Prof. Dr. L. Imhof Bonn, WS 2024/25

Stochastische Modelle

8. Übung

Aufgabe 32.

(a) Gegeben sei eine Markov-Kette mit Zustandsraum S und Übergangsmatrix $(p_{ij})_{i,j\in S}$. Für $(\pi_i)_{i\in S}$ gelte $\pi_i \geq 0$ für alle $i \in S$, $\sum_{i\in S} \pi_i = 1$ und die *detailed balance* Bedingung

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \qquad i, j \in S,$$

sei erfüllt. Zeigen Sie, dass $(\pi_i)_{i\in S}$ eine stationäre Verteilung der Markov-Kette ist.

(b) Geben Sie eine Markov-Kette an, die eine stationäre Verteilung hat, welche die detailed balance Bedingung nicht erfüllt.

Aufgabe 33. Für die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} einer Markov-Kette mit Zustandsraum $\{0, \dots, m\}$ gelte $p_{ij} = 0$ falls $|i - j| > 1$ und

$$p_{i,i+1} = \lambda_i > 0, \qquad i = 0, \dots, m-1,$$

$$p_{i,i-1} = \mu_i > 0, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Bestimmen Sie eine stationäre Verteilung der Markov-Kette. Kann die Markov-Kette weitere stationäre Verteilungen haben?

Aufgabe 34. Sei V eine endliche Menge mit mindestens zwei Elementen. Sei E eine Menge von zweielementigen Teilmengen von V. Dabei wird V als Eckenmenge eines ungerichteten Graphen interpretiert und $\{x, y\} \in E$ bedeutet, dass x und y durch eine Kante verbunden sind. Die Menge der Nachbarn von $x \in V$ ist die Menge aller $y \in V$, die mit x durch eine Kante verbunden sind. Der Grad d_x von x ist die Anzahl der Nachbarn von x. Es sei $d_x \geq 1$ für alle $x \in V$.
Betrachten Sie eine Markov-Kette mit Zustandsraum V, die eine Irrfahrt eines Teilchens auf dem Graphen beschreibt. Ist das Teilchen zur Zeit $t \in \mathbb{N}_0$ im Punkt $x \in V$, wählt es den Zustand zur Zeit $t+1$ wie folgt. Mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ bleibt es in Zustand x und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ springt es zu einem zufällig gewählten Nachbarn von x. Dabei wird jeder Nachbar von x mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählt. Bestimmen Sie eine stationäre Verteilung dieser Markov-Kette.

Aufgabe 35. Betrachten Sie ein unendlich oft wiederholtes Gefangenendilemma. In jeder Runde $n = 0, 1, \dots$ kann jeder der beiden Spieler C=Kooperation oder D=Defektion wählen. In Runde 0 wählt Spieler 1 C mit Wahrscheinlichkeit z_0 und Spieler 2 wählt C mit Wahrscheinlichkeit z_0'. In jeder weiteren Runde berücksichtigt jeder Spieler die Wahl des anderen Spielers in der vorigen Runde: Spieler 1 wählt C mit Wahrscheinlichkeit p bzw. q, wenn Spieler 2 in der vorigen Runde C bzw. D gespielt hat. Spieler 2 wählt C mit Wahrscheinlichkeit p' bzw. q', wenn Spieler 1 in der vorigen Runde C bzw. D gespielt hat. Dabei seien $p, p', q, q' \in (0, 1)$. Berechnen Sie den Grenzwert für $n \to \infty$ der Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 1 in Runde n C spielt.