Auktionen und Märkte

Das Revelationsprinzip

Groh / von Wangenheim

Universität Bonn, Wintersemester 2024/2025

Direkte Mechanismen

- In einem **'direkten Mechanismen'** wird jeder Spieler direkt nach seiner Wertschätzung gefragt.

  Wenn die Menge der möglichen Wertschätzungen bei jedem Spieler [0, 1] ist, gilt also

  $$B_i = [0, 1]$$

  Notation:

  - Gewählte Nachricht von Spieler i: $\hat{v}_i$
    (Spieler können lügen! D.h., sie können $\hat{v}_i \neq v_i$ wählen.)
  - Strategie von Spieler i: $\hat{v}_i(v_i)$

- Um einen direkten Mechanismus zu beschreiben, muss man also nur $q_i^M(\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_n)$ und $t_i^M(\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_n)$ festlegen.

Direkte Mechanismen + Wahrheit sagen

- Wir sind zudem nur an direkten Mechanismen interessiert, bei denen jeder im Gleichgewicht die Wahrheit sagt.

  D.h., bei denen

$$\sigma = (\hat{v}_1(v_1), \dots, \hat{v}_n(v_n)) = (v_1, \dots, v_n)$$

  ein BNGG ist.

- Performance eines solchen Gleichgewichts:

$$q_i(v_1, \dots, v_n) = q_i^M(\hat{v}_1(v_1), \dots, \hat{v}_n(v_n)) = q_i^M(v_1, \dots, v_n)$$

$$t_i(v_1, \dots, v_n) = t_i^M(\hat{v}_1(v_1), \dots, \hat{v}_n(v_n)) = t_i^M(v_1, \dots, v_n)$$

Direkte Mechanismen + Wahrheit sagen

- Allokationsregel und -performance sowie Zahlungsregel und -performance werden also durch die gleichen Funktionen beschrieben.

  Wir können daher das "M" bei der Beschreibung direkter Mechanismen weglassen.

- **Direkter Mehanismus:** $\{(q_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$

- Intuitiv gibt der Designer den Spielern eine Performance vor ('Das ist was ich mit eurer Information machen will.') und bittet die Spieler ihm ihre jeweilige Information mitzuteilen.

Indirekte versus direkte Mechanismen

Zusammenfassung:

(Indirekter) Mechanismus: $\{(B_i, q_i^M, t_i^M)\}_{i=1}^n$

Gleichgewicht: $\sigma = (b_1(v_1), \ldots, b_n(v_n))$

Performance: $q_i = q_i^M \circ \sigma$, $t_i = t_i^M \circ \sigma$

Direkter Mechanismus: $\{(q_i, t_i)\}_{i=1}^n$

Performance in einem GG, in dem jeder die Wahrheit sagt:

q_i, t_i ("Performance=Mechanismus")

Beispiel 1

- betrachte $n = 2$ und $\widetilde{v}_i \sim U[0, 1]$
- direkter Mechanismus:

$$q_1(\hat{v}_1, \hat{v}_2) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \hat{v}_1 > \hat{v}_2 \\ \frac{1}{2} & \text{wenn } \hat{v}_1 = \hat{v}_2 \\ 0 & \text{wenn } \hat{v}_1 < \hat{v}_2 \end{cases}$$

$$t_1(\hat{v}_1, \hat{v}_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}\hat{v}_1 & \text{wenn } \hat{v}_1 > \hat{v}_2 \\ \frac{1}{4}\hat{v}_1 & \text{wenn } \hat{v}_1 = \hat{v}_2 \\ 0 & \text{wenn } \hat{v}_1 < \hat{v}_2 \end{cases}$$

  $q_2(\hat{v}_1, \hat{v}_2)$ und $t_2(\hat{v}_1, \hat{v}_2)$ sind analog definiert

- **Behauptung:** Wahrheit sagen ist optimal, wenn der andere das auch tut.

Anreizverträglichkeit in Beispiel 1

Problem von Spieler 1 mit WS v_1, wenn $\hat{v}_2(v_2) = v_2$:

$$\max_{\hat{v}_1 \in [0,1]} \quad \mathbb{E}[q_1(\hat{v}_1, \tilde{v}_2)v_1 - t_1(\hat{v}_1, \tilde{v}_2)], \qquad \text{wobei}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[q_1(\hat{v}_1, \tilde{v}_2)v_1 - t_1(\hat{v}_1, \tilde{v}_2)] &= \int_0^1 [q_1(\hat{v}_1, v_2)v_1 - t_1(\hat{v}_1, v_2)] \underbrace{f_2(v_2)}_{=1} dv_2 \\
&\overset{*}{=} \int_0^{\hat{v}_1} [1 \cdot v_1 - \frac{1}{2}\hat{v}_1] dv_2 + \int_{\hat{v}_1}^1 [0 \cdot v_1 - 0] dv_2 \\
&= \hat{v}_1 (v_1 - \frac{1}{2}\hat{v}_1)
\end{aligned}$$

(*Spieler 1 gewinnt genau dann wenn $v_2 < \hat{v}_1$, in dem Fall zahlt er $\frac{\hat{v}_1}{2}$.)

BeO: $(v_1 - \frac{1}{2}\hat{v}_1) - \frac{1}{2}\hat{v}_1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \hat{v}_1 = v_1$

Wahrheit sagen ist optimal (BzO ist erfüllt)!

Beispiel 2

- betrachten Sie nun folgenden direkten Mechanismus:

$$q_1(\hat{v}_1, \hat{v}_2) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \hat{v}_1 > \hat{v}_2 \\ \frac{1}{2} & \text{wenn } \hat{v}_1 = \hat{v}_2 \\ 0 & \text{wenn } \hat{v}_1 < \hat{v}_2 \end{cases}$$

$$t_1(\hat{v}_1, \hat{v}_2) = \begin{cases} \hat{v}_2 & \text{wenn } \hat{v}_1 > \hat{v}_2 \\ \frac{1}{2}\hat{v}_2 & \text{wenn } \hat{v}_1 = \hat{v}_2 \\ 0 & \text{wenn } \hat{v}_1 < \hat{v}_2 \end{cases}$$

  $q_2(\hat{v}_1, \hat{v}_2)$ und $t_2(\hat{v}_1, \hat{v}_2)$ sind analog definiert

- **Behauptung:** Wahrheit sagen ist optimal, wenn der andere das auch tut.

Anreizverträglichkeit in Beispiel 2

Problem von Spieler 1 mit WS v_1, wenn $\hat{v}_2(v_2) = v_2$:

$$\max_{\hat{v}_1 \in [0,1]} \quad \mathbb{E}[q_1(\hat{v}_1, \tilde{v}_2)v_1 - t_1(\hat{v}_1, \tilde{v}_2)], \qquad \text{wobei}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[q_1(\hat{v}_1, \tilde{v}_2)v_1 - t_1(\hat{v}_1, \tilde{v}_2)] &= \int_0^1 [q_1(\hat{v}_1, v_2)v_1 - t_1(\hat{v}_1, v_2)] \underbrace{f_2(v_2)}_{=1} dv_2 \\
&\overset{*}{=} \int_0^{\hat{v}_1} [1 \cdot v_1 - v_2] dv_2 + \int_{\hat{v}_1}^1 [0 \cdot v_1 - 0] dv_2 \\
&= \hat{v}_1 (v_1 - \frac{1}{2}\hat{v}_1)
\end{aligned}$$

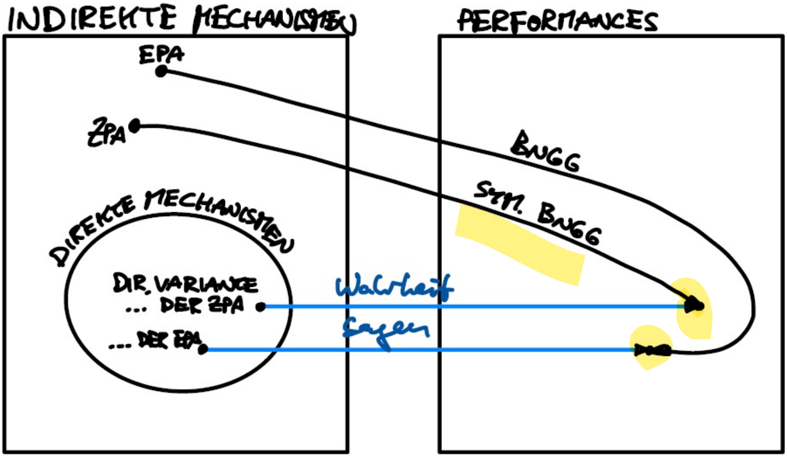
(*Spieler 1 gewinnt genau dann wenn $v_2 < \hat{v}_1$, in dem Fall zahlt er v_2.)

BeO: $(v_1 - \frac{1}{2}\hat{v}_1) - \frac{1}{2}\hat{v}_1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \hat{v}_1 = v_1$.)

Wahrheit sagen ist optimal (BzO ist erfüllt)!

Anmerkung zu den Beispielen

- Beispiel 1 und Beispiel 2 sind direkte Varianten von EPA und ZPA. D.h., die beiden direkten Mechanismen besitzen BNGG in denen jeder die Wahrheit sagt und durch die die gleiche Performance wie bei EPA und ZPA implementiert wird.
- Der Mechanismus kann interpretiert werden als: "Sag uns deine wahre Wertschätzung und wir geben dir die Performance die du bei optimalem Bieten im Gleichgewicht der EPA/ZPA bekommen würdest."
- Solche direkten Varianten kann man grundsätzlich für jedes Gleichgewicht in jedem Aktionsformat definieren.



credit: Frank Rosar

Revelationsprinzip

Satz: Revelationsprinzip

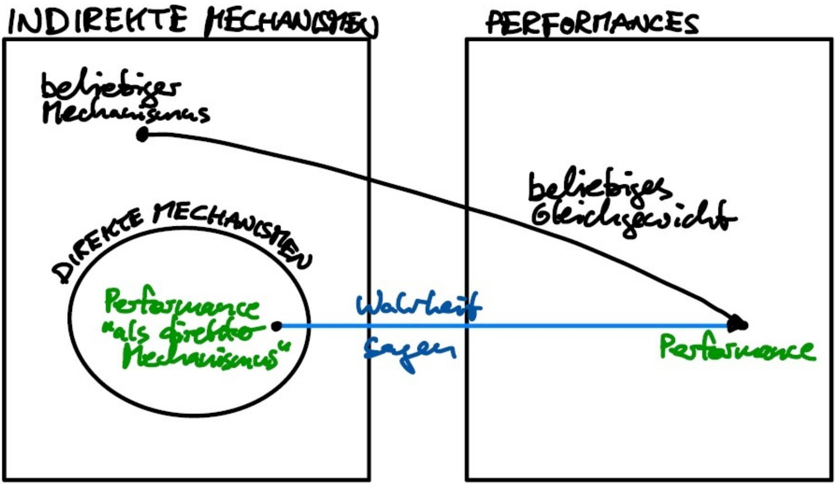
Sei $\{(B_i, q_i^M, t_i^M)\}_{i=1}^n$ ein beliebiger Mechanismus, G das durch den Mechanismus definierte Spiel, $\sigma = (b_1(v_1), \ldots, b_n(v_n))$ ein beliebiges BNGG von G und

$$\begin{aligned} q_i(v_1, \ldots, v_n) &\equiv q_i^M(b_1(v_1), \ldots, b_n(v_n)) \\ t_i(v_1, \ldots, v_n) &\equiv t_i^M(b_1(v_1), \ldots, b_n(v_n)) \end{aligned}$$

die Performance von GG σ in Spiel G.

Dann definiert der direkte Mechanismus $\{(q_i, t_i)\}_{i=1}^n$ ein Spiel G', das ein BNGG $\sigma' = (v_1, \ldots, v_n)$ besitzt und somit die gleiche Performance wie BNGG σ in Spiel G implementiert.

Revelationsprinzip (graphisch)



credit: Frank Rosar

(Widerspruchs-)Beweis.

Nimm an $(b_1(v_1), \ldots, b_n(v_n))$ ist ein BNGG von G, aber $(v_1, \ldots, v_n)$ ist kein BNGG von G'.

Es gibt dann einen Spieler i (oBdA: Spieler 1) mit einer WS v_1, der es in G' strikt vorzieht zu lügen und $\hat{v}_1 \neq v_1$ zu sagen, wenn er davon ausgeht, dass die anderen die Wahrheit sagen.

Wenn er lügt, ist seine Gewinnwahrscheinlichkeit

$$q_1(\hat{v}_1, v_2, \ldots, v_n) = q_1^M(b_1(\hat{v}_1), b_2(v_2), \ldots, b_n(v_n))$$

statt

$$q_1(v_1, v_2, \ldots, v_n) = q_1^M(b_1(v_1), b_2(v_2), \ldots, b_n(v_n))$$

und ...

(Widerspruchs-)Beweis (Fortsetzung).

…seine Zahlung ist

$$t_1(\hat{v}_1, v_2, \ldots, v_n) = t_1^M(b_1(\hat{v}_1), b_2(v_2), \ldots, b_n(v_n))$$

statt

$$t_1(v_1, v_2, \ldots, v_n) = t_1^M(b_1(v_1), b_2(v_2), \ldots, b_n(v_n)).$$

D.h., in G' $\hat{v}_1$ statt v_1 zu sagen ist genau wie in G $b_1 = b_1(\hat{v}_1)$ statt $b_1 = b_1(v_1)$ zu sagen.

Wenn $(b_1(v_1), \ldots, b_n(v_n))$ ein BNGG von G ist, dann gibt $b_1(v_1)$ unter G einen (schwach) höheren erwarteten Nutzen als $b_1(\hat{v}_1)$.

Also gibt v_1 sagen unter G' einen (schwach) höheren Erwartungsnutzen als $\hat{v}_1$ sagen.

Also kann lügen in G' nicht strikt optimal sein. Widerspruch!

Intuition / Interpretation

- Man kann sich den direkten Mechanismus vorstellen wie eine Maschine, der jeder Spieler seine Wertschätzung verrät. Die Maschine spielt dann optimal für den Spieler die Gleichgewichtsstrategie im entsprechenden Auktionsformat.

- Da die Maschine für jede Wertschätzung die (optimale) Gleichgewichtsstrategie spielt, ist es optimal der Maschine die echte Wertschätzung zu verraten (sonst würde die Maschine die beste Strategie für eine andere Wertschätzung spielen).