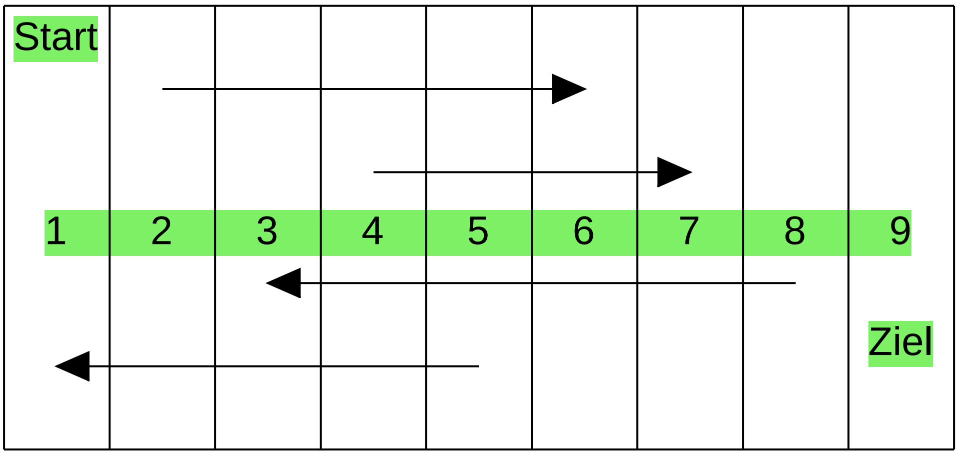
Prof. Dr. L. Imhof Bonn, WS 2024/25

Stochastische Modelle

6. Übung

Aufgabe 24. Ein Spieler befindet sich zur Zeit $t = 0$ auf Feld 1. Zu jedem Zeitpunkt $t = 1, 2, \ldots$ wirft er eine Münze. Fällt Kopf, geht er ein Feld weiter. Fällt Zahl, geht er zwei Felder weiter. Landet er auf Feld 2, geht er direkt weiter auf Feld 6. Landet er auf Feld 4, geht er direkt weiter auf Feld 7. Landet er auf Feld 5, fällt er auf Feld 1 zurück. Landet er auf Feld 8, fällt er auf Feld 3 zurück. Das Spiel endet, wenn er Feld 9 erreicht.



(a) Wie groß ist der Erwartungswert der Spieldauer? 4.5 + 15/34

(b) Nehmen Sie an, dass sich der Spieler auf Feld 6 befindet. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er Feld 9 erreicht, ohne vorher auf Feld 1 zurückzufallen?

0.5

Aufgabe 25. Betrachten Sie eine einfache Irrfahrt auf $\mathbb{N}_0$ mit absorbierender Schranke 0: Sei $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{00} = 1, \qquad p_{i,i-1} = 1 - p \quad \text{und} \quad p_{i,i+1} = p \quad \text{für alle } i = 1, 2, \ldots,$$

wobei $0 < p < 1$. Es sei $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$. Berechnen Sie die erwartete Absorptionszeit $E(T|X_0 = i)$ für jeden Anfangszustand $i \in \mathbb{N}_0$.

Hinweis. Im Fall $p \neq \frac{1}{2}$ ist die allgemeine Lösung der Rekursionsgleichung

$$x_i = 1 + (1-p)x_{i-1} + p x_{i+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

gegeben durch

$$x_i = \frac{i}{1-2p} + \alpha + \beta \left(\frac{1-p}{p}\right)^i, \qquad i = 0, 1, \ldots,$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 26. Es seien $X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n > k\right) = \lim_{n\to\infty} P(X_1 + \cdots + X_n > k).$$

(b)

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n)$$

Aufgabe 27. Betrachten Sie eine symmetrische einfache Irrfahrt auf $\mathbb{N}_0$ mit Anfangszustand 1 und absorbierender Schranke 0: Sei $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$, Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{00} = 1, \qquad p_{i,i-1} = p_{i,i+1} = \frac{1}{2} \quad \text{für alle } i = 1, 2, \ldots,$$

und $P(X_0 = 1) = 1$. Für $n = 1, 2, \ldots$ sei $Y_n := X_n - X_{n-1}$. Gilt

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty} Y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(Y_n)?$$