Prof. Dr. L. Imhof Bonn, WS 2024/25

Stochastische Modelle

4. Übung

Aufgabe 13. In dieser Aufgabe wird eine Markov-Kette mit vorgegebener Übergangsmatrix und Anfangsverteilung konstruiert. Die Konstruktion zeigt insbesondere, wie sich die Markov-Kette simulieren lässt.
Es sei $S = \mathbb{N}$ oder $S = \{1, \dots, N\}$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Es sei $(p_{ij})_{ij \in S}$ eine stochastische Matrix und es seien $p_i \in [0, 1]$, $i \in S$, so dass $\sum_{i \in S} p_i = 1$. Seien $U_0, U_1, \dots$ unabhängige auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Setze für alle $i, j \in S$

$$s_i := \sum_{k=1}^{i} p_k, \qquad s_{ij} := \sum_{k=1}^{j} p_{ik}.$$

Definiere $f : S \times (0, 1) \to S$ durch

$$f(i, u) := \min\{j \in S : u \leq s_{ij}\}, \qquad i \in S,\ u \in (0, 1).$$

Schließlich sei $X_0 := \min\{i \in S : U_0 \leq s_i\}$ und $X_1, X_2, \dots$ seien rekursiv definiert durch $X_{n+1} := f(X_n, U_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Markov-Kette ist mit Anfangsverteilung $P(X_0 = i) = p_i$, $i \in S$, und Übergangsmatrix $(p_{ij})_{ij \in S}$.

Aufgabe 14. Betrachten Sie eine einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{i,i-1} = 1 - p, \quad p_{i,i+1} = p, \qquad i \in \mathbb{Z},$$

wobei $0 < p < 1$. Berechnen Sie alle n-Schritt Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(n)}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

In Satz 8, Kapitel 2, der Vorlesung ist der gegenwärtige Zeitpunkt n deterministisch. In Aufgabe 15 und Aufgabe 17 wird untersucht, wie sich die Aussage des Satzes auf zufällige Zeitpunkte erweitern lässt.

Aufgabe 15. Es sei $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $\{1, 2\}$, Übergangsmatrix $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ und $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$. Gilt für jede Zufallsvariable T mit Werten in $\mathbb{N}$

$$P(X_{T+1} = 1 | X_0 = 1, X_T = 2) = P(X_1 = 1 | X_0 = 2)?$$

Definition einer Stoppzeit. Sei $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum S. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{F}_n$ die Menge aller Ereignisse der Form $\{(X_0, \dots, X_n) \in B\}$ mit $B \subset S^{n+1}$. Eine Zufallsvariable T mit Werten in $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt **Stoppzeit** (für die Markov-Kette), falls für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$$

gilt.

Interpretation. Die Menge $\mathcal{F}_n$ besteht aus allen Ereignissen, die durch $X_0, \ldots, X_n$ beschrieben werden und bei einer Stoppzeit T ist das Ereignis $\{T = n\}$ durch $X_0, \ldots, X_n$ bestimmt. Werden $X_0, X_1, \ldots$ nacheinander beobachtet bis man stoppt, dann kann die Entscheidung, ob zur Zeit n gestoppt wird, getroffen werden, sobald man $X_0, \ldots, X_n$ kennt.

Aufgabe 16. Sei $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum S. Sei $A \subset S$ und

$$T := \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}, \quad \tau := \inf\{n \geq 1 : X_n \in A\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass T und τ Stoppzeiten sind.

(b) Ist $T + 1$ eine Stoppzeit?

(c) Ist $\tau - 1$ eine Stoppzeit?

Aufgabe 17. Sei $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum S und T sei eine Stoppzeit. Zeigen Sie die starke Markov-Eigenschaft: Für alle $m \in \mathbb{N}$, $Z \subset S^m$, $V \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$ gilt

$$P\big((X_{T+1}, \ldots, X_{T+m}) \in Z | X_T = i, T < \infty, (X_0, \ldots, X_T) \in V\big) = P_i\big((X_1, \ldots, X_m) \in Z\big),$$

sofern $P\big(X_T = i, T < \infty, (X_0, \ldots, X_T) \in V\big) > 0$.

Aufgabe 18. Es sei z ein absorbierender Zustand einer Markov-Kette $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ und es sei $T := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = z\}$. Zeigen Sie für jeden Anfangszustand i

18 noch nicht lösung vorgestellt

$$P_i(T < \infty) = P_i\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{X_k = z\}\Big) = \lim_{n \to \infty} p_{iz}^{(n)}.$$