Auktionen und Märkte

Auktionen unter vollständiger Information

Groh/von Wangenheim

Universität Bonn, Wintersemester 2024/2025

Statisches Spiel in strategischer Form

Erinnerung: Ein statisches Spiel unter vollständiger Information ist vollständig beschrieben durch die folgenden drei Elemente:

1. **Spieler**
2. **Strategienräume der Spieler**
3. **Payoffs/Nutzenfunktionen als Funktion der gewählten Strategieprofile**

EPA, ZPA und APA mit vollständiger Information

1. **Spieler:** Bieter $i = 1, \ldots, n$
2. **Strategienräume:** Menge der möglichen Gebote $\mathbb{R}_+$
   Notation Strategie von Bieter i: $b_i \in \mathbb{R}_+$
3. **Payoffs als Funktion der gewählten Strategien:**
   Annahme: Wert $v_i \in \mathbb{R}_+$ jedes Bieters i ist allgemein bekannt, Bieter sind risikoneutral.

EPA	Gewinner: $v_i - b_i = v_i - b_{(1)}$ Verlierer: 0
ZPA	Gewinner: $v_i - b_{(2)}$ Verlierer: 0
APA	Gewinner: $v_i - b_i$ Verlierer: $-b_i$

Tie-Breaking: Bei gleichen Geboten entscheidet das Los.

Beispiel

Wir betrachten: $n = 2$, $v_1 = 100$, $v_2 = 200$
(Alle anderen Fälle mit ungleichen Wertschätzungen analog)

Wir untersuchen im Weiteren die folgenden Fragen:

1. Warum besitzt die EPA kein Nash-GG in reinen Strategien?
   Was ändert sich, wenn nur ganze Euro geboten werden dürfen?
   Wie sehen dann die Gleichgewichte aus, welche sind fokal?
2. Bestimmen Sie für die ZPA mehrere Nash-GG!
   Welches der Gleichgewichte ist fokal?
3. Wieso hat die APA kein GG in reinen Strategien?
   Wie sieht das GG in gemischten Strategien aus?
4. Was ändert sich an den obigen Antworten, wenn stattdessen $v_1 = v_2 = 100$ gilt?

Beispiel - EPA

Wir zeigen: für $n = 2$ mit $0 < v_1 < v_2$ besitzt die EPA kein Nash-GG.

Betrachten Sie einen beliebigen GG-Kandidaten (b_1, b_2).

Fall 1: $b_1 < b_2$. Dann hätte Bieter 2 einen Anreiz sein Gebot leicht zu senken, damit er mit einem niedrigeren Gebot gewinnt.

Fall 2: $b_1 > b_2$. Dann hätte Bieter 1 einen Anreiz sein Gebot leicht zu senken, damit er mit einem niedrigeren Gebot gewinnt.

Fall 3: $b_1 = b_2 > v_1$. Bieter 1 macht einen Verlust. Er hätte einen Anreiz sein Gebot zu senken, damit er mit Sicherheit verliert.

Fall 4: $b_1 = b_2 < v_2$. Bieter 2 hätte einen Anreiz sein Gebot leicht zu erhöhen. Er gewinnt dann mit Sicherheit statt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, muss aber im Gewinnfall nur unwesentlich mehr bezahlen.

Für $v_1 < v_2$ gilt mindestens einer der vier Fälle. Wir haben daher gezeigt, dass es für jeden GG-Kandidaten immer mindestens einen Bieter gibt, der einen Anreiz hat unilateral abzuweichen.

$\Rightarrow$ Es kann kein Nash-GG in reinen Strategien existieren!

Beispiel - EPA

Was ändert sich wenn nur ganze Euro geboten werden können?

Es zeigt sich: das Problem war vorher lediglich, dass es kein "kleinstmöglichstes Überbieten" gibt. Führt man diese kleinste Bieteinheit ein, verschwindet das Problem. Es liegt somit ein rein technisches und kein "ökonomische" Problem vor.

Nash-GGe des modifizierten Spiels mit Geboten in vollen Euro

GG 1: $b_1 = 99$, $b_2 = 100 \rightarrow$ Preis$= 100$

GG 2: $b_1 = 100$, $b_2 = 101 \rightarrow$ Preis$= 101$

GG 3: $b_1 = 130$, $b_2 = 131 \rightarrow$ Preis$= 131$

usw.

Fokale Gleichgewichte: Für Spieler i ist jede Strategie $b_i > v_i$ durch die Strategie $b_i = v_i$ schwach dominiert.

$\rightarrow$ In GG 3 spielt Spieler 1 ein schwach dominierte Strategie.

Fazit: Die GGe 1 und 2 sind fokal. Der Preis ist somit ungefähr 100.

Beispiel - ZPA

Nash-GGe der ZPA für $n = 2$, $v_1 = 100$ und $v_2 = 200$.

GG 1: $b_1 = 100$, $b_2 = 200 \rightarrow$ Preis$= 100$

GG 2: $b_1 = 0$, $b_2 = 200 \rightarrow$ Preis$= 0$

GG 3: $b_1 = 180$, $b_2 = 300 \rightarrow$ Preis$= 180$

GG 4: $b_1 = 500$, $b_2 = 0 \rightarrow$ Preis$= 0$

usw.

Grund: Für $b_j < v_i$ ist jedes Gebot $b_i > b_j$ eine beste Antwort. Für $b_j > v_i$ ist jedes Gebot $b_i < b_j$ eine beste Antwort.

Fokale Gleichgewichte: Die Gebote $b_i = v_i$ sind schwach dominant, da man nur mit diesem Gebot genau dann gewinnt wenn der Preis unter v_i liegt.

$\rightarrow$ Nur GG 1 (genau die eigene Wertschätzung bieten) ist fokal.

Beobachtung: Der Preis in den fokalen Gleichgewichten der EPA und der ZPA ist etwa gleich.

Beispiel - APA

Behauptung: Die APA hat kein GG in reinen Strategien.

Beweis: Nehmen Sie einen beliebigen GG-Kandidaten (b_1, b_2).

Fall 1: $b_1 < b_2$. Dann hätte Bieter 2 einen Anreiz sein Gebot leicht zu senken, damit er mit einem niedrigeren Gebot gewinnt.

Fall 2: $b_1 > b_2$. Dann hätte Bieter 1 einen Anreiz sein Gebot leicht zu senken, damit er mit einem niedrigeren Gebot gewinnt.

Fall 3: $b_1 = b_2 = b$. Dann hätte jeder Bieter einen Anreiz sein Gebot unilateral leicht zu erhöhen, um alleine zu gewinnen. (Gilt auch wenn Gebot über eigener WS liegt.)

Da einer der drei Fälle gelten muss, haben wir gezeigt, dass es für jeden GG-Kandidaten immer mindestens einen Bieter gibt, der einen Anreiz hat unilateral abzuweichen.

$\Rightarrow$ Es kann kein Nash-GG in reinen Strategien existieren!

Beispiel - APA - gleiche WS

Wir suchen zunächst das gemischte GG für den Fall $v_1 = v_2 = 100$.

Behauptung: Die APA besitzt ein Nash-GG in gemischten Strategien, in dem jeder der beiden Bieter sein Gebot zufällig bzgl. einer Gleichverteilung auf [0, 100] zieht.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass ein Spieler durch diese Strategie des Gegners tatsächlich indifferent zwischen allen Gebot auf [0, 100] ist.

- Erwarteter Profit von Bieter 1 bei Gebot b_1 (analog für Bieter 2):

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Prob}\{b_2 < b_1\} \cdot v_1 + \mathrm{Prob}\{b_2 = b_1\} \cdot v_1/2 - b_1 \\
= & \begin{cases} \frac{b_1}{100} \cdot 100 + 0 \cdot 50 - b_1 = 0 & \text{für } b_1 \in [0, 100] \\ 1 \cdot 100 + 0 \cdot 50 - b_1 < 0 & \text{für } b_1 > 100 \end{cases}
\end{aligned}
$$

- Also ist Bieter 1 indifferent zwischen allen Geboten aus [0, 100] und findet alle Gebote > 100 strikt schlechter.
- Jedes Gebot aus [0, 100] (also auch gleichverteiltes Mischen über diese Gebote) ist eine beste Antwort.

$\Rightarrow$ Bieten bzgl der Gleichverteilung auf [0, 100] ist ein GG!

Beispiel - APA - unterschiedliche WS

Wir suchen nun das gemischte GG für $n = 2$, $v_1 = 100$, $v_2 = 200$

Beobachtung 1: Wenn Bieter 2 über [0, 100] per Gleichverteilung mischt, ist Bieter 1 nach wie vor indifferent zwischen allen Geboten in [0, 100].

Beobachtung 2: Wenn Bieter 1 über [0, 100] per Gleichverteilung mischt, ist Bieter 2 nicht mehr indifferent. In diesem Fall würde ein Gebot b_2 zu einer Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{b_2}{100}$ führen, dh:

$b_2 = 0$ führt zu einem Profit von $0 \cdot 200 - 0 = 0$

$b_2 = 50$ führt zu einem Profit von $\frac{1}{2} \cdot 200 - 50 = 50$

$b_2 = 100$ führt zu einem Profit von $1 \cdot 200 - 100 = 100$

Beispiel - APA - unterschiedliche WS

Wir berechnen nun wie Bieter 1 mischen muss, damit Bieter 2 indifferent ist zwischen allen Geboten in $[0, 100]$.

- Bezeichne $G_2(b_2)$ die Wahrscheinlichkeit mit der Bieter 2 gewinnt, wenn er b_2 bietet und Bieter 1 seine gemischte Strategie spielt.

- Bieter 2 ist nur indifferent zwischen Geboten aus $[0, 100]$, falls gilt:

$$G_2(b_2) \cdot 200 - b_2 \overset{!}{=} C \quad \Rightarrow \quad G_2(b_2) = \frac{C + b_2}{200}$$

- Da zudem $G_2(100) = 1$ gelten muss, muss $C = 100$ gelten. Also:

$$G_2(b_2) = \frac{1}{2} + \frac{b_2}{200}$$

- D.h., Bieter 1 bietet 0 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Ansonsten zieht er ein zufälliges Gebot bzgl. einer Gleichverteilung auf $[0, 100]$.

Beispiel - Gleiche WS - EPA und ZPA

Was ändert sich wenn $v_1 = v_2 = 100$?

- In der EPA gibt es nun mit $b_1 = b_2 = 100$ ein Nash GG.
  - Beide Bieter gewinnen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ und erhalten einen Payoff von Null!
  - Unterschied zum Fall $v_1 < v_2$: Niemand hat einen Anreiz ein wenig nach oben oder unten abzuweichen um sicher zu gewinnen oder sicher zu verlieren.
  - Der Preis bleibt bei 100.

- in der ZPA ändert sich: nichts! Alle Intuitionen und Argumenten sind analog zu dem Fall $v_1 = 100, v_2 = 200$
  - Insbesondere ist $b_1 = b_2 = 100$ das fokale GG.
  - Der Preis bleibt bei 100.

$\rightarrow$ Der Erlös in EPA und ZPA liegt unverändert bei der zweithöchsten Wertschätzung

APA - Erwarteter Erlös

Fall 1: $v_1 = v_2 = 100$

- Beide Spieler bieten ein zufälliges Gebot zwischen 0 und 100.
- Jeder Spieler bietet im Erwartungswert 50.
- $\mathbb{E}[b_1 + b_2] = 50 + 50 = 100$

Fall 2: $v_1 = 100, v_2 = 200$

- Nun bietet Bieter 1 mit Wahrscheinlichkeit je $\frac{1}{2}$ ein Gebot von 0 oder ein zufälliges Gebot aus [0, 100].

$$\mathbb{E}[b_1 + b_2] = \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 50\right) + 50 = 75 < 100.$$

Beobachtung: Obwohl in Fall 2 die Wertschätzungen in Erwartung höher sind wird der Elös kleiner!

Fazit

Effizienz:

- In der EPA gewinnt in jedem Gleichgewicht in reinen Strategien der Bieter mit der höheren WS.
- In der ZPA gibt es auch GG in reinen Strategien, in denen der Bieter mit der niedrigeren WS gewinnt. Im einzigen fokalen Gleichgewicht gewinnt aber auch der Bieter mit der höheren WS.
- Im Gleichgewicht der APA gewinnt manchmal auch der Bieter mit der niedrigeren WS.

Erlös:

- Im Fall mit gleichen WS ist der erwartete Erlös in allen drei Auktionsformaten gleich.
- Im Fall mit unterschiedlichen WS ist der erwartete Erlös in EPA und ZPA gleich, in der APA liegt er niedriger.

Einordnung

Die Analyse der Auktionen unter vollständiger Information ist eine gute Übung, aber nicht sehr relevant.

- Wenn WS allgemein bekannt sind, dann ist unklar warum der Verkäufer eine Auktion durchführt.
- Die Auktionsliteratur beschäftigt sich daher typischerweise mit dem interessanteren Fall mit nicht allgemein bekannten WS.

Die APA mit bekannten WS ist spannender und relevanter, da sie in vielen (Nicht-Auktions-)Anwendungen vorkommt. (Wettbewerbe wie Patentrennen, Lobbying... sind sind im Prinzip APAs).