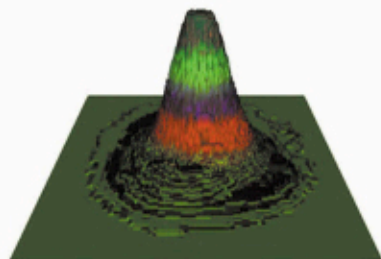
# 计算超声学

## —— 声场分析及应用

丁 辉/著

**Computational Ultrasonics**

—— Analysis and Application of Ultrasonic Field



科学出版社

[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

# 计 算 超 声 学

## ——声场分析及应用

Computational Ultrasonics

——Analysis and Application of Ultrasonic Field

丁 辉 著

科 学 出 版 社

北 京

## 内 容 简 介

本书主要研究声场问题数学上的处理,重点介绍了探头发射声场的建模与应用、声波在各向异性介质中的传播、缺陷与声波的相互作用及散射回波的计算与应用等计算超声学基础,同时介绍了表面波和相控阵、导波、TOFD、检测可靠性评价等新技术中的超声计算与应用。本书内容上侧重声场的分析与应用,方法上着重使用近似且简单的方法,列举了一些无损检测中经常遇到的实际问题的解决实例。本书附录还提供了8个涉及主要声场计算方法和应用的计算程序,方便大家掌握和使用。

本书可供无损检测及相关专业研究生、科研人员在学习和研究时使用,也可作为从事无损检测的技术人员的培训或辅助教材。

### 图书在版编目(CIP)数据

计算超声学:声场分析及应用=Computational Ultrasonics: Analysis and Application of Ultrasonic Field/丁辉著. —北京:科学出版社,2010.6  
ISBN 978-7-03-027937-8

I. ①计… II. ①丁… III. ①超声检测 IV. ①TB553

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 110651 号

责任编辑:王志欣 吴凡洁 / 责任校对:刘小梅  
责任印制:赵 博 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2010年6月第一版 开本:B5(720×1000)

2010年6月第一次印刷 印张:18 3/4

印数:1—3 000 字数:370 000

定价:66.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换(科印))

# 前 言

## ——波行天下 必寻其踪

我自 1978 年步入材料与检测专业至今已三十余年。春华秋实,学生已独挑大梁,多有建树。通过年复一年的教学科研积累,感觉对一些专业领域知识已吃透并能熟练掌握和应用,但也有一些一直缠绕心头的疑惑和困扰,最突出的一例就是作为常规无损检测之首的超声检测声场及缺陷回波信号的判定。目前,即便是最专业的检验人员也是凭经验在做评定,面对复杂的检测系统,往往无能为力。与检测界的同行们交流时,大家也都认识到超声检测技术发展的关键是解决超声波在工件中的“踪迹”问题,“寻踪”已成为超声检测理论和应用研究的一个共性问题。

2003 年,在和中国广东核电集团束国刚先生探讨核电站关键部件超声检测时,我们共同认识到,要提高超声检测的可靠性,必须把握声场在工件中的传播及声场与缺陷相互作用的规律,建立超声声场及回波信号与工件结构、材质、缺陷类型、位置、尺寸、取向的定量关系。其后,双方抱着“波行天下,必寻其踪”的信心和决心,共同开展计算超声学的研究,开始了艰难的“寻踪”旅程。现在回头看,不仅达成了预期的目标,成果也应用到核电等其他领域。本书的内容主要来源于以上的工作。

一门技术成熟或上升到科学的最基本、最显著的标志是其进入了误差很小的定量化阶段。计算超声学的形成和应用,极大丰富了超声波检测技术的理论与应用基础,将其提升为一门有坚实的科学理论支撑的实用技术,成为独立于声学、材料学、计算机科学之外的一个新的科学分支。

计算超声学主要研究声场问题数学上的处理,基于定量化和数字化的超声声场计算与分析模拟是其核心内容,实用化的超声声场计算软件开发是工作重点。计算超声学的生命力在于众多的无损检测工作者能够掌握与应用,成为解决众多工程实际问题的重要手段,而不是让他们望而生畏的象牙塔,只被少数理论研究者读懂和使用。故本书的编写力求在开展计算超声学理论基础研究的同时,侧重声场的分析与应用,着重介绍近似且简单的方法,同时列举了一些无损检测中经常遇到的实际问题的解决实例。本书附录还提供了 8 个涉及主要声场计算方法和应用的计算程序,方便大家掌握和使用。

本书共分 13 章,第 1 章为绪论。第 2~4 章是计算超声学的基础,第 2 章介绍了探头发射声场的建模与应用;第 3 章介绍了声波在各向异性介质中的传播;第 4

章介绍了缺陷与声波的相互作用,重点是缺陷散射回波的计算与应用。第5~8章分别介绍了计算超声学在表面波和相控阵、导波、TOFD等新技术中的建模与应用。第9、10章介绍了生物组织的超声传播特性与建模及超声成像算法,生物组织的很多特性都与工业超声检测中的检测对象相似,超声成像也比工业检测应用广泛,因此,希望将医学超声建模和成像的研究成果引入到工业超声检测中。第11章介绍了国外计算超声学的发展及计算超声软件的应用。第12章介绍了计算超声学与虚拟现实技术的结合——超声虚拟检测平台的开发。第13章重点介绍了将可靠性引入无损检测领域,利用超声计算进行可靠性评价的方法与应用。

本书的编写,特别要感谢张俊博士和张益成博士,他们几年来在计算超声领域的艰苦探索构成了本书的主要内容,书中每一个公式和编程都凝聚了他们的智慧与汗水,每一个计算和图表也出自他们之手。同时要感谢武汉大学(原武汉水利电力大学)无损检测学科的开拓者们和正在从事无损检测工作的各届校友们,他们支撑了中国无损检测事业的一大片天空,也是我工作的坚强后盾。还要感谢中国广东核电集团检测公司的李明先生,他为计算超声学的应用给予了大量的支持和帮助。

作 者

2010年4月于武昌珞珈山

# 目 录

## 前言

第 1 章 绪论	1
1.1 背景	1
1.2 方法	2
1.2.1 解析法	2
1.2.2 数值法	4
1.2.3 半解析法	6
1.3 发展前景	7
第 2 章 探头的发射声场	10
2.1 声场基本方程	10
2.1.1 固体介质的波动方程	10
2.1.2 流体介质的波动方程	11
2.1.3 声束在界面处的透射和反射	11
2.2 角谱法	13
2.2.1 角谱法计算液体中的声场	14
2.2.2 角谱法计算液固界面透射声场	15
2.2.3 应用实例	16
2.3 瑞利积分法	18
2.3.1 瑞利积分一般公式	19
2.3.2 Pencil 法	20
2.3.3 瑞利积分法计算界面透射声场	22
2.3.4 应用实例	22
2.4 多元高斯叠加法	23
2.4.1 近轴方程	24
2.4.2 单高斯声束的传播	24
2.4.3 多元高斯声束叠加计算探头发射声场	27
2.4.4 应用实例	29
2.5 离散点源法	30
2.5.1 DPSM 的基本理论	30
2.5.2 应用实例	32

2.6 弹性动力学有限积分法	33
2.6.1 EFIT 一般公式	33
2.6.2 非均质介质的网格离散	34
2.6.3 应用实例	36
2.7 有限差分法	38
2.7.1 差分格式	38
2.7.2 固体声场方程的差分展开	38
2.7.3 应用实例	40
2.8 有限元法	41
2.8.1 有限元方程与求解	41
2.8.2 应用实例	43
<b>第3章 各向异性介质中超声波的传播</b>	<b>46</b>
3.1 各向异性介质	46
3.2 多元高斯声束叠加法	50
3.2.1 均质各向异性介质	50
3.2.2 多层各向异性介质	54
3.3 瑞利积分法	56
3.4 射线追踪法	57
3.4.1 步进追踪	57
3.4.2 计算实例	59
3.5 有限差分法	61
<b>第4章 缺陷与结构散射声场</b>	<b>64</b>
4.1 规则体的散射	64
4.1.1 空心圆柱散射	64
4.1.2 球形体散射	65
4.1.3 平面边缘衍射	68
4.2 基于近似理论的散射模型	70
4.2.1 基尔霍夫近似	70
4.2.2 波恩近似	73
4.3 散射问题的数值解	79
4.3.1 有限差分法	79
4.3.2 有限元法	82
4.3.3 边界元法	85
4.3.4 弹性有限积分法	88

<b>第 5 章 超声表面波检测</b> .....	93
5.1 表面波的振动与激发 .....	93
5.1.1 表面波的振动方程 .....	93
5.1.2 表面波的激发源 .....	95
5.2 半解析法 .....	96
5.3 表面波的数值解 .....	98
5.3.1 有限差分法 .....	98
5.3.2 有限元法 .....	100
<b>第 6 章 超声导波</b> .....	102
6.1 频散方程 .....	102
6.1.1 板导波 .....	102
6.1.2 管导波 .....	105
6.1.3 各向异性介质中的导波 .....	107
6.2 模态分解法 .....	109
6.3 有限元法 .....	115
6.3.1 板导波 .....	115
6.3.2 管导波 .....	119
6.3.3 复杂结构导波 .....	123
6.4 边界元法 .....	125
6.4.1 边界元法和简正模态展开法混合模型 .....	125
6.4.2 应用实例 .....	129
6.5 半解析有限元法 .....	132
6.5.1 SAFE 理论 .....	132
6.5.2 应用实例 .....	136
6.5.3 基于 SAFE 和互易原则的导波回波计算 .....	138
<b>第 7 章 超声衍射时差检测</b> .....	142
7.1 TOFD 检测原理 .....	142
7.2 GTD 理论 .....	143
7.2.1 衍射法则 .....	143
7.2.2 边缘衍射系数 .....	144
7.3 声线法 .....	147
7.4 半解析法 .....	152
7.4.1 背散射的简化 .....	152
7.4.2 衍射模型瞬态公式 .....	153
7.4.3 衍射与接收过程 .....	155
7.5 有限元法 .....	158



<b>第 8 章 超声相控阵</b> .....	162
8.1 超声相控延迟法则 .....	162
8.2 半解析法 .....	164
8.2.1 瑞利积分法 .....	164
8.2.2 高斯法 .....	165
8.3 数值法 .....	170
<b>第 9 章 生物组织中的超声传播</b> .....	172
9.1 生物组织声学特性 .....	172
9.2 生物组织解析法分析 .....	174
9.2.1 非均匀连续模型 .....	174
9.2.2 分离散射子模型 .....	177
9.2.3 分层介质模型 .....	179
9.3 骨骼的数值分析 .....	180
9.4 多普勒法 .....	182
<b>第 10 章 超声成像算法</b> .....	186
10.1 弹性成像算法.....	186
10.2 傅里叶成像算法.....	191
10.3 合成孔径算法.....	195
10.4 三维成像算法.....	198
<b>第 11 章 计算超声软件及应用</b> .....	204
11.1 CIVA .....	204
11.1.1 软件介绍 .....	204
11.1.2 应用情况 .....	206
11.2 Imagine3D .....	210
11.2.1 软件介绍 .....	210
11.2.2 应用情况 .....	211
11.3 simSUNDT .....	212
11.3.1 软件介绍 .....	212
11.3.2 应用情况 .....	215
11.4 Vitual NDE .....	216
11.4.1 软件介绍 .....	216
11.4.2 应用情况 .....	217
11.5 超声仿真的其他软件.....	218
11.5.1 UTSIM .....	218
11.5.2 Wave3000 Pro .....	219

第 12 章 基于实时计算的超声检测虚拟现实系统 .....	222
12.1 系统的框架与结构 .....	222
12.2 虚拟现实场景模块 .....	223
12.2.1 虚拟场景构建 .....	223
12.2.2 虚拟超声仪构建 .....	227
12.3 实时计算模块 .....	228
12.3.1 探头发射声场计算 .....	228
12.3.2 声场与缺陷相互作用 .....	229
12.3.3 回波声场计算 .....	231
12.4 系统的应用 .....	231
12.4.1 系统培训功能 .....	231
12.4.2 回波分析 .....	232
12.4.3 检测工艺验证 .....	234
第 13 章 无损检测可靠性分析 .....	237
13.1 可靠性概率统计模型 .....	237
13.1.1 hit/miss 型数据模型 .....	237
13.1.2 信号响应型数据模型 .....	238
13.1.3 95%置信下限 .....	240
13.2 可靠性模型的参数估计 .....	241
13.2.1 hit/miss 型数据模型的参数估计 .....	241
13.2.2 信号响应型数据模型的参数估计 .....	243
13.3 基于可靠性分析的检测工艺评定与优化 .....	246
13.3.1 基于数值模拟的现场工艺可靠性评定 .....	246
13.3.2 基于综合参数分析的 TOFD 检测工艺优化 .....	249
13.3.3 人员可靠性分析 .....	252
13.4 风险指引型在役检查 .....	255
13.4.1 计算公式 .....	255
13.4.2 数值算例 .....	257
附录 1 瑞利积分计算声场 .....	261
附录 2 高斯法计算声场 .....	264
附录 3 基尔霍夫系数 .....	270
附录 4 波恩系数 .....	273
附录 5 GTD 衍射系数 .....	277
附录 6 相控阵 .....	278
附录 7 信号响应模型计算程序 .....	282
附录 8 log-odds 模型计算程序 .....	287

# 第 1 章 绪 论

## 1.1 背 景

设计、材料、加工和检测构成了现代制造业的四大支柱,而可靠的无损检测技术为产品质量的提升及生产过程安全提供了有力保障,所以说一个国家的无损检测水平反映了该国的工业技术水平,现代工业是建立在无损检测基础上的。无损检测技术能为企业带来显著的经济效益,统计资料显示,经过无损检测后,普通机械产品有 5%~10% 的产品增值,电力、化工、国防、宇航和核能产品有 12%~18% 的产品增值,如德国奔驰汽车几千个零件经过无损检测后,整车运行公里数提高了一倍;日本汽车在 30% 零件采用无损检测后,质量迅速赶上美国。

伴随着改革开放 30 年我国经济的快速崛起,我国拥有了世界上最大的无损检测队伍和市场,目前,我国有 2000 多家无损检测机构,近 17 万无损检测人员,大专院校每年培养近千名无损检测专业的大专生、本科生和研究生;年无损检测仪器销售额超 10 亿元,年无损检测服务产值超 250 亿元。中国的现代化建设对先进的无损检测仪器、技术和服务有巨大的需求。我国的无损检测工作者肩负着重要的历史使命,无损检测事业也面临着前所未有的发展机遇。

超声检测是国内外应用最广泛、使用频率最高且发展较快的一种无损检测技术,与其他无损检测技术相比,它具有检测对象范围广,检测深度大,对裂纹类缺陷敏感、灵敏度高,成本低,使用方便,速度快,对人体无害以及便于现场使用等特点。目前,国外每年发表的约 3000 篇涉及无损检测的文献资料中,约有 45% 是有关超声无损检测的。

传统的超声波检测是以实践和经验为基础的一门技术,主要依靠检测人员根据回波信号凭经验进行缺陷评定。当被检工件的材质和结构复杂时,如压力容器的不规则表面、核电站的非均质各向异性奥氏体焊缝、飞机翼板的多层复合材料等,即使有经验的检测人员也会遇到缺陷识别和定量困难。

近年来,相控阵、导波、TOFD 等新技术的应用大大丰富了超声检测理论与应用领域,提高了检测效率。但面对复杂的检测系统,建立超声声场及回波信号与工件结构、材质、缺陷类型、位置、尺寸和取向的定量关系,对提高超声检测的定位、定性和定量的可靠性更显重要,可指导检测工艺的设计和辅助分析检测数据。

一门技术成熟或上升为科学,最基本、最显著的标志是其进入了误差很小的定

量化阶段。超声检测的发展方向必然是以定量化和提高检测可靠性为目标,从超声传播理论入手,研究声场在介质中的传播及声场与缺陷相互作用的规律,建立超声检测系统模型,探索准确的缺陷识别与定位定量方法。只有建立超声检测参数与声场及回波信号之间的定量关系,完善超声检测理论,才能将超声波检测技术提升为一门有坚实的、多学科理论支撑的实用技术,成为独立于声学、材料学、计算机科学的一个新的科学分支。所以基于超声传播理论的超声检测声场计算与分析同时具有理论和工程应用意义。

计算超声学,作为无损检测领域中的新兴学科,正在逐步建立。基于定量化和数字化的超声声场计算与分析模拟是其核心内容,对不能给出简单解析解和实验条件有限的超声检测的模拟及各种建模方法的研究是工作重点。目前,国内外已开发出了超声模拟仿真商用软件,有望在实际检测中实现如下功能<sup>[1~3]</sup>:

(1) 帮助科研人员或者无损检测人员分析实验数据,提高缺陷的辨识、定位和定量分析。

(2) 能力验证,通过模拟计算确定某一检测方法的能力,及其在工程实际中的实用性和可靠性。

(3) 通过模拟仿真设计和优化检测方法,特别是对于相控阵技术,模拟方法可以确定实际中所需要的探头形状和最优延迟率,从而提高相控阵技术在实际应用中的能力。

(4) 虚拟检测,能够为工件早期设计提供帮助。

(5) 培训功能,提高技术人员的理论及实际操作水平。

## 1.2 方 法

超声检测模拟的过程是利用超声检测系统的参数,如探头的类型、频率、带宽、尺寸、发射波形,工件的几何结构与材质声学特性,缺陷的类型、位置、尺寸和取向,扫查路径等,建立数学模型并进行公式化处理,然后编程计算得到探头接收到的缺陷回波的 A 扫描波形、B 扫描和 C 扫描图像及回波动态曲线等。其中数学模型的建立是关键,目前常用的建模方法有解析法、数值法和半解析法。

### 1.2.1 解析法

解析法是一种通过分析问题中各要素之间的关系,用最简练的语言或形式化的符号来表达它们之间的关系,得出解决问题所需的表达式,然后设计程序求解问题的方法。解析法只能处理较为简单的情况,目前,无损检测培训教材中超声检测理论基础利用解析法给出了圆盘源和矩形波源发射声场及规则反射体回波表达式,但是未考虑声场计算声束穿过多层界面时的情况,回波表达式也只限于位于探

头声压轴线上的反射体,而且所给均为声压幅值表达式,未考虑相位影响,故无法得到时域波形。运用解析法求解仅限于相当简单的工件几何形状和各向同性材质、探头激励载荷和边界条件,如果这些条件变得复杂,则分析工作将变得冗长,甚至不可能求得解。

利用解析法求解固体中的体波、表面波和导波波场的一般步骤为:首先写出波动方程,然后根据波形振动形式给出初始解的表达式,带入波动方程,最后根据满足自由边界的应力应变边界条件,得出位移场。对于常见的体波检测(横波和纵波),由于探头发射波形不是单纯的平面波或球面波,在各向异性或曲界面等情况下,即使是规则波阵面也会被扭曲,此时通常引入数学变换及理论方法来进行建模。常用体波探头发射声场及声场在介质中的传播的计算方法有角谱法(angular spectrum method)、多元高斯声束叠加法(multi-Gaussian beam method)和射线追踪法(ray tracing model)。

角谱法<sup>[4]</sup>最先应用于光学,20世纪70年代被引入声学领域,并越来越受到关注。角谱法的基本思想是将探头发射的波分解成无数个平面波,分别计算每个平面波在介质中的传播和衰减,然后基于一定的加权函数将所有平面波叠加起来模拟声场的传播。当考虑声束在界面处的透射时,只需要将每个平面波传播表达式乘以相应的平面波透射即可。角谱法实际上是惠更斯原理的空间频域表现形式,在数值计算中使用了二维傅里叶变换,因而极大地缩短了计算时间,但是所得模型需要对很多平面波进行叠加,计算量仍然较大。利用角谱法也可处理复杂情况,如各向异性介质中的声场分布、声束在曲界面处的透射及反射等,但是由于各向异性材质的复杂性,在处理过程中可能需要用到数值法。

多元高斯声束叠加模型是利用多个高斯声束叠加得到多元高斯声束,来模拟探头发射声场<sup>[5]</sup>。由于高斯分布函数的特殊性,利用高斯基函数可以很容易地推导出单个高斯声束的声场解析表达式,用于描述单个高斯声束在介质中传播、在界面处反射和折射时的振幅衰减和相位变化。在得到单个高斯声束声场后,只需要采用一组10个或15个加权系数进行叠加,即可得到相应类型探头的发射声场。多元高斯声束叠加模型可用于模拟活塞型、矩形和相控阵探头发射声场,以及声场在非均质各向异性介质和不规则界面处的传播及传播过程中的波形转换。由于能够得到声场的解析表达式,该模型的最大特点是计算速度快。高斯声束模型建立在近轴近似的理论基础上,因此在满足该条件的远场及外半近场范围内,该模型具有较高的计算精度,而在半近场以内的范围则会出现较大的误差。实际检测一般取远场作为检测区域,故可以保证该模型的实用性。但是值得注意的是,当声束在界面上传播时,由于入射角的关系,可能会导致不满足近轴近似条件,从而产生较大的计算误差<sup>[6]</sup>。

射线追踪法是一种计算声线在介质中传播路径及振幅衰减的方法,该方法给

出的结果为声线在介质中的传播状态<sup>[7]</sup>。在超声检测过程中,了解声线在工件中的传播路径有助于检测工艺的设计和检测能力的验证。对于结构复杂、材质特殊的工件,声线的传播不是直线,声线传播路径的计算显得更为必要。该方法的主要应用是模拟声线在奥氏体不锈钢等非均质各向异性介质中的传播。该方法处理过程主要分三大步:① 求解各向异性介质的弹性波波动方程,得到能量速度方向及质点位移方向;② 沿着能量速度方向步进一个距离,对于非均质介质,划分成均质区域给出适当的边界条件;③ 计算边界上的反射和折射声线,利用边界条件计算反射和折射声线的振幅。该方法给出的结果为声线在介质中的传播状态,无法给出声场强度分布图,所以不适用于声场的定量计算。

导波与体波都受同一组偏微分方程控制,但是导波的求解需要满足波导介质的边界条件。由于导波在上下边界的反射和波形转换作用,导致最终的传播形式为无数种模态,同时波导介质存在频散特性。为了研究导波的传播规律,必须首先求得各种模态的频散曲线,常用的解析方法是势函数法和子波分析法。首先推导出频散方程,然后再利用数值方法求解得到各种频散曲线。导波声场可以表示为无数种模态的叠加,但在实际计算中,往往将导波分离为具有代表性的几种模态,分别计算各种模态的传播及反射和透射过程,这就是模态分解法<sup>[8]</sup>。

只有规则散射体的远场散射振幅才能用解析法求解。求解的一般步骤是首先用变量分离法得到传输方程和程函方程,然后根据方程的特性写出解的形式,最后带入边界条件求得远场散射振幅。对于圆柱形散射体,解的形式为贝塞尔函数形式;对于球形缺陷,通常将解的形式写为勒让德函数形式。对于弹性球体和空心球体,在求解过程中只是球体表面的边界条件不同。对于平面型缺陷,主要考虑入射声场在平面上的反射和在平面边缘处的衍射,此时先写出各个区域的声压表达式,然后将极坐标波动方程的解写为贝塞尔级数形式,带入边界条件求解。

### 1.2.2 数值法

当使用严密的数学解析解遇到困难时,通常引入数值法。数值法是一种基于全局离散的近似方法,能够处理各类复杂问题,因而广泛应用于工程实际及力学、传热学、电磁学和声学等的计算与分析。也正是由于其全局离散的特点,使得数值法的计算速度较慢,对计算机性能要求高。在超声检测的模拟与计算中,常用的数值法包括有限元法(finite element method, FEM)、有限差分法(finite difference method, FDM)、边界元法(boundary element method, BEM)和弹性动力学有限积分技术(elastodynamic finite integration technique, EFIT)。各种方法几乎适用于任意检测情况的模拟,如模拟相控阵超声检测时,只需要将探头发射表示为一组带有时间延迟的位移边界条件,在模拟缺陷回波时,同样对各个回波做时间延迟处理即可。

有限元是工程计算领域常用的一种数值方法<sup>[9]</sup>,其理论基础是分割原理和能量原理。其计算过程为首先将介质离散成一定数目和形状的网络单元,然后选择位移插值函数,利用位移插值函数将节点位移表示为单元内任一点的位移、应变和应力,再利用最小势能原理或虚功原理建立单元的有限元方程,将单元刚度矩阵组装成整体刚度矩阵,最后引入位移边界条件求解结构平衡方程,得到未知节点位移,进而计算单元应力或节点应力。在处理波动问题时,为了提高计算精度,有限元网格尺寸一般要控制在 $\lambda/20 \sim \lambda/10$ (其中 $\lambda$ 为最小波长),而超声检测都是在波长较小的高频范围,这样会导致网格数量的增加,对计算机内存需求高且计算速度慢,因此有限元法目前的应用多为模拟二维的、较薄的工件检测。有限元的优点是能够采用四边形或三角形等多种网格形状,从而可以划分任意几何形状的介质和缺陷。在处理缺陷时,假设缺陷表面的位移场为零,并以此作为边界条件计算,所得解的形式为声波传播的瞬态图和任意一节点位移变化的波形图。在处理缺陷散射时,为了减少计算量且保留 FEM 方法的优势,可以将半解析法与 FEM 结合使用,只对缺陷周围较小的部分进行网格划分,其他区域的声场采用半解析法计算。在导波计算中,为了减少计算量同时保留 FEM 方法的优势,也采用 FEM 和半解析法结合的方式,即假设导波以简谐方式沿着波导介质传播,这样只需要在波导截面上进行有限元网格划分,在传播方向上用简谐表达式表示波的传播,即可获得比有限元等方法具有更快的计算速度。由于采用有限单元的方法来描述截面,半解析有限元法(semi-analytical finite element,SAFE)可以用于任意截面形状的波导介质。

有限差分法是一种用来模拟弹性波传播的数值方法<sup>[10]</sup>。利用有限差分法进行超声检测数值模拟的步骤是,首先将传播介质划分成交错的网格,有限尺寸的探头作为初始条件施加到相应网格单元,然后将波动方程近似写成差分形式,从而将各节点的应力和位移用交错的差分函数表示,最后利用差分表达式计算所需时刻的声场瞬态传播图。有限差分法采用的是标准四边形网格,因此在处理规则边界时非常有效,对非规则边界的处理则不如有限元方法方便。有限差分形式和格式多样,形式有前方差、后方差和中心差,格式有 Lax-Freidrichs、Leap-Frog 和 Crank-Nicholson 格式,各种格式有不同等级的误差项,在计算时需要合理选择,才能减小计算误差。在网格尺寸和缺陷边界的处理方法上,有限差分法和有限元法基本相同。

边界元法是以积分方程为基础,结合有限元的离散技术而发展起来的一种数值方法<sup>[11]</sup>。该方法是用波动方程的基本解建立边界积分方程,然后利用边界的离散得到离散算式。和有限元法相比,边界元法有很多优势:由于只是对边界进行离散,减少了方程组的未知数,减少了计算的盲目性,从而减小了计算量,并且计算误差只来自于离散的边界,这样也减少了误差的来源;由于采用加权余量法得到积分

方程,使得误差合理分配,同时避免了寻找泛函的麻烦。目前边界元法多用于导波计算,只需要在波导和结构的缺陷边界划分网格节点。而对于导波检测而言,介质中经常存在多种导波模式,所以常常引入简正模式展开法和边界元一起求解导波散射问题。简正模式展开法的基本思想是将原函数展开成具有完备性和正交性的特征函数的叠加形式,特征函数的完备性可保证展开式的合理性,正交性用于求解展开后各项的振幅系数。

弹性动力学有限积分技术是德国学者首先提出的一种主要用于模拟非均质介质超声波检测的数值计算方法<sup>[12]</sup>。EFIT 的基本思想是将介质离散成交错的网格,计算每个单元的体积和表面积分以及应力速度关系式,并假设每个单元格的六个表面的应力应变完全一样。这在数学上表示为将有限积分技术(FIT)应用到离散的麦克斯韦方程组,得到 EFIT 应力单元格表达式。相比于其他计算方法,EFIT 在计算非均质材料时有明显的优越性。然而,非均质材料,特别是缺陷处的网格划分必须要保证各个网格的应力应变是连续的,交错网格的划分必须满足 EFIT 方法的稳定性和收敛条件。这在一定程度上限制了 EFIT 的应用。

### 1.2.3 半解析法

解析法具有速度快的特点,但只能用于简单情况,数值法应用广泛,但是计算量大。为了在保证计算精度的同时提高计算速度,人们提出了半解析法。半解析法可以说是一种在计算过程中采用部分解析解或解析函数的数值方法。基于已有解析解的研究成果,有针对性地代替部分离散和插值,可以弥补数值法的不足,解决解析法所不能解决的问题。目前,半解析法已经成为超声检测模拟与计算的主流方法。利用解析法计算探头发射声场时,一般采用将探头表面离散成点源的方法,如瑞利积分和离散点源法(distributed point source method, DPSM),然后在利用如 Pencil 等方法来描述点源声场在介质中的传播;在处理缺陷散射问题时,常常根据缺陷性质的不同,采取不同的近似方法来处理,有的方法需要将缺陷表面离散,如基尔霍夫近似理论,有的方法需要将缺陷边缘离散,如几何衍射理论(GTD),有的方法不需要离散缺陷,如波恩近似理论。

由瑞利积分和 Pencil 法建立声场计算模型的算法是将探头离散成点源,独立计算每个点源传播到计算点处的振幅和相位,点源声束在每个界面处的透射系数由应力应变连续性条件计算,最后将所有点源产生的声场叠加得到计算点声压<sup>[2]</sup>。在考虑工件中的声场时,需要考虑声束在工件和探头界面处透射和传播过程中的能量衰减,声束在界面处的能量损失可以用折射系数  $T_{ra}$  来表示, $T_{ra}$  可以通过应用界面处应力应变的连续性条件建立的方程组求得;声束在传播过程中的能量损失可以用传播衰减因子来表示,传播衰减因子通过 Pencil 法计算。由于采用点源叠加方法,本模型可以模拟任意探头的发生声场,如聚焦探头、双晶探头、相控阵探



头等;可以模拟声场在任意复杂界面处的反射和透射及在任意介质中的传播,如各向异性和非均质介质等。

基于基尔霍夫近似理论建立的裂纹回波模型用于处理各种体积类缺陷(不含夹杂)和裂纹类缺陷<sup>[13]</sup>。依据基尔霍夫近似理论,散射体任意点处的表面近似地由该点切平面上的平面反射体替代,表面的任意一点都产生平面界面的反射,该点的总场强由过这一点的切平面反射特性决定。本模型算法是首先将缺陷离散,然后单独计算每个缺陷点所产生的衍射回波,最后将所有离散点产生的回波叠加得到缺陷回波。然而基尔霍夫近似忽略了二次衍射项,不能计算裂纹尖端衍射产生的沿裂纹表面传播的瑞利波。

基于 GTD 理论建立的边缘回波模型作为裂纹回波模型的补充,用于处理裂纹尖端衍射<sup>[1]</sup>。当入射声束与裂纹夹角较小时,衍射回波主要由两个尖端产生。入射声束首先在近端衍射产生衍射回波和沿裂纹表面传播的瑞利波,瑞利波在远端再次衍射产生远端衍射回波<sup>[14]</sup>。依据几何衍射理论,尖端衍射回波是基于散射场的二次渐进。本模型算法也是离散裂纹边缘,然后单独计算表面各点衍射回波,最后将各点衍射回波叠加得到缺陷回波,但是由于衍射法则的影响,计算时要排除声束不能到达计算点的点源。目前,衍射时差法(time of flight diffraction, TOFD)超声波检测技术正是利用裂纹尖端的衍射回波来对缺陷进行定位定量,因此该模型不失为 TOFD 检测模拟的一种有效模型。

前面两个缺陷回波模型都是基于高频近似,适用于尺寸较大的体积型和面积型缺陷,对于尺寸较小的夹杂,用上述两种方法处理误差较大。引入基于低频近似的波恩近似理论来建立声场与缺陷相互作用模型可以准确模拟夹杂类缺陷回波<sup>[14]</sup>。本模型算法是用量子力学中的积分方程代替了传统的偏微分方程来描述超声场散射问题,用精确迭代法求解积分方程,得到渐进的波恩级数解。波恩近似是取无限级数的第一项作为近似解,即用入射场取代散射体内的未知的位移场,最终得到纵波和横波散射场远场表达式。

### 1.3 发展前景

从宏观上看,现代超声无损检测技术已成为信息技术的一部分,无损检测的技术核心是定量的获取与分析缺陷的真实信息。信息技术发展中的智能化、自动化、图像化、小型化、系列化、多功能化,也是无损检测技术的发展与应用方向,而数字化正是联系它们的桥梁和技术核心。

工业超声检测技术的发展必将是以软件为主导的技术开发,在发展过程中必须结合计算机技术、虚拟现实技术等,并在发展自身理论的同时借鉴其他领域的超声计算模型及算法,如超声医学诊断技术中的有关医学生物组织模型、医学超声成

像算法等。

由于组织的类型和状态不同,生物组织的超声传播特性存在差异,其中声阻抗、声速和衰减系数等作用重大;医学超声检测中由于生物组织的散射作用,常常存在背景噪声;人体组织从外向内可分为表皮、真皮、皮下组织、脂肪、肌肉以及深处的内脏器官和骨组织等层次,可以近似多层介质<sup>[15]</sup>。这些特性都与工业超声检测中的检测对象相似。因此,将医学超声建模的研究成果引入工业超声检测是完全可行的。医学超声中的非均匀介质模型和分离散射子模型即是用来模拟组织背景噪声的模型,可以用于研究非均质介质工件中的散射衰减,分层介质模型可以用于研究多层介质工件中的各个界面的反射和透射。

随着相控阵、TOFD 和自动检测等技术的发展,超声成像在工业检测中发挥越来越重要的作用。是否可以得到高质量、高帧率的 B 扫描和 C 扫描等形式的图像成为检测可靠性的重要影响因素。而目前医学超声成像的研究已经取得很大的进展,各种成像方式和成像算法不断出现,具有代表性的有超声弹性成像、合成孔径成像、傅里叶成像和三维成像。超声弹性成像中涉及的反问题求解方法对工业超声成像和信号反演都有很好的借鉴作用;合成孔径成像和傅里叶成像可以得到高分辨率、高帧率图像,特别是傅里叶成像具有成像系统简单、成像速度快的特点;医学三维成像已经能够得到各种组织、胎儿,甚至是心脏的跳动的三维图像,这些无疑对工业超声成像的研究具有指导和借鉴作用<sup>[16]</sup>。

结合软件开发技术,目前许多发达国家都开发了自己的超声模拟与仿真软件<sup>[17]</sup>,如 CIVA、Imagine3D、simSUNDT、VNDE、UT-Sim、Wave3000 Pro 等。这些软件有的已经商用,有的目前仅限于实验室研究,有的用于检测人员培训,有的用于信号分析和工艺设计。随着超声模拟的不断发展,必将有更多更优质的软件来辅助检测人员进行检测,提高检测可靠性。

虚拟现实技术是指利用计算机和虚拟现实硬件及软件所构成的虚拟现实环境,并通过多种虚拟现实交互设备使参与者投身于虚拟现实环境中。超声计算模型的建立为超声检测虚拟现实平台的搭建,提供了基础<sup>[18]</sup>,虚拟现实技术的引入将会使超声仿真软件的发展达到另一个层次,虚拟现实技术的沉浸感、交互性、想象力、动态交互智能感和程序驱动三维立体模型与场景等特点将会使检测人员得到更有效的培训,各种三维场景的出现将会使得缺陷的定位定量更为直接、便捷。

## 参 考 文 献

- [1] Chapman R K, Pearce J E. Recent in-house developments in theoretical modelling of ultrasonic inspection[J]. Insight NDT, 2007, 49(2): 93-97.
- [2] Gengembre N. Modelisation du champ ultrasonore rayonne dans un solide anisotrope et

- heterogene par un traducteur immerge[D]. These de Doctorat de l'universite Paris VII,1999.
- [3] 丁辉等. 超声检测计算模型的建立与仿真软件的开发[J]. 无损检测, 2009, 31(8): 614-618.
- [4] Belgroune D. A theoretical study of ultrasonic wave transmission through a fluid-solid interface[J]. Ultrasonics, 2008, 48(3):220-230.
- [5] Wen J J. A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams[J]. Journal of Acoustic Society of American, 1988, 85(3):1752-1756.
- [6] Song S J. Comparison of modeling approaches to ultrasonic testing at near critical angles [J]. Ultrasonics, 2004, 42(1):283-289.
- [7] Ye J. Development of an ultrasonic ray model for phased array ultrasonic testing in austenitic weldments[C]. 17th World Conference on Nondestructive Testing, 25-28 Oct 2008, Shanghai, China, 2008.
- [8] Rose J L. Ultrasonic Waves in Solid Media[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [9] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社, 2003.
- [10] 李太宝. 计算声学[M]. 南京:南京大学出版社, 2003.
- [11] Lee C M. Guided Elastic Waves in Structures with an Arbitrary Cross-section[D]. Philadelphia: The Pennsylvania State University, 2006.
- [12] Fellinger P, Marklein R. Numerical modeling of elastic wave propagation and scattering with EFIT-elastodynamic finite integration technique[J]. Wave Motion, 1995, 21(1): 47-66.
- [13] Lhemery A. A model for the transient ultrasonic field radiated by an arbitrary loading in a solid [J]. Journal of Acoustic Society of American, 1994, 96(6):3776-3786.
- [14] Gubernatis J E. Formal aspects of the theory of the scattering of ultrasound by flaws in elastic materials[J]. Journal of Applied Physics, 1977, 48(7):2804-2811.
- [15] 白净. 医学超声成像机理[M]. 北京:清华大学出版社, 1998.
- [16] 彭虎. 超声成像算法导论[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社, 2008.
- [17] 单洪彬, 李明, 程怀东. 国外超声检测仿真软件的研究进展[J]. 无损检测, 2008, 30(7): 1-6.
- [18] 张俊等. 基于实时声场计算的超声检测虚拟现实系统开发[C]. 电力系统第11届无损检测会议, 西宁, 2009:147-151.

## 第 2 章 探头的发射声场

工业检测和医学诊断所应用的超声波都源自探头晶片的振动,因此准确地计算探头发射声场是定量研究超声传播过程的基础。不同的探头类型,可以激发出不同的波形,如体波、表面波、导波等,不同波形均有不同的声场计算方法。

### 2.1 声场基本方程

#### 2.1.1 固体介质的波动方程<sup>[1,2]</sup>

基于能量守恒定律、动量守恒定律及介质的状态方程,并结合小振幅近似,固体弹性介质中的声场的线性方程为

$$\rho \nabla^2 u_i = C_{ijkl} u_{k,jl} + f_i \quad (2.1.1)$$

式中, $\rho$ 表示介质密度; $u$ 表示质点位移; $C$ 表示弹性系数; $f$ 表示外力作用。式(2.1.1)为有源声波方程。当不存在外力作用时,无源声场方程为

$$\rho \nabla^2 u_i = C_{ijkl} u_{k,jl} \quad (2.1.2)$$

式(2.1.2)也称为亥姆霍兹方程,该方程主要用于声波在半无限大空间的传播。

根据弹性系数的不同,固体介质可以分为各向异性和各向同性;根据微观结构的均匀性,可以分为均质介质和非均质介质。声场在以上各类介质中的传播特性不尽相同,在这里先给出均质各向同性介质的声场方程,其他类型介质中的声场方程将在后面的章节讨论。

在各向同性固体介质中,引入拉梅常数,声场方程可以改写为

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot u - \mu \nabla \times \nabla \times u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1.3)$$

式中, $\lambda$ 、 $\mu$ 为拉梅常数。利用亥姆霍兹分解,将位移矢量  $u$  表示为标量的梯度和零散度矢量的旋度,即

$$u = \nabla \varphi + \nabla \times H \quad (2.1.4)$$

则声场方程(2.1.3),可以分解为两个简单的声场方程(2.1.5)和式(2.1.6)

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (2.1.5)$$

$$\nabla^2 H = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad (2.1.6)$$

式中

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2.1.7)$$

$c_T$  和  $c_L$  分别为各向同性固体中两种体波——横波和纵波的速度。

### 2.1.2 流体介质的波动方程

流体介质中只存在纵波,一般用声压作为声场的特征量,声场方程可以写成

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = 0 \quad (2.1.8)$$

式中,  $c$  为纵波波速;  $p$  为声压。在处理流体介质的声场问题时,通常会涉及三个特征量及其相互关系,即声压  $p$ 、质点速度  $v$  和速度势  $\varphi$ :

$$v = \nabla \varphi \quad (2.1.9)$$

$$p = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (2.1.10)$$

$$v = \frac{p}{\rho c} \quad (2.1.11)$$

式(2.1.3)和式(2.1.8)分别给出了固体和流体介质中的声场基本方程,但这只是声传播必须遵循的一般规律,在考虑具体的探头发射声场及声场传播特性时,还必须考虑探头和被检物体所确定的初始条件和边界条件,而且还应该根据实际情况,尽可能地简化计算过程,以求达到实际应用要求。

### 2.1.3 声束在界面处的透射和反射<sup>[2]</sup>

超声传播过程存在声束穿过一个或多个介质界面的情况,因此不同界面处的透射和反射系数计算、界面处波形转换后各种波形的能量分配研究等是超声计算的重点。

#### 1. 固固界面

假定介质 1 和介质 2 为各向同性,两种介质分别位于坐标系的上下半无限空间,如图 2.1 所示。

当入射波为横波时,根据应力应变连续性条件:

$$\begin{aligned} v_y : (v_T^I)_y + (v_T^R)_y + (v_L^R)_y &= (v_T^T)_y + (v_L^T)_y \\ v_z : (v_T^I)_z + (v_T^R)_z + (v_L^R)_z &= (v_T^T)_z + (v_L^T)_z \\ \sigma_{yy} : (\sigma_T^I)_{yy} + (\sigma_T^R)_{yy} + (\sigma_L^R)_{yy} &= (\sigma_T^T)_{yy} + (\sigma_L^T)_{yy} \\ \sigma_{yz} : (\sigma_T^I)_{yz} + (\sigma_T^R)_{yz} + (\sigma_L^R)_{yz} &= (\sigma_T^T)_{yz} + (\sigma_L^T)_{yz} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

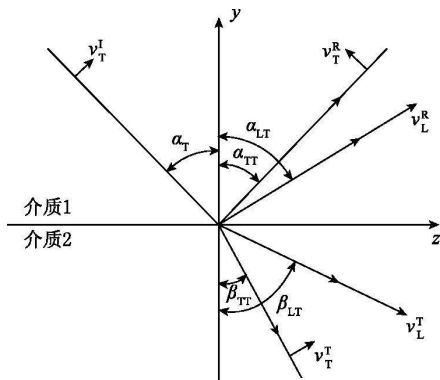


图 2.1 声束在固固界面的反射和透射(入射波为横波)

式中,  $v_n^m$  表示质点振动速度, 其中  $m$  为字母 R、T 和 I, 分别表示反射波、透射波和入射波;  $n$  为字母 L 和 T, 分别代表纵波和横波。将质点速度和应力条件带入连续性条件, 得到反射、透射系数方程:

$$M \begin{bmatrix} A_{sp} \\ A_{ss} \\ D_{sp} \\ D_{ss} \end{bmatrix} = A \quad (2.1.13)$$

式中,  $A_{sp}$  和  $A_{ss}$  分别表示纵波反射系数和横波反射系数;  $D_{ss}$  和  $D_{sp}$  分别表示纵波透射系数和横波透射系数。  $M$  为一个  $4 \times 4$  矩阵

$$M = \begin{bmatrix} -\cos\theta_{LT} & \sin\theta_{TT} & -\cos\theta_{TL} & \sin\theta_{TT} \\ -\sin\theta_{LT} & -\cos\theta_{TT} & \sin\theta_{TL} & \cos\theta_{TT} \\ -k_{L1}(\lambda_1 + 2\mu_1)\cos 2\theta_{TT} & k_{T1}\mu_1\sin 2\theta_{TT} & k_{L2}(\lambda_2 + 2\mu_2)\cos 2\theta_{TT} & -k_{T2}\mu_2\sin 2\theta_{TT} \\ -k_{L1}\mu_1\sin 2\theta_{LT} & -k_{T1}\mu_1\cos 2\theta_{TT} & -k_{L2}\mu_2\sin 2\theta_{TL} & -k_{T2}\mu_2\cos 2\theta_{TT} \end{bmatrix} \quad (2.1.14)$$

$A$  为一个  $4 \times 1$  矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} \sin\theta_T \\ \cos\theta_T \\ -k_{T1}\mu_1\sin 2\theta_T \\ -k_{T1}\mu_1\sin 2\theta_T \end{bmatrix} \quad (2.1.15)$$

当入射波为纵波时, 只需将矩阵  $A$  替换为以下形式, 即可计算相应的反射、透射系数:

$$A = \begin{bmatrix} -\cos\theta_{\text{L}} \\ \sin\theta_{\text{L}} \\ k_{\text{L}1}(\lambda_{\text{L}} + 2\mu_{\text{L}})\cos 2\theta_{\text{L}} \\ -k_{\text{L}1}\mu_{\text{L}}\sin 2\theta_{\text{L}} \end{bmatrix} \quad (2.1.16)$$

## 2. 液固界面

液体中的剪切应力消失,不存在横波。透射、反射系数方程可以写为

$$M \begin{bmatrix} A_{\text{pp}} \\ D_{\text{pp}} \\ D_{\text{ps}} \end{bmatrix} = A \quad (2.1.17)$$

式中,  $A_{\text{pp}}$  表示纵波反射系数;  $D_{\text{pp}}$  表示纵波透射系数;  $D_{\text{ps}}$  表示横波透射系数。

$M$  简化为以下的  $3 \times 3$  矩阵:

$$M = \begin{bmatrix} -\cos\theta_{\text{LL}} & -\cos\theta_{\text{LL}} & \sin\theta_{\text{LT}} \\ 0 & k_{\text{L}2}(\lambda_{\text{e}} + 2\mu_{\text{e}})\cos 2\theta_{\text{LT}} & -k_{\text{T}2}\mu_{\text{e}}\sin 2\theta_{\text{LT}} \\ 0 & -k_{\text{L}2}\mu_{\text{e}}\sin 2\theta_{\text{LL}} & -k_{\text{T}2}\mu_{\text{e}}\cos 2\theta_{\text{LT}} \end{bmatrix} \quad (2.1.18)$$

$A$  简化为以下  $3 \times 1$  矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} -\cos\theta_{\text{L}} \\ k_{\text{L}1}\lambda_{\text{L}}\cos 2\theta_{\text{L}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.19)$$

## 2.2 角 谱 法

角谱法(angular spectrum method, ASM)的基本思想是将探头发射的波分解成无数个平面波,通过平面波的叠加来计算声场的传播,如图 2.2 所示。

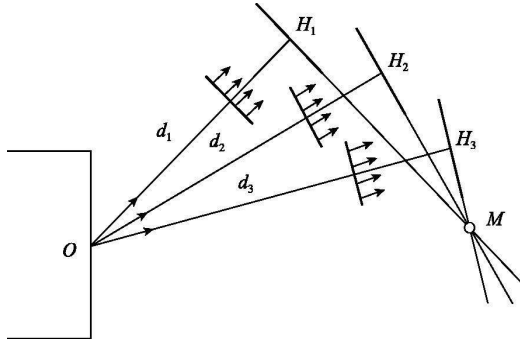


图 2.2 角谱法原理示意图

### 2.2.1 角谱法计算液体中的声场<sup>[3]</sup>

依据角谱法的基本思想,图 2.2 声场中某一点  $M=(x, y, z)$  的声压可以表示无数多个不同平面波的叠加,因此可以写成一个双重积分形式:

$$p(M, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(k_x, k_y) \exp(i(k_x x + k_y y + k_z z)) dk_x dk_y \quad (2.2.1)$$

式中,  $\omega$  为角频率;  $k_x, k_y, k_z$  为波矢  $k$  沿着各个坐标轴方向的分量,相互关系为  $k_z = \pm \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ 。  $k_z$  取正值表示沿  $z$  轴正方向传播的波,即  $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ 。当  $k^2 > k_x^2 + k_y^2$  时,  $p = \exp(i k_x x + i k_y y + i \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z)$  表示沿  $z$  轴正方向传播的平面谐波;当  $k^2 < k_x^2 + k_y^2$ ,  $p = \exp(i k_x x + i k_y y - \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2} z)$  表示沿  $z$  轴正方向呈指数衰减的波,这种波称为非均匀波。所以,式(2.2.1)同时包括了平面波和非均匀波:

$$k_z = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}, & k^2 \geq k_x^2 + k_y^2 \\ i \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}, & k^2 < k_x^2 + k_y^2 \end{cases} \quad (2.2.2)$$

从式(2.2.1)可以看到,计算  $p(k_x, k_y)$  的值是计算  $M$  点声压的关键。根据  $z=0$  时的速度边界条件,从流体波动方程可以得到

$$v_z(x, y, z=0, \omega) = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial z}(x, y, z=0, \omega) \quad (2.2.3)$$

带入式(2.2.1)得到

$$v_z(x, y, z=0, \omega) = \left[ \frac{1}{2\pi} \right]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i k_z p(k_x, k_y)}{i\omega\rho} \exp(i(k_x x + k_y y)) dk_x dk_y \quad (2.2.4)$$

令  $V(k_x, k_y) = i k_z p(k_x, k_y) / (i\omega\rho)$ , 则式(2.2.4)简写为

$$v_z(x, y, z=0, \omega) = \left[ \frac{1}{2\pi} \right]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} V(k_x, k_y) \exp(i(k_x x + k_y y)) dk_x dk_y \quad (2.2.5)$$

式(2.2.5)为二维反傅里叶变换形式,根据傅里叶变换的性质得到

$$V(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_z(x, y, z=0, \omega) \exp(-i(k_x x + k_y y)) dx dy \quad (2.2.6)$$

式(2.2.6)表明,  $V(k_x, k_y)$  为速度场在  $z=0$  平面的二维空间傅里叶变换。对于半径为  $a$  的环形活塞型探头:

$$v_z(x, y, z=0, \omega) = \begin{cases} v_0(\omega), & x^2 + y^2 \leq a^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > a^2 \end{cases} \quad (2.2.7)$$

带入式(2.2.6)积分可以得到

$$V(k_x, k_y) = 2\pi a^2 v_0(\omega) \frac{J_1\left(\frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2} a}{a}\right)}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2} a} \quad (2.2.8)$$



对于矩形的活塞,其中沿  $x$  和  $y$  方向的长度分别为  $l_x$  和  $l_y$ ,可以得到

$$V(k_x, k_y) = l_x l_y v_0(\omega) \frac{\sin\left[\frac{k_x l_x}{2}\right] \sin\left[\frac{k_y l_y}{2}\right]}{\left[\frac{k_x l_x}{2}\right] \left[\frac{k_y l_y}{2}\right]} \quad (2.2.9)$$

当已知探头表面声压分布后,空间中的声场表达式为

$$p(M, \omega) = \left[\frac{1}{2\pi}\right]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\omega\rho V(k_x, k_y)}{ik_z} \exp(i(k_x x + k_y y + k_z z)) dk_x dk_y \quad (2.2.10)$$

当知道  $z=0$  平面处速度场的二维傅里叶变换后,可以直接将式(2.2.10)用于探头发射声场模拟。然而,因为要对快速振荡的函数进行两次无限积分,这个模型的计算仍然难以实现。因此在实际过程中,经常忽略非均匀波,而对有限个平面波进行积分

$$p(M, \omega) = \left[\frac{1}{2\pi}\right]^2 \iint_{k_x^2 + k_y^2 \leq k^2} \frac{i\omega\rho V(k_x, k_y)}{ik_z} \exp(i(k_x x + k_y y + k_z z)) dk_x dk_y \quad (2.2.11)$$

式(2.2.11)是一个更为简化的探头模型,但是仍然需要较大的计算量。

通过以上推导可以看出,角谱法实际上是惠更斯原理的空间频域表现形式,在数值计算中使用了二维傅里叶变换,因而极大地缩短了计算时间,但是由于所得模型需要对很多平面波进行叠加,计算量仍然较大。

### 2.2.2 角谱法计算液固界面透射声场<sup>[4,5]</sup>

如图 2.3 所示二维结构图, $O$  为探头中心, $x$  轴为平行探头面方向, $z$  轴为探头面法线方向, $O_1$  位于液固界面, $x_1$  轴为平行于界面方向, $z_1$  轴为界面法线方向。根据 2.2.1 节的推导,探头表面的声势为

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \iint \bar{\varphi}(k_x, \omega) \exp(i\omega t - ik_x x) dk_x d\omega \quad (2.2.12)$$

式中

$$\bar{\varphi}(k_x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \iint \varphi(x, t) \exp(-i\omega t + ik_x x) dt dx \quad (2.2.13)$$

液体介质中点  $(x, z)$  的声势为

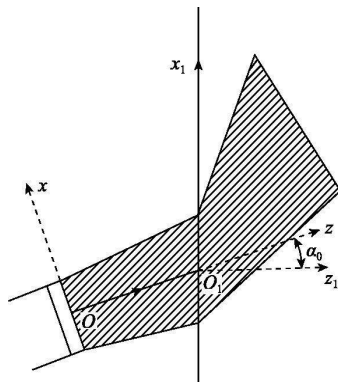


图 2.3 声束透射二维结构示意图

$$\varphi(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \iint \bar{\varphi}_0(k_x, \omega) \exp(i\omega t - ik_x x - ik_z z) dk_x d\omega \quad (2.2.14)$$

为了避免计算过程中频率的影响,可将受频率影响的波矢  $k$  转换为慢度矢量  $s$ ,则式(2.2.12)可以写为

$$\varphi_0(x, t) = \int \phi(s_x, \omega) \exp(-i\omega s_x x) ds_x \quad (2.2.15)$$

式中

$$\phi(s_x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \bar{\varphi}_0(\omega s_x, \omega) \exp(i\omega t) |\omega| d\omega \quad (2.2.16)$$

探头中心  $O$  点的声势为

$$\varphi_0(0, t) = \int \phi(s_x, t) ds_x \quad (2.2.17)$$

则液体介质任意一点  $(x, z)$  的声势为

$$\begin{aligned} \varphi(x, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \iint \bar{\varphi}_0(\omega s_x, \omega) \exp(i\omega t - i\omega s_x x - i\omega s_z z) |\omega| d\omega ds_x \\ &= \int \phi(s_x, t - s_x x - s_z z) ds_x \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

根据液体介质中声压与声势的关系

$$p(x, z, t) = -\rho_0 \frac{\partial \varphi(x, z, t)}{\partial t} \quad (2.2.19)$$

则液体中的声压表达式可以写为

$$p(x, z, t) = \rho_0 \int \frac{V_0(s_x, t - \tau_0)}{s_z} ds_x \quad (2.2.20)$$

式中

$$V_0(s_x, t) = \frac{1}{2\pi} \int \bar{v}_0(s_x, \omega) \exp(i\omega t) |\omega| d\omega \quad (2.2.21)$$

在固体介质中其应力场为

$$\varphi(x_1, z_1, t) = \int T(s_x) \cdot \phi(s_x, t - \tau_0) ds_x \quad (2.2.22)$$

式中,  $T(s_x)$  表示声势透射系数;  $\tau_0$  为由探头原点  $O$  到达计算点  $M$  的时间延迟。按照液体介质中的推导过程,可以得到各向同性固体中的应力表达式为

$$\sigma_n(x_1, z_1, t) = -\rho \int T \left[ \frac{V_0(s_x, t - \tau_0)}{s_z} \right] ds_x \quad (2.2.23)$$

### 2.2.3 应用实例<sup>[4]</sup>

用角谱法计算图 2.4 所示探头发射声场在水钢界面处透射的透射声场,所得结果如图 2.5~图 2.7 所示。探头半径为 8.1mm、频率为 5MHz、探头中心到界面距离为 10mm。

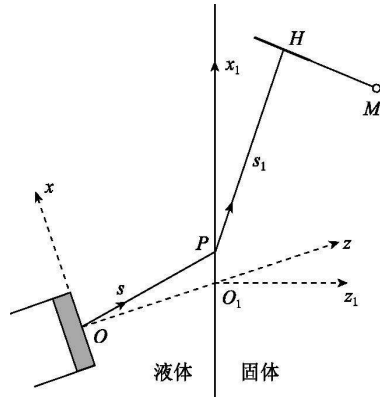


图 2.4 活塞型探头发射声场在平界面的透射

图 2.5 为声束垂直入射时,在  $t=8\mu\text{s}$  时刻的声场传播瞬态图。探头激发的脉冲可以分为直达波和边缘波,直达波为平面波,边缘波从探头边缘出发,其波阵面一般为圆弧形。图 2.5(a)为纵波图,可以看到,直达波为平面波,两个边缘波的波阵面是以探头端点为圆心的圆弧形,大小相等。边缘波的振幅远小于直达波。图 2.5(b)为横波图,可以看到,只存在边缘波,不存在直达波,因为垂直入射的纵波不产生横波,但是由于界面和声场相交区域的横向位移,产生了边缘波,显然,这些

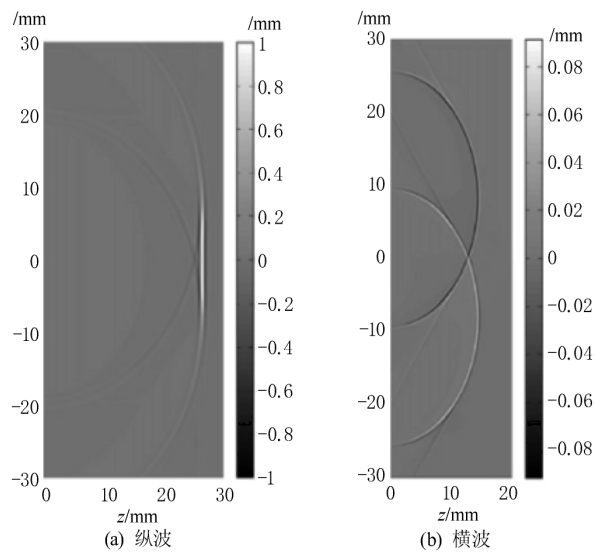


图 2.5  $t=8\mu\text{s}$  时刻的声场传播瞬态图(垂直入射)

波的振幅远小于纵波。

图 2.6 为纵波在距离界面 8mm 处的波形图,在轴线上( $x_1=0$ ),可以观察到两个脉冲,一个是直达波,一个是边缘波的叠加。当不在轴线上( $x_1=2\text{mm}$ )时,出现两个极性相反的边缘波,在探头阴影区域( $-8.1\text{mm}<x_1<8.1\text{mm}$ ),直达波几乎没有改变。当在探头阴影区域之外( $x_1=16\text{mm}$ )时,直达波消失,只出现两个极性相反的边缘波,其中远端边缘波被延迟,振幅较小。

图 2.7 为纵波声束临界角入射时,在  $t=13\mu\text{s}$  时刻的声场传播瞬态图。纵波能量在界面处聚集,界面的边界条件促使一部分纵波向横波转换,在图中记为 SW,从而形成了头波,在图中标记为 HW;剩下的一部分纵波则在界面附近形成近表面波,在图中标记为 CW,其最大振幅出现在与界面法线呈  $80^\circ$  的位置。从图可以看到存在两个边缘波,分别标记为 A 和 B,边缘波的波阵面为圆弧形,在大角度区域传播。

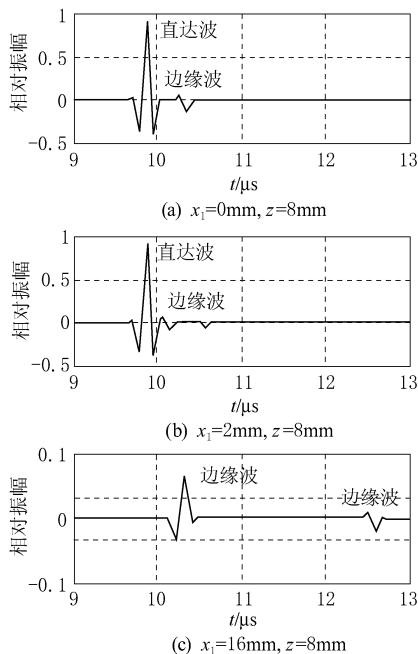


图 2.6 距界面 8mm 处纵波波形图

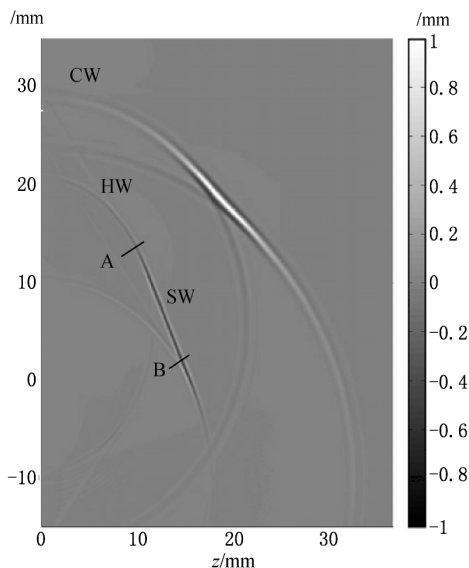


图 2.7  $t=13\mu\text{s}$  时刻的声场传播瞬态图  
(纵波声束临界角入射)

## 2.3 瑞利积分法

瑞利积分法(Rayleigh integration method, RIM)基本思想是将探头离散成点源,将空间中任意一点的声压表示成探头上所有离散点源在该点产生的声压的叠

加。由于瑞利积分能够解析的情况很少,一般只能用数值方法或者近似方法计算。大多数学者在利用瑞利积分法计算声场时,通常采用与其他方法或模型(如 Pencil 法、驻相法、边界衍射积分法、边缘单元法等方法)相结合的方式来计算探头的发射声场及在各种介质中的传播。其中基于瑞利积分和 Pencil 法建立的声场计算模型已成为目前声场计算的主流模型,并成功应用于商用软件,该模型可以用于处理任意探头(聚焦探头、费马探头、相控阵等)、任意界面(曲界面、不规则界面)、复杂材质(多层各向异性)等情况。

### 2.3.1 瑞利积分一般公式<sup>[6]</sup>

点源的响应可以用格林函数  $G(r_T, r)$  表示,将其带入亥姆霍兹方程得到

$$\nabla^2 G(r_T, r) + k^2 G(r_T, r) = -4\pi\delta(r_T - r) \quad (2.3.1)$$

式中,  $\delta(r_T - r)$  是狄拉克脉冲函数,当求解得到点源声场之后,任意声源产生的场可以写为

$$p(r) = \iint_S \left[ G(r_T, r) \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial G(r_T, r)}{\partial n} \right] ds \quad (2.3.2)$$

式(2.3.2)称为基尔霍夫公式,即声压  $p(r)$  可以由包含  $r$  的一个闭合曲面上的声压和声压的法向微分来积分得到。

对于自由空间的点声源,格林函数为

$$G(r_T, r) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik(r_T - r)}}{|r_T - r|} \quad (2.3.3)$$

在闭合面法向求导

$$\frac{\partial G(r_T, r)}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ik(r_T - r)}}{|r_T - r|} \quad (2.3.4)$$

根据声压和质点速度间关系

$$\frac{\partial p}{\partial n} = i\omega\rho v_n \quad (2.3.5)$$

将式(2.3.3)~式(2.3.5)代入式(2.3.2),可以得到空间中任意点的声压为

$$\begin{aligned} p(r) &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{e^{-ik(r_T - r)}}{|r_T - r|} i\omega\rho v_n - p \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ik(r_T - r)}}{|r_T - r|} \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_S i\omega\rho v_n \frac{e^{-ik(r_T - r)}}{|r_T - r|} ds \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

式(2.3.6)即为瑞利积分表达式,它可以看做是面积为  $S$  的面源的发射声场用每个点源  $dS$  的声场响应的叠加来表示,也是惠更斯原理的一种表示方法。

空间中任意点速度势的瑞利积分表达式为

$$\varphi(r, t) = \iint_T \frac{v_n(r_T, t - |r - r_T|/c)}{2\pi|r - r_T|} dS(r_T) \quad (2.3.7)$$

式中,  $\varphi(r, t)$  表示耦合介质中点  $r$  在时刻  $t$  的速度势;  $r_T$  探头表面的点源位置;  $v_n$  表示探头表面点源在时刻  $t$  的振动速度;  $|r - r_T|$  表示从点源到计算点  $r$  处的距离;  $|r - r_T|/c$  是指声波从点源处传播到计算点处的时间;  $T$  表示探头;  $dS(r_T)$  表示探头点源  $r_T$  的面积。

### 2.3.2 Pencil 法<sup>[7~9]</sup>

Pencil 法首先应用于电磁波领域, 用来描述点源发射的电磁波在多个曲面处的透射和反射的振幅衰减。在弹性介质中, 距离点源足够远的计算点处的声波可以被近似地认为是平面波, 平面波的振幅随着传播距离的增加而不断减小。在这里, Pencil 法将用于计算点源发射的波在传播过程中的振幅衰减, 记为  $DF$ 。如图 2.8 所示, Pencil 是点源发射的一束射线, 在传播过程中会产生发散, 振幅衰减  $DF$  可以用 Pencil 的截面积  $S$  和固体角  $\Omega$  求得

$$DF^{-2} = d\Omega/dS \quad (2.3.8)$$

为了计算截面积  $S$  和固体角  $\Omega$ , 首先用声束矢量  $\Psi(dx, dy, ds_x, ds_y)$  来描述声束的传播方向及其近轴, 如图 2.9 所示。其中,  $dx, dy$  表示平面波在轴线上的位置;  $ds_x$  和  $ds_y$  表示近轴声线的慢度矢量在波阵面上的投影。点源处的声束矢量为  $\Psi(0, 0, ds_x, ds_y)$ , 计算点处的声束矢量为  $\Psi'(dx', dy', ds'_x, ds'_y)$ , 两者之间可以由声束传播矩阵  $L$  来关联:

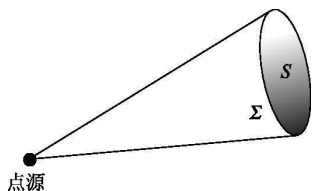


图 2.8 点源声束发散示意图

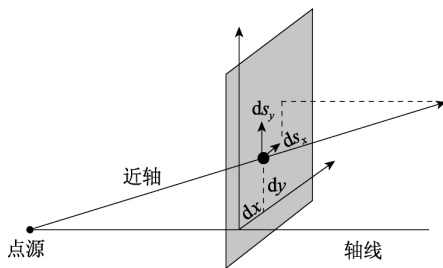


图 2.9 点源发散声束的矢量描述

$$\Psi' = L\Psi = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \Psi \quad (2.3.9)$$

式中,  $A, B, C, D$  均为  $2 \times 2$  的矩阵。若将 Pencil 的截面积和固体角分别表示为  $d\Omega = ds_x ds_y / s^2$ ,  $dS = dx' dy'$ , 振幅衰减  $DF$  可以由声束传播矩阵得到

$$DF^{-2} = s^2 \det B \quad (2.3.10)$$

对于不同介质, 传播矩阵  $L$  不同。各相同性介质和各向异性介质的传播矩阵分别如下:

各向同性介质: