

# Stochastische Modelle

## 4. Übung

**Aufgabe 13.** In dieser Aufgabe wird eine Markov-Kette mit vorgegebener Übergangsmatrix und Anfangsverteilung konstruiert. Die Konstruktion zeigt insbesondere, wie sich die Markov-Kette simulieren lässt.

Es sei  $S = \mathbb{N}$  oder  $S = \{1, \dots, N\}$  für ein  $N \in \mathbb{N}$ . Es sei  $(p_{ij})_{i,j \in S}$  eine stochastische Matrix und es seien  $p_i \in [0, 1]$ ,  $i \in S$ , so dass  $\sum_{i \in S} p_i = 1$ . Seien  $U_0, U_1, \dots$  unabhängige auf dem Intervall  $(0, 1)$  gleichverteilte Zufallsvariablen. Setze für alle  $i, j \in S$

$$s_i := \sum_{k=1}^i p_k, \quad s_{ij} := \sum_{k=1}^j p_{ik}.$$

Definiere  $f : S \times (0, 1) \rightarrow S$  durch

$$f(i, u) := \min\{j \in S : u \leq s_{ij}\}, \quad i \in S, u \in (0, 1).$$

Schließlich sei  $X_0 := \min\{i \in S : U_0 \leq s_i\}$  und  $X_1, X_2, \dots$  seien rekursiv definiert durch  $X_{n+1} := f(X_n, U_{n+1})$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Zeigen Sie, dass  $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  eine Markov-Kette ist mit Anfangsverteilung  $P(X_0 = i) = p_i$ ,  $i \in S$ , und Übergangsmatrix  $(p_{ij})_{i,j \in S}$ .

**Aufgabe 14.** Betrachten Sie eine einfache Irrfahrt auf  $\mathbb{Z}$  mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{i,i-1} = 1 - p, \quad p_{i,i+1} = p, \quad i \in \mathbb{Z},$$

wobei  $0 < p < 1$ . Berechnen Sie alle  $n$ -Schritt Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}^{(n)}$ ,  $i, j \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

In Satz 8, Kapitel 2, der Vorlesung ist der gegenwärtige Zeitpunkt  $n$  deterministisch. In Aufgabe 15 und Aufgabe 17 wird untersucht, wie sich die Aussage des Satzes auf zufällige Zeitpunkte erweitern lässt.

**Aufgabe 15.** Es sei  $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  eine Markov-Kette mit Zustandsraum  $\{1, 2\}$ , Übergangsmatrix  $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$  und  $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$ . Gilt für jede Zufallsvariable  $T$  mit Werten in  $\mathbb{N}$

$$P(X_{T+1} = 1 | X_0 = 1, X_T = 2) = P(X_1 = 1 | X_0 = 2)?$$

**Definition einer Stoppzeit.** Sei  $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  eine Markov-Kette mit Zustandsraum  $S$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  sei  $\mathcal{F}_n$  die Menge aller Ereignisse der Form  $\{(X_0, \dots, X_n) \in B\}$  mit  $B \subset S^{n+1}$ . Eine Zufallsvariable  $T$  mit Werten in  $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  heißt **Stoppzeit** (für die Markov-Kette), falls für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$$

gilt.

Interpretation. Die Menge  $\mathcal{F}_n$  besteht aus allen Ereignissen, die durch  $X_0, \dots, X_n$  beschrieben werden und bei einer Stoppzeit  $T$  ist das Ereignis  $\{T = n\}$  durch  $X_0, \dots, X_n$  bestimmt. Werden  $X_0, X_1, \dots$  nacheinander beobachtet bis man stoppt, dann kann die Entscheidung, ob zur Zeit  $n$  gestoppt wird, getroffen werden, sobald man  $X_0, \dots, X_n$  kennt.

**Aufgabe 16.** Sei  $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  eine Markov-Kette mit Zustandsraum  $S$ . Sei  $A \subset S$  und

$$T := \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}, \quad \tau := \inf\{n \geq 1 : X_n \in A\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass  $T$  und  $\tau$  Stoppzeiten sind.

(b) Ist  $T + 1$  eine Stoppzeit?

(c) Ist  $\tau - 1$  eine Stoppzeit?

**Aufgabe 17.** Sei  $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  eine Markov-Kette mit Zustandsraum  $S$  und  $T$  sei eine Stoppzeit. Zeigen Sie die starke Markov-Eigenschaft: Für alle  $m \in \mathbb{N}$ ,  $Z \subset S^m$ ,  $V \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$  gilt

$$P((X_{T+1}, \dots, X_{T+m}) \in Z | X_T = i, T < \infty, (X_0, \dots, X_T) \in V) = P_i((X_1, \dots, X_m) \in Z),$$

sofern  $P(X_T = i, T < \infty, (X_0, \dots, X_T) \in V) > 0$ .

**Aufgabe 18.** Es sei  $z$  ein absorbierender Zustand einer Markov-Kette  $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  und es sei  $T := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = z\}$ . Zeigen Sie für jeden Anfangszustand  $i$

$$P_i(T < \infty) = P_i\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{X_k = z\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{iz}^{(n)}.$$