Auktionen und Märkte

Unvollständige Information - Das SIPV Model

Groh/von Wangenheim

Universität Bonn, Wintersemester 2024/2025

Das SIPV-Setting mit risikoneutralen Bietern

Hauptannahmen:

(A1) Private Wertschätzungen (PV: Private Values)

(A2) Unabhängige Information (I: Independent Values)

(A3) Symmetrie (S: Symmetric Distributions)

(A4) Risikoneutralität

Private Wertschätzungen

Private Wertschätzungen (PV):

- Jeder Bieter i kennt seine eigene Wertschätzung (WS) v_i.
- Die Wertschätzung jedes anderen Bieters j wird als eine Zufallsvariable $\tilde{v}_j$ betrachtet.
- Die Verteilungen der Zufallsvariablen der Wertschätzungen sind allgemein bekannt.
- Common Knowledge: Ich weiß, dass die anderen die Verteilung kennen, usw.

Entscheidender Punkt: Eigene WS würde sich nicht ändern, wenn man die WS der anderen lernen würde.

- Mich interessiert die WS der anderen nur indirekt, dadurch dass sie die erwarteten Gebote der anderen (und somit meine Gewinnwahrscheinlichkeit) beeinflussen.

Unabhängige Information (I):

- $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n$ sind stochastisch unabhängig voneinander verteilt.
- Wir bezeichnen üblicherweise mit $F_i(v_i)$ die Verteilungsfunktionen (Randverteilungen) von $\tilde{v}_i$.
- Unabhängigkeit impliziert, dass für die gemeinsame Verteilungsfunktion $F(v_1, \ldots, v_n)$ gilt:

$$F(v_1, \ldots, v_n) = F_1(v_1) \cdot \ \ldots \ \cdot F_n(v_n)$$

Entscheidender Punkt: Wenn ich meine eigene WS kenne, sagt mir das nichts über die WS der anderen aus.

- Das ist wichtig, denn auch wenn ich mich nicht direkt für die WS der anderen interessiere, so doch indirekt dadurch, dass deren WS deren Gebote beeinflusst.
- Impliziert: Zwei unterschiedliche Bieter haben die gleichen Erwartungen über die WS (und das Verhalten) eines dritten Bieters.

Symmetrie

Symmetrie (S):

- Die WS aller Bieter wird aus der gleichen Verteilung gezogen $\rightarrow$ die Verteilungsfunktionen F_i sind für alle Bieter gleich.
- Implikation: Alle gegnerischen Bieter sind für mich gleich.
- Für gegebene WS sieht das Problem für jeden Bieter gleich aus ($n-1$ andere Bieter mit WS verteilt jeweils unabh. bzgl. F).

Häufige zusätzliche Annahmen:

- Realisierungen von $\tilde{v}_i$ sind aus einem Intervall.
- Wenn nicht anders festgelegt: $[0, 1]$ (Normierung, vereinfacht die Rechnungen).
- Die Randverteilung $F(v_i)$ besitzt eine stetige Dichtefunktion $f(v_i)$, die auf dem betrachteten Intervall strikt positiv ist.

Risikoneutralität:

- (Erwartungs)Nutzen eines Bieters ist $U_i = Pr(\text{i gewinnt})v_i - \mathbb{E}[p_i]$.
- Implikation: Einem Bieter ist nur wichtig, wieviel Geld er im Durchschnitt zahlt.
- Wertschätzung für das Gut und gezahlter Preis sind unabhängig voneinander.

Exkurs: Allgemeinere Formulierung

Wichtig: Durch die Annahmen der Unabhängigen Information und Privaten Wertschätzungen werden interessante Fälle ausgeschlossen!

Allgemeinere Formulierung:

- 2 Bieter und 2 Zufallsvariablen $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$, mit Verteilung $F(x_1, x_2)$.
- Wertschätzung von Bieter 1: $v_1(x_1, x_2)$.
- Wertschätzung von Bieter 2: $v_2(x_1, x_2)$.

Exkurs: Allgemeinere Formulierung (Wertschätzungen)

Private Wertschätzungen:

$$
\begin{aligned}
v_1(x_1, x_2) &= v_1(x_1) \overset{zB}{=} x_1 \\
v_2(x_1, x_2) &= v_2(x_2) \overset{zB}{=} x_2
\end{aligned}
$$

Gemeinsame Wertschätzungen:

$$
\begin{aligned}
v_1(x_1, x_2) &= v(x_1, x_2) \overset{zB}{=} \frac{x_1 + x_2}{2} \\
v_2(x_1, x_2) &= v(x_1, x_2) \overset{zB}{=} \frac{x_1 + x_2}{2}
\end{aligned}
$$

Interdependente Wertschätzungen:

$$
\begin{aligned}
v_1(x_1, x_2) &\overset{zB}{=} 3x_1 + x_2 \\
v_2(x_1, x_2) &\overset{zB}{=} 2x_2 + x_1
\end{aligned}
$$

Exkurs: Allgemeinere Formulierung (Information)

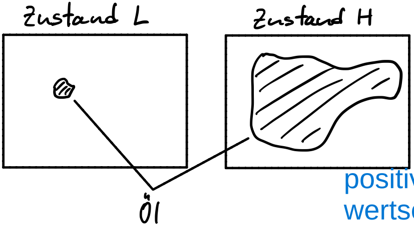
Unabhängige Information: Für alle x_1, x_2 gilt

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2).$$

Abhängige Information: Es gibt x_1, x_2, so dass gilt

$$F(x_1, x_2) \neq F_1(x_1)F_2(x_2).$$

Beispiel: Ölfeld



positive korrelation
wertschetzung steigt
wenn anderer viel bietet
stiegt sie auch

Formulierung des Beispiels:

- Zwei Bieter für das Ölfeld, die jeweils eine Probebohrung machen.
- Die Bieter kennen den Zustand nicht.
- Ergebnis der Probebohrung von Bieter i : $x_i \in \{0, 1\} \rightarrow$ wurde Öl gefunden oder nicht?

Frage: Welche Annahmen bzgl. Wertschätzungen und Information machen hier Sinn?

Beispiel: Ölfeld

Positive Korrelation von $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$.

- Zustand der Welt ist L oder $H \rightarrow$ wenn ich Öl gefunden habe, ist es wahrscheinlicher, dass mein Gegner auch Öl gefunden hat.

Gemeinsame Wertschätzungen.

- Der Wert des Ölfelds wird (ungefähr) der gleiche sein für beide Bieter $\rightarrow$ $v_1(x_1, x_2) = v_2(x_1, x_2) = v(x_1, x_2)$.

Positive Beziehung zwischen x_i und $v(x_1, x_2)$.

- Die Wahrscheinlichkeit, dass Zustand H vorliegt, erhöht sich mit jedem Ölfund $\rightarrow$ Wert des Ölfeldes $v(x_1, x_2)$ steigt in x_1 und x_2.

Strategien

Definition einer Strategie:

- Allgemein: Eine Strategie ist eine Abbildung von Information(smengen) in Aktionen.
- In Auktionsformen mit geschlossenen Geboten: Wie viel biete ich, in Abhängigkeit von meiner Wertschätzung?

Definition: Symmetrisches Gleichgewicht

- Symmetrisches Gleichgewicht: Ein Gleichgewicht, in dem alle Spieler die gleiche Strategie spielen.
- Da wir ein symmetrisches Setting betrachten, interessieren wir uns nur für symmetrische Gleichgewichte.

Intuitive Definition der Gleichgewichtskonzepte

Das Bietverhalten $b(v)$ charakterisiert ein ...

... **symmetrisches GG in schwach dominanten Strategien**, wenn für jeden Bieter i und für jede WS v_i das Gebot $b_i = b(v_i)$ schwach optimal ist, egal wie die anderen Bieter sich verhalten.

... **symmetrisches Bayesianisches Nash-GG (BNGG)**, wenn für jeden Bieter i und für jede WS v_i das Gebot $b_i = b(v_i)$ "im Durchschnitt" optimal ist, wenn sich die anderen Bieter bzgl. der Bietfunktion $b(v)$ verhalten.

Zusammenhang: Jedes symmetrisches GG in schwach dominanten Strategien ist auch ein symmetrisches BNGG.