Auktionen und Märkte

Erlösmaximierung

Groh / von Wangenheim

Universität Bonn, Wintersemester 2024/2025

Motivation

- **Betrachte wie in Teil II.4:**
  - Verkäufer hat inaktive Rolle außerhalb des Mechanismus
  - Spieler $i = 1, \ldots, n$ sind Bieter

- **Ziel:** Wähle unter allen direkten Mechanismen $\{(q_i, t_i)\}_{i=1}^n$, die anreizverträglich sind und bei denen alle Spieler freiwillig teilnehmen, den heraus, der den erwarteten Erlös maximiert.

Bedingungen

- **Anreizverträglichkeit:**

  (1a) $\overline{q}_i(v_i)$ ist monoton steigend
  (1b) $\overline{t}_i(v_i) = \overline{t}_i(0) + \overline{q}_i(v_i)v_i - \int_0^{v_i} \overline{q}_i(x)dx$

- **“Technische Machbarkeit”:**

  (2a) $q_i(v_1, \ldots, v_n) \in [0, 1]$
  (2b) $\sum_{i=1}^{n} q_i(v_1, \ldots, v_n) \leq 1$

- **Teilnahmebedingung:**

  (3) $U_i(v_i, v_i) \geq 0$

Anmerkung: Aufgrund des Satzes zur AV ist (3) äquivalent zu

$$U_i(0, 0) = \overline{q}_i(0)0 - \overline{t}_i(0) = -\overline{t}_i(0) \geq 0$$

Optimierungsproblem:

$$\max_{\{(q_i,t_i)\}_{i=1}^n} \quad R = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \bar{t}_i(v_i) f_i(v_i) dv_i \qquad \text{(wie in II.4 hergeleitet)}$$

$$\text{so dass} \quad (1a,b), (2a,b), (3)$$

Vorgehen:

- Wir lösen zunächst den Spezialfall mit nur einem Bieter ($n = 1$) und gleichverteilter WS ($\tilde{v}_1 \sim U[0, 1]$).
- Die Herleitung lässt sich anschließend auf den Fall mit $n > 1$ und mit allgemeinen Verteilungen verallgemeinern.

Optimaler Mechanismus im Ein-Bieter-Fall

- **Betrachte:** 1 Bieter (Bieter 1), $\widetilde{v}_1 \sim U[0,1]$
- **Direkter Mechanismus:** $(q_1(v_1), t_1(v_1))$
- **Hier gilt:** $\overline{q}_1(v_1) = q_1(v_1)$ und $\overline{t}_1(v_1) = t_1(v_1)$
  $\Rightarrow$ Wir können den Verkäufer also einfach $\overline{q}_1(v_1)$ und $\overline{t}_1(v_1)$ statt $q_1(v_1)$ und $t_1(v_1)$ wählen lassen.
- **Problem des Verkäufers**:

$$\max_{\overline{q}_1(v_1), \overline{t}_1(v_1)} \quad R = \int_0^1 \overline{t}_1(v_1) \cdot 1 dv_1$$

$$\begin{aligned}
\text{s.d.} \quad & (1a)\ \overline{q}_1(v_1) \text{ monoton wachsend} \\
& (1b)\ \overline{t}_1(v_1) = \overline{t}_1(0) + \overline{q}_1(v_1)v_1 - \int_0^{v_1} \overline{q}_1(x)dx \\
& (2a)\ \overline{q}_1(v_1) \in [0,1] \\
& (3)\ \overline{t}_1(0) \leq 0
\end{aligned}$$

Optimaler Mechanismus im Ein-Bieter-Beispiel

- (1b) und partielle Integration erlauben uns die Formel für den **erwarteten Erlös** zu vereinfachen:

$$
\begin{aligned}
R &\overset{(1b)}{=} \int_0^1 \left[\overline{t}_1(0) + \overline{q}_1(v_1)v_1 - \int_0^{v_1} \overline{q}_1(x)dx \right] dv_1 \\
&= \overline{t}_1(0) + \int_0^1 \overline{q}_1(v_1)v_1 dv_1 - \int_0^1 \underbrace{\int_0^{v_1} \overline{q}_1(x)dx}_{=g(v_1)} \cdot \underbrace{1}_{=h'(v_1)} dv_1 \\
&\overset{\text{p.I.}}{=} \overline{t}_1(0) + \int_0^1 \overline{q}_1(v_1)v_1 dv_1 \\
&\qquad - \underbrace{\left[\int_0^{v_1} \overline{q}_1(x)dx \cdot v_1 \right]_{v_1=0}^{v_1=1}}_{=\int_0^1 \overline{q}_1(x)\cdot 1 dx \cdot 1} + \int_0^1 \overline{q}_1(v_1)v_1 dv_1 \\
&= \overline{t}_1(0) + \int_0^1 \overline{q}_1(v_1)(2v_1 - 1)dv_1
\end{aligned}
$$

Optimaler Mechanismus im Ein-Bieter-Beispiel

- **Vereinfachtes Problem**, bei dem die Monotoniebedingung (1a) ignoriert wird:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\overline{q}_1(v_1),\overline{t}_1(0)} & R = \overline{t}_1(0) + \int_0^1 \overline{q}_1(v_1)(2v_1 - 1)dv_1 \\ \text{s.d.} & \text{(2a) } \overline{q}_1(v_1) \in [0, 1] \\ & \text{(3) } \overline{t}_1(0) \leq 0 \end{array}$$

- **Beobachtung 1:** $\overline{t}_1(0) = 0$ ist optimal (wegen (3)).
- **Beobachtung 2:** Das vereinfachte Problem mit der ignorierten Monotoniebedingung kann man "punktweise" maximieren.
- **Interpretation:** $2v_1 - 1$ kann man als "marginalen Erlös" aus Verkauf an einen Bieter mit WS v_1 interpretieren.

Optimaler Mechanismus im Ein-Bieter-Beispiel

Kandidat für den optimalen direkten Mechanismus:

- "Punktweises" maximieren unter Nebenbedingung (2a) ergibt:

$$\overline{q}_1^*(v_1) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } v_1 < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{wenn } v_1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Setzt man die gerade bestimmte Funktion $\overline{q}_1^*(v_1)$ und $\overline{t}_1(0) = 0$ in (1b) ein, erhält man:

$$\begin{aligned} \overline{t}_1^*(v_1) &= 0 + \overline{q}_1^*(v_1)v_1 - \int_0^{v_1} \overline{q}_1^*(x)dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{wenn } v_1 < \frac{1}{2} \\ 1/2 & \text{wenn } v_1 \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Optimal Mechanismus im Ein-Bieter-Beispiel

- **Beobachtung:** Die ignorierte Monotoniebedingung ist für den Kandidat erfüllt.
  $\Rightarrow$ Damit ist der Kandidat auch tatsächlich der **optimale direkte Mechanismus**.

- Ein **optimaler indirekter Mechanismus**:

  $$\text{TIOLI-Angebot von } \tfrac{1}{2}.$$

  Warum?
  - Machen Sie sich klar, was bei dem TIOLI-Angebot passiert.
  - Wenden Sie dann das Erlösäquivalenzresultat an! D.h., argumentieren Sie, dass die beiden Bedingungen erfüllt sind!

Problem im allgemeinen Fall

- Betrachten Sie ab jetzt: n Bieter mit Verteilungen $F_i(v_i)$
- Zur Erinnerung: **Optimierungsproblem:**

$$\max_{\{(q_i,t_i)\}_{i=1}^n} \quad R = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \overline{t}_i(v_i) f_i(v_i) dv_i$$

$$\text{so dass} \quad (1a,b), (2a,b), (3)$$

- Unterschiede zum 1-Bieter-Fall:
  - $\overline{t}_i(v_i)$ und $\overline{q}_i(v_i)$ sind jetzt tatsächlich "Durchschnitte"
  - Bedingung (2b) war im 1-Bieter-Fall nicht relevant

Erwarteter Erlös

- Aus (1b) folgt auch hier:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left[\bar{t}_i(0) + \bar{q}_i(v_i) v_i - \int_0^{v_i} \bar{q}_i(x) dx \right] f_i(v_i) dv_i$$

- Analog zum 1-Bieter-Fall kann man hier auch partielle Integration anwenden, um das Doppelintegral loszuwerden. Man erhält:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \bar{t}_i(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \bar{q}_i(v_i) \underbrace{\left[v_i - \frac{1 - F_i(v_i)}{f_i(v_i)} \right]}_{\equiv J_i(v_i)} f_i(v_i) dv_i$$

Man bezeichnet $J_i(v_i)$ als Bieter i's **“virtuelle Wertschätzung”**.
(Wir interpretieren $J_i(v_i)$ weiter unten.)

Erwarteter Erlös

- Im Gegensatz zum 1-Bieter-Fallen können wir nun $\overline{q}_i(v_i)$ nur indirekt durch die Wahl von $q_i(v_1, \ldots, v_n)$ festlegen und wir müssen die NB (2b) berücksichtigen, die einschränkt, wie $q_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, q_n(v_1, \ldots, v_n)$ gewählt werden können.

- Einsetzen der Definition von $\overline{q}_i(v_i)$ in R und vereinfachen ergibt:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \overline{t}_i(0) + \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{n} q_i(v_1, \ldots, v_n) J_i(v_i) \right] f_1(v_1) \ldots f_n(v_n) dv_1 \ldots dv_n$$

Vereinfachtes Problem

- **Vereinfachtes Problem**, bei dem die Monotoniebedingung (1a) ignoriert wird:

$$\max_{\substack{q_1(\dots),\dots,q_n(\dots)\\ \bar{t}_1(0),\dots,\bar{t}_n(0)}} \quad R = \sum_{i=1}^{n} \bar{t}_i(0) + \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{n} q_i(v_1,\dots,v_n) J_i(v_i) \right] \cdot f_1(v_1)\dots f_n(v_n) dv_1 \dots dv_n$$

s.d.

$$(2a)\ q_i(v_1,\dots,v_n) \in [0,1]$$

$$(2b)\ \sum_{i=1}^{n} q_i(v_1,\dots,v_n) \le 1$$

$$(3)\ \bar{t}_i(0) \le 0$$

- **Beobachtung 1:** $\bar{t}_i(0) = 0$ ist optimal (wegen (3)).
- **Beobachtung 2:** Ignorieren der Monotoniebedingung erlaubt uns wieder "punktweise" unter NB (2a,b) zu maximieren.

Kandidat für den optimalen direkten Mechanismus:

- "Punktweises" maximieren unter NB (2a) und (2b) ergibt:

$$q_i^*(v_1, \ldots, v_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } J_i(v_i) \geq 0 \text{ und } J_i(v_i) > \max\limits_{j \neq i} J_j(v_j) \\ 0 & \text{wenn } J_i(v_i) < 0 \text{ oder } J_i(v_i) < \max\limits_{j \neq i} J_j(v_j) \end{cases}$$

- Daraus folgt $\overline{q}_i^*(v_i)$ durch Integration.
- Setzt man $\overline{q}_i^*(v_i)$ und $\overline{t}_i(0) = 0$ in (1b) ein, erhält man

$$\overline{t}_i^*(v_i) = \overline{q}_i^*(v_i) v_i - \int_0^{v_i} \overline{q}_i^*(x) dx.$$

- Für $t_i^*(v_1, \ldots, v_n)$ kann man dann jede Funktion wählen, die den "Durchschnitt" $\overline{t}_i^*(v_i)$ besitzt.
- Insbesondere kann man wählen: $t_i^*(v_1, \ldots, v_n) = \overline{t}_i^*(v_i)$

Optimaler Mechanismus

- **Erfüllt der Kandidat die ignorierte Monotoniebedingung?**
  - Wenn die virtuellen Wertschätzungen $J_i(v_i)$ streng monoton steigend sind, dann ja!
  - **Warum?** Höhere Wertschätzungen v_i implizieren dann ein höheres $J_i(v_i)$, so dass dass man in mehr Fällen gewinnt.
    Dies impliziert eine höhere Gewinnwahrscheinlichkeit $\overline{q}_i^*(v_i)$!

- Wir werden immer die folgende **Annahme** treffen:

$$J_i(v_i) \text{ ist streng monoton steigend für alle } i.$$

  - Ob die Annahme erfüllt ist, hängt nur von den Verteilungen ab!
  - Für die meisten gebräuchlichen Verteilungen ist dies der Fall.

- **Beobachtung:** Unter dieser Annahme ist der Kandidat für den optimalen direkten Mechanismus auch tatsächlich der **optimale direkte Mechanismus**.

Beispiel

- **Frage:** Optimaler Mechanismus für $\tilde{v}_i \sim U[0,1]$?
- Es gilt dann $J_i(v_i) = 2v_i - 1.$
- Daraus folgt:

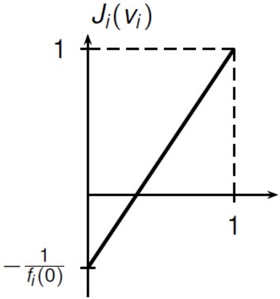
$$q_i^*(v_1, \ldots, v_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v_i \geq \frac{1}{2} \text{ und } v_i > \max\limits_{j \neq i} v_j \\ 0 & \text{wenn } v_i < \frac{1}{2} \text{ oder } v_i < \max\limits_{j \neq i} v_j \end{cases}$$

- **Beobachtung:**
  - Dies ist die gleiche Allokationsperformance, die auch durch eine EPA/ZPA/APA mit optimalem Reservationspreis oder optimalem Eintrittsgeld implementiert wird!
  - All diese Mechanismen führen zudem auch zu einer erwarten Zahlung der schlechtesten Typen von 0.
  - Aufgrund des Erlösäquivalenzresultats folgt daher, dass all diese Mechanismen optimal sein müssen!

Virtuelle Wertschätzungen

- Zur Erinnerung: $J_i(v_i) = v_i - \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$

Beispiel:



  - **Beobachtung 1:** $J_i(0) = -\frac{1}{f_i(0)} < 0$
  - **Beobachtung 2:** $J_i(1) = 1 > 0$
  - Dazwischen ist $J_i(v_i)$ per Annahme strikt steigend!

- **Interpretation:** Die virtuelle Wertschätzung $J_i(v_i)$ misst den marginalen Effekt aus Verkaufen an Bieter i, wenn dieser die WS v_i hat, auf den erwarteten Erlös des Verkäufers.

(1) Symmetrische Verteilungen

- **Annahme:** $F_i(\cdot) = F_j(\cdot) = F(\cdot)$
- **virtuelle WS:**

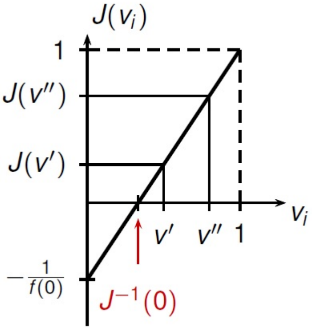
$$J(v_i) = v_i - \frac{1 - F(v_i)}{f(v_i)}$$

- Es gilt dann aufgrund unserer Monotonieannahme:

$$v_i > v_j \quad \Leftrightarrow \quad J(v_i) > J(v_j)$$

- D.h., der Bieter mit der höchsten WS hat gleichzeitig die höchste virtuelle WS.

Beispiel:



(1) Symmetrische Verteilungen

- **Folge:** Wenn der Reservationspreis bei einer EPA/ZPA so gesetzt wird, dass das Objekt genau dann verkauft wird, wenn

$$J(v_i) \geq 0 \text{ bzw. } v_i \geq J^{-1}(0)$$

  gilt, dann ist die Auktion mit diesem Reservationspreis ein optimaler (d.h. erlösmaximierender) Mechanismus.

- Wähle also $r^* = J^{-1}(0)$.

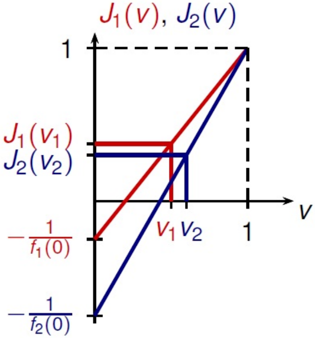
- Äquivalent: Wähle r^* so, dass $J(r^*) = r^* - \frac{1-F(r^*)}{f(r^*)} \stackrel{!}{=} 0$.

  (**Anmerkung:** Dies ist dieselbe Bedingung, die wir bereits von der Bestimmung des optimalen Reservationspreise bei einer ZPA kennen!)

(2) Asymmetrische Verteilungen

- **Annahme:** $F_i(\cdot) \neq F_j(\cdot)$
- Es kann dann aus $v_i > v_j$ auch $J_i(v_i) < J_j(v_j)$ folgen.
- Es kann also optimal sein Bieter j das Objekt zu geben, obwohl Bieter i eine höhere WS hat.

Beispiel:



(3) Effizienz?

Unter der Annahme, dass die WS des Verkäufers 0 ist, gilt:

Der optimale Mechanismus ist nicht effizient!

1. Der Verkäufer behält das Objekt manchmal, wenn es effizient wäre zu verkaufen.

   (Dies könnte zB aus einem Reservationspreis folgen.)

2. Zusätzlich im asymmetrischen Fall: Wenn verkauft wird, wird nicht zwangsläufig an den Bieter mit der höchsten WS verkauft.

   (Dies könnte zB aus einem "Bonus" für "schwächere" Bieter folgern. Siehe Aufgabe 3 auf Blatt 7 für eine Intuition dafür.)

(4) Erwarteter Erlös

- Erwarteter Erlös, der durch Allokation $q_i(v_1, \ldots, v_n)$ und $\bar{t}_i(0) = 0$ generiert wird:

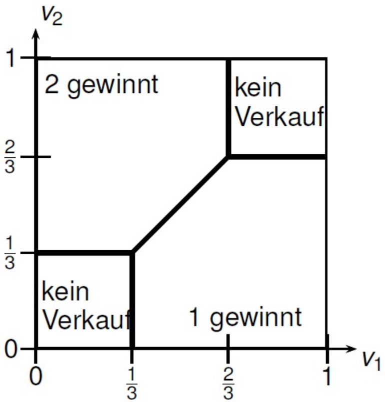
$$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} q_i(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) J_i(\tilde{v}_i)]$$

- Erwarteter Erlös, der durch den optimalen Mechanismus generiert wird:

$$\mathbb{E}[\max\{0, J_1(\tilde{v}_1), \ldots, J_n(\tilde{v}_n)\}]$$

Übung: Implementierbarkeit und Optimalität

Gegeben: SIPV-Setting; zwei Bieter; gleichverteilte WS



Frage 1: Ist die Alloperformance implementierbar?

Frage 2: Falls ja, ist sie optimal?

(5) Exkurs: Mehrere identische Objekte

- Nehmen Sie nun an:
  1. Es gibt $m \in \{2, \ldots, n\}$ identische Objekte.
  2. Jeder Käufer fragt jedoch nur ein Objekt nach.

- Diskutieren Sie: Wie sieht die Allokationsperformance im optimalen Mechanismus aus?