Online-Klausur zur Vorlesung Auktionen und Märkte

Erlaubte Hilfsmittel: ein nicht programmierbarer Taschenrechner

Aufgabe 1: Auktionen unter Vollständiger Information (18 Punkte)

Es gebe zwei Bieter, $i = 1, 2$, mit allgemein bekannten Wertschätzungen $v_1 = 8$, $v_2 = 16$. Betrachten Sie zunächst eine klassische Zweitpreisauktion mit Reservationspreis $r = 4$ und ohne Eintrittsgeld. Betrachten Sie die folgenden beiden Bietstrategien:

$$(i) \quad b_1 = 8, \; b_2 = 20 \qquad\qquad (ii) \quad b_1 = 20, \; b_2 = 7$$

(a) Prüfen Sie für die Strategieprofile in (i) und (ii) jeweils, ob sie ein Nash Gleichgewicht beschreiben. Wenn nicht, geben Sie eine profitable Abweichung an.

(b) Sind die Strategien für Bieter 2 schwach dominiert? Wenn ja, durch welches Gebot? Gibt es für Bieter 2 eine schwach dominante Strategie? Wenn nein, warum nicht? Wenn ja, welche?

(c) Beantworten Sie nun die Fragestellung in Aufgabe (a) und (b) für eine Zweitpreisauktion ohne Reservationspreis, mit Eintrittsgeld $e = 2$. (Dh. die Strategien sind so zu verstehen, dass die Bieter sich entschließen einzutreten und zusätzlich zum Eintrittsgeld obige Gebote abgeben.)

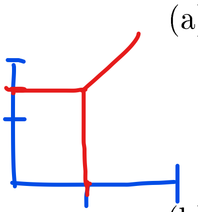
Solution:

(a)+(b) Beide Strategieprofile sind Nash Gleichgewichte. Die Gebote von Bieter 2 sind durch $b_2 = 16$ schwach dominiert. $b_2 = 16$ ist schwach dominant.

(b) Beide Strategieprofile sind keine Nash Gleichgewichte, da der verlierende Bieter lieber abweichen und nicht teilnehmen würde. So würde er das Eintrittsgeld sparen. $b_2 = 20$ und $b_2 = 7$ sind beide dominiert von Teilnehmen mit $b_2 = 16$. Genau wie für $b_2 = 20$ und $b_2 = 7$ muss Eintrittsgeld $e = 2$ entrichtet werden, aber man gewinnt anschließend genau dann wenn es profitabel ist. Es gibt jedoch keine schwach dominante Strategie, da je nach Gebot des Gegners Teilnehmen oder nicht Teilnehmen besser ist.

Aufgabe 2: Optimaler Mechanismus (28 Punkte)

Ein Verkäufer verkauft ein Objekt und möchte seinen erwarteten Erlös maximieren. (Der Verkäufer hat keine Wertschätzung für das Objekt.) Es gebe zwei Käufer mit unabhängig verteilten Wertschätzungen, die dem Verkäufer nicht bekannt sind. Der Verkäufer kennt jedoch die Verteilungen der Wertschätzungen. Die Wertschätzung des ersten Käufers sei gleichverteilt mit $\tilde{v}_1 \sim U[0.5, 1]$, die Wertschätzung des zweiten Käufers sei gleichverteilt mit $\tilde{v}_2 \sim [0.4, 1.4]$.



(a) Berechnen Sie die zugehörigen Verteilungsfunktionen $F_1(v_1)$ und $F_2(v_2)$ der Zufallsvariablen $\tilde{v}_1$ und $\tilde{v}_2$ und zeigen Sie, dass die virtuellen Wertschätzungen auf den entsprechenden Intervallen gegeben sind durch

$$J_1(v_1) = 2v_1 - 1 \qquad \text{und} \qquad J_2(v_2) = 2v_2 - 1.4.$$

(b) Bestimmen Sie die Erlös maximierenden Allokationsregeln $q_1^*(v_1, v_2)$ und $q_2^*(v_1, v_2)$. Zeichnen Sie diese in ein v_1/v_2-Diagramm.

(c) Beschreiben Sie eine Auktion, welche die gewünschte Allokationsperformance implementiert. Benötigt die Auktion einen Reservationspreis?

(d) Bestimmen Sie für die Allokationsregel in (b) die Gewinnwahrscheinlichkeit $\overline{q}_2(v_2)$, sowie den erwarteten Transfer $\overline{t}_2(v_2)$ des optimalen Mechanismus.

Solution:

(a) Auf dem Intervall $[0.5, 1]$ ist die Verteilungsfunktion von $\tilde{v}_1$ gegeben durch $F_1(v_1) = 2v_1 - 1$.

Auf dem Intervall $[0.4, 1.4]$ ist die Verteilungsfunktion von $\tilde{v}_2$ gegeben durch $F_2(v_2) = v_2 - 0.4$.

$$J_1(v_1) = v_1 - \frac{1 - F_1(v_1)}{f_1(v_1)} = v_1 - \frac{1 - 2v_1 + 1}{2} = 2v_1 - 1$$

$$J_2(v_2) = v_2 - \frac{1 - F_2(v_2)}{f_2(v_2)} = v_2 - (1 - v_2 + 0.4) = 2v_2 - 1.4$$

(b) Da die virtuelle WS von Bieter 1 immer positiv ist, ist ein Verkauf immer optimal. Verkaufe also an den Bieter mit der höchsten virtuellen WS. Bieter 1 hat eine höhere virtuelle WS wenn

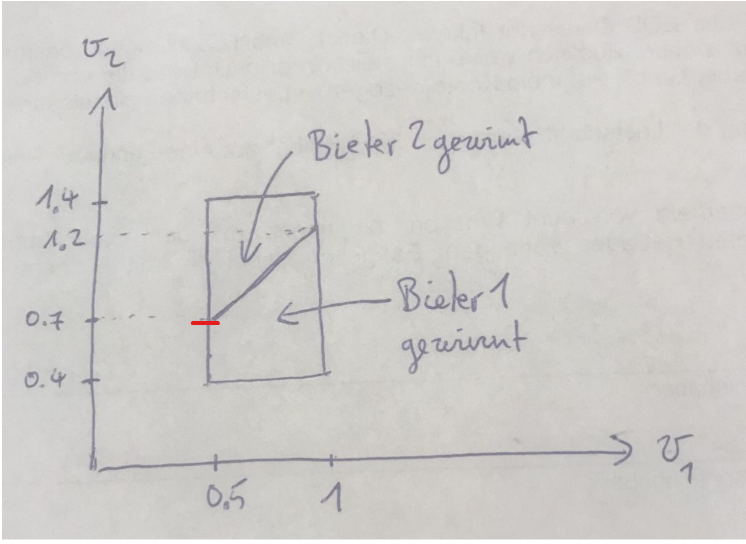
$$2v_1 - 1 > 2v_2 - 1.4 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 > v_2 - 0.2$$

Also,

$$q_1^*(v_1, v_2) = \begin{cases} 1 & v_1 > v_2 - 0.2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$q_2^*(v_1, v_2) = \begin{cases} 1 & v_1 \leq v_2 - 0.2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Für $v_1 = v_2 - 0.2$ ist egal was der Mechanismus spezifiziert sofern verkauft wird.)



(c) Implementierbar zum Beispiel durch eine Zweitpreisauktion ohne Reservationspreis mit Bonus von 0.2 für Bieter 1 (bzw Malus von 0.2 für Bieter 2).

(d) Die Gewinnwahrscheinlich steigt von $v_2 = 0.7$ bis $v_2 = 1.2$ gleichmäßig von 0 auf 1. Sie beträgt also

$$\overline{q}_2(v_2) = \begin{cases} 0 & v_2 < 0.7 \\ 2(v_2 - 0.7) & v_2 \in [0.7, 1.2] \\ 1 & v_2 > 1.2 \end{cases}$$

Für $\overline{q}_2(v_2) \in [0.7, 1.2]$ gilt

$$\begin{aligned} \overline{t}(v_2) =& t_0 + \overline{q}_2(v_2)v_2 - \int_{0.7}^{v_2} \overline{q}_2(x)dx = 2v_2^2 - 1.4v_2 - \int_{0.7}^{v_2} (2x - 1.4)dx \\ =& 2v_2^2 - 1.4v_2 - \left[x^2 - 1.4x\right]_{0.7}^{v_2} = v_2^2 + 0.49 - 0.98 = v_2^2 - 0.49 \end{aligned}$$

Also gilt $\overline{t}(1.2) = 1.44 - 0.49 = 0.95$ und

$$\overline{t}(v_2) = \begin{cases} 0 & v_2 < 0.7 \\ v_2^2 - 0.49 & v_2 \in [0.7, 1.2] \\ 0.95 & v_2 > 1.2 \end{cases}$$

Aufgabe 3: Pivot Mechanismus (20 Punkte)

Alice (A), Bob (B) und Charlie (C) leben in einer WG und überlegen, die Küche neu zu streichen. Ihre Nutzenfunktionen seien für $i = A, B, C$ gegeben durch $u_i = v_i - t_i$, wobei u_i der Nutzen ist, die Küche zu streichen und t_i der Schaden falls sie einen monetären Transfer in Höhe t_i errichten müssen. Es seien $v_A = 5, v_B = -4, v_C = 1$. Sie möchten einen Pivot Mechanismus implementieren, um die effiziente Entscheiden herbeizuführen. Überschüsse aus dem Mechanismus sollen gespendet werden.

(a) Berechnen Sie die effiziente Entscheidung.

5

(b) Prüfen Sie für jeden Spieler, ob er pivotal ist und berechnen Sie den zu leistenden Transfer im Pivot Mechanismus.

(c) Zeigen Sie, dass sich Bob nicht besser stellen kann, wenn er etwas anderes als sein wahres v_B angibt.

(d) Alice schlägt vor, dass die Überschüsse nicht gespendet, sondern gleichmäßig an die drei zurückverteilt werden. Zeigen Sie (zB anhand einer profitablen Abweichung), dass der Mechanismus dann nicht mehr anreizkompatibel ist.

Solution:

(a) $v_A + v_B + v_C = 5 - 4 + 1 = 2 > 0$, also ist Streichen effizient.

(b) A: pivotal, da $-4 + 1 = -3 < 0$. Transfer $t_A = 3$. B und C sind nicht pivotal.

(c) Jede Behauptung von v_B über -6 ändert nichts: es wird gestrichen. Eine Behauptung von $v_B < -6$ führt zu Nicht Streichen, macht B jedoch pivotal. Er zahlt dann $t_B = 6$, was schlechter ist als Streichen (nur Schaden von 4).

(d) B und C hätten dann ein Interesse den Transfer von A in die Höhe zu treiben. Dies könnte jeder einzeln dadurch erreichen, dass sie ihre Wertschätzung um bis zu 2 niedriger als wahrheitsgemäß angeben.

Aufgabe 4: Verbalaufgabe (24 Punkte)

Bei der Versteigerung von Schürfrechten wurde eine Zweitpreisauktion (mit optimalem Reservationspreis) verwendet. Ein Politiker stellt fest, dass das höchste Gebot sehr deutlich über dem zweithöchsten Gebot lag. Er argumentiert, dass die Auktion sehr schlecht gestaltet war. Der Gewinner musste viel weniger als sein Gebot, also seine maximale Zahlungsbereitschaft zahlen. Um so etwas zukünftig zu vermeiden und den Erlös zu erhöhen, sollte zukünftig eine Erstpreisauktion (mit optimalem Reservationspreis) verwendet werden.

(a) Diskutieren verbal (ohne Formeln) diese These. Gehen Sie von den Standardannahmen im SIPV Modell aus. Verwenden Sie Fachbegriffe wie "Allokationsperformance". Was ist hinsichtlich der Gebote bei einer Erstpreisauktion zu erwarten?

(b) Im SIPV ist die Annahme rationaler Erwartungen wichtig. In dem beschriebenen Fall könnte es aber sein, dass sich der Bieter mit dem höchsten Gebot bei der Bewertung der Schürfrechte verschätzt hat. In diesem Fall würde er vermutlich auch die privaten Bewertungen der anderen Bieter zu hoch schätzen. Wie fiele Ihre Antwort in diesem Fall aus?

Solution:

(a) Es gilt unter den gegebenen Annahmen die Erlösäquivalenz. Das heißt alle Mechanismen, bei denen die Allokationsperformance die gleiche ist und bei denen die niedrigste Wertschätzung nicht gewinnt und nichts zahlt liefert im Erwartungswert den gleichen Erlös. Dies ist bei EPA und ZPA der Fall, da im symmetrischen Gleichgewicht jeweils der Bieter mit der höchsten Wertschätzung über dem Reservationspreis gewinnt. Bei einer EPA hätte der Bieter mit dem höchsten Gebot vermutlich deutlich weniger geboten, nämlich den Erwartungswert der zweithöchsten Wertschätzung, bedingt darauf dass er gewinnt. Im Einzelfall könnte eine EPA mehr Gewinn bringen, jedoch nicht im Erwartungswert.

(b) In der ZPA zahlt der Gewinner im Gleichgewicht die höchste gegnerische Wertschätzung, in der EPA zahlt er im Gleichgewicht das, was er als die höchste gegnerische Wertschätzung schätzt. Verschätzt er sich hier nach oben, so würde eine EPA tatsächlich mehr Gewinn bringen.