Prof. Dr. L. Imhof Bonn, WS 2024/25

Stochastische Modelle

2. Übung

Aufgabe 6. Es sei X eine nichtnegative Zufallsvariable und es sei $p \in (0, \infty)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a)
$$E(X^p) = \int_0^\infty p x^{p-1} P(X \geq x)\, dx = \int_0^\infty p x^{p-1} P(X > x)\, dx$$
Der Fall $p = 1$ aus der Vorlesung kann benutzt werden.

(b) Falls $E(X^p) < \infty$, dann gilt $\lim_{x\to\infty} x^p P(X \geq x) = 0$.

(c) Die Umkehrung der Implikation in (b) gilt im Allgemeinen nicht.

(d) Falls $x^p P(X \geq x)$ beschränkt ist, dann gilt $E(X^q) < \infty$ für alle $q \in (0, p)$.

Aufgabe 7. Es seien $N, X_1, X_2, \ldots$ unabhängige diskrete Zufallsvariablen mit

$$P(N \in \mathbb{N}_0) = 1, \qquad E(N) = \nu, \qquad \mathrm{Var}(N) = \tau^2$$

und

$$E(X_i) = \mu, \qquad \mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 \qquad \text{für alle } i = 1, 2, \ldots.$$

Es sei $S_0 := 0$ und $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ für $n = 1, 2, \ldots$.

(a) Drücken Sie $E(S_N)$ durch μ und ν aus.

(b) Drücken Sie $\mathrm{Var}(S_N)$ durch μ, ν, σ^2 und τ^2 aus.

Der folgende Pseudocode beschreibt die Verwerfungsmethode (acceptance-rejection method) zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen für eine Verteilung mit einer gegebenen Dichte f, also von Realisierungen von Zufallsvariablen mit Dichte f. Dabei wird angenommen, dass Pseudozufallszahlen für eine Verteilung mit einer Dichte g erzeugt werden können und dass es eine Konstante c gibt, so dass $f(x) \leq cg(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem wird angenommen, dass Pseudozufallszahlen für eine Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, 1)$ erzeugt werden können. Die verwendeten Pseudozufallszahlen werden als Realisierungen unabhängiger Zufallsvariablen aufgefasst.

Verwerfungsmethode

repeat
  generate $x \sim g$
  generate $u \sim$ uniform distribution on $(0, 1)$
until $c\,u\,g(x) < f(x)$
return x

Die erzeugten Werte für x werden also verworfen, solange $c\,u\,g(x) \geq f(x)$ gilt. Sobald das erste Mal $c\,u\,g(x) < f(x)$ gilt, wird der aktuelle Wert x akzeptiert und ausgegeben. Die folgende Aufgabe begründet dieses Vorgehen.

Aufgabe 8. Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Wahrscheinlichkeitsdichten und es sei $c \in (0, \infty)$, so dass $f(x) \leq c\,g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es seien $X_1, U_1, X_2, U_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei jedes X_i stetig verteilt ist mit Dichte g und jedes U_i auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilt ist. Sei

$$N := \inf\{n \in \mathbb{N} : c\,U_n\,g(X_n) < f(X_n)\}.$$

Dabei ist $\inf \emptyset = \infty$ und $\inf A = \min A$ für jede nichtleere Menge $A \subset \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von N.

(b) Zeigen Sie, dass X_N die Dichte f hat.