Prof. Dr. L. Imhof Bonn, WS 2024/25

Stochastische Modelle

1. Übung

Aufgabe 1. Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsmaß P und Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$.

(a) Geben Sie disjunkte Ereignisse $B_1, B_2, \ldots$ an, so dass

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

(b) Zeigen Sie:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \quad n \in \mathbb{N}, \qquad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

(c) Zeigen Sie: Falls $P(A_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.

Aufgabe 2. Eine Urne sei zum Zeitpunkt $t = 0$ leer. Zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$ werden zwei Kugeln in die Urne gelegt, eine mit der Nummer $2t-1$ und eine mit der Nummer $2t$. Jeweils unmittelbar danach wird eine der $t+1$ Kugeln in der Urne zufällig ausgewählt und entnommen. Es bezeichne X die Anzahl der Kugeln, die für immer in der Urne verbleiben. Bestimmen Sie die Verteilung von X.

Hinweis. Bestimmen Sie zunächst für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel mit der Nummer n nie entfernt wird.

Aufgabe 3. Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit $P(X_1 = 0) < 1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Zeigen Sie:

(a) Es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass $P(X_1 \geq c) > 0$ oder $P(X_1 \leq -c) > 0$.

(b) Für jede Konstante $M \in (0, \infty)$ gilt

$$P(-M \leq S_n \leq M \text{ für alle } n \in \mathbb{N}) = 0.$$

Aufgabe 4. Geben Sie ein Beispiel für identisch verteilte Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ an, so dass $P(X_1 = 0) < 1$ ist und so dass für $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

$$P(-1 \leq S_n \leq 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}) = 1$$

gilt.

Aufgabe 5. Geben Sie ein Beispiel für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ an, so dass $P(X_n = 0) < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und so dass für $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

$$P(-1 \leq S_n \leq 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}) = 1$$

gilt.