Auktionen und Märkte

Erstpreisauktionen - Gleichgewichte

Carl-Christian Groh & Jonas von Wangenheim

Universität Bonn, Wintersemester 2024/2025

Intuition: Gleichgewicht

Wir haben “gesehen”, dass $b(v) = \frac{n-1}{n}v$ eine beste Antwort darstellt wenn die Gebote der Gegner gleichverteilt sind.

Umgekehrt führt die Strategie $b(v) = \frac{n-1}{n}v$ bei gleichverteilten WS dazu dass Gebote gleichverteilt sind.

Dies legt nahe, dass $b(v) = \frac{n-1}{n}v$ ein BNGG ist.

- Die Argumentation ist noch nicht ganz vollständig, da wir mathematisch etwas unsauber argumentiert hatten. Wir haben zB nicht nach Randlösungen geschaut.
- Es reicht aber für die Vermutung.

Falls man eine Vermutung hat, wie ein BNGG aussehen könnte, ist es relativ leicht, diese direkt zu überprüfen.

Lösungsmethodik: "Guess and Verify"

Schritt 1: Man formuliert eine Vermutung über das Gleichgewicht.

Schritt 2: Man bestimmt die 'Beste Antwort' von Bieter i mit WS v_i unter der Annahme, dass sich die anderen wie vermutet verhalten.

Schritt 3: Man überprüft, ob die Beste Antwort konsistent mit der Vermutung ist. Falls ja, hat man ein BNGG gefunden.

Einfachstes Beispiel: $n = 2$ und $\tilde{v}_i \sim U[0, 1]$:

Vermutung

Im Fall mit zwei Bietern und auf [0, 1] gleichverteilten WS besitzt die EPA ohne Reservationspreis ein BNGG, in dem jeder Bieter bzgl. der Bietstrategie

$$b(v_i) = \frac{1}{2} v_i$$

bietet.

Verifizierung der Vermutung

1. Lösungsansatz

Schritt 1: Vermutung: $b(v) = \frac{1}{2}v$ ist BNGG

Schritt 2: Maximierungsproblem von Bieter 1, wenn er WS v_1 hat und Bieter 2 sich wie vermutet verhält:

$$\max_{b_1} \quad \text{Prob}\{\text{Bieter 1 gewinnt mit Gebot} b_1\}(v_1 - b_1)$$

$$= \left(\text{Prob}\{b_1 > b(\tilde{v}_2)\} + \frac{1}{2}\underbrace{\text{Prob}\{b_1 = b(\tilde{v}_2)\}}_{=0}\right)(v_1 - b_1)$$

$$= \begin{cases} 2b_1(v_1 - b_1) & b_1 \leq \frac{1}{2} \\ (v_1 - b_1) & b_1 > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Im ersten Fall ergibt BeO $2(v_1 - b_1) - 2b_1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow b_1 = \frac{1}{2}v_1$

Andernfalls gilt für Nutzen $(v_1 - b_1) < 2b_1(v_1 - b_1)$, also ist $b_1 = \frac{1}{2}v_1$ erst recht optimal!

Schritt 3: optimale Reaktion ist konsistent mit Vermutung
$\Rightarrow b(v) = \frac{1}{2}v$ ist BNGG

1. Lösungsansatz (mit falscher Vermutung)

Schritt 1: Vermutung: $b(v) = \frac{2}{3}v$ ist BNGG

Schritt 2: Problem von Bieter 1, wenn er WS v_1 hat und Bieter 2 sich wie vermutet verhält:

$$\begin{aligned}
\max_{b_1} \quad & \text{Prob}\{1 \text{ gewinnt mit Gebot } b_1\}(v_1 - b_1) \\
= \quad & \left(\text{Prob}\{b_1 > b(\tilde{v}_2)\} + \frac{1}{2}\underbrace{\text{Prob}\{b_1 = b(\tilde{v}_2)\}}_{=0}\right)(v_1 - b_1) \\
= \quad & \frac{3}{2}b_1(v_1 - b_1)
\end{aligned}$$

BeO: $\frac{3}{2}(v_1 - b_1) - \frac{3}{2}b_1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow b_1 = \frac{1}{2}v_1$

Schritt 3: optimale Reaktion ist nicht konsistent mit Vermutung
$\Rightarrow b(v) = \frac{2}{3}v$ ist kein BNGG

Beispiel: Ansätze

1. Lösungsansatz: **Man hat eine genaue Vermutung, wie das Gleichgewicht aussieht.**
Es gibt ein BNGG, in dem jeder bzgl. $b(v) = \frac{1}{2}v$ bietet.

2. Lösungsansatz: **Man hat eine Vermutung, welche Eigenschaften das Gleichgewicht besitzt.**
Es gibt ein BNGG, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

(1) Symmetrie: $b_1(v) = b_2(v) = b(v)$
(2) Monotonie: $b(v)$ ist streng mon. wachsend
(3) Differenzierbarkeit: $b(v)$ ist differenzierbar
(4) Randbedingung: $b(0) = 0$

3. Lösungsansatz: **Man hat eine parametrische Vermutung, wie das Gleichgewicht aussieht.**
Es gibt ein BNGG, in dem jeder bzgl. $b(v) = \alpha v$, $\alpha > 0$, bietet. (siehe letzte Vorlesung und Übung)

2. Lösungsansatz (2 Bieter, Gleichverteilung)

Schritt 1: Vermutung: BNGG besitzt die auf Slide 4 beschriebenen Eigenschaften (1)–(4)

Hilfreiche Notation: $b^{-1}(b_1) = \phi(b_1)$

Schritt 2: Problem von Bieter 1, wenn er WS v_1 hat und Bieter 2 sich wie vermutet verhält:

$$
\begin{aligned}
\max_{b_1} \quad & \text{Prob}\{1 \text{ gewinnt mit Gebot } b_1\}(v_1 - b_1) \\
\overset{(2)}{=} \quad & \left(\text{Prob}\{b_1 > b(\tilde{v}_2)\} + \frac{1}{2}\underbrace{\text{Prob}\{b_1 = b(\tilde{v}_2)\}}_{=0}\right)(v_1 - b_1) \\
\overset{(2)}{=} \quad & \text{Prob}\{\tilde{v}_2 < \phi(b_1)\}(v_1 - b_1) \\
= \quad & F(\phi(b_1))(v_1 - b_1) \\
\overset{\tilde{v}_i \sim U[0,1]}{=} \quad & \phi(b_1)(v_1 - b_1)
\end{aligned}
$$

2. Lösungsansatz (Fortsetzung)

BeO, bildbar wegen (3) (die Umkehrfunktion ϕ ist auch differenzierbar):

$$\phi'(b_1)(v_1 - b_1) - \phi(b_1) \stackrel{!}{=} 0$$

Wegen (1) muss die BeO für $b_1 = b(v_1)$ erfüllt sein:

$$\phi'(b(v_1))(v_1 - b(v_1)) - \phi(b(v_1)) = 0$$

Da $\phi(b(v_1)) = v_1$ gilt, muss $\phi'(b(v_1))b'(v_1) = 1$ gelten. Damit erhält man:

$$\frac{1}{b'(v_1)}(v_1 - b(v_1)) - v_1 = 0$$

Ausdrücke, die von der Bietfunktion abhängen, auf eine Seite sortieren führt zu:

$$v_1 = \underbrace{b'(v_1)v_1 + b(v_1)}_{= \frac{d}{dv_1}(b(v_1)v_1)}$$

2. Lösungsansatz (Fortsetzung)

Integration auf beiden Seiten von 0 bis v ergibt:

$$\int_0^v v_1 \, dv_1 = [b(v_1)v_1]_{v_1=0}^{v_1=v}$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \quad b(v) = \frac{1}{2}v$$

Schritt 3: optimale Reaktion ist konsistent mit Vermutung
$\Rightarrow b(v) = \frac{1}{2}v$ ist BNGG

Gleichgewicht

Im allgemeinen Fall lässt sich das BNGG unter den vier Annahmen aus dem Beispiel bestimmen:

(1) Symmetrie: $b_i(v) = b(v)$

(2) Monotonie: $b(v)$ ist streng monoton wachsend

(3) Differenzierbarkeit: $b(v)$ ist differenzierbar

(4) Randbedingung: $b(0) = 0$

Resultat:

Im Fall mit n Bietern und auf $[0, 1]$ bzgl. $F(v_i)$ verteilten WS besitzt die EPA ohne Reservationspreis ein BNGG, in dem jeder Bieter bzgl. der Bietstrategie

$$b(v_i) = \mathbb{E}[\tilde{v}_{(1:n-1)} | \tilde{v}_{(1:n-1)} \leq v_i]$$

bietet.

Herleitung: Allgemeiner Fall

Schritt 1: Vermutung: BNGG besitzt die auf Slide 8 beschriebenen Eigenschaften (1)–(4)

Hilfreiche Notation: $b^{-1}(b_1) = \phi(b_1)$

Schritt 2: Problem von Bieter 1, wenn er WS v_1 hat und alle anderen Bieter sich wie vermutet verhalten:

$$\begin{aligned}
&\max_{b_1} \quad \text{Prob}\{1 \text{ gewinnt mit Gebot } b_1\}(v_1 - b_1) \\
&\overset{(2)}{=} \quad \left(\text{Prob}\{b_1 > \max_{j \neq 1} b(\tilde{v}_j)\} + 0\right)(v_1 - b_1) \\
&\overset{(2)}{=} \quad \text{Prob}\{b_1 > b(\tilde{v}_{(1:n-1)})\}(v_1 - b_1) \\
&\overset{(2)}{=} \quad \text{Prob}\{\tilde{v}_{(1:n-1)} < \phi(b_1)\}(v_1 - b_1) \\
&= \quad F_{(1:n-1)}(\phi(b_1))(v_1 - b_1)
\end{aligned}$$

Herleitung (Fortsetzung)

BeO (bildbar wegen (3)):

$$\phi'(b_1)f_{(1:n-1)}(\phi(b_1))(v_1 - b_1) - F_{(1:n-1)}(\phi(b_1)) \overset{!}{=} 0$$

Wegen (1) muss die BeO für $b_1 = b(v_1)$ erfüllt sein:

$$\phi'(b(v_1))f_{(1:n-1)}(\phi(b(v_1)))(v_1 - b(v_1)) - F_{(1:n-1)}(\phi(b(v_1))) = 0$$

Aus $\phi(b(v_1)) = v_1$ und $\phi'(b(v_1))b'(v_1) = 1$ folgt:

$$\frac{1}{b'(v_1)} f_{(1:n-1)}(v_1)(v_1 - b(v_1)) - F_{(1:n-1)}(v_1) = 0$$

Umsortieren führt zu:

$$v_1 f_{(1:n-1)}(v_1) = \underbrace{b'(v_1)F_{(1:n-1)}(v_1) + b(v_1)f_{(1:n-1)}(v_1)}_{=\frac{d}{dv_1}(b(v_1)F_{(1:n-1)}(v_1))}$$

Herleitung (Fortsetzung)

Integration auf beiden Seiten von 0 bis v ergibt:

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \quad \int_0^v v_1 f_{(1:n-1)}(v_1) dv_1 = \left[b(v_1) F_{(1:n-1)}(v_1)\right]_{v_1=0}^{v_1=v}$$

$$b(v) = \int_0^v v_1 \frac{f_{(1:n-1)}(v_1)}{F_{(1:n-1)}(v)} dv_1$$

$$b(v) = \mathbb{E}[\tilde{v}_{(1:n-1)} | \tilde{v}_{(1:n-1)} \leq v]$$

Schritt 3: $b(v)$ ist konsistent mit der Vermutung in Schritt 1

Alternative Schreibweisen der GG-Strategie

Alternative Schreibweise 1:

$$b(v_i) = \mathbb{E}[\tilde{v}_{(2:n)} | \tilde{v}_{(1:n)} = v_i]$$

Frage: Was sagt uns das darüber aus, wie die Preise im BNGG der EPA und im BNGG der ZPA zusammenhängen?

Alternative Schreibweise 2:

$$b(v_i) = v_i - \int_0^{v_i} \left(\frac{F(v)}{F(v_i)} \right)^{n-1} dv$$

Beobachtung 1: Bieter betreiben "Bid Shading".
(D.h., $\forall v_i > 0 : b(v_i) < v_i$.)

Beobachtung 2: Ein Bieter bietet fast seine gesamte WS, wenn n groß ist. (D.h., $b(v_i) \to v_i$ wenn $n \to \infty$.)

Herleitung der alternativen Schreibweise 2

$$
\begin{aligned}
b(v_i) &= \int_0^{v_i} v \frac{f_{(1:n-1)}(v)}{F_{(1:n-1)}(v_i)} dv \\
&= \frac{1}{F_{(1:n-1)}(v_i)} \int_0^{v_i} v f_{(1:n-1)}(v) dv \\
&\overset{\substack{\text{partielle}\\ \text{Integration}}}{=} \frac{1}{F_{(1:n-1)}(v_i)} \left(\left[v F_{(1:n-1)}(v) \right]_{v=0}^{v=v_i} - \int_0^{v_i} F_{(1:n-1)}(v) dv \right) \\
&= v_i - \int_0^{v_i} \frac{F_{(1:n-1)}(v)}{F_{(1:n-1)}(v_i)} dv \\
&= v_i - \int_0^{v_i} \left(\frac{F(v)}{F(v_i)} \right)^{n-1} dv
\end{aligned}
$$

Effizienz und Erwarteter Erlös

Effizienz? Ja!
(. . . unter der Annahme, dass es effizient ist immer zu verkaufen)

- Dies folgt an dieser Stelle im Wesentlichen aus der Annahme, dass die Bietstrategien symmetrisch und streng monoton steigend sind.
- Der Bieter mit dem höchsten Gebot ist dann auch der mit der höchsten WS.

Verkaufspreis: $p = b(v_{(1:n)})$

Erwarteter Erlös:

$$R_n \equiv \mathbb{E}[b(\tilde{v}_{(1:n)})] = \int_0^1 b(v) f_{(1:n)}(v) dv$$

Gleichgewicht

Man kann das BNGG der EPA mit Reservationspreis r unter der folgenden Vermutung herleiten:

(4) Randbedingung: $b(r) = r$ und “keine Teilnahme” für $v < r$

(1) Symmetrie: $b_i(v) = b(v)$ für $v \geq r$

(2) Monotonie: $b(v)$ ist streng monoton wachsend für $v \geq r$

(3) Differenzierbarkeit: $b(v)$ ist differenzierbar für $v \geq r$

Lösungshinweise:

Einen wesentlichen Unterschied relativ zu den Annahmen im allgemeinen Fall ohne Reservationspreis gibt es nur in (4).

Da (4) erst ganz am Schluss in der Herleitung des BNGG der EPA ohne Reservationspreis verwendet wird, ist die Herleitung fast analog.

Es ändert sich durch den Unterschied in (4) allerdings wie die funktionelle Form des BNGG aussieht.

Wie ändert sich die Herleitung durch den Reservationspreis?

Betrachten Sie wieder das Beispiel mit $n = 2$ und $\tilde{v}_i \sim U[0, 1]$.

Die Herleitung in Schritt 2 ist zunächst genau wie auf Slides H3 und H4. Man integriert dann jedoch nicht wie auf Slide H5 von 0 bis v, sondern nur von r bis v:

$$
\begin{aligned}
& \int_r^v v_1 \, dv_1 = [b(v_1)v_1]_{v_1=r}^{v_1=v} \\
= \quad & b(v)v - b(r)r = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}r^2 \\
\overset{(4)}{\Leftrightarrow} \quad & b(v) = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\frac{r^2}{v}
\end{aligned}
$$

Schritt 3: optimale Reaktion ist konsistent mit Vermutung

Im allgemeinen Fall mit n Bietern und Verteilung $F(v)$ kann man analog vorgehen.

Eindeutiges symmetrisches Gleichgewicht

Wir haben ausschließlich Bedingungen (1)-(4) verwendet.
Die hergeleiteten mathematischen Beziehungen müssen also notwendigerweise gelten damit (1)-(4) erfüllt ist.

Dh. das hergeleitete Gleichgewicht ist die **einzige** Funktion welche Bedingungen (1)-(4) erfüllt.

Satz

Im Fall mit n Bietern und auf $[0, 1]$ bzgl. $F(v_i)$ verteilten WS in der EPA ohne Reservationspreis ist

$$b(v_i) = \mathbb{E}[\tilde{v}_{(1:n-1)} | \tilde{v}_{(1:n-1)} \leq v_i]$$

das **eindeutige** symmetrische, streng monotone, differenzierbare BNGG.

Andere Gleichgewichte?

Der Satz auf der vorherigen Folie sagt nichts über die potenzielle Existenz asymmetrischer BNGG aus.

Man kann zeigen, dass im SIPV Modell keine solchen gibt.

Die Eindeutigkeit des BNGG lässt sich mit kleineren Einschränkungen sogar auf den Fall mit asymmetrischen Verteilungen der WS erweitern (siehe Maskin/Riley (2000) und Lebrun (2006))

Holländische Auktion

Ähnlich wie zwischen ZPA und Englischer Auktion gibt es eine strategische Äquivalenz zwischen der Erstpreisauktion und der (absteigenden) Holländischen Auktion.

Ein Strategieprofil $\{b_i(v_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ ist genau dann ein BNGG in der Erstpreisauktion wenn das Kaufen-Knopf Drücken bei den entsprechenden Preisen in der Holländischen Auktion ein BNGG ist.

Intuition: Gleiche Allokation: Man gewinnt wenn man höchstes Kaufgebot hat und zahlt seinen gebotenen Preis.

Bem: Die Äquivalenz ist sogar noch robuster als zwischen ZPA und EA, da man hier als Höchstbietender bis man kauft nichts relevantes über die Wertschätzungen der anderen lernt.