

Auktionen und Märkte -

Übung 4 (Lösungsskizze)

Anmerkung: Die vorliegende Lösungsskizze wurde gewissenhaft erstellt. Es besteht jedoch keine Garantie auf Vollständige Richtigkeit.

Aufgabe 1: Erstpreisauction im SIRU-Modell

- n Bieter mit Wertschätzungen $v_i \sim U[0,1]$.
- wir leiten das symmetrische GG der Erstpreisauction her.
- Strategie
 - ↳ wir schauen uns Situationen an, in dem die Bietfunktion aller Bieter eine linear Funktion $b(v_i) = \alpha \cdot v_i$ ist.

- ↳ Wichtig: $\alpha > 0$ ist eine Konstante.
- ↳ Wie müssen wir α setzen, damit wir ein Gleichgewicht haben? → Ziel: Finden dieses α !

Rechnungen

- betrachten der Bieter i und nehmen an, dass alle anderen Bieter die Strategie $b(u_j) = \alpha \cdot u_j$ spielen.

dann ist der Erwartungsnutzen von Bieter i, wenn seine Wertschätzung v_i und sein Gebot b_i ist, gegeben durch:

$$U_i(b_i, v_i) = \left[\Pr(b_i > \tilde{v}_{(1:n-1)}) \right] \cdot (v_i - b_i)$$

$$= \left[\Pr(b_i > \alpha \cdot \tilde{v}_{(1:n-1)}) \right] \cdot (v_i - b_i)$$

*diese
Utilifunktionsfunktion
ennen wir*

$$= \left[\Pr(v_{(1:n-1)} < \frac{b_i}{\alpha}) \right] \cdot (v_i - b_i)$$

$$= \left[\Pr(v_i < \frac{b_i}{\alpha}) \right]^{n-1} \cdot (v_i - b_i) =$$

$$U_i(b_i, v_i) = \left(\frac{b_i}{\alpha}\right)^{n-1} (v_i - b_i)$$

→ wir maximieren das durch Wahl von b_i ,

gegeben v_i

$$\frac{\partial U_i(b_i, v_i)}{\partial b_i} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} (n-1) \cdot (b_i)^{n-2} \cdot (v_i - b_i) + \left(\frac{b_i}{\alpha}\right)^{n-1} (-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (n-1) (b_i)^{n-2} (v_i - b_i) - (b_i)^{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (b_i)^{n-2} \left[(n-1) (v_i - b_i) - b_i \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{=0}$

$$\Leftrightarrow (n-1)v_i - nb_i = 0 \Leftrightarrow b_i^*(v_i) = \frac{n-1}{n} \cdot v_i$$

↑

$$b_i = 0$$

kann nicht
 optimal sein

$$\Rightarrow b_i(v_i) = \frac{n-1}{n} \cdot v_i \text{ ist optimale Antwort}$$

auf jede linear Strategie der anderen

$$\Rightarrow b_i^*(v_i) = \frac{n-1}{n} \cdot v_i \text{ ist symmetrisches BNE.}$$

Aufgabe 2

- Erstpreisauction mit Reservationspreis \underline{r} .

a)

• wenn $U_i < \underline{r} \Rightarrow$ es ist optimal, nicht an der Auction teilzunehmen

• wenn $U_i \geq \underline{r} \Rightarrow$ es ist optimal, teilzunehmen.

\Rightarrow Bieter mit $U_i = \underline{r}$ ist genau indifferent zwischen Teilnahme und Nicht-Teilnahme

b) Horizont des Gleichgewichts

- im Gleichgewicht sind die Strategien nicht linear \Rightarrow Horizont aus Auf. 1 funktioniert nicht.
- wir suchen ein RG, in dem alle Beter die Strategie $b_i(j) = b(j)$ spielen, und:
 $\hookrightarrow b(j)$ ist monoton wachsend, wenn $U \geq S$, ist, und $\underline{b(r)} = r$ gilt.

der Erwartungswerten von Bieter i bei Wett -
Schätzung v_i und Gebot b_i ist:

$$U_i(b_i, v_i) = \left[\Pr(b_i > b(v_j)) \right]^{n-1} \cdot (v_i - b_i)$$

Inverse
Funktion \rightarrow
in Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} &= \left[\Pr(v_j \leq b^{-1}(b_i)) \right]^{n-1} \cdot (v_i - b_i) \\ &= \left[b^{-1}(b_i) \right]^{n-1} \cdot (v_i - b_i) \end{aligned}$$

→ Optimaler Abst.: Bedingung zur Optimalität

$$\frac{\partial u_i}{\partial b_i} = (n-1) \left[b^{-1}(b_i) \right]^{n-2} \cdot \frac{\partial b^{-1}(b_i)}{\partial b_i} (v_i - b_i) -$$

$$\left[b^{-1}(b_i) \right]^{n-1} (-1) = 0$$

→ hier setzen wir nun die Bieffunktion $b_i = b(v_i)$ ein:

$$\left[b^{-1}(b(v_i)) \right]^{n-2} \cdot \frac{\partial b^{-1}(b(v_i))}{\partial b_i} \cdot (v_i - b(v_i)) -$$

$$\left[b^{-1}(b(v_i)) \right]^{n-1} = 0$$

- Nur wenden wir zwei Tricks an:
 - ↳ es gilt immer (Inverse Function Theorem), dass
$$\frac{\partial b^{-1}(b(u_i))}{\partial b_i} = \frac{1}{\frac{\partial b_i}{\partial u_i}}$$
- ↳ es gilt: $b^{-1}(b(u_i)) = u_i$
- Dieser Ansatz erlaubt uns zu beschreiben, wie $b(u_i)$ im Gleichgewicht aussehen muss
 - ↳ sie muss $b(u_i)$ sein, damit $b_i = b(u_i)$ für i optimal ist (für jedes u_i), wenn alle anderen die Strategien $b(u_j)$ spielen?

$$(n-1) \cdot \underbrace{(v_i)^{n-2}}_{\text{Trick 2:}} \left[\frac{1}{\partial b / \partial v_i} \right] (v_i - b(v_i)) - (v_i)^{n-1} = 0$$

Trick 2:

$$b^{-1}(b(v_i))$$

Trick 1:

$$\frac{\partial b^{-1}(b(v_i))}{\partial b_i} = \frac{1}{\frac{\partial b}{\partial v_i}}$$

\Leftrightarrow

$$(n-1) (v_i)^{n-2} (v_i - b(v_i)) = \frac{\partial b}{\partial v_i} \cdot (v_i)^{n-1}$$

\Leftrightarrow

$$(n-1) (v_i)^{n-1} = (n-1) (v_i)^{n-2} b(v_i) + \frac{\partial b}{\partial v_i} (v_i)^{n-1}$$

• das ist eine Differentialgleichung.

↳ wir lösen diese durch Integration auf beiden Seiten.

gilt v_i

$$(n-1)(v_i)^{n-1} = b(v_i)(n-1)(v_i)^{n-2} + \frac{\partial b}{\partial v_i}(v_i)^{n-1}$$

(\Rightarrow)

$$\int_r^{v_i} (n-1)(v)^{n-1} dv = \int_r^{v_i} \left[b(v)(n-1)(v)^{n-2} + \frac{\partial b}{\partial v}(v)^{n-1} \right] dv$$

Trick 3: Man beachte das Folgende:

$$\frac{\partial [b(v) \cdot (v)^{n-1}]}{\partial v} = b(v) \cdot (n-1)(v)^{n-2} + \frac{\partial b}{\partial v}(v)^{n-1}$$

\Leftrightarrow

$$\int_r^{v_i} (n-1)(v)^{n-1} dv = \int_r^{v_i} \left[\frac{\partial [b(v) \cdot (v)^{n-1}]}{\partial v} \right] dv$$

\Leftrightarrow

$$\left[\frac{n-1}{n} (v)^n \right]_r^{v_i} = \left[b(v) \cdot (v)^{n-1} \right]_r^{v_i}$$

\Leftrightarrow

$$\frac{n-1}{n} \left[(v_i)^n - (r)^n \right] = b(v_i) (v_i)^{n-1} - \underbrace{b(r)}_{=r} (r)^{n-1}$$

\Leftrightarrow

$$\frac{n-1}{n} \cdot (v_i)^n - \frac{n-1}{n} \cdot (r)^n = b(v_i) \cdot (v_i)^{n-1} - r \cdot (r)^{n-1}$$

\Leftrightarrow

$$b(v_i) \cdot (v_i)^{n-1} = \frac{n-1}{n} \cdot (v_i)^n + r^n \left[1 - \frac{n-1}{n} \right] \\ = Y_n$$

\Leftrightarrow

$$b(v_i) = \frac{n-1}{n} \cdot v_i + \frac{r^n}{(v_i)^{n-1}} \cdot \frac{1}{n}$$

Effizienz

↳ das AU ist nicht effizient.

↳ wenn alle Wertschätzungen unterhalb von
r liegen, erhält niemand das Gut,
obwohl die Bieter das Gut mehr
wertschätzen als der Auktionator, was
nicht effizient ist.

c) Erwartung für Erlös des Verkäufes

$$R_n^E(r) = \Pr(\tilde{v}_{(1:n)} < r) \cdot 0$$

$$+ \Pr(\tilde{v}_{(1:n)} \geq r) E[b(\tilde{v}_{(1:n)}) \mid \tilde{v}_{(1:n)} \geq r]$$

$$= \int_r^1 b(v) \cdot f_{(1:n)}(v) dv$$

$$= \int_r^1 b(v) \cdot [n \cdot v^{n-1}] dv$$

= ...

$$= \frac{n-1}{n+1} + r^n - 2 \frac{n}{n+1} \cdot r^{n+1}$$

Wichtig: Das ist der gleiche Erlös wie
in der ZPA mit Reservationspreis r .

↳ Optimaler Reservationspreis ist $r^* = \frac{1}{2}$.

↳ Später für das Revenue Equivalence
Prinzip (kommt in der Vorlesung).

Aufgabe 3

a) Symmetrisches GG der All-Pay Auctions

→ wir finden die Bietsfunktion $b(\cdot)$, die ein symmetrisches GG darstellt

→ wie zuvor: Wir nehmen an, dass alle

Spieler $j \neq i$ die Strategie $b(\cdot)$ folgen.

Dann lösen wir das Maximierungsproblem

von Spieler i :

$$\max_{b_i} \left[\Pr(b(v_j) < b_i) \right]^{n-1} \cdot v_i - b_i$$

man zahlt sehr Glut
immer

=

$$\max_{b_i} \underbrace{\left[b^{-1}(b_i) \right]^{n-1}}_{= u_i(v_i, b_i)} \cdot v_i - b_i$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial b_i} = (n-1) \left[b^{-1}(b_i) \right]^{n-2} \frac{\partial b^{-1}(b_i)}{\partial b_i} \cdot v_i - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

\rightarrow wir setzen $b_i = b(v_i)$ ein, um $b(v)$

zu beschreiben:

$$(n-1) \left[b^{-1}(b(v_i)) \right]^{n-2} \frac{\partial b^{-1}(b(v_i))}{\partial b_i} \cdot v_i - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

\iff

$$(n-1) [v_i]^{n-2} \frac{1}{\frac{\partial b}{\partial v_i}} \cdot v_i - 1 = 0$$

\iff

$$(n-1)(v_i)^{n-1} = \underline{\frac{\partial b}{\partial v_i}} \Rightarrow b(v_i) = \underline{\frac{n-1}{n} v_i^n}$$

b)

Erwartungsnutzen von Bieter i (Gleichgewicht mit $b(v)$) :

$$U(b_i, v_i) = \left[\Pr(b(v_j) < b_i) \right]^{n-1} \cdot v_i - b_i$$

$$+ \left\{ E \left(\sum_{j \neq i} b(v_j) \right) + b_i \right\}$$

Zusatznutzen durch
Gesamterlös

$$+ \beta \cdot b_i \quad \text{Zusatznutzen durch "warm glow"}$$



$$U(b_i, v_i) = \underbrace{\left[\Pr(b(v_j) < b_i) \right]^{n-1}}_{= b^{-1}(v_i)} \cdot v_i - (1-\gamma-\beta) \cdot b_i + \gamma \sum_{j \neq i} E(b(v_j))$$

\Leftrightarrow

$$\frac{\partial U}{\partial b_i} = (n-1) [b^{-1}(b_i)]^{n-2} \frac{\partial b^{-1}(b_i)}{\partial b_i} - (1-\gamma-\beta) \stackrel{!}{=} 0$$

\Leftrightarrow

\vdots

$$b(\cup) = \frac{1}{1-\gamma-\beta} \cdot \frac{n-1}{n}$$

$\rightarrow \gamma \uparrow$ oder $\beta \uparrow \Rightarrow$ Gew an den Aufionatur

Zu bezahlen kostet weniger Nutzen \Rightarrow

optimale Güte steigen.