Auktionen und Märkte

Anreizverträglichkeit

Groh / von Wangenheim

Universität Bonn, Wintersemester 2024/2025

Motivation

- **Ziel:** Charakterisierung aller Performances, die durch direkte Mechanismen, bei denen Wahrheit sagen ein Gleichgewicht ist, erreichbar sind.
- **Warum interessiert uns das?** Aufgrund des Revelationsprinzips sind dies alle Performances, die erreichbar sind durch beliebige Gleichgewichte von beliebigen Mechanismen.

Motivation

Anschließende Schritte:

- **Effizienz = Eigenschaft der Allokationsperformance.**

  Wenn ich mich für Effizienz interessiere, brauche ich nur zu schauen, ob zu der Menge aller erreichbarer Performances eine effiziente dazugehört.

- **Erwarteter Erlös = Funktion der Zahlungsperformance.**

  Wenn ich mich für Erlösmaximierung interessiere, picke ich mir aus der Menge aller erreichbarer Performances die heraus, die den höchsten erwarteten Erlös erzielt.

Motivation der zusätzlichen Notation

- betrachtete zunächst den Fall mit $n = 2$ Spielern
- Spieler 1 maximiert dann

$$
\begin{aligned}
U_1(v_1, \hat{v}_1) &\equiv \mathbb{E}[q_1(\hat{v}_1, \tilde{v}_2)v_1 - t_1(\hat{v}_1, \tilde{v}_2)] \\
&= \int_0^1 [q_1(\hat{v}_1, v_2)v_1 - t_1(\hat{v}_1, v_2)]f_2(v_2)dv_2 \\
&= \underbrace{\int_0^1 q_1(\hat{v}_1, v_2)f_2(v_2)dv_2}_{\equiv \overline{q}_1(\hat{v}_1)} \cdot v_1 - \underbrace{\int_0^1 t_1(\hat{v}_1, v_2)f_2(v_2)dv_2}_{\equiv \overline{t}_1(\hat{v}_1)}
\end{aligned}
$$

- Wichtig für Anreize von Spieler 1:
  - $\overline{q}_1(\hat{v}_1)$: Gewinnwahrscheinlichkeit als Funktion der eigenen Ankündigung
  - $\overline{t}_1(\hat{v}_1)$: erwarteter Transfer als Funktion der eigenen Ankündigung

Notation

- wir wollen nun die analogen Ausdrücke für den Fall mit n Spielern einführen
- dazu führen etwas mehr Notation ein:

$$
\begin{aligned}
v_{-i} &\equiv (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n) \\
f_{-i}(v_{-i}) &\equiv f_1(v_1) \cdot \ldots \cdot f_{i-1}(v_{i-1}) \cdot f_{i+1}(v_{i+1}) \cdot \ldots \cdot f_n(v_n) \\
dv_{-i} &\equiv dv_1 \cdot \ldots \cdot dv_{i-1} \cdot dv_{i+1} \cdot \ldots \cdot dv_n
\end{aligned}
$$

Notation

- Spieler i's erwartete Zahlung, wenn er $\hat{v}_i$ sagt und alle anderen die Wahrheit sagen:

$$\bar{t}_i(\hat{v}_i) = \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n-1 \text{ Mal}} \underbrace{t_i(v_1, \ldots, v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)}_{\text{kurz: } t_i(\hat{v}_i, v_{-i})} f_{-i}(v_{-i}) dv_{-i}$$

- Spieler i's Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn er $\hat{v}_i$ sagt und alle anderen die Wahrheit sagen:

$$\bar{q}_i(\hat{v}_i) = \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n-1 \text{ Mal}} \underbrace{q_i(v_1, \ldots, v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)}_{\text{kurz: } q_i(\hat{v}_i, v_{-i})} f_{-i}(v_{-i}) dv_{-i}$$

Notation

- Spieler i's Profit, wenn er $\hat{v}_i$ sagt, WS v_i hat und alle anderen die Wahrheit sagen:

$$q_i(\hat{v}_i, v_{-i})v_i - t_i(\hat{v}_i, v_{-i})$$

- Spieler i's erwarteter Profit, wenn er $\hat{v}_i$ sagt, WS v_i hat und alle anderen die Wahrheit sagen:

$$\begin{aligned}
U_i(v_i, \hat{v}_i) &\equiv \int_0^1 \cdots \int_0^1 [q_i(\hat{v}_i, v_{-i}) \cdot v_i - t_i(\hat{v}_i, v_{-i})] f_{-i}(v_{-i}) dv_{-i} \\
&= \int_0^1 \cdots \int_0^1 q_i(\hat{v}_i, v_{-i}) f_{-i}(v_{-i}) dv_{-i} v_i \\
&\quad - \int_0^1 \cdots \int_0^1 t_i(\hat{v}_i, v_{-i}) f_{-i}(v_{-i}) dv_{-i} \\
&= \overline{q}_i(\hat{v}_i) v_i - \overline{t}_i(\hat{v}_i)
\end{aligned}$$

Definition Anreizverträglichkeit

Definition: Anreizverträglichkeit (AV)

Ein direkter Mechanismus ist anreizverträglich, wenn es für jeden Spieler optimal ist die Wahrheit zu sagen, wenn alle anderen das auch tun. D.h., wenn für alle i, alle v_i und alle $\hat{v}_i$ gilt

$$U_i(v_i, v_i) \geq U_i(v_i, \hat{v}_i).$$

Satz zur Anreizverträglichkeit

Satz: Anreizverträglichkeit

Ein direkter Mechanismus $\{(q_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ ist AV dann, und nur dann, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\forall i : \overline{q}_i(v_i)$ ist schwach monoton steigend

(ii) $$\forall i : \overline{t}_i(v_i) = \underbrace{\overline{t}_i(0)}_{\text{Konstante}} + \underbrace{\overline{q}_i(v_i)v_i}_{\text{“generierter Wert”}} - \underbrace{\int_0^{v_i} \overline{q}_i(x)dx}_{\text{“Informationsrente”}}$$

Behauptung

Bedingung (ii) ist äquivalent zu

(ii′) $U_i(v_i, v_i) = U_i(0,0) + \int_0^{v_i} \overline{q}_i(x)dx$ (wobei $U_i(0,0) = -\overline{t}_i(0)$)

AV $\Rightarrow$ (i) und (ii').

Annahme: $\{(q_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ ist AV.
Dann gilt für alle v_i und alle $\hat{v}_i$

$$
\begin{aligned}
U_i(v_i, v_i) &\geq U_i(v_i, \hat{v}_i) \\
&= \overline{q}_i(\hat{v}_i)v_i - \overline{t}_i(\hat{v}_i) \\
&= \underbrace{\overline{q}_i(\hat{v}_i)v_i - \overline{q}_i(\hat{v}_i)\hat{v}_i}_{\overline{q}_i(\hat{v}_i)(v_i-\hat{v}_i)} + \underbrace{\overline{q}_i(\hat{v}_i)\hat{v}_i - \overline{t}_i(\hat{v}_i)}_{U_i(\hat{v}_i,\hat{v}_i)}
\end{aligned}
$$

1 ✓

und

$$
\begin{aligned}
U_i(\hat{v}_i, \hat{v}_i) &\geq U_i(\hat{v}_i, v_i) \\
&= \overline{q}_i(v_i)(\hat{v}_i - v_i) + U_i(v_i, v_i).
\end{aligned}
$$

2 ·

AV $\Rightarrow$ (i) und (ii') (Fortsetzung).

Die beiden Bedingungen sind äquivalent zu

$$\overline{q}_i(\hat{v}_i)(\hat{v}_i - v_i) \geq U_i(\hat{v}_i, \hat{v}_i) - U_i(v_i, v_i) \quad (\text{*a})$$

und

$$U_i(\hat{v}_i, \hat{v}_i) - U_i(v_i, v_i) \geq \overline{q}_i(v_i)(\hat{v}_i - v_i). \quad (\text{*b})$$

Folgerung 1: $U_i(v_i, v_i)$ muss stetig sein.

Kombiniert man (*a) und (*b), dann folgt für $\hat{v}_i > v_i$

$$\overline{q}_i(\hat{v}_i) \overset{(*a)}{\geq} \frac{U_i(\hat{v}_i, \hat{v}_i) - U_i(v_i, v_i)}{\hat{v}_i - v_i} \overset{(*b)}{\geq} \overline{q}_i(v_i). \quad (\text{**})$$

Folgerung 2: (**) kann nur erfüllt sein, wenn $\overline{q}_i(v_i)$ schwach monoton steigend ist. Das ist (i).

AV $\Rightarrow$ (i) und (ii') (Fortsetzung).

Folgerung 3: Betrachtet man (**) für $\hat{v}_i \to v_i$, dann erhält man (wenn $\overline{q}_i(v_i)$ an Stelle v_i stetig ist)

$$\overline{q}_i(v_i) \geq \frac{dU_i(v_i, v_i)}{dv_i} \geq \overline{q}_i(v_i)$$

und somit

$$\begin{aligned} & \frac{dU_i(x,x)}{dx} = \overline{q}_i(x) \\ \Leftrightarrow \quad & \int_0^{v_i} \frac{dU_i(x,x)}{dx} dx = \int_0^{v_i} \overline{q}_i(x) dx \\ \Leftrightarrow \quad & U_i(v_i, v_i) = U_i(0,0) + \int_0^{v_i} \overline{q}_i(x) dx. \end{aligned}$$

Das ist (ii').

AV $\Rightarrow$ (i) und (ii') (Fortsetzung).

Anmerkung:

Die Ungleichungen, die man aus dem Grenzübergang erhält, gelten nur für alle Stellen v_i, an denen $\overline{q}_i(v_i)$ stetig ist.

Da $\overline{q}_i(v_i)$ monoton wachsend ist, gibt es höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

Daher gilt $\frac{dU_i(x,x)}{dx} = \overline{q}_i(x)$ bis auf höchstens abzählbar viele Stellen.

Daraus folgt, dass der Wert des Integrals eindeutig bestimmt ist.

Da der Wert des Integrals das einzige ist was uns interessiert, bereitet es kein Problem, dass $\frac{dU_i(x,x)}{dx} = \overline{q}_i(x)$ an abzählbar vielen Stellen nicht gilt.

(i) und (ii') $\Rightarrow$ AV.

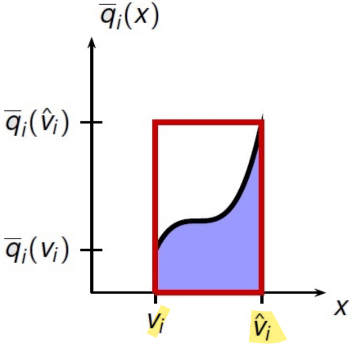
Annahme: (i) und (ii') gelten.

Wir müssen zeigen, dass daraus $U_i(v_i, v_i) \geq U_i(v_i, \hat{v}_i)$ folgt.

$$
\begin{aligned}
& U_i(v_i, v_i) - U_i(v_i, \hat{v}_i) \\
= \quad & U_i(v_i, v_i) - [\overline{q}_i(\hat{v}_i)v_i - \overline{q}_i(\hat{v}_i)\hat{v}_i + \underbrace{\overline{q}_i(\hat{v}_i)\hat{v}_i - \overline{t}_i(\hat{v}_i)}_{=U_i(\hat{v}_i, \hat{v}_i)}] \\
= \quad & [U_i(v_i, v_i) - U_i(\hat{v}_i, \hat{v}_i)] + \overline{q}_i(\hat{v}_i)(\hat{v}_i - v_i) \\
\overset{(ii')}{=} \quad & \left[U_i(0,0) + \int_0^{v_i} \overline{q}_i(x)dx - U_i(0,0) - \int_0^{\hat{v}_i} \overline{q}_i(x)dx\right] + \overline{q}_i(\hat{v}_i)(\hat{v}_i - v_i) \\
= \quad & \overline{q}_i(\hat{v}_i)(\hat{v}_i - v_i) - \int_{v_i}^{\hat{v}_i} \overline{q}_i(x)dx
\end{aligned}
$$

(i) und (ii') $\Rightarrow$ AV (Fortsetzung).

Betrachte nun zunächst $\hat{v}_i > v_i$.

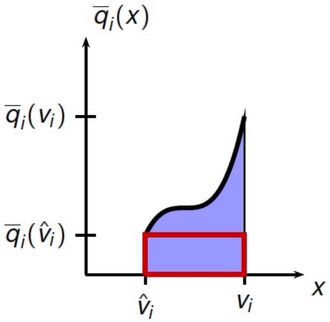


Aus (i) folgt somit $U_i(v_i, v_i) - U_i(v_i, \hat{v}_i) \geq 0$.

(i) und (ii') ⇒ AV (Fortsetzung).

Betrachte nun $v_i > \hat{v}_i$. Der Fall ist ähnlich und folgt aus "Drehen" des Integrals in der obigen Formel:

$$U_i(v_i, v_i) - U_i(v_i, \hat{v}_i) \quad = \quad -\overline{q}_i(\hat{v}_i)(v_i - \hat{v}_i) + \int_{\hat{v}_i}^{v_i} \overline{q}_i(x)dx$$



Aus (i) folgt somit wieder $U_i(v_i, v_i) - U_i(v_i, \hat{v}_i) \geq 0$.

Diskussion

1. Bedingung (i) sagt, dass eine höhere WS nicht zu einer niedrigeren Gewinnwahrscheinlichkeit führen kann. Intuition:
    - Da die WS private Information ist, kann jeder Spieler beliebige Behauptungen aufstellen was seine WS angeht.
    - De facto sucht sich also jeder Spieler durch seine Behauptung $\hat{v}_i$ ein zu ihm passendes Paar an Gewinnwahrscheinlichkeit und Transfer $(\overline{q}_i(\hat{v}_i), \overline{t}_i(\hat{v}_i))$ aus.
    - Warum kann es nicht sein, dass sich ein Spieler bei niedrigem v_i eine höhere Wahrscheinlichkeit aussucht als bei hohem v_i?
    - Der Spieler ist bei niedrigerem v_i anscheinend bereit, den Extrapreis für höhere Gewinnwahrscheinlichkeit zu zahlen.
    - Das müsste dann aber erst recht bei höherem v_i gelten, denn dann ist der Extranutzen von höherer Gewinnwahrscheinlichkeit noch höher.

Diskussion II

2. Sehr viele Allokationsperformances sind implementierbar, nämlich alle für die Bedingung (i) gilt.

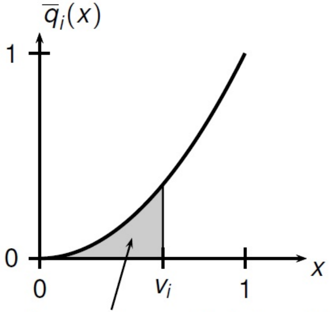
3. Eine Allokationsperformance legt die erwarteten Zahlungen eines Spielers bis auf die Konstante $\bar{t}_i(0)$ eindeutig fest:

   Die erwartete Zahlung von Spieler i hängt nur von dessen Gewinnwahrscheinlichkeit $\bar{q}_i(v_i)$ und der erwarteten Zahlung ab, die er leisten muss, wenn er seine niedrigst mögliche Wertschätzung hat, $\bar{t}_i(0)$.

   (**Bemerkung:** Wenn wir den erlösmaximierenden Mechanismus in Abschnitt II.6 bestimmen, wird $\bar{t}_i(0)$ durch die Teilnahmebedingungen festgelegt sein.)

Diskussion III

4. Informationsrente von Spieler i (d.h. Rente, die Spieler i aufgrund der Informationsasymmetrie erhält):



Informationsrente von Spieler mit Info v_i: $\int_0^{v_i} \overline{q}_i(x)\mathrm{d}x$

Diskussion IV

5. Die Menge der anreizverträglichen direkten Mechanismen entspricht der Menge der implementierbaren Performances!

   D.h., eine Performance $\{(q_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ ist genau dann implementierbar, wenn (i) und (ii) gelten.

   (Übertragen auf die Grafik auf Slide 3 heißt dies:
   Die beiden roten "Bohnen" sehen gleich aus/sind durch die gleichen Formeln beschrieben.)

Beispiele zur Anwendung des Satzes

- Wir werden nun den **Satz zur AV** benutzen,

  ...um einen gegebenen direkten Mechanismus auf Anreizverträglichkeit zu überprüfen, und

  ...um einen anreizverträglichen Mechanismus mit bestimmen Eigenschaften zu konstruieren.

- Betrachten Sie in beiden Beispielen: $n = 2$; $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \sim U[0, 1]$

Beispiel 1

Betrachten Sie den folgenden direkten Mechanismus:

$$q_1(v_1, v_2) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v_1 > 2v_2 \\ 0 & \text{wenn } v_1 < 2v_2 \end{cases} \quad , \quad t_1(v_1, v_2) = \frac{1}{4}v_1^2 - \frac{1}{4}$$

$$q_2(v_1, v_2) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } v_1 > 2v_2 \\ 1 & \text{wenn } v_1 < 2v_2 \end{cases} \quad , \quad t_2(v_1, v_2) = v_2^2$$

(a) Illustrieren Sie die Allokationsregel graphisch!

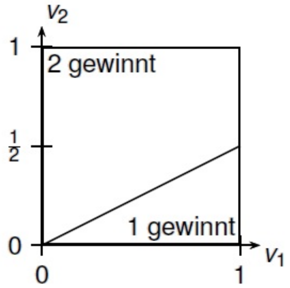
(b) Bestimmen Sie $\overline{q}_1(v_1)$, $\overline{q}_2(v_2)$, $\overline{t}_1(v_1)$, $\overline{t}_2(v_2)$!

(c) Erklären Sie mit Hilfe des Satzes zur AV, warum der Mechanismus nicht anreizverträglich ist!

(d) Ändern sie die Zahlungen des Mechanismus so ab, dass der Mechanismus anreizverträglich wird (d.h., so dass die angegebene Allokationsperformance implementiert wird).

Lösung von Beispiel 1

(a) Allokationsregel:



(b) Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\overline{q}_1(v_1) &= \text{Prob}(v_1 > 2v_2) \\
&= \text{Prob}(v_2 < \frac{1}{2}v_1) = \frac{1}{2}v_1 \\
\overline{q}_2(v_2) &= \text{Prob}(v_1 < 2v_2) \\
&= \begin{cases} 2v_2 & , v_2 \leq \frac{1}{2} \\ 1 & , v_2 > \frac{1}{2} \end{cases} \\
\overline{t}_1(v_1) &= \tfrac{1}{4}v_1^2 - \tfrac{1}{4} \\
\overline{t}_2(v_2) &= v_2^2
\end{aligned}$$

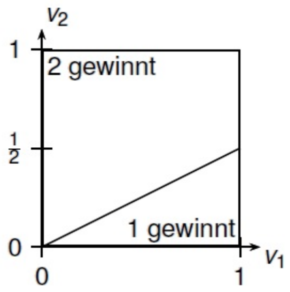
(c+d) Bedingung (i) des Satzes über die AV ist erfüllt da $\overline{q}_i(v_i)$ steigend.

Bedingung (ii) ist **für Bieter 1 erfüllt**: $\overline{t}_1(0) = -\frac{1}{4}$ und

$$\overline{t}_1(v_1) = \overline{t}_1(0) + \overline{q}_1(v_1)v_1 - \int_0^{v_1} \overline{q}_1(x)dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}v_1^2 - \frac{1}{4}v_1^2$$

Lösung von Beispiel 1

(a) Allokationsregel:



(b) Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\overline{q}_1(v_1) &= \text{Prob}(v_1 > 2v_2) \\
&= \text{Prob}(v_2 < \frac{1}{2}v_1) = \frac{1}{2}v_1 \\
\overline{q}_2(v_2) &= \text{Prob}(v_1 < 2v_2) \\
&= \begin{cases} 2v_2 & , v_2 \leq \frac{1}{2} \\ 1 & , v_2 > \frac{1}{2} \end{cases} \\
\overline{t}_1(v_1) &= \tfrac{1}{4}v_1^2 - \tfrac{1}{4} \\
\overline{t}_2(v_2) &= v_2^2
\end{aligned}$$

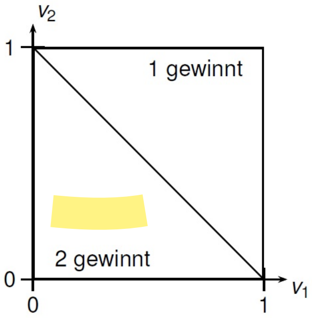
(c+d) Bedingung (i) des Satzes über die AV ist erfüllt da $\overline{q}_i(v_i)$ steigend.

Bedingung (ii) ist **für Bieter 2 nicht erfüllt**: es gilt $\overline{t}_2(0) = 0$.

Der anreizkompatible Transfer wäre dann

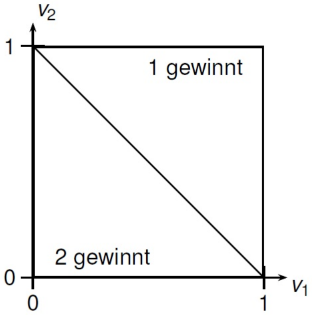
$$\overline{t}_2(v_2) = \overline{q}_2(v_2)v_2 - \int_0^{v_2} \overline{q}_2(x)dx = \begin{cases} 2v_2^2 - v_2^2 & v_2 \leq \frac{1}{2} \\ v_2 - \frac{1}{4} - (v_2 - \frac{1}{2}) & v_2 > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Beispiel 2



Frage: Kann man einen Mechanismus so konstruieren, dass er die in der Grafik beschriebene Allokationsperformance implementiert?

Beispiel 2



Frage: Kann man einen Mechanismus so konstruieren, dass er die in der Grafik beschriebene Allokationsperformance implementiert?

Antwort: Nein! Die Gewinnwahrscheinlichkeit $\overline{q}_1(v_1)$ ist zwar monoton steigend, $\overline{q}_2(v_2)$ jedoch nicht!