

Übungsblatt 5: Direkte Mechanismen und Anreizverträglichkeit

Aufgabe 1: Direkte Mechanismen. Betrachten Sie das SIPV-Modell mit n Bietern und gleichverteilten Wertschätzungen $\tilde{v}_i \sim U[0, 1]$. Geben Sie für jeden der folgenden Mechanismen die Performance an, die im symmetrischen BNGG implementiert wird!

- (a) Erstpreisauktion mit Reservationspreis r .
- (b) Zweitpreisauktion mit Eintrittsgeld e .
- (c) Verkauf zum Festpreis p bei $n = 3$ (siehe Aufgabe 2 auf Blatt 3).

Aufgabe 2: Anreizverträglichkeit direkter Mechanismen. Gegeben sei das SIPV-Modell mit n Bietern und gleichverteilten Wertschätzungen $\tilde{v}_i \sim U[0, 1]$. Betrachten Sie direkte Mechanismen $\{(q_i, t_i)\}_{i=1}^n$ mit der Allokationsregel

$$q_i(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \hat{v}_i > \max_{j \neq i} \hat{v}_j \\ 0 & \text{falls } \hat{v}_i < \max_{j \neq i} \hat{v}_j \end{cases}.$$

Für welche der folgenden Zahlungsregeln ist der direkte Mechanismus $\{(q_i, t_i)\}_{i=1}^n$ anreizkompatibel? (D.h., für welchen dieser Mechanismen ist Wahrheit sagen ein BNGG.)

- (a) $t_i(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n) = \hat{v}_i$.
- (b) $t_i(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n) = \hat{v}_i^n$.
- (c) $t_i(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n) = \frac{n-1}{n} \hat{v}_i^n + c$, für $c \in \mathbf{R}$.
- (d) $t_i(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n) = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \hat{v}_i & \text{wenn } q_i(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n) = 1 \\ 0 & \text{wenn } q_i(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n) = 0 \end{cases}.$

Aufgabe 3: Satz zur Anreizverträglichkeit. Es gelten in der gesamten Aufgabe die Annahmen des SIPV-Modells. Es gibt ein unteilbares Objekt und $n = 2$ potentielle Käufer. Gehen Sie zunächst davon aus, dass die Wertschätzung v_i von Käufer i bzgl. einer Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$ verteilt ist. In dieser Aufgabe geht es um direkte Mechanismen $\{(q_i, t_i)\}_{i=1}^2$.

- (a) Betrachten Sie zunächst die in der folgenden Graphik dargestellte Allokationsperformance:

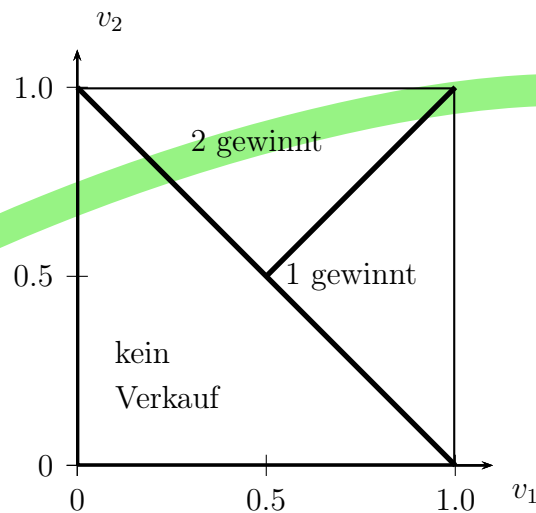


Abbildung 1

- (i) Geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit $\bar{q}_1(v_1)$ Käufer 1 in Abhängigkeit seiner Wertschätzung v_1 das Objekt erhält!
 - (ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes zur Anreizverträglichkeit, wie die erwartete Zahlung von Käufer 1 in Abhängigkeit seiner Wertschätzung v_1 (also: $\bar{t}_1(v_1)$) aussehen muss, damit es für ihn optimal ist, wahrheitsgemäß seine Wertschätzung anzukündigen.
- (b) Erklären Sie jeweils kurz, ob es einen direkten Mechanismus gibt, der die in Abbildung 2 bzw. die in Abbildung 3 beschriebene Allokationsperformance implementiert!

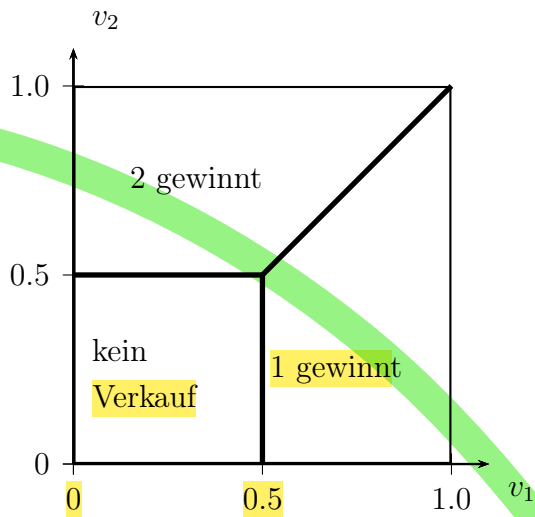


Abbildung 2

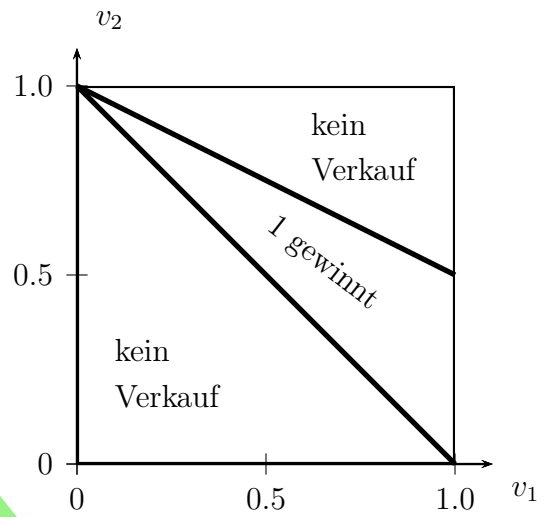


Abbildung 3

Gehen Sie für den letzten Aufgabenteil davon aus, dass die Wertschätzung v_i von Käufer i bzgl. der Verteilungsfunktion $F(v_i) = v_i^2$ verteilt ist!

- (c) Erklären Sie kurz, ob sich Ihre Antwort in (b) bzgl. der in Abbildung 3 dargestellten Allokationsperformance aufgrund der geänderten Verteilungsfunktion ändert!