Auktionen und Märkte –

Übung 3 (Lösungsskizze)

Anmerkung: Die vorliegende Lösungsskizze wurde gewissenhaft erstellt. Es besteht jedoch keine Garantie auf vollständige Richtigkeit.

<u>Aufgabe 1</u>: Procurement - Zweitpreisauktion.

- Spielregeln:
  - ↳ Procurement: Auktionator will Unternehmen finden, welches Auftrag <u>möglichst günstig</u> erfüllt.
  - ↳ Unternehmen i macht Gebot. Wenn Bieter i gewinnt, <u>zahlt Auktionator einen Preis</u> <u>an</u> das gewinnende Unternehmen (Bieter).

↳ das niedrigste Gebot gewinnt die Auktion.

↳ Der Preis, den das gewinnende Unternehmen bekommt, ist das zweitniedrigste Gebot.

a) GG in schwach dominanten Strategien

- Bieter i hat Kosten c_i, und die Kosten eines anderen Bieters sind eine Zufalls-variable $\tilde{c}_j$. (Jeder Bieter kennt seine eigenen Kosten, aber nicht die von anderen Bietern).

- für jeden Bieter i ist es eine schwach dominante Strategie, seine eigenen Kosten zu bieten.

- wenn Bieter i mit Gebot $b_i = c_i$ die Auktion gewinnt, und p erhält $\Rightarrow$ Nutzen $p - b_i$ $= p - c_i$. Das ist positiv, weil $b_i < p$ ($b_i = c_i$ ist das niedrigste Gebot, p ist zweitniedrigstes).
  - ↳ wenn Bieter i zum Gebot $b_i' \geq p$ abweicht, gewinnt i nicht die Auktion und

erhält den Nutzen 0 $\Rightarrow$ nicht profitable.

↳ wenn Bieter i zum Gebot $b_i < c_i$ abweicht, ändert sich gar nichts $\Rightarrow$ nicht profitable.

- wenn Bieter i mit Gebot $b_i = c_i$ die Auktion nicht gewinnt, weil das niedrigste Gebot p unter c_i liegt $\Rightarrow$ i erhält Nutzen 0.

  ↳ Abweichung zu $b_i' \in (p, \infty)$ macht keinen Unterschied.

  ↳ Abweichung zu $b_i' < p$ $\Rightarrow$ i gewinnt die

Auktion, aber $p < c_i \Rightarrow$ Nutzen $p - c_i < 0$

$\Rightarrow$ nicht profitable!

b) Erwarteter Betrag ist Erwartungswert des zweitniedrigsten (d.h. höchsten) Gebots:

· Jeder der $n=2$ Bieter bietet $b_i = c_i$, und $\tilde{c}_i \sim U[1,2]$. Verteilungsfunktion von $\tilde{c}_i$ ist

$$F(c) = \begin{cases} 0 & c < 1 \\ \frac{c-1}{2-1} & c \in [1,2] \\ 1 & c \geq 2 \end{cases}$$

· wir brauchen also die Ordnungsstatistik $\check{c}_{(1:2)}$,

mit Verteilungsfunktion $F_{(1:2)}(c)$ gegeben durch:

Verteilungsfunktion

$$F_{(1:2)}(c) = \underbrace{Pr(\check{c}_1 < c)\ Pr(\check{c}_2 < c)} = (c-1)^2$$

Ordnungsstatistik höchstens aus zwei Geboten.

Wahrscheinlichkeit, dass beide Gebote unterhalb von c liegen.

$\Rightarrow$ Dichtefunktion $f_{(1:2)}(c) = 2(c-1)$

$\Rightarrow$ Erwarteter Betrag $= \int_1^2 c\, f_{(1:2)}(c)\, dc =$

$$= \int_1^2 c\left[2(c-1)\right]dc = \int_1^2 \left[2c^2 - 2c\right]dc = \left[\frac{2}{3}c^3 - c^2\right]_1^2 =$$

$$\left[\frac{2}{3}\cdot(8) - 4\right] - \left[\frac{2}{3}(1) - 1\right] = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{5/3}}$$

Aufgabe 2: Festpreis

- Private Information von Käufer i: Wertschätzung zwischen 0 und 1, gleichverteilt auf $[0,1]$.
- Mögliche Aktionen für Käufer i: "Ja" und "Nein". "Ja" heisst, ich kaufe das Gut. "Nein" heisst, ich kaufe das Gut nicht.

→ eine Strategie für einen Käufer besagt, ob er das Gut kaufen möchte oder nicht, für jede mögliche Wertschätzung und jeden Preis, den der Auktionator festlegt.

$$\varphi : \underbrace{[0,1]}_{\text{Festpreis}} \times \underbrace{[0,1]}_{\text{Wertschätzungen}} \longrightarrow \{\text{"Ja"}, \text{"Nein"}\}$$

- Schwach dominante Strategie: Gut kaufen, wenn $v_i \geq p$, und Gut nicht kaufen, wenn $v_i < p$.

- Erwarteter Profit, wenn alle diese Strategie spielen (von Bieter i) Π_i:

$$\Pi_i = \underline{(v_i - p)} \cdot Pr(\text{nur } i \text{ sagt ja})$$

$$+ \frac{1}{2}(v_i - p) \cdot Pr(i \text{ und ein anderer Spieler sagen ja})$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot (v_i - p) \cdot Pr(i \text{ und zwei andere Spieler sagen ja})$$

$$= (v_i - p) \cdot \left[Pr(v_j < p) \cdot Pr(v_k < p) \right] +$$

$$\frac{1}{2}(v_i - p) \cdot \left[Pr(v_j < p) \cdot Pr(v_k \geq p) + Pr(v_j \geq p) \cdot Pr(v_k < p) \right] +$$

$$\frac{1}{3}(v_i - p) \left[Pr(v_j \geq p) \cdot Pr(v_k \geq p) \right] \quad =$$

$$(v_i - p)(p^2) + \frac{1}{2}(v_i - p)\left[2p(1-p)\right] + \frac{1}{3}(v_i - p)\left[(1-p)^2\right] =$$

$$(v_i - p)\left[p^2 + p(1-p) + \frac{1}{3}(1-p)^2\right]$$

b) Erwarteter Erlös des Verkäufers bei Preis p.

$$R^V(p) = p \cdot Pr\underbrace{[\text{mindestens ein Käufer hat } \tilde{v}_i \geq p]}_{1-Pr\underbrace{[\text{alle haben } \tilde{v}_j < p]}_{=p^3}}.$$

$$= p \cdot [1-p^3]$$

$\rightarrow$ wir berechnen den Preis p^*, der den Erlös des Verkäufers maximiert.

$$\frac{\partial R^V(p)}{\partial p} = [1-p^3] + p[-3p^2] \overset{!}{=} 0 \iff$$

$$1 - p^3 - 3p^3 = 0 \iff 4p^3 = 1 \iff$$

$$p^3 = 1/4 \iff \underline{\underline{p^* = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}}}$$

$\Rightarrow$ Einsetzen in $R^u(p)$ liefert maximalen Erlös:

$$R^u(p^*) = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\left[1 - \left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^3\right] \approx \underline{\underline{0.4725}}$$

c) Vergleich mit Erlösen in der Zweitpreis-auktion (ZPA)

· Erlös in ZPA ohne Reservationspreis:

↳ das ist der Erwartungswert des zweithöchsten Gebots (und jeder bietet einfach seine Zahlungsbereitschaft).

↳ $F_{(2:n)}(y) = \left[Pr(\tilde{v}_i < y)\right]^n + n\left[Pr(\tilde{v}_i < y)\right]^{n-1} Pr(\tilde{v}_j > y)$

$\tilde{v}_i$ gleichverteilt auf $[0,1]$

$= y^n + ny^{n-1}(1-y) = ny^{n-1} - (n-1)y^n$

$$\Rightarrow f_{(2:n)}(y) = n(n-1)y^{n-2} - n(n-1)y^{n-1} = n(n-1)y^{n-2}(1-y)$$

$\Rightarrow$ erwarteter Erlös:

$$R^{ZPA} = \int_0^1 y f_{(2:n)}(y)\,dy = \int_0^1 \left[n(n-1)\left(y^{n-1} - y^n\right)\right]dy$$

$$= \left[n(n-1)\left(\frac{1}{n}y^n - \frac{1}{n+1}y^{n+1}\right)\right]_0^1$$

$$= n(n-1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = n(n-1)\left[\frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)}\right] =$$

$$= \frac{n-1}{n+1} \underset{n=3}{=} \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ der Erlös der ZPA (ohne Reservationspreis) liegt höher als der Erlös mit optimalem Festpreis.

- der Erlös einer ZPA mit Reservationspreis liegt noch höher, nämlich bei

$$\frac{n-1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2} \quad \text{(siehe Vorlesung)}$$

Aufgabe 3: ZPA mit Eintrittsgeld

a) Sobald ein Spieler die Eintrittskosten bezahlt, sind diese sunk costs. Dann ist es schwach dominant, immer seine eigene Wertschätzung zu bieten.

→ das nehmen wir von nun an an.

b)

wichtig: Teilnehmer sehen ihre Wertschätzung und entscheiden, basierend darauf, ob sie teilnehmen oder nicht.

↳ wir suchen ein Gleichgewicht, in der Bieter teilnehmen, genau dann wenn ihre Wertschätzung über w liegt.

↳ wir finden jetzt w!

- ω ist eine Lösung zur folgenden Gleichung:

$$\underbrace{0}_{\text{Nutzen von Nicht-Teilnahme}} = \underbrace{-e + \left[P_r\left(\overset{\omega}{U}_{(1:n-1)} < \omega\right)\right](\omega - 0)}_{\text{Nutzen durch Teilnahme}}$$

Nutzen von Nicht-Teilnahme

Nutzen durch Teilnahme:

↳ Eintrittskosten e

↳ Teilnehmer mit Wertschätzung ω gewinnt genau dann wenn alle andern Teilnehmer eine Wertschätzung unter ω haben

→ dann zahlt er 0.

$$\Longleftrightarrow$$

$$0 = -e + [F(w)]^{n-1} \cdot w$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$e = w^n \Longleftrightarrow w^*(e) = e^{1/n}$$

c) Welches Eintrittsgeld maximiert den erwarteten Erlös?

$$R_n(e) = \underbrace{n\cdot(1-F(\omega))\cdot e}_{\text{Menge an Eintrittsgeld, die Auktionator erhält.}} + \underbrace{Pr(\tilde{v}_{(2:n)} \geq \omega)\cdot E[\tilde{v}_{(2:n)} \mid \tilde{v}_{(2:n)} \geq \omega]}_{\text{Erwarteter Erlös aus Auktion}}$$

erwarteter Erlös des Auktionators

Erwarteter Erlös aus Auktion:

↳ $\tilde{v}_{(2:n)} \geq \omega$ muss gelten, sonst ist Erlös aus Geboten 0.

↳ Erlös aus Auktion ist dann $E[\tilde{v}_{(2:n)} \mid \tilde{v}_{(2:n)} \geq \omega]$

$$=$$

$$n\left(1-F(w)\right)\cdot e + \Pr\left(v_{(2:n)} \geq w\right) \cdot \int_w^1 v \frac{f_{(2:n)}(v)}{\Pr\left(v_{(2:n)} \geq w\right)} dv$$

$$=$$

$$n(1-w)\cdot e + \int_w^1 v\, n(n-1) v^{n-2} (1-v)\, dv$$

$$=$$

$$\vdots$$

$$\frac{n-1}{n+1} + e - 2\frac{n}{n+1} e^{\frac{n+1}{n}}$$

$\rightarrow$ jetzt finden wir das erlösmaximierende e!

$$\rightarrow \max_e R_n(e) = \frac{n-1}{n+1} + e - 2\frac{n}{n+1} e^{\frac{n+1}{n}}$$

$$\frac{\partial R_n(e)}{\partial e} = 1 - 2 e^{\frac{n+1}{n} - 1} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{1/n} \Leftrightarrow e^* = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\rightarrow$ das setzen wir ein, um den Erlös im Optimum zu bestimmen.

$$R_n(e^x) = \frac{n-1}{n+1} + e^x - 2\frac{n}{n+1}(e^x)^{\frac{n+1}{n}}$$

$$= \frac{n-1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n\cdot\frac{n+1}{n}}$$

$$= \frac{n-1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{n-1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

→ das ist genau gleich dem Erlös der ZPA mit optimalem Reservationspreis

→ Grund: Die Allokationsregel ist gleich bei ZPA mit optimalem Reservationspreis und ZPA mit optimalem Eintrittsgeld.

Aufgabe 4

- Auktion mit Outside Option

↳ wenn Bieter die Auktion *nicht gewinnt*, kann er das Gut auch von einem anderen Anbieter zum Preis p_m kaufen

↳ Wichtig: Seine Zahlungsbereitschaft für dieses Gut und das Gut, das in der Auktion bereitgestellt wird, ist *gleich*.

↳ Implikation: Man will in der Auktion <u>niemals</u> mehr als p^m bezahlen

a) Was ist die schwach dominante Strategie?

↳ es ist schwach dominant, dann Gebot $\min\{v_i, p^m\}$ abzugeben.

Zahlungsbereitschaft $v_i \sim U[0,1]$

Begründung

- definiere $\hat{b}_{(1:n-1)}$ als das höchste der $N-1$ anderen Gebote.

- wenn $\hat{b}_{(1:n-1)} > p_m$

↳ es ist optimal, $b_i \leq p_m$ zu bieten →

so gewinnt man die Auktion <u>nicht</u>,

und kann daher das Gut zum Preis

p_m kaufen.

↳ wenn man die Auktion gewinnt (durch Gebot $b_i > \hat{b}_{(1:N-1)}$), so zahlt man $\hat{b}_{(1:N-1)} > p_m$ → keine profitable Abweichung.

- wenn $\hat{b}_{(1:N-1)} \leq p_m$

  ↳ Gebot $b_i = v_i$ optimal.

  ↳ $v_i > \hat{b}_{(1:N-1)}$ ⇒ bei Gebot $b_i = v_i$ erhält man Nutzen $v_i - \hat{b}_{(1:N-1)}$, sonst den Nutzen 0.

$\hookrightarrow v_i \leq \tilde{b}_{(1:n-1)}$: man will die Auktion nicht gewinnen $\Rightarrow$ Gebot $b_i = v_i$ optimal.

b) Erwarteter Erlös $\left(b_i(v_i) = \min\{v_i, p_m\} \right)$:

$$R_n(p_m) = P_r\left(\tilde{v}_{(2:n)} < p_m\right) \cdot E\left[\tilde{v}_{(2:n)} \mid \tilde{v}_{(2:n)} < p_m\right)$$

$$+ P_r\left(\tilde{v}_{(2:n)} \geq p_m\right) \cdot p_m$$

$$=$$

$$F_{(2:n)}(p_m) \cdot \int_0^{p_m} v \frac{f_{(2:n)}(v)}{F_{(2:n)}(p_m)} dv +$$

$$(1 - F_{(2:n)}(p_m)) \cdot p_m =$$

$$\int_0^{p_m} v f_{(2:n)}(v) dv + (1 - F_{(2:n)}(p_m)) \cdot p_m =$$

$$\int_0^{p_m} (n(n-1)v^{n-1} - n(n-1)v^n) dv + (1 - n p_m^{n-1} + (n-1)p_m^n) p_m$$

$$= \ldots = p_m - (p_m)^n + \frac{n-1}{n+1}(p_m)^{n+1}$$