Auktionen und Märkte –

Übung 3 (Lösungsskizze)

Anmerkung: Die vorliegende Lösungsskizze wurde gewissenhaft erstellt. Es besteht jedoch keine Garantie auf vollständige Richtigkeit.

Aufgabe 1: Procurement - Zweitpreisauktion.

- Spielregeln:
  - ↳ Procurement: Auktionator will Unternehmen finden, welches Auftrag möglichst günstig erfüllt.
  - ↳ Unternehmen i macht Gebot. Wenn Bieter i gewinnt, Zahlt Auktionator einen Preis an das gewinnende Unternehmen (Bieter).
- ↳ das niedrigste Gebot gewinnt die Auktion.

↳ Der Preis, den das gewinnende Unternehmen bekommt, ist das zweitniedrigste Gebot.

a) GG in schwach dominanten Strategien

- Bieter i hat Kosten c_i, und die Kosten eines anderen Bieters sind eine Zufalls-variable $\tilde{c}_j$. (Jeder Bieter kennt seine eigenen Kosten, aber nicht die von anderen Bietern).

- für jeden Bieter i ist es eine schwach dominante Strategie, seine eigenen Kosten zu bieten.

- wenn Bieter i mit Gebot $b_i = c_i$ die Auktion gewinnt, und p erhält $\Rightarrow$ Nutzen $p - b_i = p - c_i$. Das ist positiv, weil $b_i < p$ ($b_i = c_i$ ist das niedrigste Gebot, p ist zweitniedrigstes).
  $\hookrightarrow$ wenn Bieter i zum Gebot $b_i' \geq p$ abweicht, gewinnt i nicht die Auktion und

erhält den Nutzen 0 => nicht profitabel.

↳ wenn Bieter i zum Gebot $b_i < c_i$ abweicht, ändert sich gar nichts => nicht profitabel.

- wenn Bieter i mit Gebot $b_i = c_i$ die Auktion nicht gewinnt, weil das niedrigste Gebot p unter c_i liegt => i erhält Nutzen 0.

↳ Abweichung zu $b_i' \in (p, \infty)$ macht keinen Unterschied.

↳ Abweichung zu $b_i' < p$ => i gewinnt die

Auktion, aber $p < c_i \Rightarrow$ Nutzen $p - c_i < 0$

$\Rightarrow$ nicht profitabel!

b) Erwarteter Betrag ist Erwartungswert des zweitniedrigsten (d.h. höchsten) Gebots:

· Jeder der $n=2$ Bieter bietet $b_i = c_i$, und $\tilde{c}_i \sim U[1,2]$. Verteilungsfunktion von $\tilde{c}_i$ ist

$$F(c) = \begin{cases} 0 & c < 1 \\ \frac{c-1}{2-1} & c \in [1,2] \\ 1 & c \geq 2 \end{cases}$$

· wir brauchen also die Ordnungsstatistik $\tilde{c}_{(1:2)}$,

mit Verteilungsfunktion $F_{(1:2)}(c)$ gegeben durch:

Verteilungsfunkt.

$$F_{(1:2)}(c) = \underbrace{Pr(\tilde{c}_1 < c)\, Pr(\tilde{c}_2 < c)}_{} = (c-1)^2$$

Ordnungsstatistik höchstens aus zwei Geboten.

Wahrscheinlichkeit, dass beide Gebote unterhalb von c liegen.

$\Rightarrow$ Dichtefunktion $f_{(1:2)}(c) = 2(c-1)$

$\Rightarrow$ Erwarteter Betrag $= \displaystyle\int_1^2 c\, f_{(1:2)}(c)\, dc =$

$$= \int_1^2 c\left[2(c-1)\right]dc = \int_1^2 \left[2c^2 - 2c\right]dc = \left[\frac{2}{3}c^3 - c^2\right]_1^2 =$$

$$\left[\frac{2}{3}\cdot(8) - 4\right] - \left[\frac{2}{3}(1) - 1\right] = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{5/3}}$$

Aufgabe 2: Festpreis

- Private Information von Käufer i: Wertschätzung zwischen 0 und 1, gleichverteilt auf $[0,1]$.
- Mögliche Aktionen für Käufer i: "Ja" und "Nein". "Ja" heisst, ich kaufe das Gut. "Nein" heisst, ich kaufe das Gut nicht.

→ eine Strategie für einen Käufer besagt, ob er das Gut kaufen möchte oder nicht, für jede mögliche Wertschätzung und jeden Preis, den der Auktionator festlegt.

$$\varphi : \underbrace{[0,1]}_{\text{Festpreis}} \times \underbrace{[0,1]}_{\text{Wertschätzungen}} \longrightarrow \{\text{„Ja"}, \text{„Nein"}\}$$

- Schwach dominante Strategie: Gut <u>kaufen</u>, wenn <u>$v_i \geq p$</u>, und Gut <u>nicht kaufen</u>, wenn <u>$v_i < p$</u>.

- Erwarteter Profit, wenn alle diese Strategie spielen (von Bieter i) Π_i:

$$\Pi_i = (v_i - p) \cdot Pr(\text{nur } i \text{ sagt ja})$$

$$+ \frac{1}{2}(v_i - p) \cdot Pr(i \text{ und ein anderer Spieler sagen ja})$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot (v_i - p) \cdot Pr(i \text{ und zwei andere Spieler sagen ja})$$

$$= (v_i - p) \cdot \left[Pr(v_j < p) \cdot Pr(v_k < p) \right] +$$

$$\frac{1}{2}(v_i - p) \cdot \left[Pr(v_j < p) \cdot Pr(v_k \geq p) + Pr(v_j \geq p) \cdot Pr(v_k < p) \right] +$$

$$\frac{1}{3}(v_i - p) \left[Pr(v_j \geq p) \cdot Pr(v_k \geq p) \right] \quad =$$

$$(v_i - p)(p^2) + \frac{1}{2}(v_i - p)\left[2p(1-p)\right] + \frac{1}{3}(v_i - p)\left[(1-p)^2\right] =$$

$$(v_i - p)\left[p^2 + p(1-p) + \frac{1}{3}(1-p)^2\right]$$

b) Erwarteter Erlös des Verkäufers bei Preis p.

$$\underline{R^V(p)} = p \cdot Pr[\underbrace{\text{mindestens ein Käufer hat } \tilde{v}_i \geq p}_{1-Pr[\underbrace{\text{alle haben } \tilde{v}_j < p}_{=p^3}]}].$$

$$= p \cdot [1-p^3]$$

→ wir berechnen den Preis p^*, der den Erlös des Verkäufers maximiert.

$$\frac{\partial R^V(p)}{\partial p} = [1-p^3] + p[-3p^2] \stackrel{!}{=} 0 \iff$$

$$1 - p^3 - 3p^3 = 0 \iff 4p^3 = 1 \iff$$

$$p^3 = 1/4 \iff \underline{\underline{p^* = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}}}$$

$\Rightarrow$ Einsetzen in $R^u(p)$ liefert maximalen Erlös:

$$R^u(p^*) = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\left[1 - \left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^3\right] \approx \underline{\underline{0.4725}}$$

c) Vergleich mit Erlösen in der Zweitpreis-auktion (ZPA)

- Erlös in ZPA ohne Reservationspreis:

↳ das ist der Erwartungswert des zweithöchsten Gebots (und jeder bietet einfach seine Zahlungsbereitschaft).

$$\hookrightarrow F_{(2:n)}(y) = [Pr(\tilde{v}_i < y)]^n + n\,[Pr(\tilde{v}_i < y)]^{n-1} Pr(\tilde{v}_j > y)$$

$\tilde{v}_i$ gleichverteilt auf $[0,1]$

$$= y^n + n y^{n-1}(1-y) = n y^{n-1} - (n-1) y^n$$

$$\Rightarrow f_{(2:n)}(y) = n(n-1)y^{n-2} - n(n-1)y^{n-1} = n(n-1)y^{n-2}(1-y)$$

$\Rightarrow$ erwarteter Erlös:

$$R^{ZPA} = \int_0^1 y f_{(2:n)}(y)\,dy = \int_0^1 \left[n(n-1)\left(y^{n-1} - y^n\right) \right] dy$$

$$= \left[n(n-1)\left(\frac{1}{n} y^n - \frac{1}{n+1} y^{n+1} \right) \right]_0^1$$

$$= n(n-1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = n(n-1)\left[\frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} \right] =$$

$$= \frac{n-1}{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ n=3}}{=} \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ der Erlös der ZPA (ohne Reservationspreis) liegt höher als der Erlös mit optimalem Festpreis.

- der Erlös einer ZPA mit Reservationspreis liegt noch höher, nämlich bei

$$\underline{\frac{n-1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}} > \frac{1}{2} \quad \text{(siehe Vorlesung)}$$

Aufgabe 3: ZPA mit Eintrittsgeld

a) Sobald ein Spieler die Eintrittskosten bezahlt, sind diese sunk costs. Dann ist es schwach dominant, immer seine eigene Wertschätzung zu bieten.

→ das nehmen wir von nun an an.

b)

wichtig: Teilnehmer sehen ihre Wertschätzung und entscheiden, basierend darauf, ob sie teilnehmen oder nicht.

↳ wir suchen ein Gleichgewicht, in der Bieter teilnehmen, genau dann wenn ihre Wertschätzung über w liegt.

↳ wir finden jetzt w!

- ω ist eine Lösung zur folgenden Gleichung:

$$\underbrace{0}_{\text{Nutzen von Nicht-Teilnahme}} = \underbrace{-e + \left[P_r\left(\overset{\omega}{v}_{(1:n-1)} < \omega\right)\right](\omega - 0)}_{\text{Nutzen durch Teilnahme}}$$

Nutzen durch Teilnahme:

↳ Eintrittskosten e

↳ Teilnehmer mit Wertschätzung ω gewinnt genau dann wenn alle andern Teilnehmer eine Wertschätzung unter ω haben

→ dann zahlt er 0.

$$\iff$$

$$0 = -e + \left[F(\omega)\right]^{n-1} \cdot \omega$$

$$\iff$$

$$e = \omega^n \iff \underline{\underline{\omega^*(e) = e^{1/n}}}$$

c) Welches Eintrittsgeld maximiert den erwarteten Erlös?

$$R_n(e) = \underbrace{n \cdot (1-F(\omega)) \cdot e}_{} + \underbrace{Pr\left(\hat{v}_{(2:n)} \geq \omega\right) \cdot E\left[\hat{v}_{(2:n)} \mid \hat{v}_{(2:n)} \geq \omega\right]}_{}$$

Menge an Eintritts-geld, die Auktionator erhält.

Erwarteter Erlös aus Auktion:

↳ $\hat{v}_{(2:n)} \geq \omega$ muss gelten, sonst ist Erlös aus Geboten 0.

↳ Erlös aus Auktion ist dann $E\left[\hat{v}_{(2:n)} \mid \hat{v}_{(2:n)} \geq \omega\right]$

erwartete Erlös des Auktionar

$$=$$

$$n\left(1-F(w)\right)\cdot e + \Pr\left(\tilde{v}_{(2:n)} \geq w\right)\cdot \int_w^1 v \frac{f_{(2:n)}(v)}{\Pr\left(v_{(2:n)} \geq w\right)}\, dv$$

$$=$$

$$n(1-w)\cdot e + \int_w^1 v\, n(n-1)\, v^{n-2}(1-v)\, dv$$

$$=$$

$$\vdots$$

$$\frac{n-1}{n+1} + e - 2\frac{n}{n+1}e^{\frac{n+1}{n}}$$

→ jetzt finden wir das erlösmaximierende

e!

$$\rightarrow \max_{e} R_n(e) = \frac{n-1}{n+1} + e - 2\frac{n}{n+1} e^{\frac{n+1}{n}}$$

$$\frac{\partial R_n(e)}{\partial e} = 1 - 2e^{\frac{n+1}{n}-1} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{1/n} \Leftrightarrow e^{*} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

→ das setzen wir ein, um den Erlös im

Optimum zu bestimmen.

$$R_n(e^x) = \frac{n-1}{n+1} + e^x - 2\frac{n}{n+1}(e^x)^{\frac{n+1}{n}}$$

$$= \frac{n-1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n\cdot\frac{n+1}{n}}$$

$$= \frac{n-1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{n-1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

→ das ist genau gleich dem Erlös der ZPA mit optimalem Reservationspreis

→ Grund: Die Allokationsregel ist gleich bei ZPA mit optimalem Reservationspreis und ZPA mit optimalem Eintrittsgeld.

Aufgabe 4

- Auktion mit Outside Option
  ↳ wenn Bieter die Auktion nicht gewinnt, kann er das Gut auch von einem anderen Anbieter zum Preis p_m kaufen
  ↳ Wichtig: Seine Zahlungsbereitschaft für dieses Gut und das Gut, dass in der Auktion bereitgestellt wird, ist gleich.

↳ Implikation: Man will in der Auktion niemals mehr als p^m bezahlen

a) Was ist die schwach dominante Strategie?

↳ es ist schwach dominant, dann Gebot $\min\{v_i, p^m\}$ abzugeben.

Zahlungsbereitschaft $v_i \sim U[0,1]$

Begründung

- definiere $\hat{b}_{(1:n-1)}$ als das höchste der $N-1$ anderen Gebote.

- wenn $\hat{b}_{(1:n-1)} > p_m$

  ↳ es ist optimal, $b_i \leq p_m$ zu bieten →

  so gewinnt man die Auktion <u>nicht</u>, und kann daher das Gut zum Preis p_m kaufen.

↳ wenn man die Auktion gewinnt (durch Gebot $b_i > \hat{b}_{(1:N-1)}$), so zahlt man $\hat{b}_{(1:N-1)} > p_m$ → keine profitable Abweichung.

- wenn $\hat{b}_{(1:N-1)} \leq p_m$

↳ Gebot $b_i = v_i$ optimal.

↳ $v_i > \hat{b}_{(1:N-1)}$ ⇒ bei Gebot $b_i = v_i$ erhält man Nutzen $v_i - \hat{b}_{(1:N-1)}$, sonst den Nutzen 0.

$\hookrightarrow v_i \leq \tilde{b}_{(1:n-1)}$: man will die Auktion nicht gewinnen $\Rightarrow$ Gebot $b_i = v_i$ optimal.

b) Erwarteter Erlös $\left(b_i(v_i) = \min\{v_i, p_m\} \right)$:

$$R_n(p_m) = Pr\left(\tilde{v}_{(2:n)} < p_m\right) \cdot E\left[\tilde{v}_{(2:n)} \mid \tilde{v}_{(2:n)} < p_m\right)$$

$$+ Pr\left(\tilde{v}_{(2:n)} \geq p_m\right) \cdot p_m$$

$$=$$

$$F_{(2:n)}(p_m) \cdot \int_0^{p_m} v \, \frac{f_{(2:n)}(v)}{F_{(2:n)}(p_m)} \, dv \; +$$

$$\left(1 - F_{(2:n)}(p_m)\right) \cdot p_m \; =$$

$$\int_0^{p_m} v \, f_{(2:n)}(v) \, dv \; + \; \left(1 - F_{(2:n)}(p_m)\right) \cdot p_m \; =$$

$$\int_0^{p_m} \left(n(n-1) v^{n-1} - n(n-1) v^{n} \right) dv + \left(1 - n p_m^{n-1} + (n-1) p_m^{n}\right) p_m$$

$$= \dots = p_m - (p_m)^n + \frac{n-1}{n+1}(p_m)^{n+1}$$