Auktionen und Märkte

Statistik

Groh/von Wangenheim

Universität Bonn, Wintersemester 2024/2025

Motivation: Würfelbeispiel

Ein Würfel wird in einem Becher geworfen.

Augenzahl: ZV $\tilde{x}$ mit Ausprägungen in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Frage 1: Was ist der Erwartungswert der Augenzahl?

Frage 2: Jemand schaut unter den Becher und teilt Ihnen mit, dass es keine 6 ist. Was ist der Erwartungswert der Augenzahl unter dieser Information?

Motivation: Würfelbeispiel

Zwei Würfel werden in einem Becher geworfen.

Augenzahl erster Würfel: $\tilde{x}_1$
Augenzahl zweiter Würfel: $\tilde{x}_2$

Höchste Augenzahl: $\tilde{x}_{(1)}$ bzw. $\tilde{x}_{(1:2)}$
Zweithöchste Augenzahl: $\tilde{x}_{(2)}$ bzw. $\tilde{x}_{(2:2)}$

Frage 3: Was ist der Erwartungswert der höchsten Augenzahl?

Frage 4: Jemand schaut unter den Becher und teilt Ihnen mit, dass die höchste Augenzahl kleiner als 6 ist. Was ist der Erwartungswert der höchsten Augenzahl unter dieser Information?

Frage 5: Jemand schaut unter den Becher und teilt Ihnen mit, dass die höchste Augenzahl eine 6 ist. Was ist der Erwartungswert der zweithöchsten Augenzahl unter dieser Information?

Motivation: Würfelbeispiel

Was lernt man daraus?

Man muss nur berechnen, wie neue Information bzw. die Betrachtung von Ordnungsstatistiken die Verteilung ändert.

Anschließend berechnet man einen "normalen" Erwartungswert mit der geänderten Verteilung.

Dasselbe wird auch für die Art von Informationsverarbeitung und für die Ordnungsstatistiken gelten, die für unser Auktionsproblem relevant sind.

Ordnungsstatistiken

Gegeben: n unabhängig und identisch verteilte ZVen $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ mit Ausprägungen in $[a, b]$; die Randverteilungsfunktion $F(x)$ besitzt eine stetige auf $[a, b]$ strikt positive Dichtefunktion $f(x)$

Gesucht: ZVen, die die Werte geordnet ausgeben

Notation:

$\tilde{x}_{(1:n)}$ (bzw. $\tilde{x}_{(1)}$) ist die ZV, die den höchsten Wert ...

$\tilde{x}_{(2:n)}$ (bzw. $\tilde{x}_{(2)}$) ist die ZV, die den zweithöchsten Wert ...

$\tilde{x}_{(k:n)}$ (bzw. $\tilde{x}_{(k)}$) ist die ZV, die den k-höchsten Wert ...

... der n ZVen $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ ausgibt

Ziel: Berechnung von Erwartungswerten von $\tilde{x}_{(1:n)}$ und $\tilde{x}_{(2:n)}$

Erste Ordnungsstatistik

Verteilungsfunktion von $\tilde{x}_{(1:n)}$:

$$F_{(1:n)}(x) = F(x)^n$$

Dichtefunktion von $\tilde{x}_{(1:n)}$:

$$f_{(1:n)}(x) = nF(x)^{n-1}f(x)$$

Beispiel ($n = 5$, $\tilde{x}_i \sim U[0, 1]$):

$$F_{(1:5)}(x) = x^5$$

$$f_{(1:5)}(x) = 5x^4$$

Herleitung der Verteilungsfunktion der ersten Ordnungsstatistik

$$
\begin{aligned}
F_{(1:n)}(x) &= \text{Wkeit, dass die größte Ausprägung der} \\
&\qquad n \text{ iid ZVen kleiner gleich } x \text{ ist} \\
&= \text{Prob}\{\tilde{x}_{(1:n)} \leq x\} \\
&= \text{Prob}\{\tilde{x}_1 \leq x, \ldots, \tilde{x}_n \leq x\} \\
&= \text{Prob}\{\tilde{x}_1 \leq x\} \times \cdots \times \text{Prob}\{\tilde{x}_n \leq x\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(da unabhängig verteilt)} \\
&= \text{Prob}\{\tilde{x}_i \leq x\}^n \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(da identisch verteilt)} \\
&= F(x)^n
\end{aligned}
$$

Zweite Ordnungsstatistik

Verteilungsfunktion von $\tilde{x}_{(2:n)}$:

$$\begin{aligned} F_{(2:n)}(x) &= F(x)^n + n(1-F(x))F(x)^{n-1} \\ &= nF(x)^{n-1} - (n-1)F(x)^n \end{aligned}$$

Dichtefunktion von $\tilde{x}_{(2:n)}$:

$$f_{(2:n)}(x) = n(n-1)F(x)^{n-2}f(x)(1-F(x))$$

Beispiel (Fortsetzung; $n = 5$, $\tilde{x}_i \sim U[0,1]$):

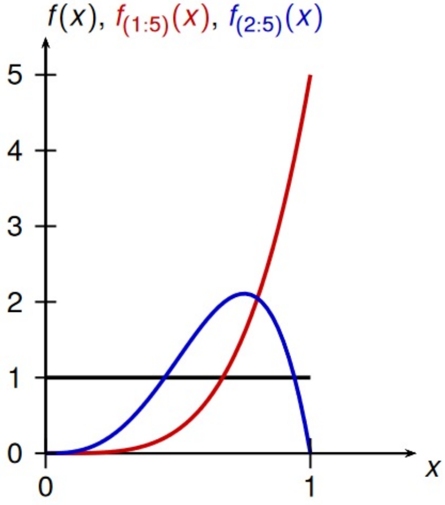
$$F_{(2:5)}(x) = 5x^4 - 4x^5$$

$$f_{(2:5)}(x) = 20x^3(1-x)$$

Herleitung der Verteilungsfunktion der zweiten Ordnungsstatistik

$$
\begin{aligned}
F_{(2:n)}(x) &= \text{Wkeit, dass die zweitgrößte Ausprägung der} \\
&\qquad n \text{ iid ZVen kleiner gleich } x \text{ ist} \\
&= \text{Prob}\{\tilde{x}_{(2:n)} \leq x\} \\
&= \text{Prob}\{\tilde{x}_1 \leq x, \ldots, \tilde{x}_n \leq x\} \\
&\qquad \text{(alle kleiner gleich } x\text{)} \\
&\quad + \text{Prob}\{\exists i : \tilde{x}_i > x \text{ und } \forall j \neq i : \tilde{x}_j \leq x\} \\
&\qquad \text{(genau eine größer } x\text{)} \\
&= F(x)^n + \underbrace{n}_{\substack{n \text{ Möglichkeiten} \\ i \text{ zu wählen}}} \underbrace{\text{Prob}\{\tilde{x}_i > x\} \times (\text{Prob}\{\tilde{x}_j \leq x\})^{n-1}}_{\text{Wkeit, dass } \tilde{x}_i > x \text{ und } \tilde{x}_j \leq x \text{ für alle } j \neq i} \\
&\qquad \text{(da unabhängig und identisch verteilt)} \\
&= F(x)^n + n(1 - F(x))F(x)^{n-1}
\end{aligned}
$$

Dichte der Ordnungsstatistik: graphisch



Erwartungswert

Erwartungswert einer ZV:

$$\mathbb{E}[\tilde{x}_i] = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Erwartungswert einer Ordnungsstatistik:

$$\mathbb{E}[\tilde{x}_{(1:n)}] = \int_a^b x \cdot f_{(1:n)}(x) dx$$

Erwartungswert einer Funktion einer ZV:

$$\mathbb{E}[b(\tilde{x}_i)] = \int_a^b b(x) \cdot f(x) dx$$

Erwartungswert einer Funktion einer Ordnungsstatistik:

$$\mathbb{E}[b(\tilde{x}_{(1:n)})] = \int_a^b b(x) \cdot f_{(1:n)}(x) dx$$

Erwartungswert

Beispiel (Fortsetzung; $n = 5$, $\tilde{x}_i \sim U[0, 1]$):

$$\mathbb{E}[\tilde{x}_i] = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[\tilde{x}_{(1:5)}] = \frac{5}{6}$$

$$\mathbb{E}[\tilde{x}_{(2:5)}] = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{4}{5}\tilde{x}_{(1:5)}\right] = \frac{2}{3}$$

Erwartung einer ZV bedingt auf Info über diese ZV

Fragestellung jetzt: Wie ist der Erwartungswert von $\tilde{x}_i$ eingeschränkt auf die Fälle, in denen $\tilde{x}_i \geq z$ gilt?

Bedingte Dichte:

$$f(x|\tilde{x}_i \geq z) = \begin{cases} \frac{f(x)}{1-F(z)} & \text{falls } x \geq z \\ 0 & \text{falls } x < z \end{cases}$$

Bedingter Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{x}_i|\tilde{x}_i \geq z] &= \int_a^b x \cdot f(x|\tilde{x}_i \geq z)dx \\ &= \int_z^b x \cdot \frac{f(x)}{1-F(z)}dx \end{aligned}$$

Erwartung einer ZV bedingt auf Info über diese ZV

Beispiel (Fortsetzung; $n = 5$**,** $\tilde{x}_i \sim U[0,1]$**):**

$$f\left(x|\tilde{x}_i \geq \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{falls } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\left[\tilde{x}_i|\tilde{x}_i \geq \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4}$$

Herleitung für die Bedingung $\tilde{x}_i \leq z$ ist analog