

Auktionen und Märkte -

Übung 6 (Lösungsskizze)

Anmerkung: Die vorliegende Lösungsskizze wurde gewissenhaft erstellt. Es besteht jedoch keine Garantie auf Vollständige Richtigkeit.

Aufgabe 0

- Lösung durch partielle Integration:

$$\int g(u) h'(u) du = [g(u)h(u)] - \int g'(u)h(u)du$$

- Anwendung hier:

$$\sum_{i=1}^n \int_0^1 \left[\bar{q}_i(u_i) u_i - \int_0^{u_i} \bar{q}_i(x) dx \right] f(u_i) du_i$$

=

$$\sum_{i=1}^n \int_0^1 \bar{q}_i(u_i) u_i f(x) dx - \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left(\int_0^{u_i} \bar{q}_i(x) dx \right) f(u_i) du_i$$

:= $g(u_i)$

$= h'(u_i)$

→ wir evaluieren

$$\int_0^1 \left(\int_0^{u_i} \bar{q}_i(x) dx \right) f_i(u_i) du_i$$

$\underbrace{\quad}_{= g(u_i)}$ $\underbrace{\quad}_{= h'(u_i)}$

$$= \left[g(u_i) h(u_i) \right]_0^1 - \int_0^1 g'(u_i) h(u_i) du_i$$

$$= \left[\int_0^{u_i} \bar{q}_i(x) dx \cdot F(u_i) \right]_0^1 - \int_0^1 \bar{q}_i(u_i) F'_i(u_i) du_i$$

$$= \int_0^1 \bar{q}_i(x) dx - \textcircled{0} - \int_0^1 \bar{q}_i(u_i) F'_i(u_i) du_i$$

⇒ wieder einsetzen:

$$\sum_{i=1}^n \int_0^1 \left[\bar{q}_i(v_i) v_i - \int_0^{v_i} \bar{q}_i(x) dx \right] f_i(v_i) dv_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \bar{q}_i(v_i) v_i f_i(v_i) dv_i -$$

$$\sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 \bar{q}_i(x) dx - \int_0^1 \bar{q}_i(v_i) F_i(v_i) dv_i \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 \left(\bar{q}_i(v_i) v_i - \frac{\bar{q}_i(v_i)}{F_i(v_i)} + \bar{q}_i(v_i) \frac{F_i(v_i)}{F_i(v_i)} \right) f_i(v_i) dv_i \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \bar{q}_i(v_i) \left(v_i - \frac{1 - F_i(v_i)}{f_i(v_i)} \right) f_i(v_i) dv_i$$

Aufgabe 1 ($n=2$)

- Generell ist der Er(ö) gegeben durch:

$$R = \sum_{i=1}^n \bar{t}_i(\phi) + \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n q_i(u_1, u_2) \cdot J_i(u_i) f(u_1, u_2) du_1 du_2 \right]$$

wir maximieren dies für jedes u_1, u_2
separat (aus mathematischer Sicht)

$$J_i(u_i) = v_i - \frac{1 - F_i(u_i)}{f_i(u_i)}$$

a) Optimaler Mechanismus

- Für jede Kombination von v_1, v_2 erhält der Bieter mit der höchsten virtuellen Wertschätzung das Gut, wenn dies positiv ist.

$J_i(v_i)$

- Allocationsregel:

$$q_i^*(v_1, v_2) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$J_i(v_i) > J_j(v_j)$ und $J_i(v_i) \geq 0$

Sonst

- hier gilt v_i gleichverteilt auf $[0,1]$

$$J_i(v_i) = v_i - \frac{1 - F_i(v_i)}{P(v_i)} = v_i - \frac{1 - v_i}{1} = 2v_i - 1.$$

- des Weiteren: $J_i(v_i) < 0 \Leftrightarrow v_i < \frac{1}{2}$.

- Transfers:

$\hookrightarrow t_i'(0) = 0$ (der Bieter mit WS 0 zahlt niemals etwas, weil er niemals das Gut erhält)

\hookrightarrow Berechnung von $t_i(v_i)$ mit Bedingung (i) zur Anreizverträglichkeit:

$$\bar{E}_i(u_i) = \bar{E}_i(0) + \bar{q}_i(u_i) \cdot u_i - \int_0^{u_i} \bar{q}_i(x) dx$$

\rightarrow wenn $u_i < \frac{1}{2}$, so gilt $\bar{q}_i(u_i) = 0$

$\Rightarrow \bar{E}_i(u_i) = 0$ wenn $u_i < \frac{1}{2}$

\rightarrow wenn $u_i \geq \frac{1}{2}$, so gilt $\bar{q}_i(u_i) = \Pr(u_i > u_j) = v_i$

$$\Rightarrow \bar{E}_i(u_i) = v_i \cdot u_i - \int_{\frac{1}{2}}^{u_i} x dx$$

$$= v_i^2 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{u_i} = \frac{v_i^2}{2} + \frac{1}{8}$$

b) Nutzen der Börsen

Alle Börsen mit $U_i \leq \frac{1}{2}$ erhalten einen Nutzen von 0, weil sie niemals das Gut erhalten, und somit auch nie etwas bezahlen.

Um den Nutzen von Börsen mit $U_i > \frac{1}{2}$ auszurechnen, verwenden wir Bedingung (i') aus der Antrizwürdigkeit

$$U_i(U_i) = \int_0^{U_i} \bar{q}_i(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{U_i} x dx = \frac{1}{2} U_i^2 - \frac{1}{8}$$

c) Satz über Erlöseigenschaft

- In jedem Auctionsformat, in dem die Allocationsregel durch $q_i^*(v_1, v_2)$ gegeben ist und $\bar{t}_i(v_i) = 0$ für alle i gilt, wird der Erlös maximiert.
- Beispiele:
 - ↳ Zweitpräsentation / Erstpräsentation mit Reservationssatz $r^* = \frac{1}{2}$ (Siehe vergangene Übungen)

↳ Zeitpräzisierung mit Eintrittsgeld $e = (\frac{1}{2})^n$,

Siche vergangene Übungen

d) Verkäufer hat Wertschätzung $v_0 > 0$

für das Gut.

→ nun ist der Nutzen des Verkäufers gegeben durch

$$\Pi = \underbrace{v_0}_{\text{Gut wird nicht verkauft}} + \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=1}^2 q_i(u_1, u_2) (J_i(u_i) - \underbrace{v_0}_{\text{neu}}) f(u_1) f(u_2) du_1 du_2}_{\text{Gut wird verkauft}}$$

→ die neue virtuelle Wertschätzung ist $\tilde{J}_i(u_i) = J_i(u_i) - v_0$. Denn mit machen wir nur Optimierung mit dem bekannten Prinzip.

- Optimale Allokationsregel:

$$q_i^*(v_1, v_2) = \begin{cases} 1 & \tilde{j}_i(v_i) > \tilde{j}_j(v_j) \text{ und } \tilde{j}_i(v_i) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

→ Beispiele für optimale Mechanismen: EPH / ZPH

mit angepasstem (höchstens) Reservanspruch

e) Generell ist es erlaubt/möglich, das Gut nicht zu allozieren, wenn alle Urheber Wertschätzungen negativ sind.

Was ist optimal, wenn das Gut alloziert werden muss?
→ optimale Allokationsregel:

$$g_i(u_1, u_2) = \begin{cases} 1 & J_i(u_i) > J_j(u_j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

→ das Gut wird immer an den Bieter mit der höchsten urheberlichen Wertschätzung vergeben.

→ Auktion, Formel, die unter dieser Einschränkung
optimal ist: EPA, ZPA, APA ohne
Reservepreis und ohne Einheitsgeld.

Aufgabe 2

- 3 Perioden, 3 Börsen, ein Verkäufer. In jeder Periode macht der Verkäufer einem Börsen ein Take-it-or-Leave-it (TIOLI) Angebot
- Lösung mit Teilspielperfektheit:
 - ↳ Zuerst lösen wir das Teilspiel beginnend in Periode 3.
 - ↳ Damit lösen wir das Teilspiel beginnend in Periode 2.
 - ↳ Damit lösen wir das Teilspiel beginnend in Periode 1.

Period 3

- die Wertschätzung des Verkäufers ist $\emptyset \Rightarrow$
wenn der dritte Bieter das Angebot nicht
annimmt, erhält der Verkäufer den Nutzen \emptyset .
- wenn der dritte Bieter das Angebot mit Preis P_3
annimmt, \Rightarrow erhält der Verkäufer den Nutzen P_3 .
- der Bieter nimmt das Angebot an, wenn $V_3 > P_3$.

- Somit ist der Erwartungsnutzen des Verkäufers wenn er das Angebot P_3 macht, gegeben durch:

$$T_3(P_3) = P_3 \cdot \Pr(V_3 > P_3) = P_3[1 - P_3]$$

- Maximierung durch Wahl von P_3 :

$$\frac{\partial T_3}{\partial P_3} = 1 - 2P_3 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \boxed{P_3^* = \frac{1}{2}}$$

- Optimales Angebot in Periode 3 ist $P_3^* = \frac{1}{2}$.

- Der erwartete Erlös für den Verkauf ist also $\pi_3(p_3^*) = b \cdot b = \frac{1}{4}$, wenn das Spiel Periode 3 erreicht.

Periode 2

- wenn das Aut in Periode 2 nicht verkauft wird, geht das Spiel in Periode 3, und dann ist der erwartete Erlös des Verkaufs gleich $\frac{1}{4}$.
- Somit ist der erwartete Erlös des Verkaufs in Periode 2 gegeben durch:

$$\Pi_2(p_2) = \underbrace{\Pr(u_2 > p_2)}_{\text{Gut wird in Periode 2 verkauft}} \cdot p_2 + \underbrace{[1 - \Pr(u_2 > p_2)]}_{\text{Gut wird in Periode 2 nicht verkauft}} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= [1 - p_2] \cdot p_2 + p_2 \cdot \frac{1}{4}$$

• Maximierung durch Wahl von p_2 :

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = 1 - 2p_2 + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 2p_2 = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow p_2^* = \frac{5}{8}$$

• Erwarteter Erlös in Periode 2 ist $\Pi_2(p_2^*)$, d.h.

$$\begin{aligned}\Pi_2(p_2^*) &= [1-p_2^*] \cdot p_2^* + \frac{1}{4} \cdot p_2^* \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{8} \left[\frac{5}{8} \right] = \frac{25}{64}\end{aligned}$$

Periode 1:

• wenn das Gut in Periode 1 nicht verkauft wird,
erhält der Verkäufer den erwarteten Erlös aus Periode 2

nämlich $\frac{25}{64}$.

- Verkäufer maximiert erwarteten Gewinn durch Wahl von p_1 :

$$\Pi_1(p_1) = [1-p_1] \cdot p_1 + p_1 \cdot \frac{25}{64}$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = 1 - 2p_1 + \frac{25}{64} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 2p_1 = \frac{85}{64}$$

\Leftrightarrow

$$p_1^* = \frac{85}{128}$$

b) Wir haben: $P_1^* = \frac{85}{128}$, $P_2^* = \frac{5}{8}$, $P_3^* = \frac{1}{2}$.

→ daraus folgt $P_1^* > P_2^* > P_3^*$, d.h.
die Preise fallen über die Perioden.

Generelle Intuition: Die Preise steigen über die Zeit an, weil die Verhandlungsposition des Verkäufers über die Zeit schlechter wird (es bleiben weniger Käufer für das Ant übrig).

Aufgabe 3

a) Zeitpreisauktion mit Reservationspreis

→ wir bestimmen den optimalen Reservationspreis.

• Biefer 2 wird immer ein Gut unterhalb des Gebots von Biefer 1 abgeben, da Biefer 1 immer eine Wertschätzung oberhalb 1 hat, und Biefer 2 immer eine Wertschätzung unterhalb von 1 hat.

→ Reservationspreis bestimmt also, wann Gut verkauft

wird (an Bieter 1) und wenn es nicht verkauft wird.

- Reservationspreis über 1 ist nicht optimal.

↳ Generell: Zahlung von Bieter 1 ist $\min \{b_2, r\}$
wo r der Reservationspreis ist und $b_2 \leq r$ das
Gebot von Spieler 2.

↳ wenn $r > 1$, so erhält Verkäufer die Zahlung r ,
wenn $v_1 > r$, und sonst nichts.

- Daher ist der Erwartungswert $E(r)$ $R_{>1}^a(r) = r \cdot \Pr(v_1 > r)$

- Wir beachten: $v_1 \sim U[1,2] \Rightarrow \Pr(v_1 \leq r) = \frac{r-1}{2-1} = r-1$

$$\Rightarrow R_{>1}^a(r) = r \cdot [1 - \Pr(v_1 \leq r)] = r [1 - (r-1)]$$

$$\frac{\partial R_{>r}^a(r)}{\partial r} = 2-r + r(-1) = 2-2r < 0, \text{ wenn } r > 1$$

- Implikation: Erlös fällt in r , wenn $r > 1 \Rightarrow r > 1$ kann nicht optimal sein.

- Also ist Resunktionspreis $r = 1$ optimal
↳ Grund: Zahlung an Verkäufer ist immer min $\{b_{2,r}\}$
Wenn $r < 1$, liegt Zahlung manchmal unterhalb 1, also die erzielte Zahlung, wenn der Resunktionspreis gleich 1 ist.

b) Wie in Aufgabe 2 lösen wir zuerst für das Gleichgewicht in der letzten Periode und benutzen dies dann, um das Teillospiel in Periode 1 zu lösen.

Periode 2

- Wenn das Gut nicht verkauft wird, erhält der Vorkäufer den Nutzen 0.
- Wir können das Problem wie in Aufgabe 2 lösen, in dem wir $T_2(p_2) = \Pr(v_2 > p_2) \cdot p_2$

maximieren. Der optimale Angebot ist $P_2^* = \frac{1}{2}$.

\Rightarrow Somit ist der erwartete Erlös $[1 - \frac{1}{2}] \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

Periode 1

- wenn das Gut nicht in dieser Periode verkauft wird, erhält der Verkäufer in Periode 2 den erwarteten Erlös $k_4 \Rightarrow$ "Wertschätzung" des Verkäufs ist k_4 .
- der Verkäufer maximiert also den folgenden erwarteten Erlös durch Wahl von P_1 :

$$\Pi_1(p_1) = [1 - F(p_1)] \cdot p_1 + F(p_1) \cdot \frac{1}{4}$$

$$= [1 - (p_1 - 1)] \cdot p_1 + [p_1 - 1] \cdot \frac{1}{4}$$

$$= [2 - p_1] \cdot p_1 + [p_1 - 1] \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Pi_1(p_1)}{\partial p_1} = 2 - p_1 + (-1) \cdot p_1 + \frac{1}{4} = 0$$

\Longleftarrow

$$2p_1 = \frac{s}{4} \Leftrightarrow p_1^* = \overbrace{\frac{s}{8}}$$

$$\Rightarrow \text{Erlös ist } \Pi_1(p_1^*) = \frac{7}{8} \cdot \frac{s}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{65}{64}}}$$

Implementierte Allokationsregel (über beide Perioden)

- wenn $v_1 \geq s_{12}$, erhält Bieker 1 das Gut.
- wenn $v_1 < s_{12}$ und $v_2 \geq \frac{1}{2}$, erhält Bieker 2 das Gut.
- wenn $v_1 < s_{12}$ und $v_2 < \frac{1}{2}$, erhält der Verkäufer das Gut.

c) Optimaler direktor Mechanismus

- Erlösmaximierende Allokationsregel verkauft das Gut immer an den Bieger mit der höchsten virtuellen Wertschätzung, wenn diese positiv ist.
- $J_1(v_1) = v_1 - \frac{1 - F_1(v_1)}{f_1(v_1)} = v_1 - \frac{1 - (v_1 - 1)}{1} = 2v_1 - 2$
- $J_2(v_2) = v_2 - \frac{1 - F_2(v_2)}{f_2(v_2)} = v_2 - \frac{1 - v_2}{1} = 2v_2 - 1$

- es gilt: $J_1(u_1) > J_2(u_2) \Leftrightarrow 2u_1 - 2 > 2u_2 - 1$

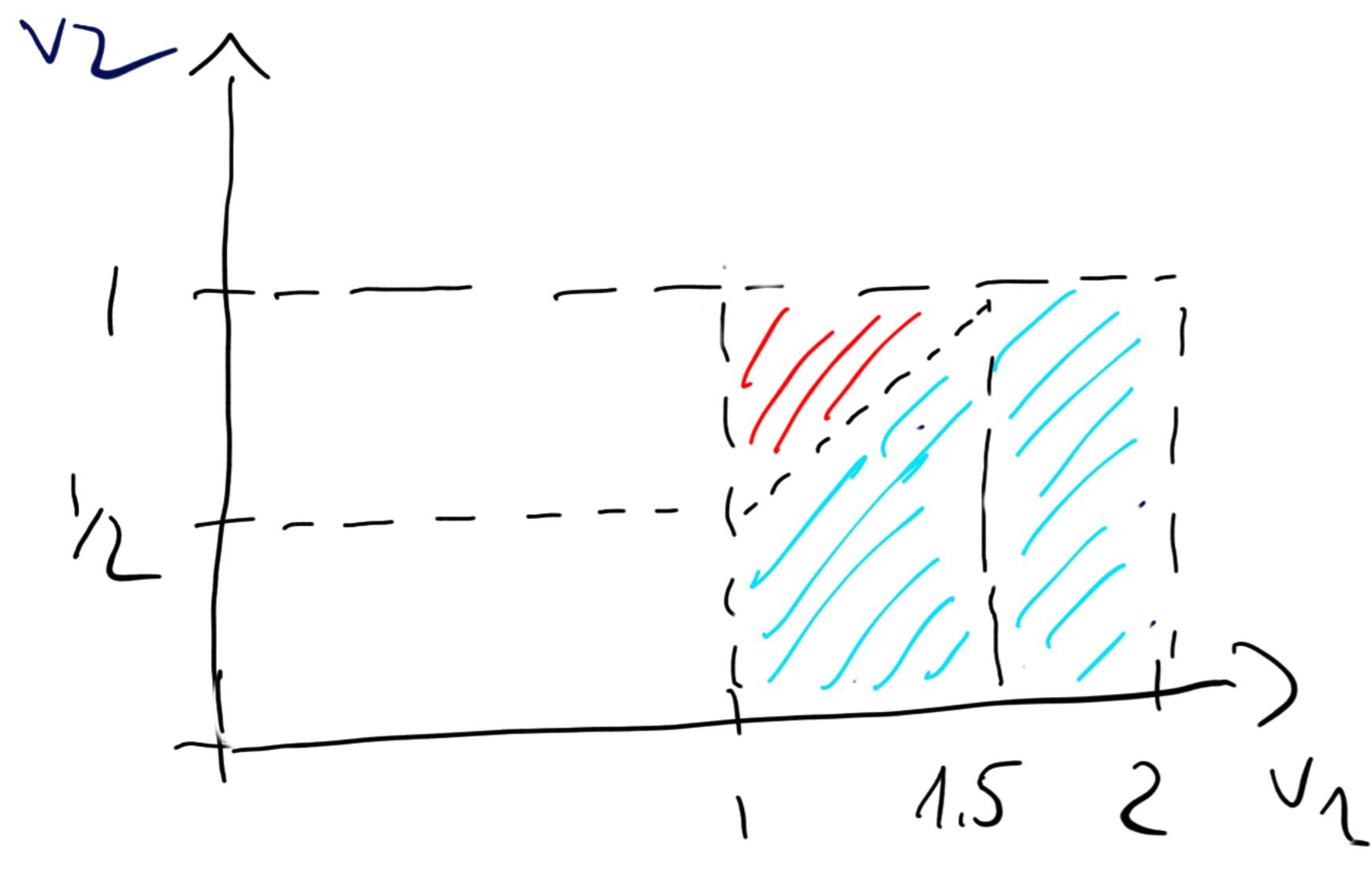
\Leftrightarrow

$$\underline{u_2 < u_1 - \frac{1}{2}}$$

- des weiteren ist virtuelle Wertschätzung von Bicker 1 immer Schätz positiv \Rightarrow Auf und immer alloziert.
- Allocationsregel ihm erlössmaximierenden direkten Mechanismus

$$(q_1(u_1, u_2), q_2(u_1, u_2)) = \begin{cases} (1, 0) & \text{wenn } u_2 < u_1 - \frac{1}{2} \\ (0, 1) & \text{wenn } u_2 > u_1 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

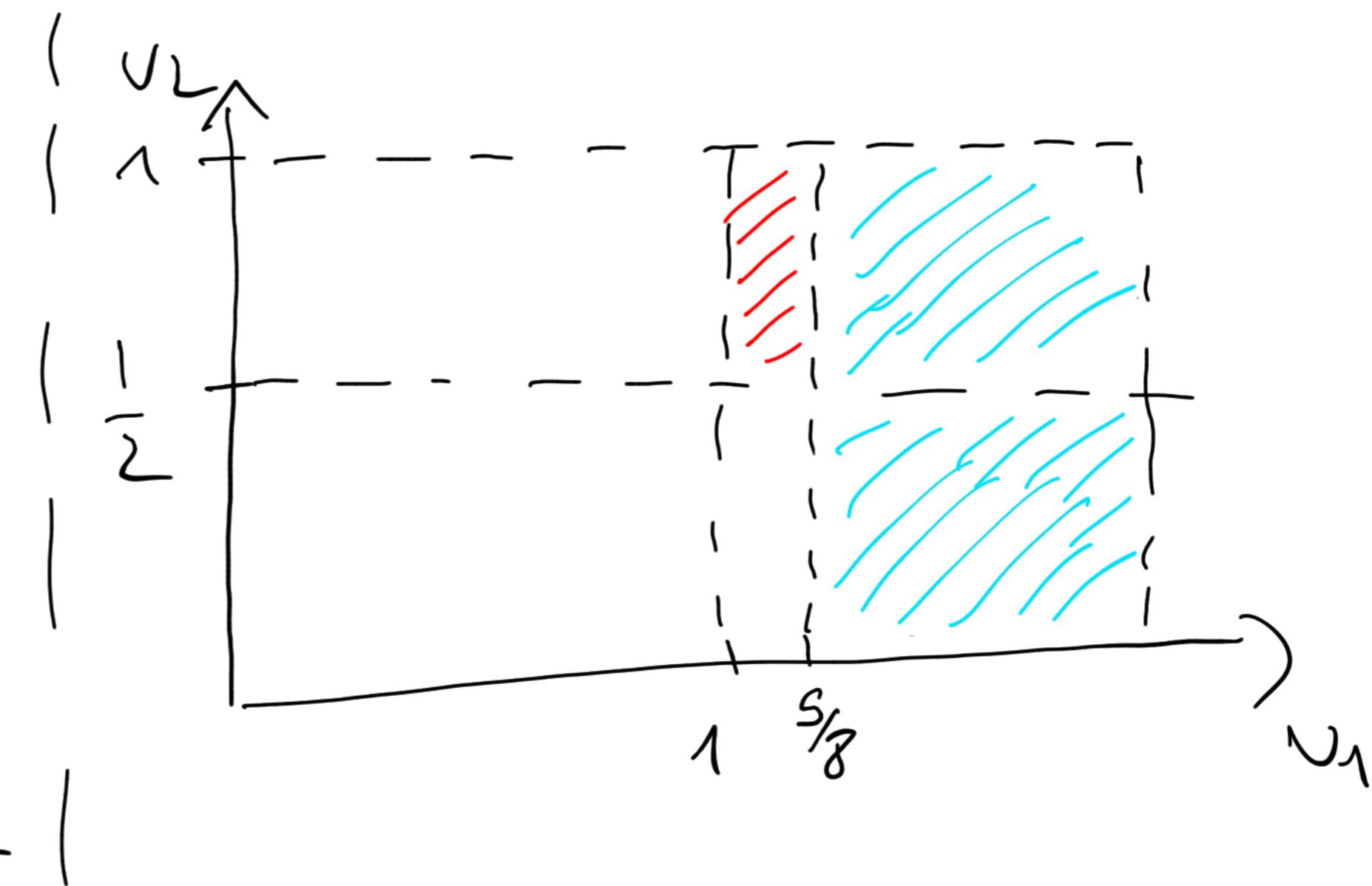
Allocationsregel in c)



\equiv : Spieler 1 gewinnt

\equiv : Spieler 2 gewinnt.

Allocationsregel in b)



\equiv : Spieler 1 gewinnt

\equiv : Spieler 2 gewinnt.

d) Bonus für Käufer 2

• Es ist für Biehr 1 schwach dominant, seine Wertschätzung zu Biehr

↳ wenn $u_1 \geq b_2 + k$: Wertschätzung Biehr schafft Nutzen von

$$u_2 - (b_2 + k) \geq 0$$

↳ Alle Gebote $b_1 > u_1$ erzielen den gleichen Nutzen (da Zweitprisaktion)

↳ Alle Gebote $b_1 < u_1$ erzielen Nutzen 0.

↳ wenn $u_1 < b_2 - k$: Nicht gewinnen optimal!

Es ist für Biehr 2 schwach dominant,
Seine Wertschätzung zu Biehr

↳ wenn $U_2 \geq b_1 - h$: Wertschätzung Biehr

Schafft Nutzen $U_2 - (b_1 - h) \geq 0$

↳ Gibt $b_1 > U_2$ schafft gleichen Nutzen.

Gibt $b_1 < U_2$ schafft Nutzen 0.

↳ wenn $U_2 < b_1 - h$: Greissen nicht optimal,
und maximal erreichbar Nutzen ist 0

→ Erreichbar durch $b_2 = U_2$.

e) Kann man h so wählen, dass die optimale Allocation aus (c) implementiert wird?

- Ja, kann man.
- aus (d) ist es immer ein Gleichgewicht, das beide ihre Wertschätzungen bietet.
- Bieter 1 gewinnt also genau dann wenn $v_1 > v_L + h$.
- Allokationsregel aus (c): Bieter 1 gewinnt genau dann wenn $v_1 > v_2 + \frac{1}{2}h$

=> Wenn $\lambda = \frac{1}{2}$, wird genau die
Allocationsregel implementiert.