

# Stochastische Modelle

## 9. Übung

**Aufgabe 36.** Ein Spieler kann bei einem zweiarmigen Banditen in jeder Runde Arm A oder Arm B wählen. Wählt er Arm A, gewinnt er 1 Euro mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha \in (0, 1)$  und verliert 1 Euro mit Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$ . Wählt er Arm B, gewinnt er 1 Euro mit Wahrscheinlichkeit  $\beta \in (0, 1)$  und verliert 1 Euro mit Wahrscheinlichkeit  $1 - \beta$ . Dabei sind  $\alpha$  und  $\beta$  unbekannt. Würde der Spieler Arm A bzw. B jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  wählen, ergäbe sich also in jeder Runde die Gewinnwahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ . Er wählt aber nur in der ersten Runde den Arm zufällig aus. Danach geht er wie folgt vor. Gewinnt er in Runde  $n$ , wählt er in Runde  $n + 1$  denselben Arm wie in Runde  $n$ . Andernfalls wählt er den anderen Arm.

- Berechnen Sie den Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$  der Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler in Runde  $n$  gewinnt.
- Unter welcher Bedingung an  $\alpha$  und  $\beta$  ist dieser Grenzwert größer als  $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ ?

**Aufgabe 37.** Im Lauf der Zeit bilden sich  $n$  Personen ihre Meinungen, jeweils ausgedrückt durch eine Zahl im Intervall  $[0, 1]$ . Beispielsweise kann diese Zahl den Grad der Zustimmung zu einer Aussage ausdrücken. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  hat Person  $i$  die Meinung  $x_i(0)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Zu den Zeitpunkten  $t = 1, 2, \dots$  aktualisiert jede Person ihre Meinung, indem sie zu einem gewichteten Mittel der bisherigen Meinungen übergeht:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t-1), \quad i = 1, \dots, n.$$

Person  $i$  misst also der Meinung von Person  $j$  das Gewicht  $a_{ij}$  bei. Die Gewichte sind zeitlich konstant und nichtnegativ und es gilt  $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

so halb

- Formulieren Sie geeignete Bedingungen an die Gewichte, die sicherstellen, dass ein Konsens erreicht wird in dem Sinn, dass die Grenzwerte  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t)$  für  $i = 1, \dots, n$  existieren und übereinstimmen.
- Zeigen Sie, dass die Grenzwerte gleich dem arithmetischen Mittel von  $x_1(0), \dots, x_n(0)$  sind, falls (zusätzlich zu den Bedingungen aus (a))  $a_{ij} = a_{ji}$  gilt für alle  $i \neq j$ .

**Aufgabe 38.** Sei  $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  eine Markov-Kette mit Zustandsraum  $S$  und Übergangsmatrix  $(p_{ij})_{i,j \in S}$ . Sei  $\tau_j := \inf\{n \geq 1 : X_n = j\}$  und  $f_{ij} := P(\tau_j < \infty | X_0 = i)$ ,  $i, j \in S$ .

- Zeigen Sie: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $i, j \in S$  gilt

$$P(X_n = j, X_m \neq i \text{ für alle } m > n | X_0 = i) = p_{ij}^{(n)} (1 - f_{ji}).$$

- Nehmen Sie nun an, dass  $i$  ein rekurrenter Zustand ist und dass  $j$  ein Zustand ist, für den  $f_{ij} > 0$  gilt.

- Berechnen Sie  $f_{ji}$ .
- Ist  $j$  rekurrent?
- Berechnen Sie  $f_{ij}$ .