# FORMELSAMMLUNG STATISTIK B

Sommersemester 2024

Kneip / Scheer / Bada / Poß/ Becker

**Version vom Mai 2024**

## Inhaltsverzeichnis



# Die geometrische Reihe und Summenformel:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{(falls } q \neq 1\text{)} \qquad \text{und für } |q|<1\text{:} \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

# 1 Wahrscheinlichkeitsrechnung

## Kombinatorik

Anzahl der möglichen Ziehungen von $n$ Kugeln aus einer Urne mit $N$ Kugeln:

| | **Reihenfolge wichtig** „Sortieren nicht erlaubt“ | **Reihenfolge nicht wichtig** „Sortieren erlaubt“ |
|---|---|---|
| **ohne** Zurücklegen | $N \cdot (N-1) \cdots (N-(n-1))$ | $\binom{N}{n}$ |
| **mit** Zurücklegen | $N^n$ | $\binom{n+N-1}{n} = \binom{n+N-1}{N-1}$ |

## Binomialkoeffizienten

- **Definition:**

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-(k-1))}{k \cdot (k-1) \cdots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **Rechenregeln:**

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

## Rechenregeln für Mengen

- Kommutativgesetz:
  $A \cap B = B \cap A$
  $A \cup B = B \cup A$
- Distributivgesetz:
  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- Aus $A \subset B$ folgt $\bar{B} \subset \bar{A}$
- Assoziativgesetz:
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- De Morgansche Regeln:
  $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$
  $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- Für die Differenzmenge $A \backslash B$ gilt:
  $A \backslash B = A \cap \bar{B}$

## Wahrscheinlichkeiten und Axiome von Kolmogoroff

- **Endlicher Wahrscheinlichkeitsraum** $(S, \mathcal{P}(S), P)$

  - **Grundraum** $S = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_N\}$.
  - **Ereignisse** $\mathcal{P}(S) =$ Menge aller Teilmengen $A \subset S$
  - **Wahrscheinlichkeit** $P$ $P(A) =$ Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von $A$

  Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P$ erfüllt die **Axiome von Kolmogoroff**:

  | | | |
  |---|---|---|
  | $(A1)$ | (Nichtnegativität) | $P(A) \geq 0$ |
  | $(A2)$ | (Normiertheit) | $P(S) = 1$ |
  | $(A3)$ | (Additivität) | $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für $A \cap B = \emptyset$ |

- Für **nicht endliche Wahrscheinlichkeitsräume** wird das Axiom (A3) ersetzt durch das Axiom

  (A3') ($\sigma-$Additivität) $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ für $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$

## Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

1. $P(\emptyset) = 0,\ P(S) = 1,\ 0 \leq P(A) \leq 1$
2. $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B)$
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ mit $\bar{A} = S \backslash A$
4. Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$,
   falls $A_1, A_2, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt, d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$
6. $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$
7. Wenn die Elementarwahrscheinlichkeiten $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$ bekannt sind, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A$:

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i$$

## Laplace-Modell

**1. Annahme:** Endlicher Grundraum $S = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$

**2. Annahme:** $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \cdots = P(\{\omega_N\})$

**Wahrscheinlichkeiten:** $P(A) = \dfrac{\text{Anzahl } \omega_i \text{ in A}}{\text{Anzahl } \omega_i \text{ in } S} = \dfrac{\#A}{\#S} = \dfrac{\#A}{N}$

## Bedingte Wahrscheinlichkeit

**Bedingte Wahrscheinlichkeit von $A$ gegeben $B$**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{für } A, B \subset S \text{ mit } P(B) > 0$$

## Unabhängigkeit von Ereignissen

- **Zwei** Ereignisse $A$ und $B$ heißen stochastisch unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heißen stochastisch unabhängig, wenn für jede Auswahl $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ mit $k \leq n$ gilt: $P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$

## Multiplikationssatz

- Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ gilt:
  $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$
- Falls die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig sind, gilt:
  $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n)$

## Totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Seien $A_1, \ldots, A_k$ Ereignisse, die eine Zerlegung von $S$ bilden (d.h. $S$ ist disjunkte Vereinigung der $A_i$; es gilt: $A_i \neq \emptyset$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, und $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = S$).
$B$ sei ein Ereignis mit $P(B) > 0$.

$$P(B|A_j) \cdot P(A_j) = P(B \cap A_j) = P(A_j|B) \cdot P(B)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i) \cdot P(A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(B \cap A_i) \qquad \text{(totale Wahrscheinlichkeit)}$$

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B|A_i) \cdot P(A_i)} \qquad \text{(Satz von Bayes)}$$

# 2 Diskrete Zufallsvariablen

Es sei $X$ eine diskrete Zufallsvariable mit Werten $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$

- **Wahrscheinlichkeitsverteilung** von $X$:

$$P[X = x_i] = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \ldots$$

- **Wahrscheinlichkeitsfunktion** von $X$:

$$f(x) = \begin{cases} P[X = x] & \text{für } x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\} \\ & \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Verteilungsfunktion** von $X$:

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

- **Erwartungswert** von $X$:

$$E(X) = \mu_X = \sum_{i \geq 1} x_i p_i = \sum_{i \geq 1} x_i f(x_i)$$

- **Varianz** von $X$:

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = E(X - \mu_X)^2 = E(X^2) - \mu_X^2 = \sum_{i \geq 1} (x_i - \mu_X)^2 p_i = \sum_{i \geq 1} x_i^2 p_i - \mu_X^2$$

- **Standardabweichung**: $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$
- **Transformationsregel für Erwartungswerte**:
  Sei $g(x)$ eine reelle Funktion. Dann gilt für $Y = g(X)$

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{i \geq 1} g(x_i) p_i = \sum_{i \geq 1} g(x_i) f(x_i)$$

## Diskrete Gleichverteilung

- $X$ diskret gleichverteilt (auf $a_1 < \ldots < a_k$)
- **Verteilung von X**

$$X = a_1, a_2, \ldots, a_k \qquad \text{mit } P(\{X = a_i\}) = \frac{1}{k}$$

- **Werte der Verteilungsfunktion**

$$P(X \leq a_i) = \frac{i}{k}$$

- **Erwartungswert und Varianz**

$$E(X) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(a_i - E(X))^2$$

## Bernoulli-Verteilung

- **Notation:** $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ mit $0 \leq p \leq 1$
- **Verteilung von X**

$$X = \begin{cases} 1 & \text{mit } P(X = 1) = p \\ 0 & \text{mit } P(X = 0) = 1 - p \end{cases}$$

- **Erwartungswert und Varianz**

$$E(X) = p \qquad \mathrm{Var}(X) = p \cdot (1 - p)$$

## Geometrische Verteilung

- **Notation:** $X \sim G(p)$ mit $0 < p \leq 1$
- **Verteilung von X**

  $X = 1, 2, 3, \ldots$ mit $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$
- **Werte der Verteilungsfunktion** für $x = 1, 2, 3, \ldots$

$$F_G(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=1}^{x} P(X = k) = 1 - (1-p)^x$$

- **Erwartungswert und Varianz**

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

## Binomialverteilung

- **Notation:** $X \sim B(n, p)$ mit $0 \leq p \leq 1$
- **Verteilung von X**

  $X = 0, 1, \ldots, n$ mit $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- **Werte der Verteilungsfunktion** für $x = 0, 1, \ldots, n$

$$F_B(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} P(X = k)$$

- **Erwartungswert und Varianz**

$$E(X) = np \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

## Hypergeometrische Verteilung

- **Notation:** $X \sim H(n, M, N)$ mit $M \leq N$, $n \leq N$
- **Verteilung von X**

  $X = 0, 1, \ldots, n$ mit $P(X = k) = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
- **Werte der Verteilungsfunktion** für $x = 0, 1, \ldots, n$

$$F_H(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} P(X = k)$$

- **Erwartungswert und Varianz**

$$E(X) = n\frac{M}{N} \qquad \mathrm{Var}(X) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

## Approximation der Hypergeometrischen Verteilung durch eine Binomialverteilung

Für $X \sim H(n, M, N)$ und $n$ klein gegenüber $N, M$ und $N - M$ gilt approximativ:

$$X \sim B\left(n, p\right), \quad p = \frac{M}{N} \qquad \text{d.h.} \quad P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \approx \binom{n}{k} p^k \left(1 - p\right)^{n-k}$$

## Poisson-Verteilung

- **Notation:** $X \sim \text{Po}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$
- **Verteilung von X**

  $X = 0, 1, 2, 3 \ldots$ mit $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
- **Werte der Verteilungsfunktion** für $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$F_{\text{Po}}(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} P(X = k)$$

- **Erwartungswert und Varianz**

$$E(X) = \lambda \qquad \text{Var}(X) = \lambda$$

## Approximation der Binomialverteilung durch eine Poisson-Verteilung

Für $X \sim B(n, p)$ und großes $n$ bei gleichzeitig kleiner „Erfolgswahrscheinlichkeit“ $p$ (Faustregel: $np < 5$ oder $n(1-p) < 5$) gilt approximativ:

$$X \sim Po(\lambda), \quad \lambda = n \cdot p \qquad \text{d.h.} \qquad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$$

# 3 Stetige Zufallsvariablen

Es sei $X$ stetige Zufallsvariable (mit Werten $x \in \mathbf{R}$)

- **(Wahrscheinlichkeits-) Dichte** von $X$
  Funktion $f(x) \geq 0$, so dass für jedes Intervall $[a, b]$:

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx; \quad \text{es gilt:} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

- **Verteilungsfunktion** von $X$

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

- **Erwartungswert** von $X$

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

- **Varianz** von $X$

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = E(X - \mu_X)^2 = E(X^2) - \mu_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x)dx$$

- **Standardabweichung** von $X$

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

- **Quantile** Für $0 < p < 1$ ist das $p$-Quantil $x_p$ der Wert, für den gilt:

$$F(x_p) = P[X \leq x_p] = p \quad \text{und} \quad 1 - F(x_p) = P[X \geq x_p] = 1 - p$$

## Exponentialverteilung, $X \sim Ex(\lambda)$, mit $\lambda > 0$

- **Dichte- und Verteilungsfunktion**

$$f_{Ex}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_{Ex}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

- **Erwartungswert und Varianz**

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

## Stetige Gleichverteilung, $X \sim U(a,b)$, mit $a < b$

- **Dichte- und Verteilungsfunktion**

$$f_U(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{für } x > b \end{cases}$$

- **Erwartungswert und Varianz**

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

## Standardnormalverteilung, $X \sim N(0,1)$

- **Dichte- und Verteilungsfunktion**

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

- **Erwartungswert und Varianz**

$$E(X) = 0 \qquad \mathrm{Var}(X) = 1$$

## Normalverteilung (Gauß-Verteilung), $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

- **Dichte- und Verteilungsfunktion** (für $x \in \mathbb{R}$)

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad F_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

- **Erwartungswert und Varianz**

$$E(X) = \mu \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

- **Lineare Transformation**: ($a, b$ beliebige Zahlen)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{und} \quad Y = a \cdot X + b \quad \Rightarrow \quad Y \sim N(a \cdot \mu + b, a^2 \cdot \sigma^2)$$

- **Linearkombination**: $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ und **unabhängig**, $a_1, \ldots, a_n$ beliebige Zahlen

$$\Rightarrow \quad Y = a_1 \cdot X_1 + \cdots + a_n \cdot X_n \sim N(a_1 \cdot \mu_1 + \cdots + a_n \cdot \mu_n, a_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \cdots + a_n^2 \cdot \sigma_n^2)$$

- **Rückführung auf die Standardnormalverteilung**

  - **Standardisierung**

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

  - **Verteilungsfunktion**

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad P[X \leq x] = F_N(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

  - **Quantile** (Für $0 < p < 1$)

    $x_p$ $p$-Quantil von $N(\mu, \sigma^2)$ $\quad \Rightarrow x_p = \mu + \sigma z_p$ wobei $z_p$ $p$-Quantil von $N(0,1)$

## $\chi^2$-Verteilung

- **Definition und Bezeichnung**
  $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen. Die Verteilung von $\chi^2 = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ heißt „Chi-Quadrat-Verteilung" mit $n$ Freiheitsgraden, kurz $\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

- **Erwartungswert und Varianz**

$$E(\chi^2) = n \qquad \mathrm{Var}(\chi^2) = 2n$$

- **Approximation durch die Normalverteilung**

$$\text{für } n > 30\text{:} \quad \chi^2(n) \approx N(n, 2n) \quad \text{für Quantile} \quad \chi^2_{p;n} \approx \frac{1}{2}(z_p + \sqrt{2n-1})^2$$

## $t$-Verteilung, Student-Verteilung

- **Definition und Bezeichnung**
  $X \sim N(0,1)$ und $Y \sim \chi^2(n)$ unabhängig. Die Verteilung von $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ heißt „$t$-Verteilung" mit $n$ Freiheitsgraden, kurz $T \sim t(n)$.

- **Erwartungswert und Varianz**

$$E(T) = 0 \qquad \mathrm{Var}(T) = \frac{n}{n-2} \quad (n > 2)$$

- **Approximation durch die Normalverteilung**

$$\text{für } n > 100\text{:} \quad t(n) \approx N(0,1) \quad \text{für Quantile} \quad t_{p;n} \approx z_p$$

## Fisher-Verteilung, $F$-Verteilung

- **Definition und Bezeichnung**
  Seien $X \sim \chi^2(m)$ und $Y \sim \chi^2(n)$ unabhängig. Dann heißt die Verteilung von

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

  **Fisher- oder $F$-Verteilung** mit den Freiheitsgraden $m$ und $n$, kurz $F \sim F(m,n)$.

- **Erwartungswert**

$$E(F) = \frac{n}{n-2} \quad (n > 2)$$

## Ungleichung von Tschebyscheff

- Zufallsvariable $X$ mit $E(X) = \mu$ und $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.
- Ungleichung von Tschebyscheff

$$\text{Für } k > 0 \text{ gilt: } P[|X - \mu| > k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$$

- Approximation von zentralen Schwankungsintervallen

$$\text{Für } k > 0 \text{ gilt: } P[\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

## Zentraler Grenzwertsatz

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Mittelwert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$. Dann gilt für großes $n$ approximativ:

$$P\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z\right] \approx \Phi(z) \qquad \text{d.h.} \qquad \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

## Approximation der Binomialverteilung durch eine Normalverteilung

Sei $X \sim B(n, p)$. Für großes $n$ (mit $np > 5$ und $n(1-p) > 5$) gilt approximativ

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0, 1)$$

Anwendung mit Stetigkeitskorrektur:

$$P[x_1 \leq X \leq x_2] \approx \Phi\left(\frac{x_2 + 0,5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - 0,5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

# 4 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

## Zweidimensionale diskrete Zufallsvariablen

$(X, Y)$ sei eine bivariate diskrete Zufallsvariable mit $k$ bzw. $m$ Ausprägungen

- **Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion (gemeinsame Verteilung)**

$$f(x,y) = \begin{cases} P[X = x, Y = y] & \text{für } (x,y) = (x_1, y_1), \ldots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Gemeinsame Verteilungsfunktion**

$$F(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

- **Randverteilung von $X$**

$$f_X(x) = P[X = x] = \sum_{j=1}^{m} f(x, y_j)$$

- **Randverteilung von $Y$**

$$f_Y(y) = P[Y = y] = \sum_{i=1}^{k} f(x_i, y)$$

- **Bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion (bedingte Verteilung)**
  - **Bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion von $X$ gegeben $Y = y$**

$$f_X(x|y) = P[X = x|Y = y] = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \qquad (f_X(x|y) = 0, \text{ falls } f_Y(y) = 0.)$$

  - **Bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion von $Y$ gegeben $X = x$**

$$f_Y(y|x) = P[Y = y|X = x] = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \qquad (f_Y(y|x) = 0, \text{ falls } f_X(x) = 0.)$$

- **Bedingter Erwartungswert von $Y$ gegeben $X = x$**

$$\mu_{Y|X=x} = E(Y|X = x) = \sum_{j=1}^{m} y_j f_Y(y_j|x)$$

- **Bedingter Erwartungswert von $X$ gegeben $Y = y$**

$$\mu_{X|Y=y} = E(X|Y = y) = \sum_{i=1}^{k} x_i f_X(x_i|y)$$

## Zweidimensionale stetige Zufallsvariablen

$(X, Y)$ sei eine bivariate stetige Zufallsvariable (mit Werten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$)

- **(Wahrscheinlichkeits-) Dichte von** $(X, Y)$
  2-dimensionale Funktion $f(x, y) \geq 0$, so dass für jedes Rechteck $[a, b] \times [c, d]$:

$$P[a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d] = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy; \quad \text{es gilt:} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

  Das Doppelintegral entspricht dem von der Funktion $f(x, y)$ eingeschlossenen Volumen über der Grundfläche $[a, b] \times [c, d]$.

- **Gemeinsame Verteilungsfunktion**

$$F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s, t)\, ds\, dt$$

- **Randdichten von** $X$ **bzw.** $Y$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy \quad \text{bzw.} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

- **Bedingte Dichte von** $X$ **gegeben** $Y = y$ **bzw. von** $Y$ **gegeben** $X = x$

$$f_X(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \qquad \text{bzw.} \qquad f_Y(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

- **Bedingter Erwartungswert von** $Y$ **gegeben** $X = x$

$$\mu_{Y|X=x} = E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y|x)\, dy$$

- **Bedingter Erwartungswert von** $X$ **gegeben** $Y = y$

$$\mu_{X|Y=y} = E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x|y)\, dx$$

## Kovarianz und Korrelation

Zufallsvariablen $X$ und $Y$, mit $\mu_X = E(X)$, $\mu_Y = E(Y)$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2$, $\mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2$

- **Kovarianz von $X$ und $Y$**

$$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X, Y) = E\left((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

- **Erwartungswert $E(X \cdot Y)$**

$$E(X \cdot Y) = \begin{cases} \sum\limits_i \sum\limits_j x_i y_j \, f(x_i, y_j) & X, Y \text{ diskret} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} xy \, f(x, y) dx \, dy & X, Y \text{ stetig} \end{cases}$$

- **Symmetrie**

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$$

- **Lineare Transformationen**

Für $X^* = aX + b$ und $Y^* = cY + d$ gilt $\mathrm{Cov}(X^*, Y^*) = a \cdot c \cdot \mathrm{Cov}(X, Y)$

- **Korrelation zwischen $X$ und $Y$**

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

- **Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen**

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y)$$

Falls $X, Y$ **unkorreliert** $\Rightarrow \mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

- **Gewichtete Summe von Zufallsvariablen**
Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_k$, Zahlen $a_1, \ldots, a_k$; für $X = a_1 \cdot X_1 + \cdots + a_k \cdot X_k$ gilt:

$$E(X) = a_1 \cdot E(X_1) + \cdots + a_k \cdot E(X_k)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \cdot \mathrm{Var}(X_i) + 2 \sum_{i<j} a_i \cdot a_j \cdot \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

## Unabhängigkeit von zwei Zufallsvariablen

- **Definition:** $X$ und $Y$ heißen unabhängig, falls

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \qquad \text{für alle } x,y$$
$$\text{bzw.} \quad P[X \leq x, Y \leq y] = P[X \leq x] \cdot P[Y \leq y] \qquad \text{für alle } x,y$$

- **Zusätzliche Rechenregeln:** Falls $X$ und $Y$ unabhängig sind, gilt:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$
$$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$$
$$f_Y(y|X=x) = f_Y(y) \quad \text{für alle } x \qquad f_X(x|Y=y) = f_X(x) \quad \text{für alle } y$$
$$E(Y|X=x) = E(Y) \quad \text{für alle } x \qquad E(X|Y=y) = E(X) \quad \text{für alle } y$$

- Zwei **diskrete** Zufallsvariablen sind unabhängig, falls

$$P[X=x, Y=y] = P[X=x] \cdot P[Y=y] \qquad \text{für alle } x,y$$

## Unabhängigkeit mehrerer Zufallsvariablen

- **Defintion:** Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heißen unabhängig, falls

$$P[X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n] = P[X_1 \leq x_1] \cdots P[X_n \leq x_n] \qquad \text{für alle } x_1, \ldots, x_n$$
$$\text{bzw.} \quad f(x_1, \ldots, x_k) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n) \qquad \text{für alle } x_1, \ldots, x_n$$

$f(x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnet die gemeinsame Dichte von $X_1, \ldots, X_n$.

$f_{X_i}(x_i)$ bezeichnet die Randdichte von $X_i$, $1 \leq i \leq n$.

- **Diskrete** Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig, falls

$$P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = P[X_1 = x_1] \cdots P[X_n = x_n] \qquad \text{für alle } x_1, \ldots, x_n$$

# 5 Parameterschätzung

- **Statistisches Modell**
  - $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsstichprobe
  - Verteilung von $X$ hängt von einem Parameter $\theta$ ab
  - Beobachtete (realisierte) Werte: $x_1, \ldots, x_n$
- **Schätzer** für $\theta$: $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}} = g(X_1, \ldots, X_n)$ (Zufallsvariable)
- **Schätzwert** für $\theta$: $\hat{\theta}_n = g(x_1, \ldots, x_n)$ (reelle Zahl)
- **Bias** (Verzerrung, systematischer Schätzfehler von $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}}$):

$$\mathrm{Bias}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}}) = E(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}}) - \theta$$

- **Varianz** (zufallsbedingter Schätzfehler):

$$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}}) = E(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}} - E(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}}))^2$$

- **Mittlerer quadratischer Schätzfehler (MSE, Mean Squared Error):**

$$\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}}) = E\left((\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}} - \theta)^2\right) = \mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}}) + \mathrm{Bias}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}})^2$$

- **Schwache Konsistenz:**
  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}}$ ist schwach konsistent für $\theta$, falls

  für jedes $c > 0$ : $P(|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}} - \theta| \geq c) \to 0$ für $n \to \infty$ gilt.

- **MSE-Konsistenz:**
  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ ist MSE-konsistent für $\theta$, falls

$$\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) \to 0 \qquad \text{für} \quad n \to \infty \text{ gilt.}$$

MSE-Konsistenz $\Rightarrow$ schwache Konsistenz

# Maximum Likelihood–Schätzung

- **Statistisches Modell**
  - $X_1, \ldots, X_n$ einfache Zufallsstichprobe, d.h. unabhängige Wiederholungen von $X$
  - Verteilung von $X$ hängt von einem Parameter $\theta$ ab
  - Beobachtete (realisierte) Werte: $x_1, \ldots, x_n$
- **Likelihood–Funktion** $L(\theta)$

$$L(\theta) \equiv L(x_1, \ldots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = f(x_1|\theta) \cdots f(x_n|\theta)$$

  $f(x) \equiv f(x|\theta)$ bezeichnet für **diskretes** $X$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion und für **stetiges** $X$ die Dichtefunktion.

- **Maximum Likelihood–Schätzung von** $\theta$
  - Schätzfunktion: $\hat{\boldsymbol{\theta}} \Leftrightarrow \arg\max_{\theta} L(X_1, \ldots, X_n|\theta)$
  - Schätzwert: $\hat{\theta} \Leftrightarrow \arg\max_{\theta} L(x_1, \ldots, x_n|\theta)$
- **Log-Likelihood-Funktion** $\ln L(\theta)$ (rechentechnisch oft günstiger)

$$\ln L(\theta) = \ln L(x_1, \ldots, x_n|\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i|\theta)$$

# 6 Konfidenzintervalle

- **$(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für $\theta$**
  Stichprobenfunktionen $G_u = g_u(X_1, \dots, X_n)$ und $G_o = g_o(X_1, \dots, X_n)$, so dass (zu vorgegebener **Irrtumswahrscheinlichkeit** $\alpha$)

$$P[G_u \leq G_o] = 1 \qquad \text{und} \qquad P[\theta \in [G_u, G_o]] = P[G_u \leq \theta \leq G_o] = 1 - \alpha$$

  $\Rightarrow [G_u, G_o] = [g_u(X_1, \dots, X_n), g_o(X_1, \dots, X_n)]$ ist ein $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für $\theta$.

- **Konfidenzniveau (Überdeckungs- , Vertrauenswahrscheinlichkeit)**: $1-\alpha$

- **Realisiertes** $(1-\alpha)$**-Konfidenzintervall**

$$\text{Beobachtete Werte} \quad x_1, \dots, x_2 \quad \Rightarrow \quad [g_u, g_o] = [g_u(x_1, \dots, x_n), g_o(x_1, \dots, x_n)]$$

- **Symmetrisches** $(1-\alpha)$**–Konfidenzintervall**

$$\text{erfüllt zusätzlich:} \quad P[\theta < G_u] = P[\theta > G_o] = \frac{\alpha}{2}$$

- **Einseitiges** $(1-\alpha)$**-Konfidenzintervall** (mit unterer Schranke)

$$[G_u, \infty[ \quad \text{mit} \quad P[G_u \leq \theta] = 1 - \alpha$$

- **Einseitiges** $(1-\alpha)$**-Konfidenzintervall** (mit oberer Schranke)

$$]-\infty, G_o] \quad \text{mit} \quad P[\theta \leq G_o] = 1 - \alpha$$

## Konfidenzintervall für einen Erwartungswert, bekannte Varianz

- **Annahmen:**
  - $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt
  - $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - **Bekannte** Varianz $\sigma^2$

- **$(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für $\mu$ und bekannter Varianz $\sigma^2$:**

$$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

- **Anmerkung:**
  Falls die Annahme der Normalverteilung zutrifft, handelt es sich um ein **exaktes** $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall andernfalls (d.h. für nicht normalverteilte Zufallsvariablen aber großem Stichprobenumfang) um ein **approximatives**.

## Konfidenzintervall für einen Erwartungswert, unbekannte Varianz

- **Annahmen:**
  - $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt
  - $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - **Unbekannte** Varianz $\sigma^2$
- $(1-\alpha)$**-Konfidenzintervall für** $\mu$**:**

$$\left[\overline{X} - t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right] \qquad \text{mit} \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

- **Anmerkung:**
  Falls die Annahme der Normalverteilung zutrifft, handelt es sich um ein **exaktes** $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall andernfalls (d.h. für nicht normalverteilte Zufallsvariablen aber großem Stichprobenumfang) um ein **approximatives**.

## Konfidenzintervall für eine Varianz

- **Annahmen:**
  - $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt
  - $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$
- $(1-\alpha)$**-Konfidenzintervall für** $\sigma^2$**:**

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}}\right] \qquad \text{mit} \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

## Approximatives Konfidenzintervall für einen Anteilswert

- **Annahmen:**
  - $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt
  - $X_i \sim$ Bernoulli(p)
  - Großer Stichprobenumfang; Faustregel: $n > 30, np > 5$
- **Approximatives** $(1-\alpha)$**-Konfidenzintervall für** $p$**:**

$$\left[\hat{\boldsymbol{p}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\boldsymbol{p}}(1-\hat{\boldsymbol{p}})}{n}}, \hat{\boldsymbol{p}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\boldsymbol{p}}(1-\hat{\boldsymbol{p}})}{n}}\right] \qquad \text{mit} \quad \hat{\boldsymbol{p}} = \overline{X}$$

# 7 Testen von Hypothesen

Allgemein gelten folgende Annahmen und Hypothesen:

- **Annahmen:**
  - $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt
  - $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - **Bekannte** Varianz $\sigma^2$
- **Hypothesen:**
  (1) $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$
  (2) $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$
  (3) $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$

| | | $H_0 : \mu = \mu_0$<br>$H_1 : \mu \neq \mu_0$ | $H_0 : \mu = \mu_0$<br>$H_1 : \mu > \mu_0$ | $H_0 : \mu = \mu_0$<br>$H_1 : \mu < \mu_0$ |
|---|---|---|---|---|
| Gauß | AB<br>p-Wert | $\lvert z_{beob}\rvert > z_{1-\alpha/2}$<br>$2 \cdot P[Z \geq \lvert z_{beob}\rvert]$ | $z_{beob} > z_{1-\alpha}$<br>$P[Z \geq z_{beob}]$ | $z_{beob} < -z_{1-\alpha}$<br>$P[Z \leq z_{beob}]$ |
| t-test | AB<br>p-Wert | $\lvert t_{beob}\rvert > t_{1-\alpha/2;n-1}$<br>$2 \cdot P[T \geq \lvert t_{beob}\rvert]$ | $t_{beob} > t_{1-\alpha;n-1}$<br>$P[T \geq t_{beob}]$ | $t_{beob} < -t_{1-\alpha;n-1}$<br>$P[T \leq t_{beob}]$ |
| approx.<br>Binomi | AB<br>p-Wert | $\lvert z_{beob}\rvert > z_{1-\alpha/2}$<br>$2 \cdot P[Z \geq \lvert z_{beob}\rvert]$ | $z_{beob} > z_{1-\alpha}$<br>$P[Z \geq z_{beob}]$ | $z_{beob} < -z_{1-\alpha}$<br>$P[Z \leq z_{beob}]$ |

## Gauß-Test

- **Teststatistik:**

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma}$$

- **Verteilung von $Z$ unter $H_0$:**

$$Z \sim N(0,1)$$

- **Ablehnungsbereich (Test zum Niveau $\alpha$):**

  (1) $|z_{beob}| > z_{1-\alpha/2}$

  (2) $z_{beob} > z_{1-\alpha}$

  (3) $z_{beob} < -z_{1-\alpha}$

- **Überschreitungswahrscheinlichkeit:** Für $Z \sim N(0,1)$

  (1) p-Wert $= P[|Z| \geq |z_{beob}|] = 2 \cdot P[Z \geq |z_{beob}|]$

  (2) p-Wert $= P[Z \geq z_{beob}]$

  (3) p-Wert $= P[Z \leq z_{beob}]$

- **Anmerkung:** Ohne Normalverteilungsannahme ist die Verteilung von $Z$ für großen Stichprobenumfang i.Allg. approximativ gültig.

## t-Test (Ein-Stichproben-Fall, $\sigma^2$ unbekannt)

- **Teststatistik:**

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \qquad \text{mit} \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

- **Verteilung von $T$ unter $H_0$:**

$$T \sim t(n-1)$$

- **Ablehnungsbereich (Test zum Niveau $\alpha$):**

  (1) $|t_{beob}| > t_{1-\alpha/2;n-1}$

  (2) $t_{beob} > t_{1-\alpha;n-1}$

  (3) $t_{beob} < -t_{1-\alpha;n-1}$

- **Überschreitungswahrscheinlichkeit:** Für $T \sim t(n-1)$

  (1) p-Wert $= P[|T| \geq |t_{beob}|] = 2 \cdot P[T \geq |t_{beob}|]$

  (2) p-Wert $= P[T \geq t_{beob}]$

  (3) p-Wert $= P[T \leq t_{beob}]$

- **Anmerkung:** Ohne Normalverteilungsannahme ist die Verteilung von $T$ für großen Stichprobenumfang i.Allg. approximativ gültig.

## Approximativer Binomialtest

- **Teststatistik:**

$$Z = \frac{\hat{\boldsymbol{p}} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \qquad \text{mit} \quad \hat{\boldsymbol{p}} = \overline{X}$$

- **Aproximative Verteilung von $Z$ unter $H_0$:**

$$Z \sim N(0,1)$$

- **Ablehnungsbereich (Test zum Niveau $\alpha$):**

  (1) $|z_{beob}| > z_{1-\alpha/2}$
  (2) $z_{beob} > z_{1-\alpha}$
  (3) $z_{beob} < -z_{1-\alpha}$

- **Überschreitungswahrscheinlichkeit:** Für $Z \sim N(0,1)$

  (1) p-Wert $= P[|Z| \geq |z_{beob}|] = 2 \cdot P[Z \geq |z_{beob}|]$
  (2) p-Wert $= P[Z \geq z_{beob}]$
  (3) p-Wert $= P[Z \leq z_{beob}]$

- **Anmerkung:**
  Unter $H_0$ gilt (exakt): $n\hat{\boldsymbol{p}} \sim B(n, p_0)$. Mit den entsprechenden Quantilen der Binomialverteilung erhält man den sogenannten exakten Binomialtest.

## Vergleich der Erwartungswerte, $\sigma_x^2$, $\sigma_y^2$ bekannt

- **Teststatistik:**

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$$

- **Verteilung von $Z$ unter $H_0$:**

$$Z \sim N(0,1)$$

- **Ablehnungsbereich (Test zum Niveau $\alpha$):**

  (1) $|z_{beob}| > z_{1-\alpha/2}$

  (2) $z_{beob} > z_{1-\alpha}$

  (3) $z_{beob} < -z_{1-\alpha}$

- **Überschreitungswahrscheinlichkeit:** Für $Z \sim N(0,1)$

  (1) p-Wert $= P[|Z| \geq |z_{beob}|] = 2 \cdot P[Z \geq |z_{beob}|]$

  (2) p-Wert $= P[Z \geq z_{beob}]$

  (3) p-Wert $= P[Z \leq z_{beob}]$

- **Anmerkung:** Ohne Normalverteilungsannahme ist die Verteilung von $Z$ für große Stichprobenumfänge $m, n$ i.Allg. approximativ gültig.

## t-Test (Zwei-Stichproben-Fall), $\sigma_i$ unbekannt, aber $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$

- **Teststatistik:**

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S\sqrt{1/n + 1/m}} \qquad \text{mit} \quad S^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$$

- **Verteilung von $T$ unter $H_0$:**

$$T \sim t(n+m-2)$$

- **Ablehnungsbereich (Test zum Niveau $\alpha$):**

  (1) $|t_{beob}| > t_{1-\alpha/2;n+m-2}$
  (2) $t_{beob} > t_{1-\alpha;n+m-2}$
  (3) $t_{beob} < -t_{1-\alpha;n+m-2}$

- **Überschreitungswahrscheinlichkeit:** Für $T \sim t(n+m-2)$

  (1) p-Wert $= P[|T| \geq |t_{beob}|] = 2 \cdot P[T \geq |t_{beob}|]$
  (2) p-Wert $= P[T \geq t_{beob}]$
  (3) p-Wert $= P[T \leq t_{beob}]$

- **Anmerkung:** Ohne Normalverteilungsannahme ist die Verteilung von $T$ für große Stichprobenumfänge $m, n$ i.Allg. approximativ gültig.

## t-Test (Zwei-Stichproben-Fall), $\sigma_i$ unbekannt, $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$

- **Teststatistik:**

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}}$$

- **Verteilung von $T$ unter $H_0$:**

$$T \sim t(k) \qquad \text{wobei } k \text{ größte ganze Zahl mit} \quad k \leq \frac{\left(\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}\right)^2}{\frac{1}{n-1}\left(\frac{S_X^2}{n}\right)^2 + \frac{1}{m-1}\left(\frac{S_Y^2}{m}\right)^2}$$

- **Ablehnungsbereich (Test zum Niveau $\alpha$):**

  (1) $|t_{beob}| > t_{1-\alpha/2;k}$

  (2) $t_{beob} > t_{1-\alpha;k}$

  (3) $t_{beob} < -t_{1-\alpha;k}$

- **Überschreitungswahrscheinlichkeit:** Für $T \sim t(k)$

  (1) p-Wert $= P[|T| \geq |t_{beob}|] = 2 \cdot P[T \geq |t_{beob}|]$

  (2) p-Wert $= P[T \geq t_{beob}]$

  (3) p-Wert $= P[T \leq t_{beob}]$

- **Anmerkung:** Ohne Normalverteilungsannahme ist die Verteilung von $T$ für große Stichprobenumfänge $m, n$ i.Allg. approximativ gültig.

## t-Test (verbundene Stichproben)

- **Teststatistik:**

$$T = \frac{\sqrt{n}\overline{D}}{S_D} \qquad \text{mit} \quad S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2 \quad D_i = X_i - Y_i$$

- **Verteilung von $T$ unter $H_0$:**

$$T \sim t(n-1)$$

- **Ablehnungsbereich (Test zum Niveau $\alpha$):**

  (1) $|t_{beob}| > t_{1-\alpha/2;n-1}$

  (2) $t_{beob} > t_{1-\alpha;n-1}$

  (3) $t_{beob} < -t_{1-\alpha;n-1}$

- **Überschreitungswahrscheinlichkeit:** Für $T \sim t(n-1)$

  (1) p-Wert $= P[|T| \geq |t_{beob}|] = 2 \cdot P[T \geq |t_{beob}|]$

  (2) p-Wert $= P[T \geq t_{beob}]$

  (3) p-Wert $= P[T \leq t_{beob}]$

- **Anmerkung:** Ohne Normalverteilungsannahme ist die Verteilung von $T$ für großen Stichprobenumfang i.Allg. approximativ gültig.

## $\chi^2$-Unabhängigkeitstest

- **Teststatistik:**

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \frac{\left(h_{ij} - \frac{h_{i\cdot}h_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{h_{i\cdot}h_{\cdot j}}{n}}$$

- **Approximative Verteilung von $\chi^2$ unter $H_0$:**

$$\chi^2 \sim \chi^2((k-1)(m-1)) \qquad \text{falls} \quad \frac{h_{i\cdot}h_{\cdot j}}{n} \geq 5 \quad \text{für alle } i, j$$

- **Ablehnungsbereich (Test zum Niveau $\alpha$):**

  $\chi^2_{beob} > \chi^2_{1-\alpha;(k-1)(m-1)}$

- **Überschreitungswahrscheinlichkeit:** Für $\chi^2 \sim \chi^2((k-1)(m-1))$

  p-Wert $= P[\chi^2 \geq \chi^2_{beob}]$