Auktionen und Märkte –

Übung 6 (Lösungsskizze)

<u>Anmerkung</u>: Die vorliegende Lösungsskizze wurde gewissenhaft erstellt. Es besteht jedoch keine Garantie auf vollständige Richtigkeit.

Aufgabe 0

- Lösung durch partielle Integration:

$$\int g(u)\, h'(u)\, du = \left[g(u)\, h(u) \right] - \int g'(u)\, h(u)\, du$$

- Anwendung hier:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left[\bar{q}_i(v_i)\, v_i - \int_0^{v_i} \bar{q}_i(x)\, dx \right] f(v_i)\, dv_i$$

$$=$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \bar{q}_i(v_i)\, v_i\, f(v_i)\, dv_i - \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^{v_i} \bar{q}_i(x)\, dx \right)}_{:= g(v_i)} \underbrace{f(v_i)}_{= h'(v_i)}\, dv_i$$

$\rightarrow$ wir evaluieren $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^{v_i} \bar{q}_i(x)\,dx \right)}_{=\,g(v_i)} \underbrace{f_i(v_i)}_{=\,h'(v_i)}\, dv_i$

$$= \Big[g(v_i)\, h(v_i) \Big]_0^1 - \int_0^1 g'(v_i)\, h(v_i)\, dv_i$$

$$= \Big[\int_0^{v_i} \bar{q}_i(x)\,dx \cdot F(v_i) \Big]_0^1 - \int_0^1 \bar{q}_i(v_i)\, F_i(v_i)\, dv_i$$

$$= \int_0^1 \bar{q}_i(x)\,dx - 0 - \int_0^1 \bar{q}_i(v_i)\, F_i(v_i)\, dv_i$$

$\Rightarrow$ wieder einsetzen:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left[\bar{q}_i(v_i)\, v_i - \int_0^{v_i} \bar{q}_i(x)\, dx \right] f(v_i)\, dv_i$$

$$=$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \bar{q}_i(v_i)\, v_i\, f(v_i)\, dv_i \; -$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^1 \bar{q}_i(x)\, dx \;-\; \int_0^1 \bar{q}_i(v_i)\, F_i(v_i)\, dv_i \right]$$

$$=$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^1 \left(\bar{q}_i(v_i)\, v_i - \frac{\bar{q}_i(v_i)}{f_i(v_i)} + \bar{q}_i(v_i) \frac{F_i(v_i)}{f_i(v_i)} \right) f_i(v_i)\, dv_i \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \bar{q}_i(v_i) \left(v_i - \frac{1 - F(v_i)}{f_i(v_i)} \right) f_i(v_i)\, dv_i$$

Aufgabe 1 $(n=2)$

- generell ist der Erlös gegeben durch:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \bar{t}_i(0) + \int_0^1\int_0^1 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} q_i(v_1,v_2) \cdot J_i(v_i)} \; f(v_1,v_2)\,dv_1\,dv_2$$

wir maximieren dies für jedes v_1, v_2 separat (aus mathematischer Sicht)

$$J_i(v_i) = v_i - \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$$

a) Optimaler Mechanismus

- Für jede Kombination von v_1, v_2 erhält der Bieter mit der höchsten virtuellen Wertschätzung $J_i(v_i)$ das Gut, wenn diese positiv ist.

- Allokationsregel:

$$q_i^*(v_1, v_2) = \begin{cases} 1 & J_i(v_i) > J_j(v_j) \text{ und } J_i(v_i) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- hier gilt

v_i gleichverteilt auf $[0,1]$

$$J_i(v_i) = v_i - \frac{1-F_i(v_i)}{f(v_i)} = v_i - \frac{1-v_i}{1} = 2v_i - 1.$$

- des Weiteren: $J_i(v_i) < 0 \iff v_i < 1/2$.

- Transfers:
  - ↳ $t_i'(0) = 0$ (der Bieter mit WS 0 zahlt niemals etwas, weil er niemals das Gut erhält)
  - ↳ Berechnung von $t_i(v_i)$ mit Bedingung (ii) zur Anreizverträglichkeit:

$$\bar{t}_i(v_i) = \bar{t}_i(0) + \bar{q}_i(v_i)\cdot v_i - \int_0^{v_i} \bar{q}_i(x)\,dx$$

$\rightarrow$ wenn $v_i < 1/2$, so gilt $\bar{q}_i(v_i) = 0$

$\Rightarrow$ $\bar{t}_i(v_i) = 0$ wenn $v_i < 1/2$

$\rightarrow$ wenn $v_i \geq 1/2$, so gilt $\bar{q}_i(v_i) = P_r(v_i > v_j) = v_i$

$$\Rightarrow \bar{t}_i(v_i) = v_i \cdot v_i - \int_{1/2}^{v_i} x\,dx$$

$$= v_i^2 - \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{1/2}^{v_i} = \frac{v_i^2}{2} + \frac{1}{8}$$

b) Nutzen der Bieter

- Alle Bieter mit $v_i \leq 1/2$ erhalten einen Nutzen von 0, weil sie niemals das Gut erhalten, und somit auch nie etwas bezahlen.

- Um den Nutzen von Bietern mit $v_i > 1/2$ auszurechnen, verwenden wir Bedingung (ii') aus der Anreizverträglichkeit

$$U_i(v_i) = \int_0^{v_i} \bar{q}_i(x)\,dx = \int_{1/2}^{v_i} x\,dx = \frac{1}{2}v_i^2 - \frac{1}{8}$$

c) Satz über Erlösäquivalenz

- In jedem Auktionsformat, in dem die Allokationsregel durch $q_i^*(v_1, v_2)$ gegeben ist und $\bar{t}_i(v_i) = 0$ für alle i gilt, wird der Erlös maximiert.

- Beispiele:
  ↳ Zweitpreisauktion / Erstpreisauktion mit Reservationspreis $r^* = 1/2$ (siehe vergangene Übungen)

↳ Zweitpreisauktion mit Eintrittsgeld $e = (\frac{1}{2})^n$,

Siehe vergangene Übungen

d) Verkäufer hat Wertschätzung $v_0 > 0$ für das Gut.

→ nun ist der Nutzen des Verkäufers gegeben durch

$$\Pi = \underbrace{\overset{\text{neu}}{v_0}}_{\substack{\text{Gut wird} \\ \text{nicht verkauft}}} + \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=1}^{2} q_i(v_1, v_2)\left(J_i(v_i) - \overset{\text{neu}}{v_0}\right) f(v_1) f(v_2)\, dv_1\, dv_2}_{\text{Gut wird verkauft}}$$

→ die neue virtuelle Wertschätzung ist $\tilde{J}_i(v_i) = J_i(v_i) - v_0$. Damit machen wir nun Optimierung mit dem bekannten Prinzip.

· Optimale Allokationsregel:

$$q_i^*(v_1, v_2) = \begin{cases} 1 & \tilde{J}_i(v_i) > \tilde{J}_j(v_j) \text{ und } \tilde{J}_i(v_i) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

→ Beispiele für optimale Mechanismen: EPA / ZPA mit angepasstem (höherem) Reservationspreis

e) Generell ist es erlösmaximierend, das Gut <u>nicht</u> zu allozieren, wenn alle virtuellen Wertschätzungen negativ sind.

Was ist optimal, wenn das Gut alloziiert werden muss?

→ optimale Allokationsregel:

$$q_i(v_1, v_2) = \begin{cases} 1 & J_i(v_i) > J_j(v_j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

→ das Gut wird immer an den Bieter mit der höchsten virtuellen Wertschätzung verkauft.

→ Auktionsformate, die unter dieser Einschränkung optimal sind: EPA, ZPA, APA ohne Reservationspreis und ohne Eintrittsgeld.

Aufgabe 2

- 3 Perioden, 3 Bieter, ein Verkäufer. In jeder Periode macht der Verkäufer einem Bieter ein Take-it-or-Leave-it (TIOLI) Angebot

- Lösung mit Teilspielperfektheit:
  - ↳ Zuerst lösen wir das Teilspiel beginnend in Periode 3.
  - ↳ Damit lösen wir das Teilspiel beginnend in Periode 2.
  - ↳ Damit lösen wir das Teilspiel beginnend in Periode 1.

Periode 3

- die Wertschätzung des Verkäufers ist 0 => wenn der dritte Bieter das Angebot nicht annimmt, erhält der Verkäufer den Nutzen 0.
- wenn der dritte Bieter das Angebot mit Preis p_3 annimmt, so erhält der Verkäufer den Nutzen p_3.
- der Bieter nimmt das Angebot an, wenn $v_3 > p_3$.

- Somit ist der Erwartungsnutzen des Verkäufers wenn er das Angebot p_3 macht, gegeben durch:

$$\Pi_3(p_3) = p_3 \cdot \Pr(v_3 > p_3) = p_3[1-p_3]$$

- Maximierung durch Wahl von p_3:

$$\frac{\partial \Pi_3}{\partial p_3} = 1 - 2p_3 \overset{!}{=} 0 \iff \boxed{p_3^* = 1/2}$$

- Optimales Angebot in Periode 3 ist $p_3^* = 1/2$.

- Der erwartete Erlös für den Verkäufer ist also

$\Pi_3(p_3^*) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$, wenn das Spiel Periode 3 erreicht.

Periode 2

- wenn das Gut in Periode 2 nicht verkauft wird, geht das Spiel in Periode 3, und dann ist der erwartete Erlös des Verkäufers gleich $\underline{\underline{1/4}}$.

- Somit ist der erwartete Erlös des Verkäufers in Periode 2 gegeben durch:

$$\Pi_2(p_2) = \underbrace{Pr(u_2 > p_2)}_{\text{Gut wird in Periode 2 verkauft}} \cdot p_2 + \underbrace{[1 - Pr(u_2 > p_2)]}_{\text{Gut wird in Periode 2 nicht verkauft.}} \cdot 1/4$$

$$= [1 - p_2] \cdot p_2 + p_2 \cdot 1/4$$

· Maximierung durch Wahl von p_2:

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = 1 - 2p_2 + \frac{1}{4} \overset{!}{=} 0 \iff 2p_2 = \frac{5}{4}$$

$$\iff \boxed{p_2^* = \frac{5}{8}}$$

· Erwarteter Erlös in Periode 2 ist $\Pi_2(p_2^*)$, d.h.

$$\Pi_2(p_2^*) = [1-p_2^*]\cdot p_2^* + \frac{1}{4}\cdot p_2^*$$
$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8} = \frac{5}{8}\left[\frac{5}{8}\right] = \underline{\underline{\frac{25}{64}}}$$

<u>Periode 1:</u>

· wenn das Gut in Periode 1 nicht verkauft wird, erhält der Verkäufer den erwarteten Erlös aus Periode 2 nämlich $\frac{25}{64}$.

• Verkäufer maximiert erwarteten Erlös durch Wahl von p_1:

$$\Pi_1(p_1) = [1-p_1] \cdot p_1 + p_1 \cdot \frac{25}{64}$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = 1-2p_1 + \frac{25}{64} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 2p_1 = \frac{85}{64}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p_1^* = \frac{89}{128}$$

b) Wir haben: $p_1^* = \frac{89}{128}$, $p_2^* = \frac{5}{8}$, $p_3^* = \frac{1}{2}$.

-> daraus folgt $p_1^* > p_2^* > p_3^*$, d.h.

die Preise fallen über die Perioden.

<u>Generelle Intuition:</u> Die Preise steigen über die Zeit an, weil die Verhandlungsposition des Verkäufers über die Zeit schlechter wird (es bleiben weniger Käufer für das Gut übrig).

Aufgabe 3

a) Zweitpreisauktion mit Reservationspreis

→ wir bestimmen den optimalen Reservationspreis.

· Bieter 2 wird immer ein Gebot unterhalb des Gebots von Bieter 1 abgeben, da Bieter 1 immer eine Wertschätzung oberhalb 1 hat, und Bieter 2 immer eine Wertschätzung unterhalb von 1 hat.

→ Reservationspreis bestimmt also, wann Gut verkauft wird (an Bieter 1) und wann es nicht verkauft wird.

- Reservationspreis über 1 ist nicht optimal.
  ↳ Generell: Zahlung von Bieter 1 ist $\min\{b_2, r\}$
  wo r der Reservationspreis ist und $b_2 \leq 1$ das Gebot von Spieler 2.
  ↳ wenn $r > 1$, so erhält Verkäufer die Zahlung r, wenn $v_1 > r$, und sonst nichts.

- Daher ist der erwartete Erlös $R^a_{>1}(r) = r \cdot Pr(v_1 > r)$

- Wir beachten: $v_1 \sim U[1,2] \Rightarrow Pr(v_1 \leq r) = \frac{r-1}{2-1} = r-1$

$$\Rightarrow R^a_{>1}(r) = r \cdot \left[1 - Pr(v_1 \leq r)\right] = r\left[1 - (r-1)\right]$$

$$\frac{\partial R^a_{>r}(r)}{\partial r} = 2-r + r(-1) = 2-2r < 0, \text{ wenn } r > 1$$

- Implikation: Erlös fällt in r, wenn $r > 1 \Rightarrow$ $r > 1$ kann nicht optimal sein.

- Also ist Reservationspreis $r = 1$ optimal

↳ Grund: Zahlung an Verkäufer ist immer $\min\{b_2, r\}$. Wenn $r < 1$, liegt Zahlung manchmal unterhalb 1, also die erzielte Zahlung, wenn der Reservationspreis gleich 1 ist.

b) Wie in Aufgabe 2 lösen wir zuerst für das Gleichgewicht in der letzten Periode und benutzen dies dann, um das Teilspiel in Periode 1 zu lösen.

Periode 2

- Wenn das Gut nicht verkauft wird, erhält der Verkäufer den Nutzen 0.
- Wir können das Problem wie in Aufgabe 2 lösen, in dem wir $\Pi_2(p_2) = Pr(v_2 > p_2) \cdot p_2$

maximieren. Das optimale Angebot ist $p_2^* = 1/2$.

$\Longrightarrow$ Somit ist der erwartete Erlös $[1 - 1/2] \cdot 1/2 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

<u>Periode 1</u>

- wenn das Gut nicht in dieser Periode verkauft wird, erhält der Verkäufer in Periode 2 den erwarteten Erlös $1/4 \Longrightarrow$ "Wertschätzung" des Verkäufers ist $1/4$.
- der Verkäufer maximiert also den folgenden erwarteten Erlös durch Wahl von p_1:

$$\Pi_1(p_1) = [1-F(p_1)]\cdot p_1 + F(p_1)\cdot \frac{1}{4}$$

$$= [1-(p_1-1)]\cdot p_1 + [p_1-1]\cdot \frac{1}{4}$$

$$= [2-p_1]\cdot p_1 + [p_1-1]\cdot \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Pi_1(p_1)}{\partial p_1} = 2-p_1+(-1)\cdot p_1 + \frac{1}{4} \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$2p_1 = 9/4 \Leftrightarrow p_1^* = 9/8$$

$\Rightarrow$ Erlös ist $\Pi_1(p_1^*) = \frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{65}{64}}}$

Implementierte Allokationsregel (über beide Perioden)

- wenn $v_1 \geq 5/8$, erhält Bieter 1 das Gut.
- wenn $v_1 < 5/8$ und $v_2 \geq 1/2$, erhält Bieter 2 das Gut.
- wenn $v_1 < 5/8$ und $v_2 < 1/2$, behält der Verkäufer das Gut.

c) Optimaler direkter Mechanismus

- Erlösmaximierende Allokationsregel verkauft das Gut immer an den Bieter mit der höchsten virtuellen Wertschätzung, wenn diese positiv ist.

- $$J_1(v_1) = v_1 - \frac{1-F_1(v_1)}{f_1(v_1)} = v_1 - \frac{1-(v_1-1)}{1} = 2v_1 - 2$$

- $$J_2(v_2) = v_2 - \frac{1-F_2(v_2)}{f(v_2)} = v_2 - \frac{1-v_2}{1} = 2v_2 - 1$$

- es gilt: $J_1(v_1) > J_2(v_2) \iff 2v_1 - 2 > 2v_2 - 1$

$$\iff$$

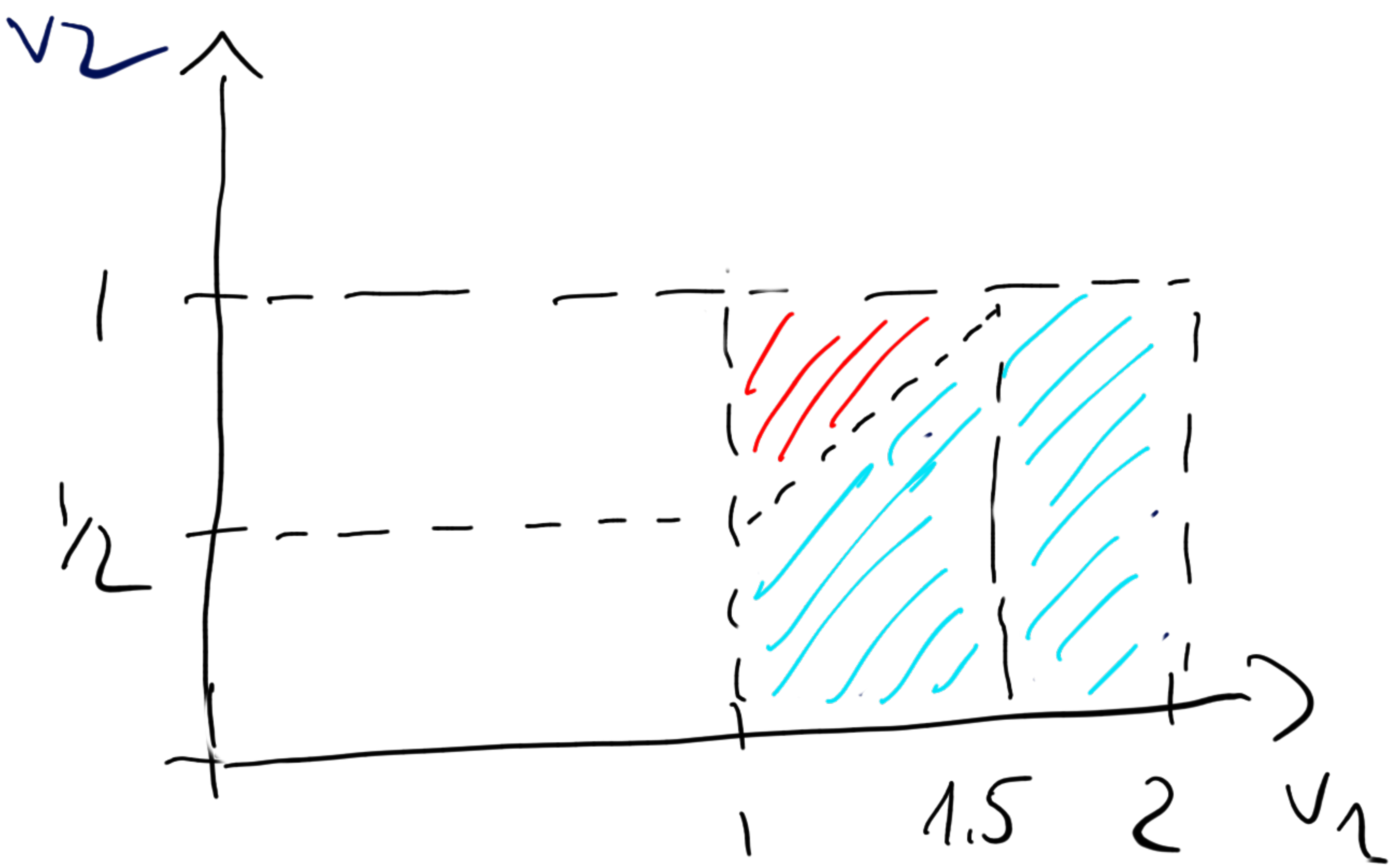
$$\underline{v_2 < v_1 - \tfrac{1}{2}}$$

- des weiteren ist virtuelle Wertschätzung von Bieter 1 immer strikt positiv $\Rightarrow$ Gut wird immer alloziert.

- Allokationsregel im erlösmaximierenden direkten Mechanismus

$$\left(q_1(v_1,v_2), q_2(v_1,v_2)\right) = \begin{cases} (1,0) & \text{wenn} \quad v_2 < v_1 - \tfrac{1}{2} \\ (0,1) & \text{wenn} \quad v_2 > v_1 - \tfrac{1}{2} \end{cases}$$

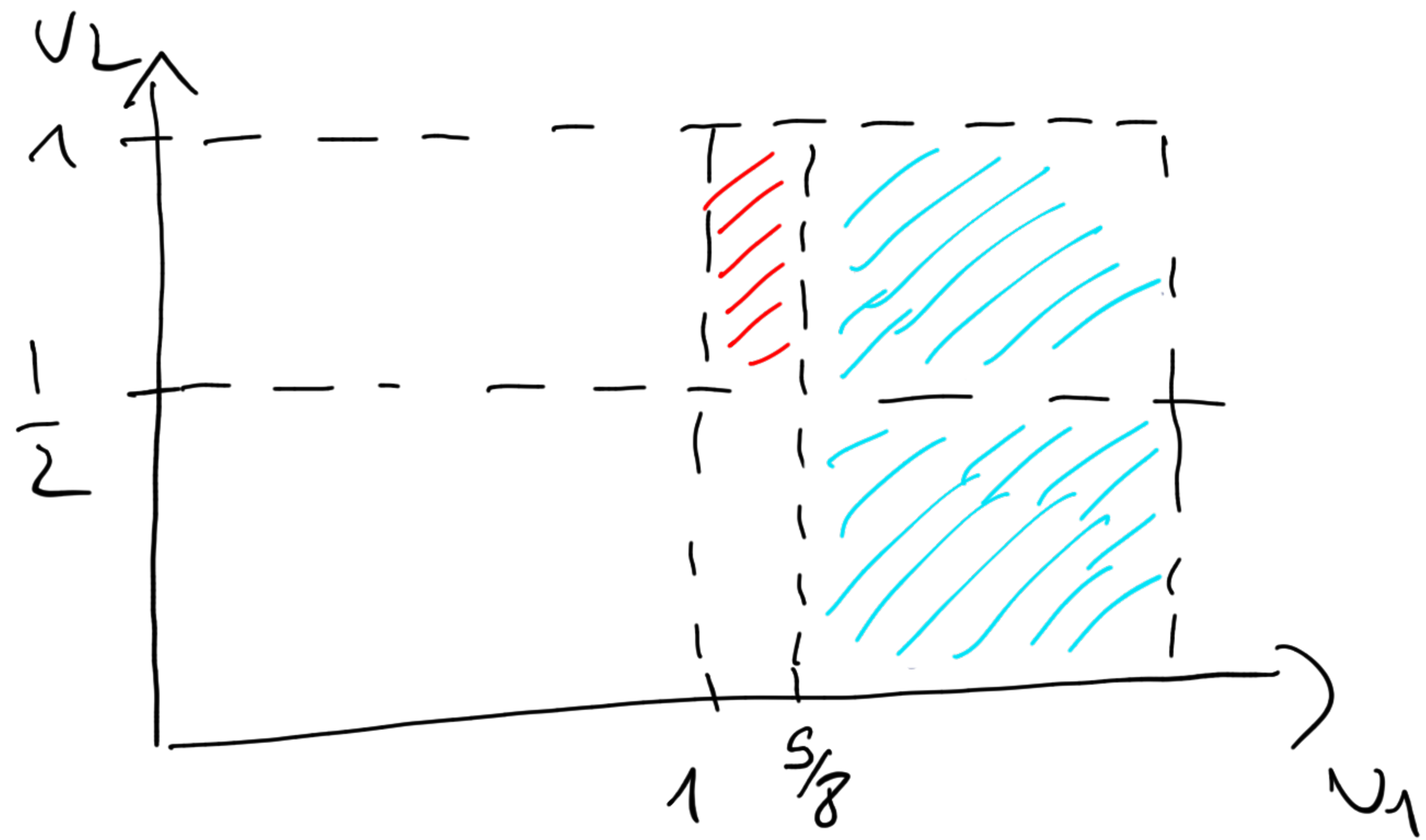
Allokationsregel in c)



: Spieler 1 gewinnt

: Spieler 2 gewinnt.

Allokationsregel in b)



: Spieler 1 gewinnt

: Spieler 2 gewinnt.

d) Bonus für Käufer 2

- Es ist für Bieter 1 schwach dominant, seine Wertschätzung zu bieten
  - ↳ wenn $v_1 \geq b_2 + k$: Wertschätzung bieten schafft Nutzen von $v_2 - (b_2 + k) \geq 0$
  - ↳ Alle Gebote $b_1 > v_1$ erzielen den gleichen Nutzen (da Zweitpreisauktion)
  - ↳ Alle Gebote $b_1 < v_1$ erzielen Nutzen 0.
  - ↳ wenn $v_1 < b_2 - k$: Nicht gewinnen optimal!

- Es ist für Bieter 2 schwach dominant, seine Wertschätzung zu bieten

↳ wenn $v_2 \geq b_1 - h$: Wertschätzung bieten schafft Nutzen $v_2 - (b_1 - h) \geq 0$

↳ Gebot $b_1 > v_2$ schafft gleichen Nutzen.
Gebot $b_1 < v_2$ schafft Nutzen 0.

↳ wenn $v_2 < b_1 - h$: Gewinnen nicht optimal, und maximal erreichbarer Nutzen ist 0

-> erreichbar durch $b_2 = v_2$.

e) Kann man h so wählen, dass die optimale Allokation aus (c) implementiert wird?

- Ja, kann man.
- aus (d) ist es immer ein Gleichgewicht, dass beide ihre Wertschätzungen bieten.
- Bieter 1 gewinnt also genau dann wenn $v_1 > v_2 + h$.
- Allokationsregel aus (c): Bieter 1 gewinnt genau dann wenn $v_1 > v_2 + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Wenn $k = 1/2$, wird genau diese Allokationsregel implementiert.