

Auktionen und Märkte -

Übung 5 (Lösungsskizze)

Anmerkung: Die vorliegende Lösungsskizze wurde gewissenhaft erstellt. Es besteht jedoch keine Garantie auf Vollständige Richtigkeit.

Aufgabe 1

• Überblick:

↳ Indirekte Mechanismen: Allokationsregel

$q_i^M(b_1, \dots, b_n)$ und Zahlungsregel $t_i^M(b_1, \dots, b_n)$.

↳ Aktionen der Agenten: b_1, \dots, b_n

↳ Strategien der Agenten: Funktionen

$b_i(v_i)$, wo v_i die private Information ist.

↳ Performance: Allocations performance $q_i(v_1, \dots, v_n)$

und Zahlungsperformance $t_i(v_1, \dots, v_n)$.

↳ Allocations performance:

$$q_i(v_1, \dots, v_n) = q_i^H(b_1(v_1), \dots, b_n(v_n))$$

(in Auktionen: Bekommt i das Akt, gegeben v_1, \dots, v_n ?)

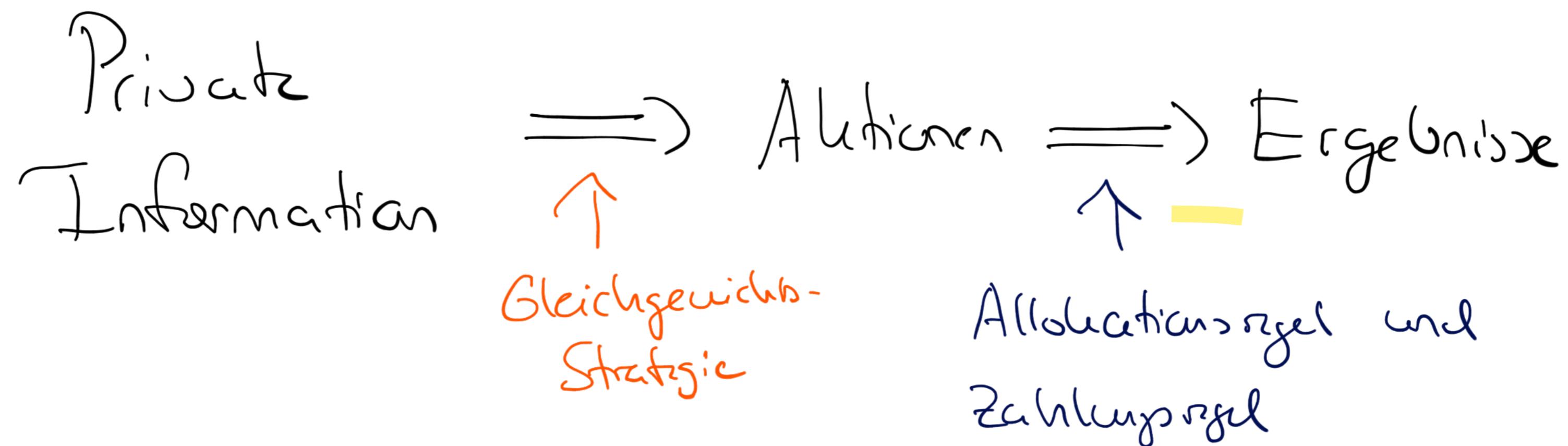
↳ Zahlungs performance: Zahlungsspiel

$$t_i(v_1, \dots, v_n) = t_i^H(b_1(v_1), \dots, b_n(v_n))$$

(in Auktionen: Wie viel zahlt i, gegeben v_1, \dots, v_n ?)

↳ Visualisierung: Performance eines (indirekten)

Mechanismus



↳ Direkter Mechanismus (unter Annahmewürdigkeit)



• ein direkter Mechanismus ist ein Mechanismus, in dem die Auszugsmenge jedes Spielers: die Menge seiner möglichen Privaten Informationen ist.

• wenn ein direkter Mechanismus anzivorträglich ist, so gilt:

↳ Zahlungsperformance = Zahlungsregel

↳ Allocationsperformance = Allocationsregel

a) Erstpreisauktion mit Reservierungspreis r

- Allokationsregel:

$$g_i^m(b_1, \dots, b_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } b_i > \max_{j \neq i} b_j \text{ und } b_i > r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

; beliebt das Gut

; beliebt das Gut nicht

- Zahlungsregel:

$$t_i^m(b_1, \dots, b_n) = \begin{cases} b_i & \text{wenn } b_i > \max_{j \neq i} b_j \text{ und } b_i > r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

!

- Strategic (Bichtfunktion): $b_i(v_i) = \frac{n-1}{n} v_i + \frac{1}{n} \frac{r^n}{v_i^{n-1}}$,
 (im Gleichgewicht!)

aus Blatt 4, Aufgabe 2

\Rightarrow all das kombinieren wir, um die Performance zu erhalten:

Allocation performance: $q_i(v_1, \dots, v_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v_i > \max_{j \neq i} v_j \text{ und } v_i > r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Zahlungsperformance: $t_i(v_1, \dots, v_n) = \begin{cases} b_i(v_i) & \text{wenn } v_i > \max_{j \neq i} v_j \text{ und } v_i > r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

b) ZPA mit Eintrittsgeld e

(Blatt 3, Aufgabe 3)

- Allokationsregel: Bieter i erhält das Gut, wenn er eintritt und das höchste Gebot abgibt.
- Zahlungsregel: Bieter i zahlt das zweithöchste Gebot, wenn er eintritt und das höchste Gebot abgibt.

• Gleichgewichts Strategie: Eintritt, wenn $v_i \geq \bar{v}_e$,
und bei Eintritt Wertschätzung bieten (aus
Blatt 3, Aufgabe 3)

→ Implikation: Bieter mit höchster Wertschätzung
erhält das Gut und zahlt das zweithöchste
Gut und e , wenn die höchste Wertschätzung
überhalb von e liegt.

↳ wenn nur i eintritt und gewinnt,

zahlt er nur e .

- Allocation performance:

$$q_i(v_1, \dots, v_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v_i \geq \sqrt{e} \text{ und } v_i > \max_{j \neq i} v_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Zahlungspflichten:

$$t_i(v_1, \dots, v_n) = \begin{cases} \max_{j \neq i} v_j + e & \text{wenn } v_i > \max_{j \neq i} v_j \geq \sqrt{e} \\ e & \text{Einstieg von } i \text{ und mindestens einem anderen Spieler} \\ 0 & \text{wenn } v_i \geq \sqrt{e} > \max_{j \neq i} v_j \text{ oder } v_i \geq \sqrt{e} \text{ und } v_i < \max_{j \neq i} v_j \\ & \text{wenn } v_i < \sqrt{e} \leftarrow \text{kein Einstieg} \end{cases}$$

c) Verkauf zum Fustpreis mit 3 Bietern

- Allokationsregel: Wenn k Spieler zum Fustpreis P laufen wollen, so erhält jeder dieser Spieler das Gut mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{k}$.
- Zahlungsregel: Wenn k Spieler zum Fustpreis P laufen wollen, so zahlt jeder dieser Spieler den Preis P mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{k}$.

• Gleichgewichts-Strategie: Kaufen, wenn $v_i \geq p_i$

Sonst nicht kaufen.

• Allocationsperformance für Spieler 1 (analog für andere)

$$q_1(v_1, \dots, v_3) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v_1 \geq p, v_2 \leq p, \text{ und } v_3 \leq p \\ \frac{1}{2} & \text{wenn } v_1 \geq p, v_2 \geq p, \text{ und } v_3 < p \quad \text{oder} \\ & \quad v_1 \geq p, v_2 < p, \text{ und } v_3 \geq p \\ \frac{1}{3} & \text{wenn } v_1 \geq p, v_2 \geq p, \text{ und } v_3 \geq p \\ 0 & \text{wenn } v_1 < p \end{cases}$$

Zahlungsperformance für Spieler 1 (analog für Anderer)

$$t_1(v_1, v_2, v_3) = \begin{cases} p & \text{wenn } v_1 \geq p, v_2 \leq p, \text{ und } v_3 \leq p \\ \frac{p}{2} & \text{wenn } v_1 \geq p, v_2 \geq p, \text{ und } v_3 \leq p \\ \frac{p}{3} & \text{wenn } v_1 \geq p, v_2 \geq p, \text{ und } v_3 \geq p \\ 0 & \text{wenn } v_1 < p \end{cases}$$

Aufgabe 2

- Ansizverträglichkeit im direkten Mechanismus mit Zahlungsregel $q(u_1, \dots, u_n)$ und Allokationsregel $t(u_1, \dots, u_n)$: Wenn alle anderen immer die Wahrsch. über ihre privaten Informationen sagen, will ich auch immer die Wahrsch. über meine privaten Informationen sagen.

Terminologie:

- ↪ \hat{U}_i : Was Spieler i über seine private Information weiß.
- ↪ U_i : Spieler i 's private Information
- ↪ Allocationsregel $q(\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n)$ und
Zahlungsregel $t(\hat{J}_1, \dots, \hat{J}_n)$

$\hookrightarrow u_i(\hat{v}_i, v_i, v_{-i})$: Erwartungsnutzen von Spieler i ,

wenn er \hat{v}_i sagt, alle anderen immer

die Wahrheit sagen, und seine Prise

Information v_i ist.

$$u_i(\hat{v}_i, v_i, v_{-i}) = v_i \cdot \int_1^t q(\hat{v}_i, v_{-i}) f(v_i) dv_{-i}$$

$\underbrace{\quad}_{:= q(\hat{v}_i)} \qquad \underbrace{\quad}_{:= E(\hat{v}_i)}$

$f(v_{-i}) = 1$, weil
 gleichverteilt auf
 Lauf

Integriert für
 alle Spieler
 $j \neq i$

Kochrezept - Anzitzverträglichkeit (AU)

- ↳ Wenn wir zeigen wollen, dass AU nicht erfüllt ist: Es reicht, zu zeigen, dass es einen Spieler i und ein v_i gibt, sodass $\hat{v}_i = v_i$ (wählt sagen) nicht optimal ist.
- ↳ Wenn wir zeigen wollen, dass AU erfüllt ist: Es muss für alle Spieler i immer (d.h. für alle v_i) optimal sein, $\hat{v}_i = v_i$ zu sagen.

$$a) t_i(\beta_1, \dots, \beta_n) = \beta_i$$

$$\rightarrow \text{Erwartungsnutzen } u_i(\hat{v}_i, v_i, v_{-i}) = \\ v_i \cdot \underbrace{\left[\Pr(\hat{v}_i \geq v_j) \right]^{n-1} - \overline{t}(\hat{v}_i)}_{= 1} = \hat{v}_i \\ v_i \cdot [\hat{v}_i]^{n-1} - \hat{\beta}_i$$

\rightarrow Nutzenmaximierung liefert:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \hat{v}_i} = (n-1) \cdot v_i \cdot [\hat{v}_i]^{n-2} - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

\rightarrow bei $U_i = 1$ ist $\hat{U}_i = 1$ nicht optimal
(wenn $n > 2$), und dann $U_i = 0 \rightarrow \hat{U}_i = 0$ nicht optimal.
 \Rightarrow Anreizurträglichkeit nicht erfüllt.

Intuition: Bisher zahlt man immer \hat{U}_i , auch
wenn Sie das Gut nicht erhalten. Somit
kann Wahlrecht sagen nicht optimal sein

\hookrightarrow man erhält das Gut nicht \Rightarrow Nutzen < 0 .

\hookrightarrow man wählt das Gut \Rightarrow Nutzen = 0.

$$b) t_i(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n) = [\hat{v}_i]^n$$

→ Erwartungsnutzen

(Gewinnwahrscheinlichkeit, um alle anderen Werte sagen

$$u(\hat{v}_i, v_i, v_{-i}) = v_i \cdot [\hat{v}_i]^{n-1} - [\hat{v}_i]^n$$

→ Nutzenmaximierung

$$\frac{\partial u_i}{\partial \hat{v}_i} = (n-1)v_i [\hat{v}_i]^{n-2} - n[\hat{v}_i]^{n-1} = 0$$

→ $\hat{v}_i = v_i$ nicht optimal, wenn $v_i = 1$.

→ nicht anizzurüglick!

c) $t_i(\hat{J}_1, \dots, \hat{J}_n) = \frac{n-1}{n} \hat{J}_i^n + c$, mit $\hat{C} \in \mathbb{R}$

→ Nutzen

$$u_i(\hat{J}_i, v_i, v_{-i}) = v_i [\hat{v}_i]^{n-1} - \frac{n-1}{n} \hat{J}_i^n - c$$

→ Nutzenmaximierung

$$\frac{\partial u_i}{\partial \hat{J}_i} = (n-1) v_i [\hat{J}_i]^{n-2} - (n-1) [\hat{v}_i]^{n-1} = 0$$

$$v_i \cdot [\hat{v}_i]^{n-2} = [\hat{v}_i]^{n-1} \Leftrightarrow v_i = \hat{v}_i$$

Greifwurfschne-
leidigkeit, wenn
alle anderen
Wahlkriterien
sagen

→ Implikation: Antrittswiglichkeit ist erfüllt
(wir haben gezeigt, dass Wahlw. sagen für
jeden Spieler i und jede U_i optimal ist).

$$d) t_i(\hat{J}_1, \dots, \hat{J}_n) = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \hat{J}_i & \text{wenn } q_i(\hat{J}_1, \dots, \hat{J}_n) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

→ das kennen wir: Das ist die Zahlung
performance im GC der Erstpräsentation. Unser

Allocationsregel in Aufgabe 2 ist gleich

der Allocationsperformance im GC der Erstpräsentation

→ daher können wir Anreizwirksamkeit schätzen

• Erwartungswertfunktion $U_i(\hat{v}_i, \hat{G}_i, v_{-i})$

$$= v_i \bar{q}_i(\hat{v}_i, v_{-i}) - \bar{t}_i(\hat{G}_i, v_{-i})$$

$$= v_i \cdot \underbrace{[\hat{v}_i]^{n-1}}_{\text{Gründungsschlechtigkeit}} - \underbrace{[\hat{v}_i]^{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \hat{v}_i}_{\text{Zahlung } v_i \text{ beim}}$$

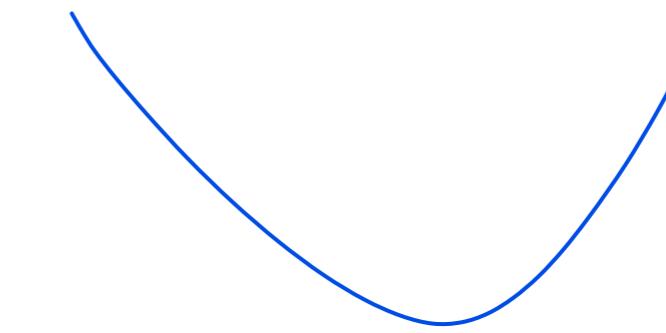
→ Nutzenmaximierung:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \hat{v}_i} = v_i(n-1)[\hat{v}_i]^{n-2} - n \cdot [\hat{v}_i]^{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow v_i \cdot [\hat{v}_i]^{n-2} = [\hat{v}_i]^{n-1} \Leftrightarrow \boxed{\hat{v}_i = v_i}$$

→ Anreizurträglichkeit ist erfüllt!

Genereller Take-away



- Nehmen Sie einen indirekten Mechanismus, leiten Sie die Gleichgewichtsstrategien her, und berechnen Sie die Allocationsperformance $q_i^*(v_i, v_{-i})$ und die Zahlungsperformance $t_i^*(v_i, v_{-i})$
- dann ist ein direkter Mechanismus mit Zahlungsregel $t_i^*(\hat{v}_i, \hat{v}_{-i})$ und Allocationsregel $q_i^*(\hat{v}_i, \hat{v}_{-i})$ Anreizurträglich!

Aufgabe 3

a) i) $\bar{q}_1(u_1) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } u_1 \leq \frac{1}{2} \\ 2u_1 - 1 & \text{wenn } u_1 > \frac{1}{2} \end{cases}$

ii) Satz zur Antrizwürdigkeit, Teil (ii)

- gegeben $\bar{g}(u_1)$, schwach monoton steigend,
muss $J(u_1)$ das folgende erfüllen:

$$\bar{E}_i(v_i) = \bar{E}_i(0) + \bar{q}_i(v_i) \cdot v_i - \int_0^{v_i} \bar{q}_i(x) dx$$

\rightarrow Fall 1: $v_1 \leq \frac{1}{2}$

$$\bar{E}_1(v_1) = \bar{E}_1(0) + 0 - \int_0^{v_1} 0 dx = \bar{E}_1(0)$$

\rightarrow Fall 2: $v_1 > \frac{1}{2}$

$$\bar{E}_1(v_1) = \bar{E}_1(0) + \bar{q}(v_1) \cdot v_1 - \int_0^{\frac{1}{2}} 0 dx - \int_{\frac{1}{2}}^{v_1} \bar{q}_1(x) dx =$$

$$\bar{E}_1(0) + (2v_1 - 1) \cdot v_1 - 0 - \int_{1/2}^{v_1} (2x - 1) dx$$

=

$$\bar{E}_1(0) + 2v_1^2 - v_1 - \left[x^2 - x \right]_{1/2}^{v_1} =$$

$$\bar{E}_1(0) + 2v_1^2 - v_1 - \left[(v_1^2 - v_1) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

=

$\underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}_{= -\frac{1}{4}}$

$$\bar{E}_1(0) - \frac{1}{4} + v_1^2$$

6) Abbildung 2

- Ja, weil sowohl $\bar{q}_1(u_1)$ und $\bar{q}_2(v_2)$ schwach monoton steigend sind. Mit Zählerprogramm $\bar{t}_1(u)$ und $\bar{t}_2(v_2)$, welcher Bedingung (i,j) des Satzes zur Anwendbarkeit erfüllen, läßt sich nur dann einen zweizähligen direkten Mechanismus (\Rightarrow) $q(u_1, v_2)$ implementieren!

Abbildung 2 - Ja

- die Zeitpräzision mit Reservat. pr's
- Samt gibt es einen direkten Mechanismus, der die Allokationsperformance implementiert.
- Auch jene Allokationsperformance nach dem Realisationszeitraum ist höher als diejenige, die nach dem Realisationszeitraum nach dem Implementierungszeitraum.

Abbildung 3

Ja, denn $\tilde{g}_1(u)$ ist streng monoton
steigend (wir brauchen natürlich nur schwach
monoton steigend) und $\tilde{g}_2(v_2)$ ist immer 0,
ab - auch schwach monoton steigend
 \rightarrow gleicher Argument wie in Abbildung 2.

c) Wichtig: U_i 's sind hier nicht

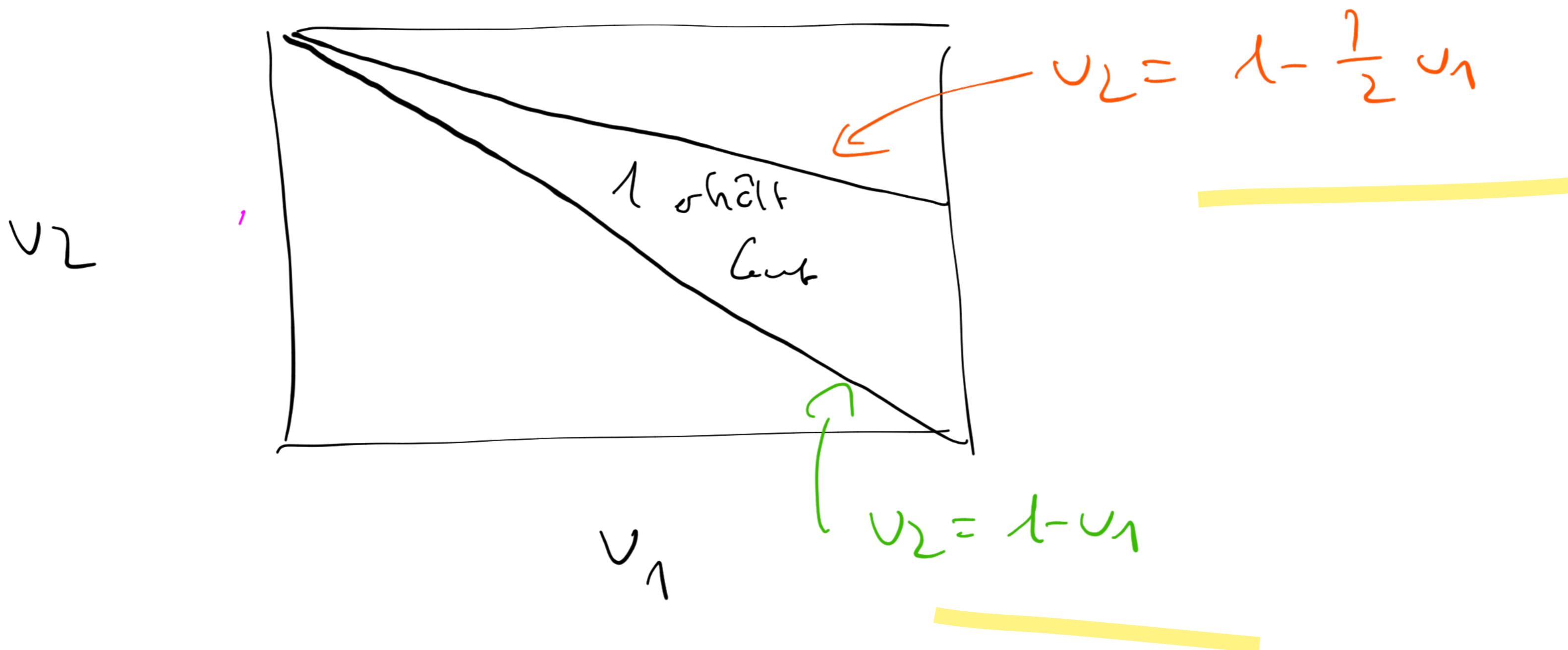
gleichverteilt.

$$F(u_i) = \underline{u_i^2} \Rightarrow f(u_i) = \underline{2u_i}$$

\Rightarrow mehr Dicht auf hohen U_i 's

Aus Abbildung 3 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung, die man da sieht, die Figur:

$$\begin{aligned}
 \bar{g}_n(v_1) &= \Pr\left(v_2 \in \left(1-v_1, 1-\frac{1}{2}v_1\right)\right) \\
 &= \Pr\left(v_2 \leq 1-\frac{1}{2}v_1\right) - \Pr\left(v_2 \leq 1-v_1\right) \\
 &= F\left(1-\frac{1}{2}v_1\right) - F\left(1-v_1\right)
 \end{aligned}$$



• Weiterschreiben liefert:

$$\underline{\bar{q}_1(v_1)} =$$

$$\underline{F\left(1 - \frac{1}{2}v_1\right)} - F(1-v_1)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}v_1\right)^2 - (1-v_1)^2 = \left(\underline{1 - 2 \cdot \frac{1}{2}v_1 \cdot 1} + \frac{1}{4}v_1^2\right) - \left(\underline{1 - 2v_1 + v_1^2}\right)$$

$$v_1 - \frac{3}{4}v_1^2$$

Implikation

$$\frac{\partial \bar{g}_1}{\partial v_1} = 1 - \frac{3}{2} v_1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{g}_1}{\partial v_1} < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{2} v_1 < 0$$

$\Leftrightarrow v_1 \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]$

\Rightarrow Somit ist $\bar{g}_1(v_1)$ nicht schwach monoton steigend

Nach dem Satz zur Anwendbarkeit

ist jene Allgemeinheit perfumus also

nichts implementierbar!

(den Teil (i) wir immer verloft)