Prof. Dr. L. Imhof Bonn, WS 2024/25

Stochastische Modelle

5. Übung

Aufgabe 19. Es sei $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum S und Übergangsmatrix $(p_{ij})_{i,j\in S}$. Es sei $A \subset S$ und $T := \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$. Zeigen Sie: Für alle $i \in S \setminus A$ und $j \in S$ mit $p_{ij} > 0$ gilt

$$E(T|X_0 = i, X_1 = j) = 1 + E(T|X_0 = j).$$

Aufgabe 20. Es sei $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum S. Es sei $A \subset S$, so dass $S \setminus A$ eine endliche Menge ist, und für $T := \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$ gelte

$$P_i(T < \infty) > 0 \quad \text{für alle } i \in S \setminus A.$$

Zeigen Sie:

(a) Es existieren Konstanten $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$P_i(T > kN) \leq (1-\epsilon)^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } i \in S.$$

(b) Für alle $i \in S$ gilt

$$P_i(T < \infty) = 1 \quad \text{und} \quad E_i(T) \leq \frac{N}{\epsilon}.$$

Aufgabe 21. Bestimmen Sie für das Ruinproblem aus Beispiel 14, Kapitel 2, die Wahrscheinlichkeiten $P_i(X_n = M$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}_0)$, $i = 0, \ldots, M$.

Aufgabe 22. Sei $\mathcal{P} = \{(p_1, \ldots, p_n) \in [0,1]^n : p_1 + \cdots + p_n = 1\}$, seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, \infty)$, und $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(p_1, \ldots, p_n) := \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}.$$

Dabei ist $0^0 := 1$. Bestimmem Sie alle Maximalstellen von f.

Aufgabe 23. Gegeben sei eine Markov-Kette $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ mit bekanntem Zustandsraum $S = \{1, \ldots, N\}$ und unbekannter Übergangsmatrix Π. Es liegen $t+1$ Beobachtungswerte $x_0, \ldots, x_t$ für $X_0, \ldots, X_t$ vor, wobei jeder Zustand in S mindestens einmal in der Folge $x_0, \ldots, x_{t-1}$ auftritt. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\Pi}$ für Π, d.h., bestimmen Sie die Übergangsmatrix $\hat{\Pi}$, so dass $P(X_0 = x_0, \ldots, X_t = x_t)$ für $\Pi = \hat{\Pi}$ maximal wird.