Auktionen und Märkte

Erlösäquivalenz

Groh / von Wangenheim

Universität Bonn, Wintersemester 2024/2025

Erwarteter Erlös und erwartete Auszahlung

Wir interessieren uns nun für den erwarteten Erlös und den erwarteten Nutzen für die Bieter bei gegebener Allokationsperformance.

- Verkäufer hat hier inaktive Rolle außerhalb des Mechanismus. Er ist kein Spieler im spieltheoretischen Sinne. D.h., die Bieter $i = 1, \ldots, n$ sind die Spieler.
  - Erlös des Verkäufers: $\sum_{i=1}^{n} t_i(v_1, \ldots, v_n)$
- Sei $\{(q_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ ein beliebiger direkter Mechanismus, der AV ist.

Erwarteter Erlös des Verkäufers

Erwarteter Erlös des Verkäufers:

$$
\begin{aligned}
R &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n t_i(v_1, \ldots, v_n) \right] f_1(v_1) \cdot \ldots \cdot f_n(v_n) dv_1 \cdot \ldots \cdot dv_n \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \underbrace{\left[\int_0^1 \cdots \int_0^1 t_i(v_1, \ldots, v_n) f_{-i}(v_{-i}) dv_{-i} \right]}_{=\bar{t}_i(v_i)} f_i(v_i) dv_i \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \bar{t}_i(v_i) f_i(v_i) dv_i
\end{aligned}
$$

- Aufgrund des Satzes zur AV ist dieser Ausdruck eindeutig durch $\bar{t}_i(0)$ und die $\bar{q}_i(v_i)$-Funktion bestimmt.

Erwarteter Nutzen eines Bieters mit WS v_i

Erwarteter Nutzen eines Bieters mit WS v_i:

$$U_i(v_i, v_i) = \overline{q}_i(v_i)v_i - \overline{t}_i(v_i)$$

- Dieser Ausdruck ist ebenfalls eindeutig durch $\overline{t}_i(0)$ und die $\overline{q}_i(v_i)$-Funktion bestimmt.

Erlös- und Auszahlungsäquivalenz

Aus den vorherigen Slides erhalten wir das folgende Resultat:

Satz: Erlös- und Auszahlungsäquivalenz

Zwei Mechanismen, die die gleiche Allokationsperformance implementieren und bei denen Spieler (d.h. hier Käufer) mit der niedrigsten WS die gleichen erwarteten Transfers zahlen, führen …

(a) …zum gleichen erwarteten Erlös R für den Verkäufer, und

(b) …zu den gleichen erwarteten Profiten/Payoffs $U_i(v_i, v_i)$ der Käufer (für jedes v_i!).

- **Anmerkung:** "gleiche erwartete Transfers der niedrigsten Typen" (d.h. $\bar{t}_i(0)$) kann man auch durch "gleiche erwartete Payoffs der niedrigsten Typen" (d.h. $U_i(0, 0)$) ersetzen

Hinweis

- Im vorherigen Satz heißt es “Zwei Mechanismen . . . ” und nicht “Zwei direkte Mechanismen . . . ” da **Erlös- und Auszahlungsäquivalenz** sowohl für direkte als auch für indirekte Mechanismen gelten!
- D.h., auch zwei indirekte Mechanismen (zB EPA und APA), die die gleiche Allokationsperformance implementieren und bei denen Spieler mit den niedrigsten WS die gleichen erwarteten Transfers zahlen, führen zum gleichen erwarten Erlös R für den Verkäufer und den gleichen Profiten $U_i(v_i, v_i)$ der Käufer.

Anwendung des Erlösäquivalenz-Resultats

Geben Sie mit Hilfe des Erlösäquivalenz-Resultats eine Intuition, weshalb der erwartete Erlös der EPA mit

(a) optimalem Reservationspreis,

(b) optimalem Eintrittsgeld, und

(c) optimaler Mischung aus beidem

jeweils gleich ist!

Lösung.

(Hier geht es nicht um einen Beweis, sondern darum zu zeigen, dass man in der Lage ist die Einsichten richtig zu kombinieren.)

Wir wissen:

1. Bieter mit WS 0 bieten immer 0.
2. Die Allokationsperformances unterscheiden sich nur durch den Schwellenwert w, der bestimmt welche WS Bieter haben die teilnehmen. (Höchste WS über Schwellenwert gewinnt, alle WS unter Schwellenwert verlieren)

Aufgrund des Erlösäqivalenzresultats folgt, dass zwei Mechanismen, die den gleichen Schwellenwert induzieren, den gleichen erwarteten Erlös generieren.

Da man mit jedem der Instrumente (nur RP; nur E; RP + E) jeden Schwellenwert zwischen 0 und 1 induzieren kann, kann man jeden erwarten Erlös, der mit einem der Instrumente erreichbar ist, auch mit den anderen erreichen.

Insbesondere gilt: Der optimale erwartete Erlös ist jeweils gleich!

Anwendung des Auszahlungsäquivalenz-Resultats

Es gibt n Bietern mit jeweils auf $[0, 1]$ gleichverteilten WS.

Betrachten Sie die Mischung aus EPA und APA in der

- mit Wkeit $\frac{1}{2}$ nur der Gewinner sein Gebot bezahlt und
- mit Wkeit $\frac{1}{2}$ jeder sein Gebot bezahlt.

Leiten Sie das Bietverhalten im symmetrischen BNGG der "Mischauktion" aus dem uns bereits bekannten Bietverhalten der EPA mit Hilfe des Auszahlungsäquivalenz-Resultats ab!

(Hinweis: Nehmen Sie als gegeben an, dass die "Mischauktion" ein symmetrisches BNGG in strikt steigenden Strategien besitzt, in dem Bieter mit WS 0 auch 0 bieten!)

Hinweise

Tipps zu Vorgehen:

- Nennen Sie $b^M(v_i)$ das Gebot eines Bieters mit Wertschätzung i im Gleichgewicht. Dieses wollen wir ausrechnen.
- Bestimmen Sie mit Hilfe der Gewinnwahrscheinlichkeit und der Zahlungsregel den erwarteten Nutzen und den erwarteten Transfer in Abhängigkeit von $b^M(v_i)$.
- Schlagen Sie den erwarteten Nutzen und erwarteten Transfer der Erstpreisauktion nach.
- Argumentieren Sie über den Satz der Auszahlungsäquivalenz, dass die beiden erwarteten Transfers gleich sein müssen.
- Berechnen Sie $b^M(v_i)$.

Lösung.

Wenn alle Bieter bzgl. $b^M(v_i)$ bieten, ist der erwartete Nutzen eines Bieters in der Mischauktion

$$\begin{aligned} U_i^M(v_i, v_i) &= v_i^{n-1} v_i - \left[\tfrac{1}{2} v_i^{n-1} b^M(v_i) + \tfrac{1}{2} b^M(v_i)\right] \\ &= v_i^n - b^M(v_i) \tfrac{v_i^{n-1}+1}{2}. \end{aligned}$$

Wir wissen: Der erwartete Nutzen eines Bieters in der EPA ist

$$\begin{aligned} U_i^E(v_i, v_i) &= v_i^{n-1} v_i - v_i^{n-1} b^E(v_i) \\ &= v_i^{n-1} v_i - v_i^{n-1} \frac{n-1}{n} v_i. \end{aligned}$$

Aus dem Hinweis und aus dem, was wir von der EPA wissen, folgt, dass die Bedingung des Auszahlungsäquivalenzesultats erfüllt sind.

D.h., es gilt $U^M(v_i, v_i) = U^E(v_i, v_i)$ und daraus folgt

$$b^M(v_i) = \frac{n-1}{n} \frac{2 v_i^n}{v_i^{n-1} + 1}.$$