Prof. Dr. L. Imhof Bonn, WS 2024/25

Stochastische Modelle

7. Übung

Aufgabe 28. Eine stochastische Matrix $(p_{ij})_{i,j\in S}$ heißt *doppelt-stochastisch*, falls $\sum_{i\in S} p_{ij} = 1$ für alle $j \in S$. Zeigen Sie, dass für jede Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum S und doppelt-stochastischer Übergangsmatrix die Gleichverteilung auf S eine stationäre Verteilung ist.

Aufgabe 29. Diese Aufgabe behandelt das Mischen von Spielkarten. Gegeben sei ein Stapel von $n \geq 2$ Karten mit Nummern $1, \dots, n$. Es bezeichne S_n die Menge der Permutationen der Menge $\{1, \dots, n\}$, also der Bijektionen $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$. Der Zustand des Stapels ist die Reihenfolge der Karten und kann durch ein Element π aus S_n beschrieben werden: Karte i ist an Position $\pi(i)$, $i = 1, \dots, n$. Das Mischen erfolgt so, dass die Karte, die zur Zeit $t \in \mathbb{N}_0$ an Position j ist, zur Zeit $t+1$ an Position $Y_{t+1}(j)$ ist, $j = 1, \dots, n$. Dabei seien $Y_1, Y_2, \dots$ unabhängige identisch verteilte zufällige Permutationen aus S_n. Dann ist die Folge der Zustände des Kartenstapels eine Markov-Kette.

(a) Drücken Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markov-Kette durch die Verteilung der Y_t aus.

(b) Bestimmen Sie eine stationäre Verteilung der Markov-Kette.

Aufgabe 30. Zeigen Sie, dass jede Markov-Kette $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ mit endlichem Zustandsraum $\{1, \dots, s\}$ eine stationäre Verteilung hat. Betrachten Sie dazu die Mittel

$$q^{(n)} := \frac{1}{n}(p^{(0)} + \dots + p^{(n-1)}),$$

wobei $p^{(n)}$ die Verteilung von X_n beschreibt, also $p^{(n)} = (P(X_n = 1), \dots, P(X_n = s))$. Benutzen Sie, dass jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^s$ eine konvergente Teilfolge hat (Satz von Bolzano-Weierstraß).

Aufgabe 31. Für welche Verteilungen $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ hat die Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij} = a_{j-i}$ eine stationäre Verteilung?

Hinweis. Betrachten Sie für eine stationäre Verteilung $(\pi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ den kleinsten und den größten Zustand j mit $\pi_j = \max_{i\in\mathbb{Z}} \pi_i$.