Auktionen und Märkte – Übung 7 (Lösungsskizze)

Anmerkung: Die vorliegende Lösungsskizze wurde gewissenhaft erstellt. Es besteht jedoch keine Garantie auf vollständige Richtigkeit.

Aufgabe 1: VCG-Mechanismen

a) $n \geq 3$ Käufer, 1 Verkäufer mit Wertschätzung 0

· mögliche Entscheidungen:

$$\left\{ (m_1, \dots, m_n) : \underbrace{m_i \in \{0, 1, \dots, m\}}_{\text{jeder Spieler kann nicht mehr als } m \text{ Einheiten erhalten}} \ \forall i, \ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i \leq m}_{\text{Insgesamt können die Spieler nicht mehr als } m \text{ Einheiten erhalten}} \right\}$$

wie viele Einheiten erhält Spieler 1 $= m_1$

wie viele Einheiten erhält Spieler n $= m_n$

- private Information θ_i
- direkter Nutzen aus Entscheidung $k = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ für Spieler i:

$$v_i(k, \theta_i) = \begin{cases} \theta_i & \text{wenn } m_i \geq 1 \\ 0 & \text{wenn } m_i = 0 \end{cases}$$

- effiziente Entscheidungsregel
  ↳ alloziere an jeden Bieter maximal ein Objekt.
  ↳ alloziere die m Objekte an die m

Bieter, die die höchsten Wertschätzungen haben.

- wir arbeiten zur formalen Darstellung wieder mit Ordnungsstatistiken: $\underline{\underline{\theta_{k:n}}}$ ist die k-höchste Wertschätzung der n verschiedenen Bieter.

$\Rightarrow$ Somit ist die effiziente Entscheidungsregel:

$$k^*(\theta_1, \dots, \theta_n) = \left(m_1^*(\theta_1, \dots, \theta_n), m_2^*(\theta_1, \dots, \theta_n), \dots, m_n^*(\theta_1, \dots, \theta_n)\right),$$

mit $m_i(\theta_1, \dots, \theta_n) = \begin{cases} 1 & \theta_i \geq \theta_{(m:n)} \\ 0 & \theta_i < \theta_{(m:n)} \end{cases}$

· im VCG-Mechanismus gilt:

↳ Entscheidungsregel $k(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n) = k^*(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n)$

↳ Zahlungsregel $t_i(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n) = \sum_{j \neq i} v_j(k^*(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n), \hat{\theta}_j) + h_i(\hat{\theta}_{-i})$

$$= \begin{cases} \hat{\theta}_{(1:n)} + \dots + \hat{\theta}_{(m:n)} + h_i(\hat{\theta}_{-i}) & \text{wenn } \hat{\theta}_i < \hat{\theta}_{(m:n)} \\ \underbrace{\hat{\theta}_{(1:n)} + \dots + \hat{\theta}_{(m:n)} - \hat{\theta}_i}_{\text{Summe der Ankündigungen der anderen Spieler, die das Gut erhalten}} + h_i(\hat{\theta}_{-i}) & \text{wenn } \hat{\theta}_i \geq \hat{\theta}_{(m:n)} \end{cases}$$

höchste von n Ankündigungen

b) Pivot-Mechanism

- effizient Entscheidungsregel, wenn man i ignoriert.

$$\hat{k}_i(\hat{\theta}_{-i}) = \left(\hat{m}_1(\hat{\theta}_{-i}), \dots, \hat{m}_{i-1}(\hat{\theta}_{-i}), 0, \hat{m}_{i+1}(\hat{\theta}_{-i}), \dots, \hat{m}_n(\hat{\theta}_{-i})\right),$$

i erhält das Gut nicht

mit $\hat{m}_j(\hat{\theta}_{-i}) = \begin{cases} 1 & \hat{\theta}_j \geq \hat{\theta}_{(m:n-1)} \\ 0 & \hat{\theta}_j < \hat{\theta}_{(m:n-1)} \end{cases}$

m-höchste von $n-1$ Ankündigungen

· daraus folgt:

$$h_i(\hat{\theta}_{-i}) = -\sum_{j \neq i} v_j\left(\hat{l}_i(\hat{\theta}_1,\dots,\hat{\theta}_n),\hat{\theta}_j\right) = -\underbrace{\sum_{k=1}^{m} \hat{\theta}_{(k:n-1)}}_{\text{Summe der } m \text{ höchsten Ankündigungen}}$$

· Somit ist die Zahlungsregel:

$$t_i(\hat{\theta}_1,\dots,\hat{\theta}_n) = \sum_{j \neq i} v_j\left(k_i^*(\hat{\theta}_1,\dots,\hat{\theta}_n),\hat{\theta}_j\right) - \sum_{j \neq i} v_j\left(\hat{l}_i(\hat{\theta}_1,\dots,\hat{\theta}_n),\hat{\theta}_j\right)$$

$$=$$

$$
= \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \hat{\theta}_{(k:n)} - \sum_{k=1}^{m} \hat{\theta}_{(k:n-1)} & , \quad m_i^*(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n) = 0 \\ \sum_{k=1}^{m} \hat{\theta}_{(k:n)} - \hat{\theta}_i - \sum_{k=1}^{m} \hat{\theta}_{(k:n-1)} & , \quad m_i^*(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n) = 1 \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} 0 & , \quad m_i^*(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n) = 0 \\ - \hat{\theta}_{(m+1:n)} & , \quad m_i^*(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n) = 1 \end{cases}
$$

$m+1$ höchste Wertschätzung, also Wertschätzung des Käufers, der das Gut anstelle von Käufer i erhalten würde.

Aufgabe 2: a) Pivot-Mechanismus für öffentliches Gut

- das öffentliche Gut ist binär, d.h. $k \in \{0,1\}$, und die Kosten der Bereitstellung sind $C = 9$.

- gleichmäßige Kostenteilung impliziert:

↳ $v_A = \theta_A - \frac{C}{3} = 1 - 9/3 = -2$

↳ $v_B = \theta_B - \frac{C}{3} = 4 - 3 = 1$ $\Rightarrow$ $v_A = -2$, $v_B = 1$, $v_C = 3$

↳ $v_C = \theta_C - \frac{C}{3} = 3$

- es gilt: $$u_i(k, \theta_i) = \begin{cases} \theta_i - c/3 & , k = 1 \\ 0 & , k = 0 \end{cases}$$

- Somit ist es effizient, das Gut anzuschaffen,

weil

Gut wird angeschafft

$$\sum_{i=1}^{3} u_i(1, \theta_i) = \theta_A + \theta_B + \theta_C - c = 2 > 0,$$

und

$$\sum_{i=1}^{3} u_i(0, \theta_i) = 0$$

Gut wird nicht angeschafft.

· Pivot - Mechanismus

↳ die Ankündigung von A ist in jener Situation nicht entscheidend. Da $u_B + u_C = 4 > 0$ und das öffentlich Gut in jedem Fall angeschafft → somit ist A nicht pivotal, und sein Transfer ist 0.

↳ die Ankündigung von B ist in jener Situation nicht entscheidend. Da $u_A + u_C = 1 > 0$, und das Gut in jedem Fall angeschafft. Somit ist es nicht pivotal und sein Transfer ist 0.

$\hookrightarrow$ nur Spieler C ist pivotal. Er zahlt also

$$\underbrace{(v_A + v_B)}_{\substack{\text{Summe von } v_A(k,\theta_A) \\ \text{und } v_B(k,\theta_B)\text{, wenn} \\ \text{C berücksichtigt wird} \\ \Rightarrow k=1}} - \underbrace{0}_{\substack{\text{Summe von } v_A(k,\theta_A) \\ \text{und } v_B(k,\theta_B)\text{, wenn} \\ \text{C ignoriert wird.} \\ \Rightarrow k=0}} = -2+1 = \underline{\underline{-1}}$$

b) Anreizverträglichkeit

- aus Vorlesung wissen wir, dass Wahrheit sagen optimal ist. Wir zeigen dies jetzt konkret am Beispiel:

- Spieler A:
  - ↳ Beachten Sie: $U_B + U_C = 4$
  - ↳ Ankündigung $\hat{v}_A \in [-4, \infty)$ ändert nichts. Gut wird immer noch bereitgestellt, d.h. A ist <u>nicht pivotal</u> und zahlt nichts.

↳ Ankündigung $\hat{v}_A < -4$ bedeutet, dass Gut nicht bereit gestellt wird. Dann gilt:

$$t_A = \underbrace{\sum_{j=1}^{2} (0)}_{\substack{A \text{ wird berücksichtigt,} \\ \text{mit } \hat{\theta}_A = -4 \Rightarrow \\ k = 0}} - \underbrace{\sum_{j=1}^{2} (v_B + v_C)}_{\substack{A \text{ wird nicht} \\ \text{berücksichtigt} \Rightarrow \\ k = 1}} = \underline{-4}$$

↳ Somit ist der Nutzen bei solchen Abweichungen $-4 \Rightarrow$ nicht profitabel, da Nutzen im Gleichgewicht gleich $v_A + 0 = -2$ ist.

analoge Argumente für Spieler B.

Spieler C:

↳ $v_A + v_B = -1$

↳ im Gleichgewicht erhält Spieler C den Nutzen $3 - 1 = 2$.

↳ Bei Abweichung zu $\hat{v}_A < -1$ wird Gut nicht mehr gebaut. C ist dann nicht pivotal und erhält keinen Transfer $\Rightarrow$ Nutzen von Abweichung ist 0 $\Rightarrow$ nicht profitabel.

c) Kostenteilung: Spieler C zahlt die ganzen Kosten

$$v_A = \theta_A = 1 \Rightarrow v_A(l, \theta_A) = \begin{cases} 1 & l=1 \\ 0 & l=0 \end{cases}$$

$$v_B = \theta_B = 4 \Rightarrow v_B(l, \theta_B) = \begin{cases} 4 & l=1 \\ 0 & l=0 \end{cases}$$

$$v_C = \theta_C - C = -3 \Rightarrow v_C(l, \theta_C) = \begin{cases} -3 & l=1 \\ 0 & l=0 \end{cases}$$

- es ist immer noch effizient, das Gut anzuschaffen, weil $\theta_A + \theta_B + \theta_C > C$.

- Spieler A ist nicht pivotal, weil $v_B + v_C = 1 > 0$
  → Somit ist $t_A = 0$.
- Spieler C ist nicht pivotal, weil $v_A + v_B = 5$
  → Somit ist $t_C = 0$.
- Spieler B ist pivotal, weil $v_A + v_B + v_C = 2 > 0$, und $v_A + v_C = -2 < 0$ (Gut wird mit B bereitgestellt, aber nicht ohne Spieler B). Somit ist $t_B = (v_A + v_C) - 0 = \underline{-2}$.

d) Setzen wir C_A, C_B, und C_C als die individuellen Kosten mit $C_A + C_B + C_C = C$.

- $U_A = G_A - C_A$, $U_B = G_B - C_B$, $U_C = G_C - C_C$.

- Effiziente Regel: Es wird gebaut, genau dann wenn $U_A + U_B + U_C > 0$, d.h.

$$G_A + G_B + G_C > \underbrace{C_A + C_B + C_C}_{= C},$$

unabhängig von Kostenteilung