Auktionen und Märkte –

Übung 4 (Lösungsskizze)

Anmerkung: Die vorliegende Lösungsskizze wurde gewissenhaft erstellt. Es besteht jedoch keine Garantie auf vollständige Richtigkeit.

Aufgabe 1: Erstpreisauktion im SIPV-Modell

- n Bieter mit Wertschätzungen $v_i \sim U[0,1]$.
- wir leiten das symmetrische GG der Erstpreisauktion her.
- Strategie

↳ wir schauen uns Situationen an, in dem die Bietfunktion aller Bieter eine lineare Funktion $b(v_i) = \alpha \cdot v_i$ ist.

↳ Wichtig: $\alpha > 0$ ist eine Konstante.

↳ Wie müssen wir α setzen, damit wir ein Gleichgewicht haben? → Ziel: Finde dieses α!

<u>Rechnungen</u>

- betrachten wir Bieter i und nehmen an, dass alle anderen Bieter die Strategie $b(v_j) = \alpha \cdot v_j$ spielen.

· denn ist der Erwartungsnutzen von Bieter i, wenn seine Wertschätzung v_i und sein Gebot b_i ist, gegeben durch:

$$U_i(b_i, v_i) = \left[\Pr\left(b_i > \tilde{b}_{(1:n-1)}\right)\right] \cdot (v_i - b_i)$$

$$= \left[\Pr\left(b_i > \alpha \cdot \tilde{v}_{(1:n-1)}\right)\right] \cdot (v_i - b_i)$$

diese Verteilungsfunktion kennen wir

$$= \left[\Pr\left(v_{(1:n-1)} < \frac{b_i}{\alpha}\right)\right] \cdot (v_i - b_i)$$

$$= \left[\Pr\left(v_i < b_i/\alpha\right)\right]^{n-1} \cdot (v_i - b_i) =$$

$$u_i(b_i, v_i) = \left(\frac{b_i}{\alpha}\right)^{n-1}(v_i - b_i)$$

$\rightarrow$ wir maximieren das durch Wahl von b_i, gegeben v_i.

$$\frac{\partial u_i(b_i, v_i)}{\partial b_i} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot (b_i)^{n-2} \cdot (v_i - b_i) + \left(\frac{b_i}{\alpha}\right)^{n-1}(-1) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(b_i)^{n-2}(v_i - b_i) - (b_i)^{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (b_i)^{n-2}\Big[\underbrace{(n-1)(v_i - b_i) - b_i}_{=0}\Big] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad (n-1)v_i - nb_i = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{b_i^*(v_i) = \frac{n-1}{n} \cdot v_i}$$

$b_i = 0$
kann nicht
optimal sein

$$\Longrightarrow \quad b_i(v_i) = \frac{n-1}{n} \cdot v_i$$ ist optimale Antwort auf jede lineare Strategie der anderen

$$\Longrightarrow \quad b_i^*(v_i) = \frac{n-1}{n} \cdot v_i$$ ist symmetrisches

BNGG.

Aufgabe 2

- Erstpreisauktion mit Reservationspreis $\underline{\underline{r}}$.

a)

- wenn $v_i < r \Rightarrow$ es ist optimal, nicht an der Auktion teilzunehmen
- wenn $v_i \geq r \Rightarrow$ es ist optimal, teilzunehmen.

$\Rightarrow$ Bieter mit $v_i = r$ ist genau indifferent zwischen Teilnahme und Nicht-teilnahme

b) Herleitung des Gleichgewichts

- im Gleichgewicht sind die Strategien <u>nicht linear</u> $\Rightarrow$ Herleitung aus Auf. 1 funktioniert nicht.

- wir suchen ein GG, in dem alle Bieter die Strategie $b_i(v) = b(v)$ spielen,

und:

↳ $b(v)$ strikt monoton wachsend, wenn $v \geq r$, ist, und $\underline{\underline{b(r) = r}}$ gilt.

- der Erwartungsnutzen von Bieter i bei Wertschätzung v_i und Gebot b_i ist:

$$U_i(b_i, v_i) = \left[Pr\left(b_i > b(v_j) \right) \right]^{n-1} \cdot (v_i - b_i)$$

Inverse Funktion in Wahrscheinlichkeit

$$= \left[Pr\left(v_j \leq b^{-1}(b_i) \right) \right]^{n-1} \cdot (v_i - b_i)$$

$$= \left[b^{-1}(b_i) \right]^{n-1} \cdot (v_i - b_i)$$

→ Optimales Gebot: Bedingung erster Ordnung

$$\frac{\partial u_i}{\partial b_i} = (n-1)\left[b^{-1}(b_i) \right]^{n-2} \cdot \frac{\partial b^{-1}(b_i)}{\partial b_i}(v_i - b_i) -$$

$$\left[b^{-1}(b_i)\right]^{n-1} (-1) \qquad = 0$$

→ hier setzen wir nun die Bietfunktion $b_i = b(v_i)$ ein:

$$\left[b^{-1}(b(v_i)) \right]^{n-2} \cdot \frac{\partial b^{-1}(b(v_i))}{\partial b_i} \cdot (v_i - b(v_i)) -$$

$$\left[b^{-1}(b(v_i)) \right]^{n-1} = 0$$

⋮

- Nun wenden wir zwei Tricks an:

↳ es gilt immer (Inverse Function Theorem), dass

$$\frac{\partial b^{-1}(b_i(v_i))}{\partial b_i} = \frac{1}{\frac{\partial b_i}{\partial v_i}}$$

↳ es gilt: $b^{-1}(b(v_i)) = v_i$

- Dieser Ansatz erlaubt uns zu beschreiben, wie $b(v_i)$ im Gleichgewicht aussehen muss

↳ wie muss $b(v_i)$ sein, damit $b_i = b(v_i)$ für i optimal ist (für jedes v_i), wenn alle anderen die Strategie $b(v_i)$ spielen?

$$(n-1)\cdot\underbrace{(v_i)}^{n-2}\left[\frac{1}{\underbrace{\partial b / \partial v_i}}\right](v_i - b(v_i)) - (v_i)^{n-1} = 0$$

Trick 2:

$$b^{-1}(b(v_i))$$

Trick 1:

$$\frac{\partial b^{-1}(b(v_i))}{\partial b_i} = \frac{1}{\frac{\partial b}{\partial v_i}}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(n-1)(v_i)^{n-2}(v_i - b(v_i)) = \frac{\partial b}{\partial v_i}\cdot(v_i)^{n-1}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(n-1)(v_i)^{n-1} = (n-1)(v_i)^{n-2}\, b(v_i) + \frac{\partial b}{\partial v_i}(v_i)^{n-1}$$

· das ist eine Differenzialgleichung.

↳ wir lösen diese durch Integration auf beiden Seiten.

gilt $\forall v_i$

$$(n-1)(v_i)^{n-1} = b(v_i)(n-1)(v_i)^{n-2} + \frac{\partial b}{\partial v_i}(v_i)^{n-1}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\int_r^{v_i}(n-1)(v)^{n-1}dv = \int_r^{v_i}\underbrace{\left[b(v)(n-1)(v)^{n-2} + \frac{\partial b}{\partial v}(v)^{n-1}\right]dv}$$

Trick 3: Man beachte das Folgende:

$$\frac{\partial\left[b(v)\cdot(v)^{n-1}\right]}{\partial v} = b(v)\cdot(n-1)(v)^{n-2} + \frac{\partial b}{\partial v}(v)^{n-1}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\int_r^{v_i} (n-1)(v)^{n-1}\,dv = \int_r^{v_i} \left[\frac{\partial \left[b(v)\cdot(v)^{n-1} \right]}{\partial v} \right] dv$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left[\frac{n-1}{n} (v)^n \right]_r^{v_i} = \left[b(v)\cdot(v)^{n-1} \right]_r^{v_i}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{n-1}{n} \left[(v_i)^n - (r)^n \right] = b(v_i)(v_i)^{n-1} - \underbrace{b(r)}_{=r}(r)^{n-1}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{n-1}{n}(v_i)^n - \frac{n-1}{n}(r)^n = b(v_i)\cdot(v_i)^{n-1} - r\cdot(r)^{n-1}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$b(v_i)\cdot(v_i)^{n-1} = \frac{n-1}{n}\cdot(v_i)^n + r^n\Big[\underbrace{1-\frac{n-1}{n}}_{=1/n}\Big]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$b(v_i) = \frac{n-1}{n}\cdot v_i + \frac{r^n}{(v_i)^{n-1}}\cdot\frac{1}{n}$$

· Effizienz

↳ das GG ist nicht effizient.

↳ wenn alle Wertschätzungen unterhalb von r liegen, erhält niemand das Gut, obwohl die Bieter das Gut mehr wertschätzen als der Auktionator, was nicht effizient ist.

c) Erwarteter Erlös des Verkäufers

$$R_n^E(r) = Pr(\tilde{v}_{(1:n)} < r) \cdot 0$$

$$+ Pr(\tilde{v}_{(1:n)} \geq r) \, E[b(\tilde{v}_{(1:n)}) \mid \tilde{v}_{(1:n)} \geq r]$$

$$= \int_r^1 b(v) \cdot f_{(1:n)}(v) \, dv$$

$$= \int_r^1 b(v) \cdot [n \cdot v^{n-1}] \, dv$$

$$= \ldots$$

$$= \frac{n-1}{n+1} + r^n - 2\frac{n}{n+1} \cdot r^{n+1}$$

- Wichtig: Das ist der gleiche Erlös wie in der ZPA mit Reservationspreis r.
  - ↳ Optimaler Reservationspreis ist $r^* = 1/2$.
  - ↳ Spoiler für das Revenue Equivalence Principle (kommt in der Vorlesung).

Aufgabe 3

a) Symmetrisches GG der All-Pay Auktion

→ wir finden die Bietfunktion $b(v)$, die ein symmetrisches GG darstellt

→ wie zuvor: Wir nehmen an, dass alle Spieler $j \neq i$ der Strategie $b(v)$ folgen. Dann lösen wir das Maximierungsproblem von Spieler i:

$$\max_{b_i} \left[\Pr\left(b(v_j) < b_i\right)\right]^{n-1} \cdot v_i \underbrace{- \quad b_i}_{}$$

man zahlt sein Gebot immer

$$= \max_{b_i} \underbrace{\left[b^{-1}(b_i)\right]^{n-1} \cdot v_i - b_i}_{= u_i(v_i, b_i)}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial b_i} = (n-1)\left[b^{-1}(b_i)\right]^{n-2} \frac{\partial b^{-1}(b_i)}{\partial b_i} \cdot v_i - 1 \overset{!}{=} 0$$

→ wir setzen $b_i = b(v_i)$ ein, um $b(v)$

zu beschreiben:

$$(n-1)\left[b^{-1}(b(v_i))\right]^{n-2} \frac{\partial b^{-1}(b(v_i))}{\partial b_i} \cdot v_i - 1 \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(n-1)\left[v_i\right]^{n-2} \frac{1}{\frac{\partial b}{\partial v_i}} \cdot v_i - 1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(n-1)(v_i)^{n-1} = \frac{\partial b}{\partial v_i} \Longrightarrow \underline{\underline{b(v_i) = \frac{n-1}{n} v_i^{\,n}}}$$

b)

· Erwartungsnutzen von Bieter i (Gleichgewicht mit $b(v)$),

$$U(b_i, v_i) = \left[Pr\left(b(v_j) < b_i\right)\right]^{n-1} \cdot v_i - b_i$$

$$+ \gamma \left[E\left(\sum_{j \neq i} b(v_j) \right) + b_i \right] \Big\} \text{ Zusatznutzen durch Gesamterlös}$$

$$+ \beta \cdot b_i \Big\} \text{ Zusatznutzen durch "warm glow"}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$U(b_i, v_i) = \underbrace{\left[Pr\left(b(v_j) < b_i\right)\right]}_{= b^{-1}(b_i)}{}^{n-1} \cdot v_i - (1 - \gamma - \beta) \cdot b_i + \gamma \sum_{j \neq i} E\left(b(v_j)\right)$$

$$\iff$$

$$\frac{\partial u}{\partial b_i} = (n-1)\left[b^{-1}(b_i)\right]^{n-2} \frac{\partial b^{-1}(b_i)}{\partial b_i} - (1-\gamma-\beta) \overset{!}{=} 0$$

$$\iff$$

$$\vdots$$

$$\underline{\underline{b(v) = \frac{1}{1-\gamma-\beta} \cdot \frac{n-1}{n}}}$$

$\rightarrow \gamma\uparrow$ oder $\beta\uparrow \Rightarrow$ Geld an den Auktionator zu bezahlen kostet weniger Nutzen $\Rightarrow$ optimale Gebote steigen.