Prof. Dr. L. Imhof Bonn, WS 2024/25

Stochastische Modelle

12. Übung

Aufgabe 47. Es sei $\{N(t) : t \geq 0\}$ ein Erneuerungsprozess mit auf dem Intervall $[0, 10]$ gleichverteilten Zwischenankunftszeiten. Bestimmen Sie näherungsweise eine Lösung der Gleichung $P(N(1440) > \alpha) = 0.05$.

Aufgabe 48. Bei einer Versicherungsgesellschaft treffen finanzielle Forderungen gemäß eines Poisson-Prozesses mit Intensität $\lambda > 0$ ein. Die Höhe der $n$ten Forderung werde durch eine diskrete Zufallsvariable X_n beschrieben. Nehmen Sie an, dass $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen sind mit $E(X_1) = \mu < \infty$ und $\text{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Ferner seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig von dem Poisson-Prozess. Es bezeichne $G(t)$ die Gesamthöhe aller bis zur Zeit t eingetroffenen Forderungen. Berechnen Sie $E[G(t)]$ und $\text{Var}[G(t)]$ für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 49. Es sei $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge von reellen Zufallsvariablen mit

$$P(0 = T_0 < T_1 < T_2 < \ldots) = P\big(\lim_{n\to\infty} T_n = \infty\big) = 1.$$

Es sei $N(t) := \max\{n \in \mathbb{N}_0 : T_n \leq t\}$, $t \geq 0$. Nehmen Sie an, dass $\{N(t) : t \geq 0\}$ ein Prozess mit unabhängigen Zuwächsen ist und dass, für $0 \leq s < t$, die Verteilung von $N(t) - N(s)$ nur von der Differenz $t - s$ abhängt.

(a) Sei $t_0 > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei X_n die Anzahl der Intervalle

$$\Big(0, \frac{1}{n}t_0\Big], \Big(\frac{1}{n}t_0, \frac{2}{n}t_0\Big], \ldots, \Big(\frac{n-1}{n}t_0, \frac{n}{n}t_0\Big],$$

die mindestens einen der Punkte $T_1, T_2, \ldots$ enthalten.

(i) Welche Verteilung hat X_n?

(ii) Bestimmen Sie für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k)$.

(iii) Berechnen Sie $P(N(t_0) = k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) Zeigen Sie: Es existiert ein $\lambda > 0$, so dass für alle $0 \leq s < t$, $N(t) - N(s)$ eine Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda(t - s)$ hat.