Klausur zur Vorlesung Auktionen und Märkte

Erlaubte Hilfsmittel: ein nicht programmierbarer Taschenrechner

Aufgabe 1: Auktionen (15 Punkte)

Es gelten die Annahmen des SIPV-Modells. Es gibt ein unteilbares Objekt und zwei potenzielle Käufer (Spieler), deren Wertschätzungen auf dem Intervall $[0, 1]$ unabhängig bezüglich der Verteilungsfunktion $F(v) = v^2$ verteilt sind. Betrachten Sie folgende Auktion: Beide Spieler geben verdeckt ein Gebot ab. Der Spieler mit dem höheren Gebot gewinnt das Objekt. Gewinnt Spieler 1 so zahlt er sein Gebot. Gewinnt Spieler 2 so zahlt er das Gebot von Spieler 1.

(a) Bestimmen Sie die optimale Bietstrategie von Spieler 2. (4 Punkte)

(b) Gehen Sie davon aus, dass Spieler 1 die optimale Bietstrategie von Spieler 2 antizipiert. Bestimmen Sie rechnerisch die optimale Antwort von Spieler 1. (6 Punkte)

(c) Ist die Auktion effizient? Begründen Sie. (5 Punkte)

Solution:

(a) Bieter 2 ist subjektiv gesehen in einer Zweitpreisauktion. In der Zweitpreisauktion ist es schwach dominant seine eigene WS zu bieten. Da dies unabhängig davon ist was der andere Bieter bietet, ist hier egal, dass Bieter 1 nicht in einer Zweitpreisauktion ist. Bieter 2 bietet seine wahre Wertschätzung.

(b) Bieter 1 antizipiert, dass Bieter 2 seine wahre WS bietet. Die Wahrscheinlichkeit mit einem Gebot b zu gewinnen ist also $F(b) = b^2$ Sein Maximierungsproblem lautet also

$$\max_b \quad (v_1 - b)b^2$$

Die Bedingung erster Ordnung lässt sich wie folgt lösen:

$$2bv_1 - 3b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \quad \text{oder} \quad b = \frac{2}{3}v$$

Bedingung zweiter Ordnung ergibt dass $b = \frac{2}{3}v$ das Maximum ist. (Bedingung zweiter Ordnung war nicht notwendig für volle Punkte.)

(c) Die Auktion ist nicht effizient. Immer wenn

$$\frac{2}{3}v_2 < v_1 < v_2$$

ist, gewinnt Spieler 1, aber Spieler zwei sollte aus Effizienzgründen gewinnen, da er die höhere Wertschätzung hat.

Aufgabe 2: Erlös Maximierung (18 Punkte) Es gibt wieder ein Objekt und zwei potenzielle Käufer (Spieler). Die Wertschätzung von Spieler 1 ist gleichverteilt auf dem Intervall $[2, 3]$, die Wertschätzung von Spieler 2 ist gleichverteilt auf dem Intervall $[1, 3]$. Die Verteilungen sind stochastisch unabhängig.

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen $F_1(v_1)$ und $F_2(v_2)$ der Wertschätzungen von Spieler 1 und Spieler 2. (6 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion der virtuelle Wertschätzung für beide Spieler identisch $J(v) = 2v - 3$ ist. (6 Punkte)

(c) Bestimmen Sie $q_1(v_1, v_2)$ des Erlös maximierenden Mechanismus. Geben Sie ein Beispiel wie der Erlös maximierende Mechanismus in der Praxis implementiert werden könnte. (6 Punkte)

Solution:

(a) Die Verteilungsfunktion von Spieler 1 ist die lineare Funktion, die bei 2 den Wert 0 und bei 3 den Wert 1 annimmt, also $F_1(v_1) = v_1 - 2$.

Die Verteilungsfunktion von Spieler 2 ist die lineare Funktion, die bei 1 der Wert 0 und bei 3 den Wert 1 annimmt, also $F_2(v_2) = \frac{v_2-1}{2}$.

(b)

$$J_1(v_1) = v_1 - \frac{1 - F_1(v_1)}{f_1(v_1)} = v_1 - \frac{1 - (v_1 - 2)}{1} = 2v_1 - 3$$

$$J_2(v_2) = v_2 - \frac{1 - F_2(v_2)}{f_2(v_2)} = v_2 - \frac{1 - \frac{v_2-1}{2}}{\frac{1}{2}} = v_2 - (2 - (v_2 - 1)) = 2v_2 - 3$$

(c) Erlös maximierend ist der Verkauf an den Spieler mit der höchsten positiven virtuellen Wertschätzung. Da die virtuelle Wertschätzung monoton steigend ist, hat Spieler 1 die höhere virtuelle Wertschätzung genau dann wenn er die höhere Wertschätzung hat. Seine virtuelle Wertschätzung ist positiv genau dann wenn

$$2v_1 - 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 \geq \frac{3}{2}.$$

Dies ist immer der Fall. Im Erlös maximierenden Mechanismus gilt also

$$q_1(v_1, v_2) = \begin{cases} 1 & v_1 \geq v_2, v_1 \geq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Implementierbar zB durch Erst- oder Zweitpreisauktion mit Reservationspreis von $3/2$. Da aber ein Spieler immer über $3/2$ bietet war der Reservationspreis hier de facto nicht notwendig.

Aufgabe 3: Mechanismus Design (32 Punkte) In der folgenden Grafik sehen Sie vier verschiedene Allokationsperformances für Mechanismen mit 2 Bietern beschrieben.

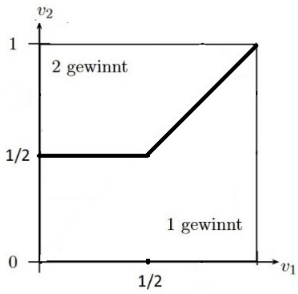

Abbildung 1

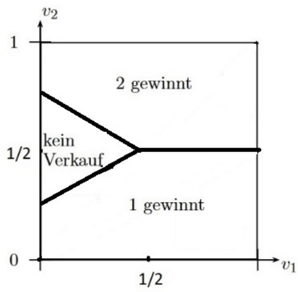

Abbildung 2

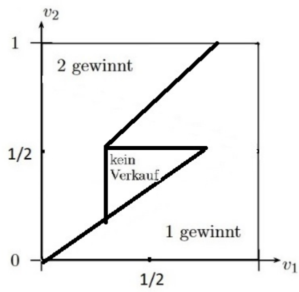

Abbildung 3

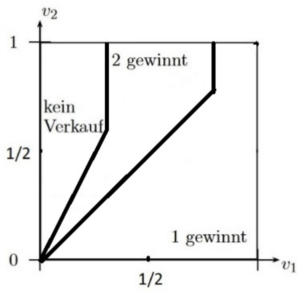

Abbildung 4

(a) Bestimmen Sie für jede Performance, ob diese

i) für alle Verteilungen implemetierbar,

ii) für die Gleichverteilung implementierbar, aber nicht für jede Verteilung, oder

iii) für keine Verteilung implementierbar.

ist. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. (8 Punkte)

(b) Gehen Sie für den Rest der Aufgabe von der Gleichverteilung aus. Bestimmen Sie für Abbildung 1 die erwartete Gewinnwahrscheinlichkeit $\overline{q}_2(v_2)$ von Bieter 2. (4 Punkte)

(c) Zeigen Sie für die Allokationsperformance in Abbildung 1, dass die erwartete Zahlung von Bieter 2 gegeben ist durch

$$\bar{t}_2(v_2) = \begin{cases} \bar{t}_2(0) & v_2 \leq 0.5 \\ \bar{t}_2(0) + \frac{v_2^2}{2} + \frac{1}{8} & v_2 > 0.5. \end{cases}$$

(8 Punkte)

(d) Bestimmen Sie für die Allokationsperformance den maximalen erwarteten Erlös den der Verkäufer durch den Verkauf an Bieter 2 erzielen kann. (7 Punkte)

(e) Betrachten Sie wieder den Erlös maximierenden Mechanismus, der die Allokationsperformance aus Abbildung 1 implementiert. Geben Sie eine verbale ökonomische Intuition warum Bieter 1 wenn er mit gegebenem $v > \frac{1}{2}$ gewinnt weniger zahlt als Bieter 2. (5 Punkte)

Solution:

(a) Erwartete Gewinnwahrscheinlichkeit muss monoton steigend sein. Also 1i, 2i, 3i, 4ii.

(b) $\overline{q}_2(v_2) = \begin{cases} 0 & v_2 \leq \frac{1}{2} \\ v_2 & v_2 > \frac{1}{2}. \end{cases}$

(c)

$$\bar{t}_2(v_2) = \bar{t}_2(0) + \bar{q}_2(v_2)v_2 - \int_0^{v_2} \bar{q}_2(x)dx.$$

Für $v_2 \leq 0.5$ ist dies $\bar{t}_2(v_2) = 0$. Für $v_2 > 0.5$ gilt

$$\bar{t}_2(v_2) = \bar{t}_2(0) + v_2^2 - \int_{0.5}^{v} xdx = \bar{t}_2(0) + v_2^2 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0.5}^{v_2} = \bar{t}_2(0) + \frac{v_2^2}{2} + \frac{1}{8}.$$

(d) Der Erlös wird maximal, wenn die Teilnahmebedingung bindet, dh. $\bar{t}_2(0) = 0$. Unter dieser Bedingung gilt

$$E[\bar{t}_2(v_2)] = \int_0^1 t_2(v_2)dv_2 = \int_{0.5}^1 \left(\frac{v_2^2}{2} + \frac{1}{8}\right) dv_2 = \left[\frac{v_2^3}{6} + \frac{1}{8}v_2\right] = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{16}\right) = \frac{5}{24}.$$

Aufgabe 4: Verbalaufgabe (25 Punkte) "Wenn unvollständige Information in Märkten vorliegt, dann ist gutes Mechanism Design notwendig um Effizienz herzustellen. Freie Märkte können dies im Allgemeinen nicht gewährleisten. Mit geschicktem Mechanismus Design eines Regulierers ist Effizienz jedoch erreichbar." Diskutieren Sie die Aussagen verbal. Gehen Sie dabei präzise auf Voraussetzungen und Einschränkungen ein, unter denen diese Thesen richtig oder falsch sind. Gehen Sie in diesem Kontext auf das Theorem von Myerson-Satterthwaite und den VCG Mechanismus ein (ohne zu erklären wie er konkret funktioniert). Verwenden Sie keine Variablen oder Formeln!

Solution: Es ist im Allgemeinen richtig, dass unvollständige Information dazu führen kann, dass Märkte nicht effizient funktionieren. Ein Anbieter, der die Nachfrage nicht genau kennt, wird einen zu hohen oder zu niedrigen Preis festsetzen. Ein Auktion könnte dieses Problem lösen. Die optimale Auktion eines Verkäufers ist immer noch ineffizient, da er einen Reservationspreis setzen wird. Ein Regulierer könnte dieses Problem im Prinzip lösen, indem er einen VCG Mechanismus einführt. Dieser führt (unter einigen Annahmen wie Rationalität der Spieler) tatsächlich zu Effizienz. Der VCG hat jedoch die Schwäche dass er in der Regel Budget benötigt oder Überschüsse generiert, welche nicht an die Spieler verteilt werden dürfen. (Dieses Problem könnte man mit dem Erwartete-Externalitäten Mechanismus lösen, Erwähnung nicht notwendig für volle Punkte.) Ein sehr grundlegendes Problem ist jedoch, dass Spieler an einem VCG Mechanismus nicht unbedingt freiwillig teilnehmen möchten. Tatsächlich sagt das Myerson-Satterthwaite Theorem dass im Allgemeinen KEINEN Mechanismus gibt, an dem alle Spieler teilnehmen möchten, der ausgeglichenes Budget verursacht und Effizienz herstellt. Die Aussage ist also nur sehr eingeschränkt richtig.

Gibt es unvollständige Informationen werden Markteingriffe nicht zu effizienz füren. Gutes Mechanism Design, Vertrauen und Institutionen kann helfen. Aber das Myerson-Satterthwaite Theorem zeigt, dass einige beschtebenswerte eigenschaften unter unvolstvndinger info selbst mit idealen markteingriffen nicht möglich sind. Freiwillige teilnahme, also, dass Leute zum markt gehen und nicht gezwungen werden, und neutrale transfers, allso das man nicht alle bezahlen muss um zu kommen, und effizienz sind nicht alle gleichzeitig erreichbar.

Der VCG erreicht neutrale transfers und effizienz, aber Teilnehmer müssen gezwungen werden mitzumachen. ZB. bei einer doppelauktion wird der verkaufer immer verlieren macht nur mit wenn er gezwungen wird. andere z.B. pivot verharen müssen viel bezahlen und deshalb unpraktisch. alles auf einmal geht nnet.