Auktionen und Märkte

Englische vs Vickrey Auktion

Groh/von Wangenheim

Universität Bonn, Wintersemester 2024/2025

Gleichgewicht der Zweitpreisauktion

Wir haben bereits gesehen, dass unter vollständiger Information wahrheitsgemäßes Bieten in der ZPA eine schwach dominante Strategie ist.

Sie haben bereits beim Auktionsspiel erlebt, dass dies unter unvollständiger Information ähnlich ist.

Tatsächlich lässt sich die Argumentation unter vollständiger Information 1:1 auf den Fall unter unvollständiger Information übertragen.

Satz (Vickrey, 1961):

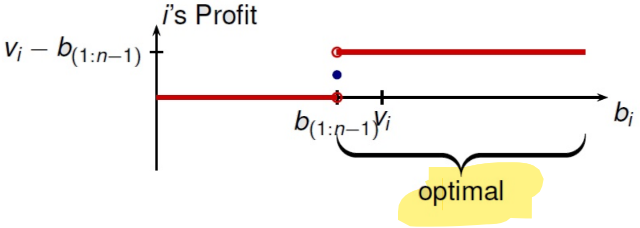
Wahrheitsgemäßes Bieten (d.h., $b(v_i) = v_i$) ist in der ZPA eine schwach dominante Strategie.

Warum gilt der Satz?

Zu zeigen: Für jeden Bieter i ist $b_i = v_i$ für jedes v_i optimal, egal wie die anderen sich verhalten.

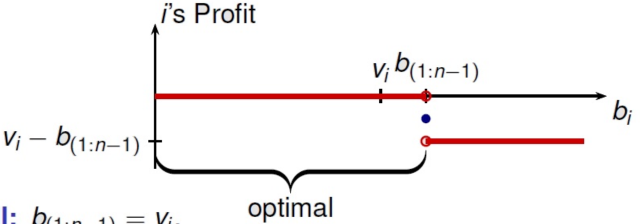
Bezeichne $b_{(1:n-1)}$ das höchste Gebot der anderen Bieter.

1. Fall: $b_{(1:n-1)} < v_i$.

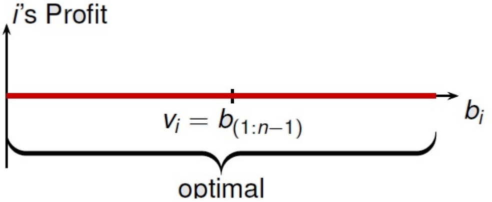


Beweis des Satzes

2. Fall: $b_{(1:n-1)} > v_i$.



3. Fall: $b_{(1:n-1)} = v_i$.



Da $b_i = v_i$ in jedem der drei Fälle optimal ist, folgt das Resultat!

Bemerkungen

1. Die Argumentation zeigt auch, dass wahrheitsgemäßes Bieten die einzige schwach dominante Strategie ist.
2. Die Annahmen Symmetrie und Unabhängige Information spielten für die Argumentation keine Rolle.
3. Die Annahme der privaten Wertschätzungen hingegen schon.
4. Da wahrheitsgemäßes Bieten schwach dominant ist, ist es insbesondere ein BNGG!
5. Erinnerung: Es gibt noch andere BNGG, diese sind aber eher unplausibel, da sie schwach dominiert sind.

Effizienz? Ja!
(…unter der Annahme, dass es effizient ist immer zu verkaufen)

Verkaufspreis: $p = v_{(2:n)}$

Erwarteter Erlös:

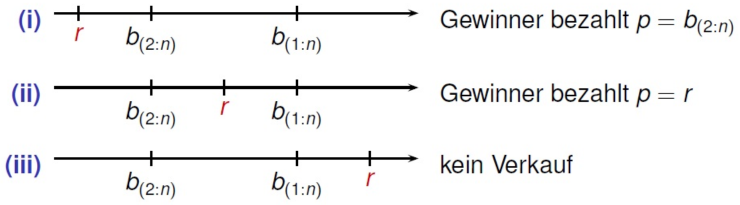
$$\begin{aligned} R_n \equiv \mathbb{E}[\tilde{v}_{(2:n)}] &= \int_0^1 v\ f_{(2:n)}(v)dv \\ &= \int_0^1 vn(n-1)F(v)^{n-2}f(v)(1-F(v))dv \end{aligned}$$

Beispiel ($\tilde{v}_i \sim U[0,1]$): $R_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ (siehe Übung!)

Effekt eines Reservationspreises

Ein **Reservationspreis** r ist ein Mindestpreis:

- Jeder Bieter muss ein Gebot abgeben; Gebote unterhalb r sind möglich, verlieren jedoch mit Sicherheit.
- Der Gewinner zahlt mindestens den Reservationspreis.



Der Reservationspreis hat nur in Fall (ii) und (iii) einen Effekt!

ZPA mit Reservationspreis: Gleichgewicht

Gleichgewicht der ZPA mit RP

$$b(v_i) = \begin{cases} v_i & \text{falls } v_i \geq r \\ \in (0, r) & \text{falls } v_i < r \end{cases}$$

ist in der ZPA mit Reservationspreis r eine schwach dominante Strategie.

Frage: Warum ist dies eine direkte Folge des ersten Satzes?

- Ein Bieter empfindet die ZPA mit RP wie eine Standard ZPA, bei der ein weiterer Bieter sicher ein Gebot von $b = r$ abgibt.
- Wahrheitsgemäßes Bieten ist also weiter eine schwach dominante Strategie.
- Da alle Gebote $b(v_i) < r$ den gleichen Effekt haben, sind alle diese Gebote schwach dominant.

Exkurs: Goethes ZPA

Goethe schrieb am 16. Januar 1797 an seinem Verleger Vieweg:

> *Ich bin geneigt Herrn Vieweg in Berlin ein episches Gedicht Hermann und Dorothea das ohngefähr zweitausend Hexameter stark sein wird zum Verlag zu überlassen. (. . .) Was das Honorar betrifft so stelle ich Herrn Oberkonsistorialrat Böttiger ein versiegeltes Billet zu, worin meine Forderung enthalten ist, und erwarte was Herr Vieweg mir für meine Arbeit anbieten zu können glaubt. Ist sein Anerbieten geringer als meine Forderung, so nehme ich meinen versiegelten Zettel ungeöffnet zurück und die Negotiation zerschlägt sich, ist es höher, so verlange ich nicht mehr als in dem, alsdann von Herrn Oberkonsistorialrat zu eröffnenden Zettel verzeichnet ist.*

Exkurs: Goethes ZPA

Frage 1: Was ist der Bezug zwischen dem was Goethe vorschlägt und einer Zweitpreisauktion?

- Der Vorschlag entspricht quasi einer ZPA mit nur einem Bieter und einem geheimen Reservationspreis.

Frage 2: Wie sollte sich der Verleger optimalerweise verhalten?

- Da wahrheitsgemäßes Bieten eine schwach dominante Strategie ist, egal welcher Reservationspreis gewählt wurde, sollte der Verleger soviel bieten wie er maximal bereit wäre zu zahlen.

Exkurs: Goethes ZPA

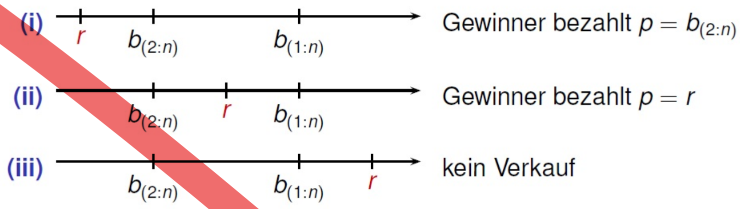
Der Hintergrund zu Goethes Motivation:

- Goethe arbeitete mit wechselnden Verlegern.
- Aufgrund von fehlenden Copyright Regeln hielten sich Verleger bzgl ihrer Umsätze sehr bedeckt.
- Goethe versuchte wohl seinen wahren Marktwert zu lernen.

Was damals geschah:

- Herr Böttiger kannte Goethes Preisvorstellungen aus den Verhandlungen mit anderen Verlegern.
- Er erriet den Reservationspreis (1000 Taler) richtig und verriet ihn an Herrn Viehweg.
- Herr Viehweg bot nur genau den Reservationspreis.
- Herr Viehwegs Erlös wird auf 2600 Taler geschätzt.

Erwarteter Erlös mit Reservationspreis



Wir sind in Fall (i), wenn $\tilde{v}_{(2:n)} \geq r$. Erlös: $\tilde{v}_{(2:n)}$

Wir sind in Fall (ii), wenn $\tilde{v}_{(2:n)} < r$ und $\tilde{v}_{(1:n)} \geq r$. Erlös: r

Wir sind in Fall (iii), wenn $\tilde{v}_{(1:n)} < r$. Erlös: 0 (kein Verkauf)

Erwarteter Erlös:

$$
\begin{aligned}
R_n(r) \quad = \quad & \text{Prob}\{\tilde{v}_{(2:n)} \geq r\} \cdot \mathbb{E}[\tilde{v}_{(2:n)} | \tilde{v}_{(2:n)} \geq r] \\
& + \text{Prob}\{\tilde{v}_{(2:n)} < r, \tilde{v}_{(1:n)} \geq r\} \cdot r \\
& + \text{Prob}\{\tilde{v}_{(1:n)} < r\} \cdot 0
\end{aligned}
$$

Erwarteter Erlös mit Reservationspreis

$$
\begin{aligned}
R_n(r) &= \text{Prob}\{\tilde{v}_{(2:n)} \geq r\} \cdot \mathbb{E}[\tilde{v}_{(2:n)} | \tilde{v}_{(2:n)} \geq r] \\
&\quad + \text{Prob}\{\tilde{v}_{(2:n)} < r, \tilde{v}_{(1:n)} \geq r\} \cdot r \\
&= \text{Prob}\{\tilde{v}_{(2:n)} \geq r\} \cdot \frac{\int_r^1 v f_{(2:n)}(v) dv}{\text{Prob}\{\tilde{v}_{(2:n)} \geq r\}} \\
&\quad + n \underbrace{(1 - F(r))}_{\text{Prob(ein v über r)}} \underbrace{F(r)^{n-1}}_{\text{Prob(alle anderen v unter r)}} r \\
&= \int_r^1 v n(n-1) F(v)^{n-2} f(v)(1 - F(v)) dv \\
&\quad + n(1 - F(r)) F(r)^{n-1} r
\end{aligned}
$$

Erwarteter Erlös bei Gleichverteilung

Sind die Wertschätzungen auf dem Intervall [0, 1] gleichverteilt, dann vereinfacht sich die Formel:

$$
\begin{aligned}
R_n(r) &= nr^n(1-r) + \int_r^1 (n(n-1)v^{n-1} - n(n-1)v^n)dv \\
&= nr^n - nr^{n+1} + \left[(n-1)v^n - n\frac{n-1}{n+1}v^{n+1}\right]_r^1 \\
&= nr^n - nr^{n+1} + (n-1)(1-\frac{n}{n+1}) - (n-1)r^n + n\frac{n-1}{n+1}r^{n+1} \\
&= \frac{n-1}{n+1} + r^n\left[n - nr - (n-1) + n\frac{n-1}{n+1}r\right] \\
&= \frac{n-1}{n+1} + r^n\left[1 - 2\frac{n}{n+1}r\right]
\end{aligned}
$$

Optimaler RP - zusätzlicher Erlös

Beispiel ($\tilde{v}_i \sim U[0,1]$):

$$R_n(r) = \underbrace{\frac{n-1}{n+1}}_{=R_n(0)} + \underbrace{r^n \left[1 - 2\frac{n}{n+1} r\right]}_{>0 \text{ für kleine } r>0}$$

BeO:

$$R_n'(r) = nr^{n-1}(1-2r) \stackrel{!}{=} 0$$

Optimaler Reservationspreis: $r^* = \frac{1}{2}$

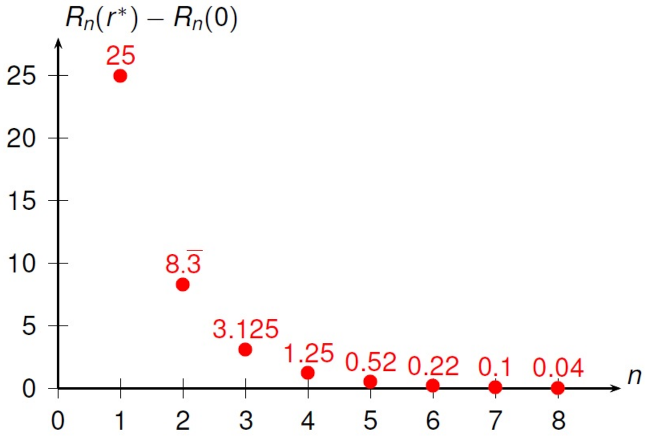
Beobachtung 1: r^* ist unabhängig von n.

Beobachtung 2: Allokation ist nicht effizient. Es besteht ein Trade-Off zwischen Effizienz und Erlösmaximierung!

Beobachtung 3: Reservationspreis ist relativ unwichtig bei vielen Bietern. ($R_n(r^*) = \frac{n-1}{n+1} + (\frac{1}{2})^n \frac{1}{n+1} \to R_n(0)$ wenn $n \to \infty$.)

Wieviel bringt der Reservationspreis zusätzlich?

Beispiel: $\tilde{v}_i \sim U[0, 100]$



Erwarteter Erlös - allgemeiner Fall

Erinnerung: der Erlös für gegebenen RP r beträgt:

$$R_n(r) = \int_r^1 vn(n-1)F(v)^{n-2}f(v)(1-F(v))dv + n\underbrace{(1-F(r))r}_{u}\underbrace{F(r)^{n-1}}_{w}$$

Wir optimieren nach r. Die erste Ableitung im allgemeinen Fall:

$$\begin{aligned} R_n'(r) = & -rn(n-1)F(r)^{n-2}f(r)(1-F(r)) \\ & + n\underbrace{(1-F(r))r}_{u}\underbrace{(n-1)F(r)^{n-2}f(r)}_{w'} + n\underbrace{(-f(r)r+1-F(r))}_{u'}\underbrace{F(r)^{n-1}}_{w} \end{aligned}$$

Erster und zweiter Summand kürzen sich raus. Die BeO im allgemeinen Fall ist also

$$R_n'(r) = \underbrace{nF(r)^{n-1}}_{>0}\underbrace{[1-F(r)-f(r)r]}_{>0 \text{ für kleine } r>0} \stackrel{!}{=} 0$$

Erwarteter Erlös - allgemeiner Fall

Optimaler Reservationspreis löst die folgende Gleichung:

$$r^* = \frac{1 - F(r^*)}{f(r^*)}$$

Wir treffen die (Standard)annahme, dass $\frac{1-F(r)}{f(r)}$ stetig und monoton fallend ist. Die Gleichung besitzt dann eine eindeutige innere Lösung.

Beobachtungen 1, 2 (und 3) gelten auch im allgemeinen Fall:

- r^* ist unabhängig von n.
- Allokation ist nicht effizient. (Trade-Off zwischen Effizienz und Erlösmaximierung)
- Reservationspreis ist relativ unwichtig bei vielen Bietern.

Exkurs: Die Hazard Rate

- Die Bedingung $\frac{1-F(r)}{f(r)}$ stetig und monoton fallend ist äquivalent zu $\frac{f(r)}{1-F(r)}$ stetig und monoton steigend.

- Der Ausdruck $\frac{f(r)}{1-F(r)}$ heißt hazard rate. Er ist zB in der Versicherungsmathematik in den Sterbetafeln von Bedeutung.

- Nehmen Sie an ein Event (zB Sterben) tritt irgendwann (zufällig) ein. Sei $\tilde{r}$ die ZV, die den Zeitpunkt beschreibt und $F(r)$ die zugehörige Verteilungsfunktion.

- Dann ist $\frac{f(r)}{1-F(r)}$ die marginale Wahrscheinlichkeit, dass das Event zum Zeitpunkt r eintritt, bedingt darauf, dass es vorher nicht eingetreten ist.

- Eine monoton steigende Hazard rate beschreibt (bei Sterbetafeln) also die Wahrscheinlichkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt zu sterben, wenn man bis dahin überlebt hat.

Exkurs: Die Hazard Rate

- Eine steigende Hazard Rate ist in vielen Kontexten plausibel.
- Viele Standardverteilungen (zB die Normalverteilung und die Gleichverteilung) erfüllen dieses Kriterium.
- Jede Verteilung in "Hügelform", die am rechten Rand nicht "zu schnell" abfällt erfüllt das Kriterium.
- In der Ökonomik meist von Bedeutung beim Trade-Off zw. marginalem und inframarginalem Effekt (vgl. Monopolbepreisung).
  - Ein marginal höherer Preis verliert Kunden in Größenordnung $f(p)$ (marginaler Effekt).
  - Ein marginal höherer Preis erhöht Einnahmen bei der Masse $(1 - F(p)$ an Konsumenten, die kaufen (inframarginaler Effekt).
- Eine monotone Hazard Rate garantiert i.d.R. die Eindeutigkeit von Lösungen.

Wie wichtig ist der Reservationspreis?

Vergleich zwischen

1. ZPA mit n Bietern und optimalem Reservationspreis und
2. ZPA mit $n+1$ Bietern ohne Reservationspreis

Beispiel ($\tilde{v}_i \sim U[0,1]$):

$$\begin{aligned} R_n(r^*) &= \frac{n-1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n+1} \\ R_{n+1}(0) &= \frac{n}{n+2} \end{aligned}$$

Wir zeigen auf der nächsten Slide: $R_n(r^*) < R_{n+1}(0)$

Resultat (Bulow und Klemperer, 1996):

Ein weiterer Bieter bringt mehr zusätzlichen Erlös als optimaler Reservationspreis.

Wie sieht man die Ungleichung auf der vorherigen Slide?

$$
\begin{aligned}
R_n(r^*) &= \frac{n-1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n+1} \\
R_{n+1}(0) &= \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} + \frac{n-1}{n+1} \\
&= \frac{n-1}{n+1} + \frac{n(n+1)-(n+2)(n-1)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{n-1}{n+1} + \frac{2}{(n+2)} \frac{1}{(n+1)}
\end{aligned}
$$

Behauptung: $\frac{2}{n+2} > \left(\frac{1}{2}\right)^n$ dafür zeigen wir $2^{n+1} > n+2$

Da 2^{n+1} exponentiell wächst, $n+2$ aber nur linear, ist dies für alle n erfüllt, wenn es für kleine n gilt.

Es gilt: $n = 1$: $4 > 3$; $n = 2$: $8 > 4$; $n = 3$: $16 > 5$; ...

Folge: $R_{n+1}(0) > R_n(r^*)$

Profit- statt Erlösmaximierung

(implizite) Annahme bisher:

WS des Verkäufers ist 0 so dass Erlös=Profit

jetzt: WS des Verkäufers ist $v_S \in [0, 1]$

Erwarteter Profit:

$$\begin{aligned} \Pi_n(r) &= R_n(r) + \text{Prob}\{\text{Nicht-Verkauf}\} v_S \\ &= R_n(r) + F(r)^n v_S \end{aligned}$$

Optimaler Reservationspreis über BeO:

$$\Pi'_n(r) = \underbrace{nF(r)^{n-1}[1 - F(r) - rf(r)]}_{R'_n(r)} + nF(r)^{n-1} f(r) v_S$$

$$= nF(r)^{n-1} f(r) \left[\frac{1 - F(r)}{f(r)} - r + v_S \right] \stackrel{!}{=} 0$$

Optimaler Reservationspreis löst also die folgende Gleichung:

$$r^* - v_S = \frac{1 - F(r^*)}{f(r^*)}$$

Profitmaximierung - Bemerkungen

Gleiche Intuitionen wie vorher:

- Der Verkäufer setzt bei jeder WS optimalerweise einen RP über der eigenen WS.
- Der Trade-off zwischen Effizienz und Erlösmaximierung bleibt bestehen.
- Wieder ist der optimale RP unabhängig von der Anzahl der Bieter.
- Beispiel ($\tilde{v}_i \sim U[0, 1]$): $r^* = \frac{v_S+1}{2}$

Vergleich zur Englische Auktion

Wir haben bereits argumentiert, dass mit privaten WS die Englische Auktion und die Zweitpreisauktion strategisch äquivalent sind.

- Erinnerung: Einziger Unterschied war, dass man in der EA etwas über die WS der anderen lernt. Mit privaten WS ist das aber irrelevant.
- Dh. die gleichen Strategieprofile führen in beiden Formaten zu den gleichen Payoffs.
- Alle Intuitionen und Ergebnisse der ZPA gelten in unserem Setting also 1:1 für die EA.
- Ein Reservationspreis wird üblicherweise als Mindestgebot implementiert: die Uhr startet an diesem Preis.