Auktionen und Märkte, WS 2022/23
JProf. Dr. Jonas von Wangenheim
jwangenheim@uni-bonn.de

Übungsblatt 2: Statistische Grundlagen

Aufgabe 0: Werte aus der Vorlesung Gegeben seien 5 bzgl. der Gleichverteilung auf $[0, 1]$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen $\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n$. Rechnen Sie die in der Vorlesung ermittelten Werte für unten stehende Ausdrücke nach:

$$\mathbb{E}[\tilde{x}_i] = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{E}[\tilde{x}_{(1:5)}] = \frac{5}{6}, \qquad \mathbb{E}[\tilde{x}_{(2:5)}] = \frac{2}{3},$$
$$\mathbb{E}\left[\frac{4}{5}\tilde{x}_{(1:5)}\right] = \frac{2}{3}, \qquad \mathbb{E}\left[\tilde{x}_i | \tilde{x}_i \geq \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4}$$

Aufgabe 1: Ordnungsstatistiken. Seien $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \ldots, \tilde{v}_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Ausprägungen im Intervall $[0, 1]$, Verteilungsfunktion F und Dichtefunktion f. (Die Dichtefunktion ist wie immer stetig.) $\tilde{v}_{(k:n)}$ bezeichne die k-te Ordnungsstatistik der n Zufallsvariablen.

Leiten Sie die Verteilungsfunktionen und Dichtefunktionen der niedrigsten und zweitniedrigsten Ordnungsstatistiken her, $F_{(n:n)}$, $f_{(n:n)}$, $F_{(n-1:n)}$, $f_{(n-1:n)}$!

ersten beiden sollten richtig sein

did this but check if it's correct

andere nochmal checken

Aufgabe 2: Ordnungsstatistiken und Erwartungswerte. Es gebe $n = 3$ Bieter und ein unteilbares Objekt. Die Wertschätzungen der Bieter $i = 1, 2, 3$ seien unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen $\tilde{v}_i$ mit Ausprägungen im Intervall $[0, 1]$, Verteilungsfunktion F und Dichtefunktion f. Bezeichne $\tilde{v}_{(k:3)}$ die k-te Ordnungsstatistik der Wertschätzungen.

a) Geben Sie an, wie die Verteilungsfunktionen $F_{(1:3)}$, $F_{(2:3)}$, $F_{(3:3)}$ der ersten drei Ordnungsstatistken und deren Dichtefunktionen $f_{(1:3)}$, $f_{(2:3)}$, $f_{(3:3)}$ aussehen!

Gehen Sie in den restlichen Aufgabenteilen von $F(v) = v^2$ aus!

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der ersten und zweiten Ordnungsstatistik!

c) Bestimmen Sie $\text{Prob}\{\tilde{v}_{(2:3)} \geq \frac{1}{2}\}$ und $\mathbb{E}[\tilde{v}_{(2:3)}|\tilde{v}_{(2:3)} \geq \frac{1}{2}]$!

[Hinweis: Schreiben Sie den Erwartungswert als Integral und berechnen Sie dieses! Der sich daraus ergebende Ausdruck ist nicht sonderlich "schön". Sie müssen ihn nicht vereinfachen!]

Aufgabe 3: Geordnete Vergleiche Zwei Schachteams mit je 3 Mitgliedern spielen gegeneinander. Die Spielstärke eines Spielers sei eine Zahl zwischen 0 und 1. In Team 1 sind die Spielstärken $\tilde{x}$ unabhängig und identisch verteilt bzgl der Gleichverteilung (Verteilungsfunktion $F(x) = x$). In Team 2 sind die Spielstärken $\tilde{y}$ unabhängig und identisch mit Verteilungsfunktion $G(y) = y^2$ verteilt.

a) Welches Team ist voraussichtlich "stärker"? Warum?

b) Nehmen Sie an, dass immer der Spieler mit der höheren Spielstärke gewinnt. Die Spieler der Teams werden zufällig zu Duellen gematcht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler aus Team 1 gegen einen Spieler aus Team 2 gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Team 1 alle drei Spiele gewinnt? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass Team 2 alle drei Spiele gewinnt?

c) Die Reihenfolge der Spielstärke sei in jedem Team bekannt. In einem neuen Spielmodus spielen nun jeweils die beiden stärksten, zweitstärksten und schwächsten Spieler gegeneinander. Berechnen Sie für jedes dieser Duelle die entsprechenden Gewinnwahrscheinlichkeiten.

d) Sind die drei Spielergebnisse unter c) stochastisch unabhängig? Begründen Sie! Ohne zu rechnen, wie hoch schätzen Sie nun die Wahrscheinlichkeit, dass Team 2 alle Spiele gewinnt?

positivecorrelation, also höhere wahr dass 2 alle gewinnt