Prof. Dr. L. Imhof Bonn, WS 2024/25

Stochastische Modelle

11. Übung

Aufgabe 42. Es seien U und V unabhängige Zufallsvariablen. Für die Mengen $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}^2$ gelte die folgende Implikation:

$$u \in A \text{ und } (u,v) \in B \quad \Longrightarrow \quad (w,v) \in B \text{ für alle } w \in A^c$$

(a) Zeigen Sie:

$$P(U \in A,\, (U,V) \in B) \leq P(U \in A)\, P((U,V) \in B)$$

(b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Unabhängigkeitsannahme nicht gestrichen werden kann.

Hinweis zu (a). Benutzen Sie eine Zufallsvariable W, so dass W dieselbe Verteilung hat wie U und so dass U, V, W unabhängig sind und beachten Sie die Ungleichung

$$1_A(u)\, 1_B(u,v)\, 1_{A^c}(w) \leq 1_A(u)\, 1_B(w,v)\, 1_{A^c}(w).$$

Aufgabe 43. Seien $(Y_n)_{n=1}^\infty$, $(T_n)_{n=0}^\infty$ und $\{N(t) : t \geq 0\}$ wie in Definition 3.1. Es sei $t^* > 0$ ein fester Zeitpunkt und es sei $X := Y_{N(t^*)+1}$. Interpretiert man die Y_n als Lebensdauern von nacheinander verwendeten Bauteilen, dann ist X die Lebensdauer des zur Zeit t^* verwendeten Bauteils. Zeigen Sie:

(a) $P(X \leq t) \leq P(Y_1 \leq t)$ für alle $t \geq 0$.

(b) $E(X^k) \geq E(Y_1^k)$ für alle $k > 0$.

Aufgabe 44. Es seien $U_1, \dots, U_n$ unabhängige auf dem Intervall $[a,b]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Ordnet man, für jedes ω, die Werte $U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega)$ aufsteigend an, erhält man die Ordnungsstatistiken $U_{(1)}(\omega) \leq U_{(2)}(\omega) \leq \cdots \leq U_{(n)}(\omega)$.

(a) Berechnen Sie $P(U_{(1)} < U_{(2)} < \cdots < U_{(n)})$ für $n \geq 2$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$f(u_1, \dots, u_n) := \begin{cases} \dfrac{n!}{(b-a)^n}, & a < u_1 < \cdots < u_n < b, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Dichte von $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$ ist.

Aufgabe 45. Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$. Für $n = 1, 2, \dots$ sei $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ und

$$f_n(s_1, \dots, s_n) := \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda s_n}, & 0 < s_1 < \cdots < s_n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f_n eine Dichte von $(S_1, \dots, S_n)$ ist.

Aufgabe 46. Sei $n \geq 2$. Seien $T_1, \dots, T_n$ Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichte f_n aus Aufgabe 45. Sei $Y_1 := T_1$ und $Y_k := T_k - T_{k-1}$, $k = 2, \dots, n$. Zeigen Sie, dass $Y_1, \dots, Y_n$ unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter λ sind.