Auktionen und Märkte –

Übung 5 (Lösungsskizze)

<u>Anmerkung</u>: Die vorliegende Lösungsskizze wurde gewissenhaft erstellt. Es besteht jedoch keine Garantie auf vollständige Richtigkeit.

Aufgabe 1

· Überblick:

↳ Indirekte Mechanismen: Allokationsregel $q_i^M(b_1, \dots, b_N)$ und Zahlungsregel $t_i^M(b_1, \dots, b_n)$.

↳ Aktionen der Agenten: $b_1, \dots, b_n$

↳ Strategien der Agenten: Funktionen $b_i(v_i)$, wo v_i die private Information ist.

↳ Performance: Allokationsperformance $q_i(v_1,\dots,v_N)$

und Zahlungsperformance $t_i(v_1,\dots,v_N)$.

↳ Allokationsperformance:

Allokationsregel

Strategien

$$q_i(\underline{v_1,\dots,v_N}) = q_i^M\big(b_1(v_1),\dots,b_N(v_N)\big)$$

(in Auktionen: bekommt i das Gut, gegeben $v_1,\dots,v_N$?)

↳ Zahlungsperformance:

Zahlungsregel

Strategien

$$t_i(v_1,\dots,v_N) = t_i^M\big(b_1(v_1),\dots,b_N(v_N)\big)$$

(in Auktionen: wie viel zahlt i, gegeben $v_1,\dots,v_N$?)

↳ Visualisierung: Performance eines (indirekten) Mechanismus

$$\text{Private Information} \xRightarrow[\text{Gleichgewichts-Strategie}]{} \text{Aktionen} \xRightarrow[\text{Allokationsregel und Zahlungsregel}]{} \text{Ergebnisse}$$

↳ Direkter Mechanismus (unter Anreizverträglichkeit)

$$\text{Private Information} \Longrightarrow \text{Ergebnisse}$$

- ein direkter Mechanismus ist ein Mechanismus, in dem die Aktionsmenge jedes Spielers i die Menge seiner möglichen privaten Informationen ist.

- wenn ein direkter Mechanismus anreizverträglich ist, so gilt:

  ↳ Zahlungsperformance = Zahlungsregel

  ↳ Allokationsperformance = Allokationsregel

a) Erstpreisauktion mit Reservationspreis r

i bekommt das Gut

· Allokationsregel:

$$q_i^M(b_1,\dots,b_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } b_i > \max_{j \neq i} b_j \text{ \underline{und} } b_i > r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

i bekommt das Gut <u>nicht</u>

· Zahlungsregel:

$$t_i^M(b_1,\dots,b_n) = \begin{cases} b_i & \text{wenn } b_i > \max_{j \neq i} b_j \text{ \underline{und} } b_i > r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Strategie (Bietfunktion): $b_i(v_i) = \frac{n-1}{n} v_i + \frac{1}{n} \frac{r^n}{v_i^{n-1}}$,
(im Gleichgewicht!)

aus Blatt 4, Aufgabe 2

$\Rightarrow$ all das kombinieren wir, um die Performance zu erhalten:

- Allokationsperformance: $q_i(v_1, \dots, v_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v_i > \max_{j \neq i} v_j \text{ und } v_i > r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- Zahlungsperformance: $t_i(v_1, \dots, v_n) = \begin{cases} b_i(v_i) & \text{wenn } v_i > \max_{j \neq i} v_j \text{ und } v_i > r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

b) ZPA mit Eintrittsgeld e
(Blatt 3, Aufgabe 3)

- Allokationsregel: Bieter i erhält das Gut, wenn er eintritt und das höchste Gebot abgibt.

- Zahlungsregel: Bieter i zahlt das zweithöchste Gebot, wenn er eintritt und das höchste Gebot abgibt.

- Gleichgewichts Strategie: Eintritt, wenn $v_i \geq \hat{v}_e$, und bei Eintritt Wertschätzung bieten (aus Blatt 3, Aufgabe 3)

→ Implikation: Bieter mit höchster Wertschätzung erhält das Gut und zahlt das zweithöchste Gebot und e, <u>wenn</u> die höchste Wertschätzung überhalb von e liegt.

↳ wenn nur i eintritt und gewinnt, zahlt er nur e.

- Allokationsperformance:

$$q_i(v_1, \dots, v_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v_i \geq \sqrt{e} \text{ und } v_i > \max\limits_{j \neq i} v_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Zahlungsperformance:

$$t_i(v_1, \dots, v_n) = \begin{cases} \max\limits_{j \neq i} v_j + e & \text{wenn } v_i > \max\limits_{j \neq i} v_j \geq \sqrt{e} \\ & \text{Eintritt von } i \text{ und mindestens einem anderen Spieler} \\ e & \text{wenn } v_i \geq \sqrt{e} > \max\limits_{j \neq i} v_j \text{ \underline{oder}} \\ & v_i \geq \sqrt{e} \text{ und } v_i < \max\limits_{j \neq i} v_j \\ 0 & \text{wenn } v_i < \sqrt{e} \leftarrow \text{kein Eintritt} \end{cases}$$

c) Verkauf zum Festpreis mit 3 Bietern

- Allokationsregel: Wenn k Spieler zum Festpreis p kaufen wollen, so erhält jeder dieser Spieler das Gut mit Wahrscheinlichkeit $1/k$.

- Zahlungsregel: Wenn k Spieler zum Festpreis p kaufen wollen, so zahlt jeder dieser Spieler den Preis p mit Wahrscheinlichkeit $1/k$.

· Gleichgewichts-Strategie: Kaufen, wenn $v_i \geq p$, sonst nicht kaufen.

· Allokationsperformance für Spieler 1 (analog für andere)

$$q_1(v_1, \dots, v_3) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v_1 \geq p,\ v_2 < p, \text{ und } v_3 < p \\ 1/2 & \text{wenn } v_1 \geq p,\ v_2 \geq p, \text{ und } v_3 < p \ \underline{\text{oder}} \\ & \phantom{\text{wenn }} v_1 \geq p,\ v_2 < p, \text{ und } v_3 \geq p \\ 1/3 & \text{wenn } v_1 \geq p,\ v_2 \geq p, \text{ und } v_3 \geq p \\ 0 & \text{wenn } v_1 < p \end{cases}$$

· Zahlungsperformance für Spieler 1 (analog für andere)

$$t_1(v_1, v_2, v_3) = \begin{cases} p & \text{wenn } v_1 \geq p,\ v_2 < p,\ \text{und } v_3 < p \\ \frac{p}{2} & \text{wenn } v_1 \geq p,\ v_2 \geq p,\ \text{und } v_3 < p \ \underline{\text{oder}} \\ & \phantom{\text{wenn }} v_1 \geq p,\ v_2 < p,\ \text{und } v_3 \geq p \\ \frac{p}{3} & \text{wenn } v_1 \geq p,\ v_2 \geq p,\ \text{und } v_3 \geq p \\ 0 & \text{wenn } v_1 < p \end{cases}$$

Aufgabe 2

- Anreizverträglichkeit im direkten Mechanismus mit Zahlungsregel $q(v_1, \dots, v_n)$ und Allokationsregel $t(v_1, \dots, v_n)$: Wenn alle anderen immer die Wahrheit über ihre private Information sagen, will ich auch immer die Wahrheit über meine private Information sagen.

· Terminologie:

↳ $\hat{v}_i$: Was Spieler i über seine private Information sagt.

↳ v_i : Spieler i's private Information

↳ Allokationsregel $q(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n)$ und
Zahlungsregel $t(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n)$

↳ $u_i(\hat{v}_i, v_i, v_{-i})$: Erwartungsnutzen von Spieler i, wenn er $\hat{v}_i$ sagt, alle anderen immer die Wahrheit sagen, und seine private Information v_i ist.

$f(v_{-i}) = 1$, weil gleichverteilt auf $[0,1]$

$$u_i(\hat{v}_i, v_i, v_{-i}) = v_i \cdot \underbrace{\int q(\hat{v}_i, v_{-i}) f(v_{-i}) dv_{-i}}_{:= \bar{q}(\hat{v}_i)}$$

Integriert für alle Spieler $j \neq i$

$$\underbrace{\int t(\hat{v}_i, v_{-i}) f(v_{-i}) dv_{-i}}_{:= \bar{t}(\hat{v}_i)}$$

· Kochrezept – Anreizverträglichkeit (AU)

↳ wenn wir zeigen wollen, dass AU nicht erfüllt ist: Es reicht, zu zeigen, dass es einen Spieler i und ein v_i gibt, sodass $\hat{v}_i = v_i$ (Wahrheit sagen) nicht optimal ist.

↳ wenn wir zeigen wollen, dass AU erfüllt ist: Es muss für alle Spieler i immer (d.h. für alle v_i) optimal sein, $\hat{v}_i = v_i$ zu sagen.

a) $t_i(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n) = \hat{v}_i$

-> Erwartungsnutzen $u_i(\hat{v}_i, v_i, v_{-i}) =$

$$v_i \cdot [Pr(\hat{v}_i \geq v_j)]^{n-1} - \underbrace{E(\hat{v}_i)}_{= \hat{v}_i}$$

$$=$$

$$v_i \cdot [\hat{v}_i]^{n-1} - \hat{v}_i$$

-> Nutzenmaximierung liefert:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \hat{v}_i} = (n-1) \cdot v_i \cdot [\hat{v}_i]^{n-2} - 1 \overset{!}{=} 0$$

$\rightarrow$ bei $v_i = 1$ ist $\hat{v}_i = 1$ nicht optimal (wenn $n > 2$), und somit $v_i = 0 \rightarrow \hat{v}_i = 0$ nicht optimal.

$\Rightarrow$ Anreizverträglichkeit <u>nicht</u> erfüllt.

<u>Intuition</u>: Bieter zahlen immer $\hat{v}_i$, auch wenn sie das Gut nicht erhalten. Somit kann Wahrheit sagen nicht optimal sein

$\hookrightarrow$ man erhält das Gut nicht $\Rightarrow$ Nutzen < 0.

$\hookrightarrow$ man erhält das Gut $\Rightarrow$ Nutzen $= 0$.

b) $t_i(\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_n) = [\hat{v}_i]^n$

Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn alle anderen Wahrheit sagen

→ Erwartungsnutzen

$$u(\hat{v}_i, v_i, v_{-i}) = v_i \cdot [\hat{v}_i]^{n-1} - [\hat{v}_i]^n$$

→ Nutzenmaximierung

$$\frac{\partial u_i}{\partial \hat{v}_i} = (n-1) v_i [\hat{v}_i]^{n-2} - n [\hat{v}_i]^{n-1} = 0$$

→ $\hat{v}_i = v_i$ nicht optimal, wenn $v_i = 1$.

→ <u>nicht</u> anreizverträglich!

c) $t_i(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n) = \frac{n-1}{n} \hat{v}_i^{\,n} + c$, mit $c \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ Nutzen $u_i(\hat{v}_i, v_i, v_{-i}) =$

$$v_i \left[\hat{v}_i \right]^{n-1} - \underline{\frac{n-1}{n} \hat{v}_i^{\,n} - c}$$

Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn alle anderen Wahrheit sagen

$\rightarrow$ Nutzenmaximierung

$$\frac{\partial u_i}{\partial \hat{v}_i} = (n-1) v_i \left[\hat{v}_i\right]^{n-2} - (n-1)\left[\hat{v}_i\right]^{n-1} = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$v_i \cdot \left[\hat{v}_i\right]^{n-2} = \left[\hat{v}_i\right]^{n-1} \Longleftrightarrow \boxed{v_i = \hat{v}_i}$$

→ Implikation: Anreizverträglichkeit ist erfüllt (wir haben gezeigt, dass Wahrheit sagen für jeden Spieler i und jedes v_i optimal ist).

d) $t_i(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n) = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \hat{v}_i & \text{wenn } q_i(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

→ das kennen wir: Das ist die Zahlungsperformance im GG der Erstpreisauktion. Unsere Allokationsregel in Aufgabe 2 ist gleich der Allokationsperformance im GG der Erstpreisauktion

→ daher können wir Anreizverträglichkeit schon „erahnen"

- Erwartungsnutzen $u_i(v_i, \hat{v}_i, v_{-i})$

$$= v_i \, \bar{q}_i(\hat{v}_i, v_{-i}) - \bar{t}_i(\hat{v}_i, v_{-i})$$

$$= v_i \cdot \underbrace{[\hat{v}_i]^{n-1}} - \underbrace{[\hat{v}_i]^{n-1}} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n} \cdot \hat{v}_i}_{\text{Zahlung bei Gewinn}}$$

Gewinnwahrscheinlichkeit

→ Nutzenmaximierung:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \hat{v}_i} = v_i (n-1) [\hat{v}_i]^{n-2} - n \cdot [\hat{v}_i]^{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow v_i \cdot [\hat{v}_i]^{n-2} = [\hat{v}_i]^{n-1} \Leftrightarrow \boxed{\hat{v}_i = v_i}$$

→ Anreizverträglichkeit ist erfüllt!

<u>Genereller Take-away</u>

- Nehmen sie einen indirekten Mechanismus, leiten Sie die Gleichgewichts-Strategien her, und berechnen sie die Allokationsperformance $q_i^*(v_i, v_{-i})$ und die Zahlungsperformance $t_i^*(v_i, v_{-i})$
- dann ist ein direkter Mechanismus mit Zahlungsregel $t_i^*(\hat{v}_i, \hat{v}_{-i})$ und Allokationsregel $q_i^*(\hat{v}_i, \hat{v}_{-i})$ anreizverträglich!

Aufgabe 3

a) i) $\bar{q}_1(u_1) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } u_1 \leq 1/2 \\ 2u_1 - 1 & \text{wenn } u_1 \geq 1/2 \end{cases}$

ii) Satz zur Anreizverträglichkeit, Teil (ii)

- gegeben $\bar{q}(u_1)$, schwach monoton steigend,
  muss $I(u_1)$ das folgende erfüllen:

$$\bar{t}_i(u_i) = \bar{t}_i(0) + \bar{q}_i(u_i) \cdot u_i - \int_0^{u_i} \bar{q}_i(x)\,dx$$

$\rightarrow$ Fall 1: $u_1 \leq 1/2$

$$\bar{t}_1(u_1) = \bar{t}_1(0) + 0 - \int_0^{u_1} 0\,dx = \bar{t}_1(0)$$

$\rightarrow$ Fall 2: $u_1 > 1/2$

$$\bar{t}_1(u_1) = \bar{t}_1(0) + \bar{q}(u_1) \cdot u_1 - \int_0^{1/2} 0\,dx - \int_{1/2}^{u_1} \bar{q}_1(x)\,dx =$$

$$\bar{t}_1(0) + (2u_1 - 1)\cdot u_1 - 0 - \int_{1/2}^{u_1} (2x-1)\,dx$$

$$=$$

$$\bar{t}_1(0) + 2u_1^2 - u_1 - \left[x^2 - x\right]_{1/2}^{u_1} =$$

$$\bar{t}_1(0) + 2u_1^2 - u_1 - \left[(u_1^2 - u_1) - \underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)}_{= -\frac{1}{4}}\right]$$

$$=$$

$$\bar{t}_1(0) - \frac{1}{4} + u_1^2$$

b) Abbildung 2

- Ja, weil sowohl $\bar{q}_1(v_1)$ und $\bar{q}_2(v_2)$ schwach monoton steigend sind. Mit Zahlungsregeln $\bar{t}_1(v_1)$ und $\bar{t}_2(v_2)$, welche Bedingung (ii) des Satzes zur Anreizverträglichkeit erfüllen, haben wir dann einen anreizverträglichen direkten Mechanismus $\Leftarrow$ $q(v_1, v_2)$ implementierbar!

Abbildung 2 . Ja

- die Zweitpreisauktion mit Reservationspreis 0,5 implementiert jene Allokationsperformance.

- Somit gibt es nach dem Revelationsprinzip auch einen direkten Mechanismus, der jene Allokationsperformance implementiert.

Abbildung 3

Ja, denn $\overline{q}_1(u_1)$ ist strikt monoton steigend (wir brauchen natürlich nur schwach monoton steigend) und $\overline{q}_2(u_2)$ ist immer 0, also auch schwach monoton steigend

→ gleiches Argument wie in Abbildung 2.

c) Wichtig: u_i's sind hier nicht gleichverteilt.

$F(u_i) = u_i^2 \Rightarrow f(u_i) = 2u_i$

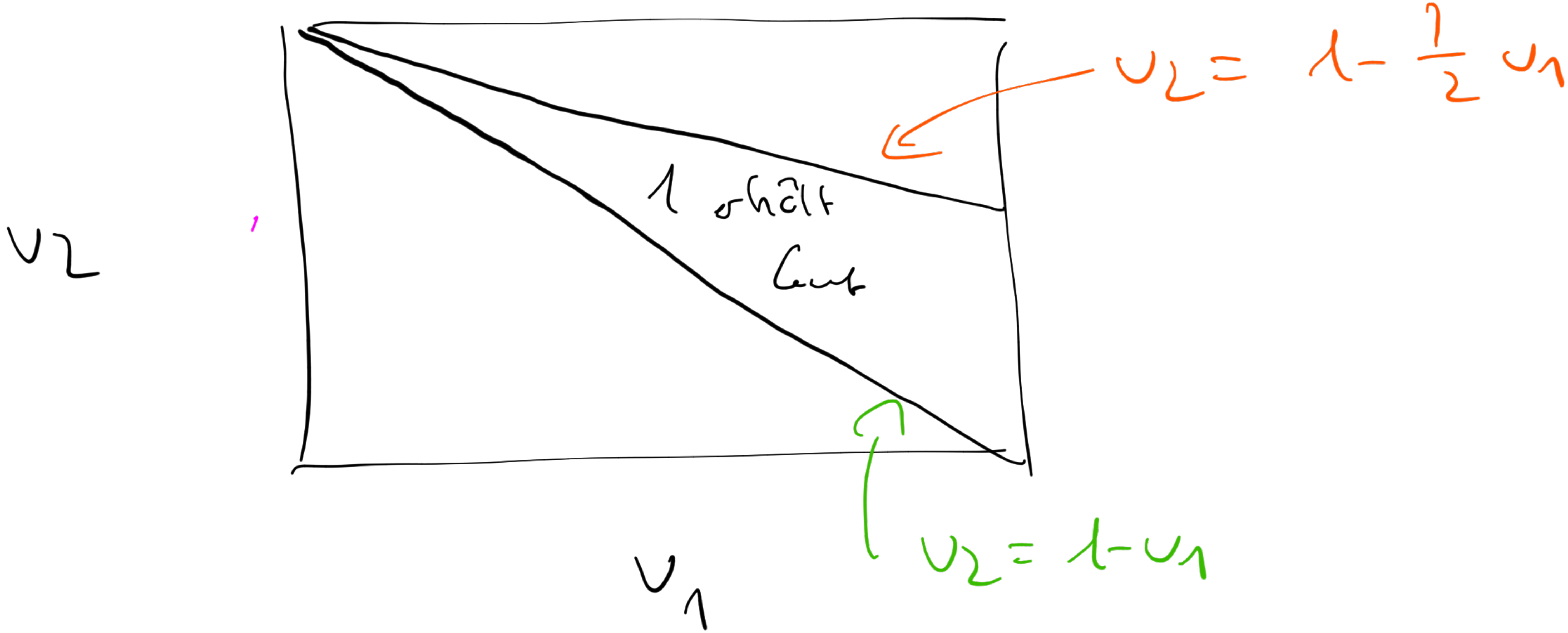
$\Rightarrow$ mehr Dichte auf hohen u_is

· aus Abbildung 3 ist die Wahrscheinlichkeit, dass 1 den Wert erhält, die folgende:

$$\bar{q}_1(v_1) = \Pr\left(v_2 \in \left(1 - v_1\,,\; 1 - \tfrac{1}{2} v_1\right)\right)$$

$$= \Pr\left(v_2 \leq 1 - \tfrac{1}{2} v_1\right) - \Pr\left(v_2 \leq 1 - v_1\right)$$

$$= F\left(1 - \tfrac{1}{2} v_1\right) - F\left(1 - v_1\right)$$



· Weiterrechnen liefert:

$$\bar{q}_1(v_1) =$$

$$F\left(1-\frac{1}{2}v_1\right) - F(1-v_1)$$

$$=$$

$$\left(1-\frac{1}{2}v_1\right)^2 - (1-v_1)^2 = \left(\underline{1} - \underline{2\cdot\frac{1}{2}v_1\cdot 1} + \frac{1}{4}v_1^2\right) - \left(\underline{1} - 2v_1 + v_1^2\right)$$

$$=$$

$$v_1 - \frac{3}{4}v_1^2$$

Implikation

$$\frac{\partial \bar{q}_1}{\partial v_1} = 1 - \frac{3}{2} v_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial v_1} < 0 \iff 1 - \frac{3}{2} v_1 < 0$$

$$\iff v_1 \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]$$

$\Rightarrow$ Somit ist $\bar{q}_1(v_1)$ nicht schwach

monoton steigend

- Nach dem Satz zur Anreizverträglichkeit ist jene Allokationsperformance also <u>nicht</u> implementierbar!

(denn Teil (i) wäre immer verletzt)