Online-Klausur zur Vorlesung Auktionen und Märkte

Erlaubte Hilfsmittel: ein nicht programmierbarer Taschenrechner

Aufgabe 1: Ordnungsstatistiken (10 Punkte)

Seien $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen, die auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilt sind. $\tilde{v}_{(k:3)}$ bezeichne die k-te Ordnungsstatistik der 3 Zufallsvariablen.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $\tilde{v}_{(3:3)}$ größer oder gleich 1/3 ist.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert von $\tilde{v}_{(2:3)}$. (Hinweis: Die Dichtefunktion der zweithöchsten Ordnungsstatistik ist $f_{(2:n)}(v) = n(n-1)F(v)^{n-2}f(v)(1-F(v))$.)

Solution:

$$P(v_{(3:3)} \geq 1/3) = P(v_1, v_2, v_3 \geq 1/3) = \quad P(v_1 \geq 1/3) \cdot P(v_2 \geq 1/3) \cdot P(v_2 \geq 1/3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$f_{(2:3)}(v) = 3 \cdot 2 \cdot v^{3-2} \cdot 1 \cdot (1-v) = 6v(1-v)$$

$$E[v_{(2:3)}] = \int_0^1 v f_{(2:3)}(v)dv = \int_0^1 6v^2 - 6v^3 dv = \left[2v^3 - \frac{6}{4}v^4\right]_0^1 = 2 - \frac{6}{4} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2: All-Pay-Auktion mit vollständiger Information (12 Punkte) Es gebe zwei risikoneutrale Bieter, $i = 1, 2$, mit allgemein bekannten Wertschätzungen $v_1 = v_2 = 4$. Betrachten Sie die All-Pay-Auktion. Gehen Sie dabei jedoch davon aus, dass nur Gebote aus $B = \{0, 1, 2\}$ abgegeben werden können. Geben zwei Bieter das gleiche Gebot ab, so zahlt jeder sein Gebot und eine faire Münze bestimmt, welcher der beiden risikoneutralen Bieter das Objekt erhält.

(a) Stellen Sie die Auszahlungsmatrix des zugehörigen Spiels in strategischer Form auf.

(b) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien!

Solution:

B1 \ B2	0	1	2
0	2;2	0;3	0;2
1	3;0	1;1	-1; 2
2	2;0	2; -1	0;0

$(b_1, b_2) = (2, 2)$ ist das eindeutige Nash GG in reinen Strategien.

Aufgabe 3: Erstpreisauktion (20 Punkte) Es gebe 2 risikoneutrale Bieter. Es gelten die Annahmen des SIPV-Modells. Die Wertschätzungen beider Bieter seien auf $[0, 1]$ gleichverteilt. Gehen Sie wie folgt vor, um die Bietfunktionen der Erstpreisauktion im symmetrischen BNGG (ohne Reservationspreis und Eintrittsgeld) herzuleiten.

(a) Beschreiben Sie die Bietfunktionen der Zweitpreisauktion im Gleichgewicht mit schwach dominanten Strategien.

(b) Bestimmen Sie für das Gleichgewicht unter (a) die erwartete Zahlung eines Bieters mit Wertschätzung v bedingt darauf, dass er gewinnt.

(c) Vergleichen Sie die Allokationsperformance des Gleichgewichts unter (a) mit der im symmetrischen BNGG der Erstpreisauktion.

(d) Verwenden Sie den Satz über die Erlösäquivalenz (und prüfen Sie, dass die Voraussetzungen gegeben sind), um die Bietfunktion im symmetrischen BNGG der Erstpreisauktion zu bestimmen.

Solution:

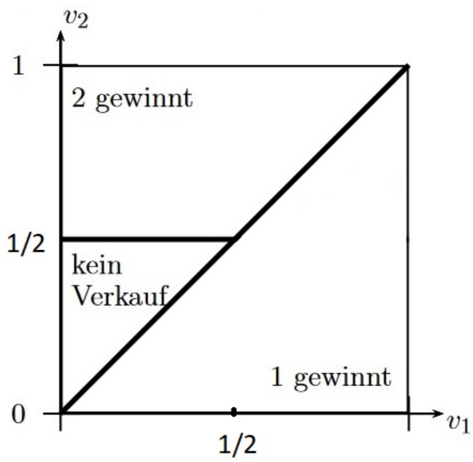
(a) $b(v_i) = v_i$ (Eigene WS bieten ist schwach dominant!)

(b) $E[v_1|v_1 < v_2] = \frac{v_2}{2}$ (und vice versa).

(c) Da das symmetrische BNNG der EPA monoton steigend ist, gewinnt in beiden Fällen der Bieter mit der höheren WS. Also gleiche Allokationsperformance.

(d) Erlösäquivalenz: Gleiche Allokationsperformance und gleicher Nutzen für den niedrigsten Typen impliziert gleiche erwartete Transfers. Da der Bieter mit WS 0 nie gewinnen und nie zahlen, gilt Erlösäquivalenz und das BNGG der EPA ist $b(v_i) = \frac{v_i}{2}$.

Aufgabe 4: Mechanismus Design (26 Punkte) Es gelten die Annahmen des SIPV-Modells. Es gibt ein unteilbares Objekt und $n = 2$ potentielle Käufer. Die Wertschätzung v_i von Käufer i ist bzgl. einer Gleichverteilung auf dem Intervall [0, 1] verteilt. Betrachten Sie die Allokationsperformance in folgendem Diagramm.



(a) Bestimmen Sie die Allokationsperformance $(q_1(v_1, v_2), q_2(v_1, v_2))$ des Diagramms.

(b) Gibt es einen Mechanismus, der diese Allokationsperformance im Gleichgewicht implementiert? Hängt die Antwort von der Verteilung der Wertschätzungen ab? Warum/Warum nicht?

(c) Bestimmen Sie für diese Allokation die Gewinnwahrscheinlichkeit $\overline{q}_2(v_2)$, sowie den erwarteten Transfer $\overline{t}_2(v_2)$ des zugehörigen anreizkompatiblen, direkten Mechanismus (setzen Sie $\overline{t}_2(0) = 0$).

(d) *Bonusaufgabe:* Gibt es Verteilungen von Wertschätzungen, für die diese Allokationsperformance Teil eines erlösmaximierenden Mechanismus ist? Begründen Sie! (Sie dürfen sich auf Verteilungen beschränken, für die die virtuellen Wertschätzungen steigend sind.)

Solution:

(a)

$$q_1(v_1, v_2) = \begin{cases} 1 & v_1 > v_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$q_2(v_1, v_2) = \begin{cases} 1 & v_2 > v_1 \text{ und } v_2 > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Ja! Eine Allokationsperformance ist genau dann implementierbar wenn für alle Bieter die Gewinnwahrscheinlichkeit schwach monoton steigend in der Wertschätzung (WS) ist. Dies ist hier der Fall. (Für Bieter 1 gleichmäßig monoton steigend von 0 bis 1, für Bieter 2 konstant 0 bis $v_2 = 1/2$, dann gleichmäßig steigend von 1/2 bis 1.) Dies ist unabhängig von der Verteilung, da ein Bieter mit höherer WS mindestens in allen Fällen gewinnt, in denen er auch mit niedrigerer WS gewinnen würde.

(c)

$$\overline{q}_2(v_2) = \begin{cases} 0 & v_2 < 1/2 \\ v_2 & v_2 \geq 1/2 \end{cases}$$

$$\bar{t}_2(v_2) = t_2(0) + \bar{q}_2(v_2)v_2 - \int_0^{v_2} \bar{q}_2(x)dx = 0 + \begin{cases} 0 & v_2 < \frac{1}{2} \\ v_2^2 - \int_{\frac{1}{2}}^{v_2} x dx & v_2 > \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 0 & v_2 < \frac{1}{2} \\ \frac{v_2^2}{2} + \frac{1}{8} & v_2 > \frac{1}{2} \end{cases}$$

(d) Nein! Im optimalen Mechanismus wird an den Bieter mit der höchsten positiven virtuellen WS verkauft. Da für $v_1 = 1/4$ und $v_2 = 1/5$ an Bieter 1 verkauft wird, müsste, damit dies optimal wäre, $J_1(1/3) > 0$ sein. Dann ist es jedoch nicht optimal das Gut für $v_1 = 1/4$ und $v_2 = 1/3$ nicht zu verkaufen, da in diesem Fall mindestens Bieter 1 eine positive virtuelle WS hat.

Aufgabe 5: Verbalaufgabe (22 Punkte)

Erklären Sie verbal den Fluch des Gewinners. Gehen Sie in Ihrem Text insbesondere präzise auf folgende Punkte ein:

- In welchen Modellszenarien tritt der Fluch des Gewinners typischerweise auf? Ist der Fluch des Gewinners im SIPV Modell typischerweise zu beobachen? Warum/Warum nicht?
- Welche Form von kognitivem Fehler machen Bieter, die dem Fluch des Gewinners zum Opfer fallen?
- Schadet oder nützt es einem rationalen Bieter, wenn die Gegner diesen kognitiven Fehler machen?

Solution: Der Fluch des Verlierers tritt in "Common Value" Auktionen auf: Bieter haben die gleiche (oder sehr stark korrellierte) Wertschätzungen für das versteigerte Gut. Jeder Bieter hat aber nur unvollständige Information über den genauen Wert. Ein Bieter gewinnt, wenn die Gegner niedrige Gebote abgeben. Dies gilt vor allem dann, wenn sie selbst den Wert des Gutes als niedrig einschätzen. Da die Einschätzung der Gegner mit dem (gemeinsamen) Wert des Gutes korrelliert, bedeutet dies, dass der Bieter mit einem Gebot häufiger dann gewinnt, wenn er den Wert des Gutes überschätzt. Der Fluch des Gewinners tritt auf, wenn ein Bieter diese Implikation von Gewinnen nicht korrekt antizipiert. Er bietet dann zu hoch und kann unter Umständen im Erwartungswert einen Verlust machen. Im SIPV Modell kann dieser Effekt nicht auftreten, da Wertschätzungen unabhängig sind - Informationen über Wertschätzungen anderer Bieter beeinflussen den eigenen Wert nicht. Da der Fluch des Gewinners zu höheren Geboten führt, schadet es auch einem rationalen Bieter, wenn die Gegner diesen Fehler machen: er gewinnt seltener und/oder zu höheren Preisen.