Klausur zur Vorlesung Auktionen und Märkte

Erlaubte Hilfsmittel: ein nicht programmierbarer Taschenrechner

Aufgabe 1: VCG Mechanismus und Pivot Mechanismus (20 Punkte)

Eine Stadt mit zwei Einwohnern möchte eine Statue bauen. Die Statue kann in den Alternativen Gold, Silber oder Bronze gebaut werden. Es gibt keine Kosten. Sie sehen eine Tabelle, welche für beide Spieler den Nutzen angibt den er/sie von jeder Alternative bekommt.

	Gold	Silber	Bronze
Einwohner 1	5	8	2
Einwohner 2	5	1	6

(a) Bestimmen Sie die effiziente Alternative. (3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie für jeden Einwohner die Zahlung, die er im Vickrey-Clarke-Groves Mechanismus (für $h_i(\hat{\theta}_{-i}) = 0$) erhalten wird. Begründen Sie Ihre Antwort kurz. (4 Punkte)

(c) Betrachten Sie nun den Pivot Mechanismus. Prüfen Sie welche Einwohner pivotal sind. Bestimmen Sie die Zahlung, die jeder Spieler zu errichten hat. Begründen Sie Ihre Antworten kurz. (6 Punkte)

(d) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, wie sich beide Spieler besser stellen können, wenn sie sich absprechen, welche Werte sie dem Mechanismus melden. Wieso widerspricht dies nicht der Tatsache, dass Wahrheit sagen im Pivot Mechanismus anreizkompatibel ist? (7 Punkte)

Solution:

(a) Gold hat mit Nutzen von 5+5=10 den höchsten Gesamtnutzen und ist effizient.

(b) Jeder erhält als Trasfer den Gesamtnutzen, den die gewählte Alternative für alle anderen Teilnehmer hat. Also erhalten beide Einwohner einen Transfer von 5.

(c) Ohne Einwohner 1 wäre Bronze effizient, also ist er pivotal. Ohne Einwohner 2 wäre Silber effizient, also ist Einwohner 2 auch pivotal. Jeder Einwohner zahlt den Nutzenverlust, den der andere Einwohner davon hat, dass nicht seine Lieblingsalternative gewählt wird. Also zahlt Einwohner 1 einen Transfer von 6-5=1 und Einwohner 2 zahlt 8-5=3

(d) Es gibt viele Lösungen. Hier eine bei der beide Einwohner pivotal bleiben: Einwohner 1 behauptet bei Silber einen Nutzen von 5.1 zu haben, Einwohner 2 behauptet bei Bronze einen Nutzen von 5.1 zu haben. Das senkt die Transfers jeweils auf 0.1. Dies ist kein Widerspruch, da tatsächlich kein Spieler einen Anreiz hat zu lügen um SICH SELBST besser zu stellen. Es stellt jeder Spieler durch Lügen jeweils den anderen besser.

Aufgabe 2: Erlös Maximierung (17 Punkte) Betrachten Sie eine Auktion mit n Bietern, deren Wertschätzungen privat, unabhängig und identisch verteilt seien mit Verteilungsfunktion $F(v) = v^2$.

(a) Zeigen Sie, dass die virtuelle Wertschätzungsfunktion von F gegeben ist durch $J(v) = \frac{3}{2}v - \frac{1}{2v}$. (5 Punkte)

(b) Leiten Sie über die virtuelle Wertschätzung einen Erlös maximierenden Verkaufsmechanismus her und beschreiben Sie ihn verbal. Falls er einen Reservationspreis beinhaltet, bestimmen Sie dessen optimale Höhe. (Es ist nicht notwendig, erwartete Zahlungen zu bestimmen.) (12 Punkte)

Solution:

(a) $J(v) = v - \frac{1-F(v)}{f(v)} = v - \frac{1-v^2}{2v} = v - \frac{1}{2v} + \frac{1}{2}v = \frac{3}{2}v - \frac{1}{2v}$

(b) Verkauf an den Spieler mit der höchsten positiven virtuellen Wertschätzung. Die virtuelle Wertschätzung ist positiv genau dann wenn

$$\frac{3}{2}v - \frac{1}{2v} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3v^2 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad v > \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Da die virtuelle Wertschätzung monoton steigend ist, sollte man an den Spieler mit der höchsten Wertschätzung über $\sqrt{\frac{1}{3}}$ verkaufen. Dies ist zum Beispiel zu erreichen durch eine Zweitpreisauktion mit Reservationspreis von $\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Aufgabe 3: Mechanismus Design (28 Punkte) In der folgenden Grafik sehen Sie vier verschiedene Allokationsperformances für Mechanismen mit 2 Bietern beschrieben.

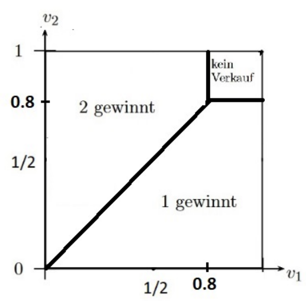

Abbildung 1

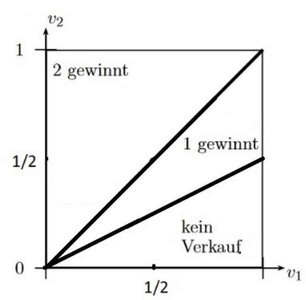

Abbildung 2

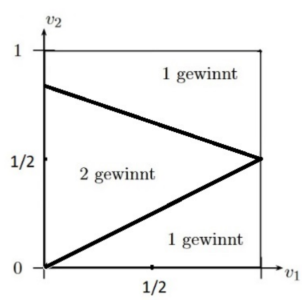

Abbildung 3

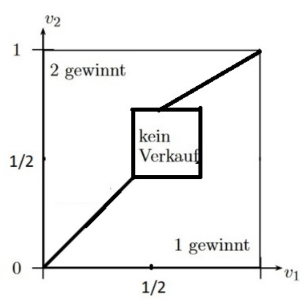

Abbildung 4

(a) Bestimmen Sie für jede Performance, ob diese

i) für alle Verteilungen implemetierbar,

ii) für die Gleichverteilung implementierbar, aber nicht für jede Verteilung, oder

iii) für keine Verteilung implementierbar

ist. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. (8 Punkte)

(b) Gehen Sie für (b) und (c) von der Gleichverteilung aus. Bestimmen Sie für Abbildung 1 die erwartete Gewinnwahrscheinlichkeit $\bar{q}_1(v_1)$ von Bieter 1. (4 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass für die Allokationsperformance in Abbildung 1 die erwartete Zahlung von Bieter 1

$$\bar{t}_1(v_1) = \begin{cases} \bar{t}_1(0) + \frac{1}{2}v_1^2 & v_1 \leq 0.8 \\ \bar{t}_1(0) + 0.32 & v_1 > 0.8 \end{cases}$$

beträgt. Bestimmen Sie für diese Allokationsperformance den maximalen erwarteten Erlös des Verkäufers unter der Teilnahmebedingung. *Hinweis:* Nutzen Sie die Symmetrie zwischen Bieter 1 und Bieter 2. (16 Punkte)

Solution:

(a) Erwartete Gewinnwahrscheinlichkeit muss monoton steigend sein. Also 1i, 2ii, 3iii, 4i

(b) $\bar{q}_1(v) = \begin{cases} v & v \leq 0.8 \\ 0.8 & v > 0.8 \end{cases}$

(c) $\bar{t}_1(v) = \bar{t}_1(0) + \bar{q}_1(v)v - \int_0^v \bar{q}_1(x)dx.$

Für $v \leq 0.8$ also

$$\bar{t}_1(v) = \bar{t}_1(0) + v^2 - \int_0^v x dx = \bar{t}_1(v) = \bar{t}_1(0) + v^2 - \frac{v^2}{2} = \bar{t}_1(v) = \bar{t}_1(0) + \frac{v^2}{2}.$$

Für $v > 0.8$

$$\bar{t}_1(v) = \bar{t}_1(0) + 0.8v - \int_0^v x dx = \bar{t}_1(0) + 0.8v - \int_0^{0.8} x dx - (v - 0.8)0.8$$

$$= \bar{t}_1(0) - \frac{0.8^2}{2} + 0.8^2 = \bar{t}_1(0) + 0.32$$

(d) Der Erlös wird maximal, wenn die Teilnahmebedingung bindet, dh. $\bar{t}(0) = 0$. Beide Spieler zahlen den gleichen erwarteten Transfer, daher ist der erwartete Erlös

$$R = 2\int_0^1 \bar{t}(v)dv = 2\left(\int_0^{0.8} \frac{v^2}{2}dv + 0.2 * 0.32\right) = 2\left(\frac{0.8^3}{6} + 0.2 * 0.32\right) \approx 0.299$$

Aufgabe 4: Verbalaufgabe (25 Punkte)

(a) Beschreiben Sie kurz verbal das Bietverhalten im symmetrische Bayesianische Nash Gleichgewicht der Erstpreisauktion und im Gleichgewicht in schwach dominanten Strategien der Zweitpreisauktion. Argumentieren Sie verbal, dass der erwartete Erlös in beiden Auktionen der gleiche ist. (10 Punkte)

(b) Überzeugen Sie einen Verkäufer verbal, dass Auktionen gegenüber Festpreisen Vorteile haben können. Gehen Sie darauf ein, unter welchen Umständen sich Auktionen besonders lohnen und in welchen nicht. Was können potenzielle Vorteile von Festpreisen sein? (15 Punkte)

a besser wenn kennen nicht WS
ein unzerteilbares gut, sehr unterschiedliche WS

nicht so gut falls 1000 verkauft, kennen WS wissen wie, muss schnell sein

Solution:

(a) Im symmetrischen Gleichgewicht der EPA bietet jeder Spieler den Erwartungswert der zweithöchsten Wertschätzung bedingt darauf dass er die höchste hat. Da der Bieter mit der höchsten Wertschätzung sein Gebot zahlt entspricht der erwartete Erlös dem Erwartungswert der zweithöchsten Wertschätzung. Im GG der Zweitpreisauktion bietet jeder seine wahre Wertschätzung. Da man im Fall von Gewinnen die zweithöchste Wertschätzung zahlt liegt auch hier der erwartete Erlös beim Erwartungswert der zweithöchsten Wertschätzung. (Eine Argumentation über Erlös Äquivalenz war auch in Ordnung, sofern sauber argumentiert.)

(b) Eine Auktion kann den Erlös des Verkäufers erhöhen. Wenn die Auktion einen Reservationspreis in Höhe des geplanten Festpreises setzt, dann wird sie sogar niemals weniger Erlös erzielen als der Festpreis. Eine Auktion kann auch die Effizienz erhöhen, da (bei den meisten Auktionsformaten) der Bieter mit der höchsten Wertschätzung das Gut bekommt. Bei einem Festpreis hingegen erfolgt die Zuteilung willkürlich/zufällig falls mehrere Spieler bereit sind den Festpreis zu zahlen. Eine Auktion lohnt sich besonders wenn die Wertschätzungen der Spieler unbekannt oder sehr unsicher sind. Bei alltäglichen Transaktionen mit standardisierten oder wenig schwankenden Preisen (zB Butter) lohnt sich eine Auktion hingegen nicht. Ebenso lohnt es sich bei sehr niedrigen erwarteten Preisen nicht. Denn die Nachteile sind: Auktionen sind (Zeit-)aufwendig, teurer in der Durchführung. Sie sind schwieriger zu verstehen und erfordern ein gewisses Vertrauen der Bieter in die Institution, dass die Regeln korrekt eingehalten werden.