Auktionen und Märkte

Effizienz

Groh / von Wangenheim

Universität Bonn, Wintersemester 2024/2025

Motivation

- In dem bisher in Teil II betrachteten Setting führt beispielsweise die **ZPA** (mit Reservationspreis in Höhe der WS des Verkäufers) zu **Effizienz**.
- Die ZPA hatte dabei interessante **Eigenschaften**:
  1. Zahlung des Gewinners hing nur von den Geboten der anderen ab.
  2. Implementierung war in dominanten Strategien.
- **Frage:** Kann man die Funktionsweise der ZPA auch auf andere Settings übertragen, um auch dort Effizienz zu erzielen?

Setting

- **Spieler:** $i = 1, \ldots, n$
- **Entscheidungen/Alternativen/Projekte:** $k = 1, \ldots, K$
- **Private Information von Spieler** *i*: θ_i
- **Auszahlung von Spieler** *i*: $v_i(k, \theta_i) + t_i$
  - $v_i(k, \theta_i)$: Spieler *i*'s direkter Nutzen aus Entscheidung *k*
  - t_i: monetärer Transfer an Spieler *i*

Kritische Annahmen:

1. Spieler *i*'s Nutzen aus der Entscheidung hängt nur von seiner eigenen Information ab ("private WS").
2. Auszahlungen sind quasilinear in dem monetären Transfer.

– **Keine Annahme** über Dimensionalität bzw. Verteilung von Info
– "Entscheidung" ist **allgemeiner** als "Allokation"

Beispiel 1: Auktionssetting, 1 Objekt

- **Spieler:**
  $i = 1, \ldots, n-1$: Käufer
  $i = n$: Verkäufer

- **Entscheidungen:** $K = n$
  Entscheidung k bedeutet, dass Spieler k das Objekt erhält

- **Private Information:**
  Wertschätzungen $\theta_i \in [0, \infty)$

- **Direkter Nutzen aus Entscheidung:**

$$v_i(k, \theta_i) = \begin{cases} \theta_i & \text{wenn } k = i \\ 0 & \text{wenn } k \neq i \end{cases}$$

Beispiel 2: Setting der Doppelauktion

- **Spieler:** $n = 2$
  $i = 1$: Käufer
  $i = 2$: Verkäufer
- **Entscheidungen:** $K = 2$
  $k = 1$: Handel
  $k = 2$: kein Handel
- **Private Information:**
  θ_1: WS von Spieler 1
  θ_2: Produktionskosten von Spieler 2
- **Direkter Nutzen aus Entscheidung:**

$$v_1(k, \theta_1) = \begin{cases} \theta_1 & \text{wenn } k = 1 \\ 0 & \text{wenn } k = 2 \end{cases}, \quad v_2(k, \theta_2) = \begin{cases} -\theta_2 & \text{wenn } k = 1 \\ 0 & \text{wenn } k = 2 \end{cases}$$

Beispiel 3: Öffentliches Projekt

- **Spieler:** Parteien/Bürger, die von dem Projekt betroffen sind
- **Entscheidungen:**
  $k = 1$: Projekt nicht durchführen
  $k = 2, \ldots, K$: Projekt mit unterschiedlichem Level durchführen
- **Private Information:**
  Vektor $\theta_i = (\theta_{i,1}, \ldots, \theta_{i,K}) \in \mathbb{R}^K$, der für jedes k i's Nutzen aus Entscheidung k festlegt
- **Direkter Nutzen aus Entscheidung:**

$$v_i(k, \theta_i) = \theta_{i,k} - \frac{c(k)}{n}$$

wobei $c(k)$ die Gesamtkosten von Projekt k beschreibt

(**Bemerkung:** Der $-\frac{c(k)}{n}$-Ausdruck beschreibt eine ad hoc Aufteilung der Kosten, die über die Transfers angepasst werden kann.)

Weitere Beispiele

- **Beispiel 4: Auktionssetting, mehrere Objekte, mehrdimensionale Information**

  Mögliche Anwendung: Häuser

- **Beispiel 5: ein Objekt, mehrdimensionale Information**

  Mögliche Anwendung: allokative Externalitäten, z.B. Verkauf von Atomwaffen

Direkte Mechanismen + Performance

- **Direkter Mechanismus** im verallgemeinerten Setting:

$$\Big(\underbrace{k(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n)}_{\substack{\text{Entscheidungsregel}\\ \text{(``Allokationsregel'')}}},\underbrace{t_1(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n),\ldots,t_n(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n)}_{\text{Zahlungsregel}}\Big)$$

  i's angekündigte Information: $\hat{\theta}_i$
  i's Strategie: $\hat{\theta}_i(\theta_i)$
  i sagt die Wahrheit wenn $\hat{\theta}_i(\theta_i) = \theta_i$

- Das **Revelationsprinzip** gilt: Wir können uns auf direkte, anreizkompatible Mechanismen beschränken.

- **Performance** (wenn jeder die Wahrheit sagt):

$$\Big(\underbrace{k(\theta_1,\ldots,\theta_n)}_{\substack{\text{Entscheidungsperformance}\\ \text{(``Allokationsp.''=physischer Teil der P.)}}},\underbrace{t_1(\theta_1,\ldots,\theta_n),\ldots,t_n(\theta_1,\ldots,\theta_n)}_{\substack{\text{Zahlungsperformance}\\ \text{(monetärer Teil der P.)}}}\Big)$$

Beispiel: “Nette ZPA”

Betrachten Sie im Setting von Bsp 1 (d.h., im Auktionssetting mit 1 Objekt) den folgenden direkten Mechanismus:

- Der Bieter mit der höchsten angekündigten WS ‘gewinnt’:

$$k(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n) = \arg\max_i \hat{\theta}_i$$

- Der Gewinner bezahlt nichts. Jeder andere bekommen die höchste angekündigte WS monetär ausbezahlt:

$$t_i(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } k(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n) = i \\ \max_{j \neq i} \hat{\theta}_j & \text{wenn } k(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n) \neq i \end{cases}$$

Frage: Was sollte Bieter 1 tun, wenn er denkt die anderen beiden Bieter kündigen $\hat{\theta}_2 = 10$ und $\hat{\theta}_3 = 5$ an?

Effizienz

- **Effiziente Entscheidungsperformance:**

$$k^*(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \arg\max_k \sum_{i=1}^{n} v_i(k, \theta_i)$$

(**Bemerkung:** Im Falle von mehreren optimalen Entscheidungen für eine Info-Kombination $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, soll $k^*(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ eine beliebige davon auswählen.)

- **Frage:** Gibt es Transfers $\{t_i(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n)\}_{i=1}^n$, so dass für die effiziente Entscheidungsregel $k(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n) = k^*(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n)$ Wahrheit sagen für jeden Spieler eine schwach dominante Strategie ist?

Vickrey-Clarke-Groves-Mechanismen

Definition: Allgemeiner VCG-Mechanismus

Direkter Mechanismus mit

1. $k(\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_n) = k^*(\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_n) = \arg\max_k \sum_{i=1}^{n} v_i(k, \widehat{\theta}_i)$
2. $t_i(\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_n) = \left[\sum_{j \neq i} v_j(k^*(\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_n), \widehat{\theta}_j)\right] + h_i(\widehat{\theta}_{-i})$

wobei $\hat{\theta}_{-i} = (\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_{i-1}, \hat{\theta}_{i+1}, \ldots, \hat{\theta}_n)$.

Satz

In jedem VCG-Mechanismus ist Wahrheit sagen für jeden Spieler eine schwach dominante Strategie.

Beweis

- **Beobachtung:** Da die Funktion $h_i(\hat{\theta}_{-i})$ nicht von Spieler i's Ankündigung abhängt, beeinflusst sie seine Anreize nicht! Wir können sie daher im Folgenden ignorieren!
- Spieler i's Ankündigung hat nur durch ihren Effekt auf die getroffene Entscheidung einen Effekt auf seine Zahlung.
- **Frage:** Wenn Spieler i die Entscheidung direkt wählen könnte, welche würde er wählen?

Beweis

- Spieler i maximiert einen Ausdruck, der dem gesamten "direkten Nutzen aller Spieler aus der Entscheidung" entsprechen würde, wenn die wahre Information der Spieler $(\theta_i, \hat{\theta}_{-i})$ wäre:

$$v_i(k, \theta_i) + \sum_{j \neq i} v_j(k, \hat{\theta}_j)$$

- Konsequenz:
  (1) Entscheidung $k = k^*(\theta_i, \hat{\theta}_{-i})$ wäre bei Definition von $k^*(\cdot)$ optimal für i.
  (2) Ankündigung $\hat{\theta}_i$ führt zu Entscheidung $k^*(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_{-i})$.
  (3) Durch Ankündigung $\hat{\theta}_i = \theta_i$ kann Spieler i, die für ihn optimale Entscheidung herbeiführen.

- Jeder Spieler i hat also einen Anreiz wahrheitsgemäß anzukündigen, egal welche Ankündigungen die anderen wählen! q.e.d.

Beispiel 1: Auktionssetting, 1 Objekt

- **Effiziente Entscheidung:**
  Es gilt: $\sum_{i=1}^{n} v_i(k,\theta_i) = \theta_k \Rightarrow k^*(\theta_1,\ldots,\theta_n) = \arg\max_k \theta_k$
- **Entscheidungsregel:** $k(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n) = k^*(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n)$
- Es gilt:

$$\sum_{j\neq i} v_j(k^*(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n),\hat{\theta}_j) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } k^*(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n) = i \\ \max_{j\neq i} \hat{\theta}_j & \text{wenn } k^*(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n) \neq i \end{cases}$$

  Zahlungsregel im allgemeinen VCG-Mechanismus:

$$t_i(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n) = \begin{cases} 0 + h_i(\hat{\theta}_{-i}) & \text{wenn } k^*(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n) = i \\ \max_{j\neq i} \hat{\theta}_j + h_i(\hat{\theta}_{-i}) & \text{wenn } k^*(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n) \neq i \end{cases}$$

- Für $h_i(\hat{\theta}_{-i}) = 0$ ist dies die "nette ZPA", für $h_i(\hat{\theta}_{-i}) = -\max_{j\neq i} \hat{\theta}_j$ die normale ZPA.

Beispiel 2: Setting der Doppelauktion

- **Effiziente Entscheidung:**
  Es gilt: $v_1(1,\theta_1) + v_2(1,\theta_2) = \theta_1 - \theta_2$ und $v_1(2,\theta_1) + v_2(2,\theta_2) = 0$

$$k^*(\theta_1,\theta_2) = \begin{cases} 1 \text{ (Handel)} & \text{wenn } \theta_1 \geq \theta_2 \\ 2 \text{ (kein Handel)} & \text{wenn } \theta_1 < \theta_2 \end{cases}$$

- **Entscheidungsregel:** $k(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2) = k^*(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$
- **Zahlungsregel** im allgemeinen VCG-Mechanismus:

$$t_1(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2) = v_2(k^*(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2),\hat{\theta}_2) + h_1(\hat{\theta}_2) = \begin{cases} -\hat{\theta}_2 + h_1(\hat{\theta}_2) & ,\hat{\theta}_1 \geq \hat{\theta}_2 \\ 0 + h_1(\hat{\theta}_2) & ,\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2 \end{cases}$$

$$t_2(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2) = v_1(k^*(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2),\hat{\theta}_1) + h_2(\hat{\theta}_1) = \begin{cases} \hat{\theta}_1 + h_2(\hat{\theta}_1) & ,\hat{\theta}_1 \geq \hat{\theta}_2 \\ 0 + h_2(\hat{\theta}_1) & ,\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2 \end{cases}$$

Pivot-Mechanismus

Der VCG Mechanismus ist für $h_i(\theta_{-i}) = 0$ extrem teuer!

Idee: Wähle die $h_i(\theta_{-i})$ "sinnvoller".

- Entscheidung, die effizient wäre, wenn man Bieter i ignorieren würde:

$$\widehat{k}_i(\theta_{-i}) = \arg\max_k \sum_{j \neq i} v_j(k, \theta_j)$$

- Zur Erinnerung, effiziente Entscheidung:

$$k^*(\theta_i, \theta_{-i}) = \arg\max_k \sum_{j=1}^{n} v_j(k, \theta_j)$$

Pivot-Mechanismus (Clarke-Mechanismus)

VCG-Mechanismus mit

$$h_i(\widehat{\theta}_{-i}) = -\sum_{j \neq i} v_j(\widehat{k}_i(\widehat{\theta}_{-i}), \widehat{\theta}_j)$$

Interpretation: Zahlungen im Pivot-Mechanismus

- Zahlung an Bieter *i*:

$$t_i(\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_n) = \sum_{j \neq i} \underbrace{[v_j(k^*(\widehat{\theta}_i, \widehat{\theta}_{-i}), \widehat{\theta}_j) - v_j(\widehat{k}_i(\widehat{\theta}_{-i}), \widehat{\theta}_j)]}_{\substack{\text{= Externalität, die } i \text{ auf } j \text{ ausübt} \\ \text{(kann positiv oder negativ sein)}}}$$

- **Behauptung:** Für die Zahlungen im Pivot-Mechanismus gilt für alle $(\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_n)$: $\sum_{i=1}^{n} t_i(\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_n) \leq 0$.

- **Beweis:**

$$\sum_{j \neq i} v_j(\widehat{k}_i(\widehat{\theta}_{-i}), \widehat{\theta}_j) \geq \sum_{j \neq i} v_j(k^*(\widehat{\theta}_i, \widehat{\theta}_{-i}), \widehat{\theta}_j)]$$

gilt per Definition, da $\widehat{k}$ die Nutzen maximierende Alternative für die Spieler $j \neq i$ ist.

Beispiel 1: Auktionssetting, 1 Objekt

- VCG-mechanismus mit $h_i(\hat{\theta}_{-i}) = -\max_{j \neq i} \hat{\theta}_j$
- Die Zahlungen an Bieter $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ ist also:

$$t_i(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n) = \begin{cases} -\max_{j \neq i} \hat{\theta}_j & \text{wenn } k^*(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n) = i \\ 0 & \text{wenn } k^*(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n) \neq i \end{cases}$$

- **Bemerkung 1:** Der Pivot-Mechanismus entspricht einer ZPA, bei der der Verkäufer selbst teilnehmen darf.
- **Bemerkung 2:** Wenn die WS des Verkäufers allgemein bekannt ist, zum Beispiel 0, dann kann man ihm die Auktionserlöse einfach geben.

Beispiel 2: Setting der Doppelauktion

- VCG-Mechanismus mit $h_1(\hat{\theta}_2) = 0$ und $h_2(\hat{\theta}_1) = -\hat{\theta}_1$
- Die Zahlung an die Spieler sind also:

$$t_1(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \begin{cases} -\hat{\theta}_2 & , \hat{\theta}_1 \geq \hat{\theta}_2 \\ 0 & , \hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2 \end{cases}$$

$$t_2(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \begin{cases} 0 & , \hat{\theta}_1 \geq \hat{\theta}_2 \\ -\hat{\theta}_1 & , \hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2 \end{cases}$$

Die Spieler zahlen also Geld.

Bsp 3: Pivot Mechanismus - Öffentliches Gut

Haben gesehen: Pivot Mechanismus...

- implementiert die effiziente Entscheidung.
- funktioniert ohne Subventionierung von außen.
- generiert evtl. einen Überschuss.

Weiteres Beispiel: (binäres) öffentliches Gut

- Projekt wird durchgeführt ($k = 1$) oder nicht ($k = 0$)
- n Nutzer mit privaten WS θ_i
- Kosten C falls Projekt durchgeführt wird
- Direkter Nutzen bei gleichmäßiger Kostenteilung:

$$v_i(\theta_i) = \theta_i - \frac{C}{n}$$

Pivot Mechanismus - Öffentliches Gut

- Pivot Mechanismus implementiert die effiziente Entscheidung. Es wird gebaut wenn

$$\sum_{i=1}^{n} v_i(\theta_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\theta_i - \frac{C}{n}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \theta_i > C$$

- Einen (zusätzlichen) Transfer leistet Teilnehmer *i* nur wenn er pivotal ist, dh. wenn er die effiziente Entscheidung ändert.

- Wenn $\sum_{j \neq i} \theta_j \leq \frac{n-1}{n} C$ aber $\sum_{i=1}^{n} \theta_i > C$, so gilt:

$$t_i(\theta_i) = -\sum_{j \neq i} \left[0 - \left(\theta_j - \frac{C}{n}\right)\right] = \sum_{j \neq i} \theta_j - \frac{n-1}{n} C < 0$$

Pivot Mechanismus - Problem

- Mit pivotalen Teilnehmern wird Überschuss generiert.
- Dieser kann substantiell sein (ggf viele Teilnehmer pivotal).
- **Problem**: Man kann Überschuss nicht zurückverteilen.
  - Eigene angegebene Wertschätzung beeinflusst welche anderen Teilnehmer pivotal sind.
  - Angegebene Wertschätzung beeinflusst Rückzahlung.
  - Wahre Wertschätzung ist angeben nicht mehr notwendig anreizkompatibel.
- **Lösungen:**
  - Geld an unbeteiligte Person (Auktionator, Staat, Charity)
  - Wenn nicht möglich: Geld verbrennen (ineffizient!)
- **Frage:** Gibt es einen Mechanismus mit ausgeglichenem Budget, der immer die effiziente Allokation implementiert?

Ziele

(1) Implementierung der effizienten Allokation

(2) ausgeglichenes Budget

- (2a) Summe der Transfers nicht positiv
  (d.h. keine Subventionierung von außen wird benötigt)
- (2b) Summe der Transfers nicht negativ
  (d.h. keine “Verschwendung von Geld”)

(3) freiwillige Teilnahme (individuelle Rationalität)

Können die Ziele erreicht werden?

(1) ✓ immer möglich in schwach dominanten Strategien:
beliebiger VCG-Mechanismus

(1)+(2a) ✓ immer möglich in schwach dominanten Strategien:
Pivot-Mechanismus

(1)+(2a)+(2b) (A) möglich in schwach dominanten Strategien, wenn es einen Spieler ohne private Information gibt (z.B. Auktionator im Auktionssetting), jedoch nicht generell möglich

(B) generell möglich als BNGG wenn Information unabhängig: Erwartete-Externalitäten-Mechanismus

(1)+(2a)+(2b)+(3) nicht generell möglich (weder in schwach dominanten Strategien noch als BNGG)
($\rightarrow$ Myerson-Satterthwaite-Resultat)

Erwartete-Externalitäten Mechanismus (nicht klausurrelevant)

Der Erwartete-Externalitäten Mechanismus

Erinnerung an die Zahlung im VCG-Mechanismus:

$$t_i(\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_n) = \left[\sum_{j \neq i} v_j(k^*(\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_n), \widehat{\theta}_j) \right] + h_i(\widehat{\theta}_{-i})$$

- Jeder Spieler erhält als Transfer den Nutzen, den die kollektive Entscheidung für die anderen Spieler generiert (eckige Klammer).
- Die Idee diesen Transfer als $h_j(\widehat{\theta}_{-j})$ gleichmäßig von den anderen Spielern einzusammeln funktioniert *nicht*! Der Wert der eckigen Klammer hängt von $\widehat{\theta}_j$ ab, h_j darf aber nicht von θ_j abhängen, da sonst Anreizkompabilität verloren geht.
- Idee stattdessen: Sammle den *Erwartungswert* der eckigen Klammer ein.

Der Erwartete-Externalitäten Mechanismus

- Definiere
$$\xi(\theta_i) = \mathbb{E}_{-\theta_i}\left[\sum_{j\neq i} v_j(k^*(\theta_1, \ldots \theta_n), \theta_j)\right]$$
den Erwartungswert der Nutzen für andere. Dieser hängt nur von θ_i und nicht von θ_{-i} ab!

- Setze im VCG-Mechanismus
$$h_i(\theta_{-i}) = -\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i} \xi_j(\theta_j)$$

- Wir erhalten somit einen **effizienten** Mechanismus, bei dem **Wahrheit sagen** schwach **dominant** ist, der **im Erwartungswert ausgeglichenes Budget** hat.

Der Erwartete-Externalitäten Mechanismus

- Man kann zeigen: Einen effizienten, schwach dominanten Mechanismus mit immer ausgeglichenem Budget gibt es im Allgemeinen nicht!
- Aber: wir können einen effizienten Mechanismus mit ausgeglichenem Budget als Bayesianisches Nash Gleichgewicht implementieren.
- Idee: das "Budgetrisiko" auf die risikoneutralen Teilnehmer abwälzen.
- Wahrheit sagen ist dann nicht mehr dominant, bleibt aber im Erwartungswert optimal.

Der Erwartete-Externalitäten Mechanismus

- Der Betrag in eckigen Klammern bei den Transfers

$$t_i(\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_n) = \left[\sum_{j \neq i} v_j(k^*(\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_n), \widehat{\theta}_j)\right] - \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \xi_j(\widehat{\theta}_j)$$

  hängt von den $\widehat{\theta}_j$ ab. Diese kennt der Bieter nicht.

- Unter der Annahme dass andere Teilnehmer die Wahrheit sagen, erhält er den gleichen Erwartungsnutzen wenn wir die die eckige Klammer durch den Erwartungswert ersetzen.

$$t_i(\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_n) = \xi_i(\widehat{\theta}_i) - \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \xi_j(\widehat{\theta}_j)$$

- Insbesondere bleibt Wahrheit sagen ein Bayesianisches Gleichgewicht.

Der Erwartete-Externalitäten Mechanismus

Wir haben damit folgendes Resultat hergeleitet:

Satz: Erwartete-Externalitäten Mechanismus

Sei

$$\xi(\theta_i) = \mathbb{E}_{-\theta_i}\left[\sum_{j\neq i} v_j(k^*(\theta_1,\ldots\theta_n),\theta_j)\right].$$

Dann ist im direkten Mechanismus

1. $k(\widehat{\theta}_1,\ldots,\widehat{\theta}_n) = k^*(\widehat{\theta}_1,\ldots,\widehat{\theta}_n) = \arg\max_k \sum_{i=1}^n v_i(k,\widehat{\theta}_i)$
2. $t_i(\widehat{\theta}_1,\ldots,\widehat{\theta}_n) = \xi_i(\widehat{\theta}) - \frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}\xi_j(\widehat{\theta}_j)$

Wahrheit sagen ein Bayesianisches Gleichgewicht, welches die effiziente Allokation herstellt. Es gilt für alle $(\widehat{\theta}_1,\ldots,\widehat{\theta}_n)$

$$\sum_{i=1}^n t_i(\widehat{\theta}_1,\ldots,\widehat{\theta}_n) = 0$$

Das Myerson-Satterthwaite-Resultat

Teilnahmebedingung

- Wir haben bisher ignoriert, ob ein Spieler überhaupt ein Interesse hat, am Mechanismus teilzunehmen
- Für manche Beispiele ist die Teilnahmebedingung nicht sonderlich relevant.
  - Kollektive Entscheidungen können rechtlich bindenden Charakter haben.
- In anderen Beispielen ist die Teilnahme inhärent freiwillig.
  - Insbesondere Auktionen und andere Märkte

Teilnahmebedingung - Die Doppelauktion

Einfachst mögliches Beispiel der Marktinteraktion: Doppelauktion

- Zwei Spieler: Käufer $i = B$ und Verkäufer $i = S$
- Zwei Entscheidungen: Handel ($k = 1$), kein Handel ($k = 2$)
- Direkter Nutzen aus Entscheidung:

$$v_B(k, \theta_B) = \begin{cases} \theta_B & \text{wenn } k = 1 \\ 0 & \text{wenn } k = 2 \end{cases}, \quad v_S(k, \theta_2) = \begin{cases} -\theta_S & \text{wenn } k = 1 \\ 0 & \text{wenn } k = 2 \end{cases}$$

- Erinnerung VCG: Kommt nicht ohne Subventionen aus.
- Erinnerung an Zahlungen im Pivot Mechanismus:

$$t_B(\hat{\theta}_B, \hat{\theta}_S) = \begin{cases} -\hat{\theta}_S & , \hat{\theta}_B \geq \hat{\theta}_S \\ 0 & , \hat{\theta}_B < \hat{\theta}_S \end{cases}, \quad t_S(\hat{\theta}_B, \hat{\theta}_S) = \begin{cases} 0 & , \hat{\theta}_B \geq \hat{\theta}_S \\ -\hat{\theta}_B & , \hat{\theta}_B < \hat{\theta}_S \end{cases}$$

- Verkäufer möchte nicht teilnehmen, da er entweder das Objekt verschenken muss oder dafür zahlen muss, es zu behalten.

Myerson-Satterthwaite Theorem

Effizienz unter ausgeglichenem Budget ist generell nicht möglich:

- Sei die WS des Käufers θ_B verteilt auf $[0, 1]$ mit Verteilung $F_B(\theta_B)$ und positiver Dichtefunktion $f_B(\theta_B)$.
- Sei die WS des Verkäufers θ_S verteilt auf $[0, 1]$ mit Verteilung $F_S(\theta_S)$ und positiver Dichtefunktion $f_S(\theta_S)$.

Theorem (Myerson-Satterthwaite):

Es gibt keinen direkten anreizkompatiblen Mechanismus der

1. Handel implementiert genau dann wenn $\theta_1 > \theta_2$ (**Effizienz**),
2. ein **Ausgeglichenes Budget** induziert ($t_S + t_B = 0$),
3. für alle WS die **Teilnahmebedingung** $U(\theta) \geq 0$ erfüllt.

Myerson-Satterthwaite Theorem - Bemerkungen

- Wenn es keinen direkten, anreizkompatiblen Mechanismus mit den Eigenschaften gibt, dann gibt es nach dem Revelationsprinzip auch allgemein keinen.

- Das Resultat ist unheimlich stark: bei asymmetrischer Information ist Effizienz schon im einfachsten Fall eines Marktes nicht mehr zu erreichen.

- Es ist ein Spiegel der Wohlfahrtstheoreme:
  - 1. WFT: Unter vollständiger Information (und anderen Annahmen) ist der Markt ohne weiteren Eingriff effizient.
  - MS: Funktioniert der Markt wegen asymmetrischer Information nicht, so kann Effizienz durch keinen Markteingriff hergestellt werden.

Myerson-Satterthwaite - Beweisidee

- Beschränkung auf direkte anreizkompatible Mechanismen.
- Sei $q(\theta_B, \theta_S)$ die Wahrscheinlichkeit für Handel in einem solchen Mechanismus.
- Für einen effizienten Mechanismus muss gelten:

$$q(\theta_B, \theta_S) = \begin{cases} 1 & \theta_B \geq \theta_S \\ 0 & \theta_B < \theta_S \end{cases}$$

- Erwarteter Nutzen:

$$U_B(\hat{\theta}_B, \theta_B) = \overline{q}_B(\hat{\theta}_B)\theta_B + \overline{t}(\hat{\theta}_B)$$
$$U_S(\hat{\theta}_S, \theta_S) = -\overline{q}_S(\hat{\theta}_S)\theta_S + \overline{t}(\hat{\theta}_S)$$

Myerson-Satterthwaite - Beweisidee

Idee: Zeige dass der Gewinn maximierende effizienten Mechanismus, der die Teilnahmebedingungen erfüllt Verlust macht.

Erinnerung: Satz über die AV für Käufer:

- Teilnahmebedingung ist erfüllt wenn sie für den Käufer mit der niedrigsten WS erfüllt ist (das ist der, dem Handel am wenigsten nützt).
- Allen Käufern mit WS $\theta_B > 0$ muss eine Informationsrente gezahlt werden, damit sie nicht $\hat{\theta}_B = 0$ behaupten.
- Die Wahrscheinlichkeit $\overline{q}_B(\theta_B)$ für Handel muss monoton steigend sein.
- Transfers $\overline{t}_B(\theta_B)$ sind durch Allokationsregeln und $\overline{t}_B(0)$ eindeutig festgelegt.

Myerson-Satterthwaite - Beweisidee

Für den Verkäufer lassen sich völlig analog folgende Resultate beweisen:

- Teilnahmebedingung ist erfüllt wenn sie für den Verkäufer mit der **höchsten** WS erfüllt ist (das ist der, dem Handel am wenigsten nützt).
- Allen Verkäufern mit WS $\theta_S < 1$ muss eine Informationsrente gezahlt werden, damit sie nicht $\hat{\theta}_S = 1$ behaupten.
- Die Wahrscheinlichkeit $\overline{q}_S(\theta_S)$ für Handel muss monoton fallend sein.
- Transfers $\overline{t}_S(\theta_S)$ sind durch Allokationsregel und $\overline{t}_S(1)$ eindeutig festgelegt.

Myerson-Satterthwaite - Beweisidee

- Um die Teilnahmebedingung zu erfüllen muss also $U_B(0,0) \geq 0$ und $U_S(1,1) \geq 0$ erfüllt sein.
- Die Allokationsregel ist durch die Effizienzvorgabe festgelegt.
- Also sind alle Transfers durch die Wahl von $\bar{t}_B(0)$ und $\bar{t}_S(1)$ festgelegt.
- Erlösmax: Wähle $\bar{t}_B(0)$ und $\bar{t}_S(1)$ so dass $U_B(0,0) = 0$ und $U_S(1,1) = 0$ erfüllt ist.
- Wir zeigen, dass dies genau durch den VCG-Mechanismus (mit $h_i(\hat{\theta}_j) = 0$) erreicht wird.

Myerson-Satterthwaite - Beweisidee

- Erinnerung: Transfers im Vickrey-Clarke-Groves Mechanismus:

$$t_B(\hat{\theta}_B, \hat{\theta}_S) = \begin{cases} -\hat{\theta}_S & \hat{\theta}_B \geq \hat{\theta}_S \\ 0 & \hat{\theta}_B < \hat{\theta}_S \end{cases}$$

$$t_S(\hat{\theta}_B, \hat{\theta}_S) = \begin{cases} \hat{\theta}_B & \hat{\theta}_B \geq \hat{\theta}_S \\ 0 & \hat{\theta}_B < \hat{\theta}_S \end{cases}$$

- Für $\theta_B = 0$ gilt $\overline{q}_B(0) = 0$ und $\overline{t}_B(0) = 0$, also $U_B(0, 0) = 0$.
- Für $\theta_S = 1$ gilt $\overline{q}_S(1) = 0$ und $\overline{t}_S(1) = 0$, also $U_S(1, 1) = 0$.
- Fazit: Der VCG-Mechanismus ist der Erlös maximierende effiziente Mechanismus.
- Er kommt nicht mit ausgeglichenem Budget aus: Kosten der Implementierung sind $\theta_B - \theta_S > 0$ wann immer $\theta_B > \theta_S$.