Auktionen und Märkte

Lösungen Blatt 2

Carl-Christian Groh & Jonas von Wangenheim

Universität Bonn, Wintersemester 2024/2025

Aufgabe 0

$$\mathbb{E}[\tilde{x}_i] = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[\tilde{x}_{(1:5)}] = \int_0^1 x f_{(1:5)}(x) dx = \int_0^1 5x^5 dx = \frac{5}{6}$$

$$\mathbb{E}[\tilde{x}_{(2:5)}] = \int_0^1 x f_{(2:5)}(x) dx = \int_0^1 x 20x^3(1-x) dx = \left[\frac{20x^5}{5} - \frac{20x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{4}{5}\tilde{x}_{(1:5)}\right] = \frac{4}{5}\mathbb{E}\left[\tilde{x}_{(1:5)}\right] = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{E}\left[\tilde{x}_i | \tilde{x}_i \geq \frac{1}{2}\right] = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x}{F(1) - F(1/2)} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x}{1/2} dx = \left[x^2\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{3}{4}$$

Aufgabe 1: Niedrigste Ordnungsstatistik

$$
\begin{aligned}
F_{(n:n)}(v) &= \text{Prob}\{\tilde{v}_{(n:n)} \leq v\} \\
&= 1 - \text{Prob}\{\tilde{v}_{(n:n)} > v\} \\
&= 1 - \text{Prob}\{\tilde{v}_1 > v, \tilde{v}_2 > v, ..., \tilde{v}_n > v\} \\
&= 1 - \text{Prob}\{\tilde{v}_1 > v\} \times \cdots \times \text{Prob}\{\tilde{v}_n > v\} \\
&= 1 - (1 - F(v))^n
\end{aligned}
$$

Das letzte "="verwendet, dass die ZV identisch verteilt sind, das vorletzte die Unabhängigkeit.

$$
f_{(n:n)}(v) = F'_{(n:n)}(v) = nf(v)(1 - F(v))^{n-1}
$$

Aufgabe 1: Zweitniedrigste Ordnungsstatistik

$$
\begin{aligned}
F_{(n-1:n)}(v) &= \text{Prob}\{\tilde{v}_{(n-1:n)} \leq v\} \\
&= 1 - \text{Prob}\{\tilde{v}_{(n-1:n)} > v\} \\
&= 1 - \big(\text{Prob}\{\tilde{v}_1 > v, \tilde{v}_2 > v, ..., \tilde{v}_n > v\} \\
&\quad + \text{Prob}\{\exists i : v_i \leq v, \forall j \neq i : v_j > v\}\big) \\
&= 1 - \big((1 - F(v))^n + nF(v)(1 - F(v))^{n-1}\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{(n-1:n)} &= -n(1 - F(v))^{n-1}(-f(v)) \\
&\quad - nF(v)(n-1)(1 - F(v))^{n-2}(-f(v)) - nf(v)(1 - F(v))^{n-1} \\
&= n(n-1)(1 - F(v))^{n-2} f(v) F(v)
\end{aligned}
$$

(Erster Term und dritter Term kürzen sich weg.)

Aufgabe 2

- $F_{(1:n)}$ und $F_{(2:n)}$ kennen wir aus der Vorlesung
- $F_{(n:n)}$ kennen wir aus Aufgabe 1.

Wir setzen $n = 3$. Dies ergibt die gefragten Formeln für Aufgabe 2a. Für Aufgabe 2b setzen wir an dieser Stelle schon jeweils $F(v) = v^2$ und $f(v) = 2v$.

$$
\begin{aligned}
F_{(1:3)}(v) &= F(v)^3 &&= v^6 \\
f_{(1:3)}(v) &= 3F(v)^2 f(v) &&= 6v^5 \\
F_{(2:3)}(v) &= 3F(v)^2 - 2F(v)^3 &&= 3v^4 - 2v^6 \\
f_{(2:3)}(v) &= 6F(v)f(v)(1 - F(v)) &&= 12v^3 - 12v^5 \\
F_{(3:3)}(v) &= 1 - (1 - F(v))^3 \\
f_{(3:3)}(v) &= 3f(v)(1 - F(v))^2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2b und 2c

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tilde{v}_{(1:3)}] &= \int_0^1 v6v^5 dv = \left[\frac{6}{7}v^7\right]_0^1 = \frac{6}{7} \\
\mathbb{E}[\tilde{v}_{(2:3)}] &= \int_0^1 v(12v^3 - 12v^5) dv = \left[\frac{12}{5}v^5 - \frac{12}{7}v^7\right]_0^1 = \frac{24}{35}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Prob}\{\tilde{v}_{(2:3)} \geq \frac{1}{2}\} &= 1 - F_{(2:3)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{32} \\
\mathbb{E}\left[\tilde{v}_{(2:3)} \geq \frac{1}{2}\right] &= \int_0^1 v\ f_{(2:3)}\left(v|\tilde{v}_{(2:3)} \geq \frac{1}{2}\right) dv \\
&= \int_{1/2}^1 v \frac{f_{(2:3)}(v)}{1 - F_{(2:3)}(\frac{1}{2})} dv \\
&= \frac{32}{27} \int_{1/2}^1 (12v^4 - 12v^6) dv = \frac{233}{315}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3a, 3b

Aufgabe 3a:
$f(x) = 1$, $g(y) = 2y$. Bei Team 1 sind alle Spielstärken gleich wahrscheinlich, bei Team 2 sind große Spielstärken wahrscheinlicher. Team 2 ist wahrscheinlich stärker.

Aufgabe 3b:

$$\text{Prob}(\tilde{y} = y \text{ gewinnt}) = \text{Prob}(\tilde{x} < y) = F(y) = y$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\text{Prob}(\tilde{y} \text{ gewinnt})] = \int_0^1 y g(y) dy = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}$$

Da die Spielstärken einzelner Spieler unabhängig sind, sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten aller drei Matches unabhängig.

$$\Rightarrow \text{Prob(Team 2 gewinnt 3 Spiele)} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$\Rightarrow \text{Prob(Team 1 gewinnt 3 Spiele)} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

Aufgabe 3c

Aus Aufgabe 2a folgt:

- $F_{(1:3)}(x) = x^3$
- $F_{(2:3)}(x) = 3x^2 - 2x^3$
- $F_{(3:3)}(x) = 1 - (1-x)^3 = 3x - 3x^2 + x^3$
- $g_{(1:3)}(y) = 6y^5$
- $g_{(2:3)}(y) = 12y^3 - 12y^5$
- $g_{(3:3)}(y) = 6y(1-y^2)^2$

Wahrscheinlichkeit dass Team 2 Spitzenduell gewinnt:

$$\text{Prob}(\tilde{y}_{(1:3)} = y \text{ gewinnt}) = \text{Prob}(\tilde{x}_{(1:3)} < y) = F_{(1:3)}(y) = y^3$$

$$\text{Prob}(\tilde{y}_{(1:3)} \text{ gewinnt}) = \mathbb{E}[\tilde{y}^3] = \int_0^1 y^3 g_{(1:3)}(y)dy = \int_0^1 y^3 6y^5 dy = \left[\frac{6}{9}x^9\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 3c

Wahrscheinlichkeit dass Team 2 den zweiten Tisch gewinnt:

$$\text{Prob}(\tilde{y}_{(2:3)} = y \text{ gewinnt}) = \text{Prob}(\tilde{x}_{(2:3)} < y) = F_{(2:3)}(y) = 3y^2 - 2y^3$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{ Prob}(\tilde{y}_{(2:3)} \text{ gewinnt}) &= \mathbb{E}[3\tilde{y}^2 - 2\tilde{y}^3] \\
&= \int_0^1 (3y^2 - 2y^3) g_{(2:3)}(y) dy \\
&= \int_0^1 (3y^2 - 2y^3)(12y^3 - 12y^5) dy \\
&= \int_0^1 [36y^5 - 36y^7 - 24y^6 + 24y^8] dy \\
&= \frac{36}{6} - \frac{36}{8} - \frac{24}{7} + \frac{24}{9} \approx 73{,}81 \text{ Prozent}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3c

Wahrscheinlichkeit dass Team 2 den letzten Tisch gewinnt:

$$\text{Prob}(\tilde{y}_{(3:3)} = y \text{ gewinnt}) = \text{Prob}(\tilde{x}_{(3:3)} < y) = F_{(3:3)}(y) = 3y - 3y^2 + y^3$$

$$\Rightarrow \text{Prob}(\tilde{y}_{(3:3)} \text{ gewinnt}) = \mathbb{E}[3\tilde{y} - 3\tilde{y}^2 + \tilde{y}^3]$$

$$= \int_0^1 (3y - 3y^2 + y^3) 6y(1 - y^2)^2 dy$$

$$= \int_0^1 (3y - 3y^2 + y^3) 6y(1 - 2y^2 + y^4) dy$$

$$= \int_0^1 [18x^2 - 36x^4 + 18x^6 - 18x^3 + 36x^5 - 18x^7 + 6x^4 - 12x^6 + 6x^8] dy$$

$$= \frac{18}{3} - \frac{36}{5} + \frac{18}{7} - \frac{18}{4} + \frac{36}{6} - \frac{18}{8} + \frac{6}{5} - \frac{12}{7} + \frac{6}{9} \approx 77{,}38 \text{ Prozent}$$

Aufgabe 3d

Die Ereignisse sind nicht unabhängig!

- Wenn der Spitzenspieler gewinnt, dann hatte er mit höherer Wahrscheinlichkeit eine hohe Spielstärke. (Formaler: Der Erwartungswert der ersten Ordnungsstatistik bedingt auf die Information, dass der entsprechende Spieler gewinnt, liegt über dem unbedingten Erwartungswert der ersten Ordnungsstatistik).

- Die zweite Ordnungsstatistik bedingt auf die Information, dass die erste Ordnungsstatistik "höher" liegt, ist nun auch "höher" (höher meint mehr Masse auf hohen Spielstärken). Das heißt, die Info, dass der Spitzenspieler gewinnt erhöht die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler am zweiten Tisch gewinnt. Die Ereignisse sind positiv korrelliert. Demnach liegt die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn an allen Tischen über dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten.