Auktionen und Märkte, WS 24/25
JProf. Dr. Jonas von Wangenheim, Dr. Carl-Christian Groh
jwangenheim@uni-bonn.de, cgroh@uni-bonn.de

Übungsblatt 6: Erlösmaximierender Mechanismus

Aufgabe 0: Partielle Integration. Zeigen Sie mit Hilfe von partieller Integration, dass folgende Umformung von Slide 10 aus der Vorlesung über Erlösmaximierung korrekt ist:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left[\overline{q}_i(v_i) v_i - \int_0^{v_i} \overline{q}_i(x) dx \right] f_i(v_i) dv_i = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \overline{q}_i(v_i) \left[v_i - \frac{1 - F_i(v_i)}{f_i(v_i)} \right] f_i(v_i) dv_i$$

Aufgabe 1: Optimaler Mechanismus. Betrachten Sie das SIPV-Modell mit n Bietern und gleichverteilten Wertschätzungen $\tilde{v}_i \sim U[0,1]$. Der Verkäufer ist risikoneutral und seine Wertschätzung sei v_0.

(a) Geben Sie für den Fall, in dem die Wertschätzung des Verkäufers $v_0 = 0$ ist, den direkten Mechanismus an, der den erwarteten Profit des Verkäufers maximiert!

[Hinweis: Es reicht hier aus die Lösung anzugeben.]

(b) Bieter mit welcher Wertschätzung haben in diesem Mechanismus einen erwarteten Profit von Null?

(c) Welche Auktionsformate kennen Sie, die den erwarteten Profit des Verkäufers maximieren?

(d) Betrachten Sie nun den Fall $v_0 > 0$. Wie muss der optimale Mechanismus modifiziert werden? Welche Auktionsformate maximieren den erwarteten Profit des Verkäufers?

(e) Nehmen Sie nun an, dass der Verkäufer gezwungen ist das Objekt auf jeden Fall zu verkaufen. Welche Auktionsformate maximieren unter dieser Nebenbedingung den erwarteten Profit des Verkäufers?

Aufgabe 2: Sequentiell eintreffende Bieter. Betrachten Sie das SIPV-Modell mit 3 Bietern und gleichverteilten Wertschätzungen $\tilde{v}_i \sim U[0,1]$. Die drei Bieter treffen nacheinander auf den Verkäufer. Der Verkäufer macht zunächst dem ersten Bieter ein Take-it-or-leave-it Angebot p_1. Wenn der erste Bieter das Angebot annimmt, verkauft ihm der Verkäufer das Objekt zum angebotenen Preis p_1. Lehnt er ab, hat er später keine Möglichkeit mehr das Objekt zu kaufen. Stattdessen macht der Verkäufer dem zweiten Bieter ein Take-it-or-leave-it Angebot p_2 usw.

(a) Bestimmen Sie die Angebote p_1^*, p_2^* und p_3^*, die den erwarteten Profit des Verkäufers maximieren! Nehmen Sie dabei an, dass der Verkäufer eine Wertschätzung von Null für das Objekt hat.

(b) Zeigen Sie, dass die Preise über die Zeit fallen! Argumentieren Sie, dass dies auch bei einer anderen Verteilung als der Gleichverteilung der Fall wäre!

Aufgabe 3: Erlösmaximierung mit asymmetrischen Bietern. Ein Verkäufer verkauft ein Objekt und möchte seinen erwarteten Erlös maximieren. Es gebe zwei Käufer mit unabhängig verteilten Wertschätzungen, die dem Verkäufer nicht bekannt sind. Der Verkäufer kennt jedoch die Verteilungen der Wertschätzungen. Die Wertschätzung des ersten Käufers sei gleichverteilt mit $\tilde{v}_1 \sim U[1,2]$, die Wertschätzung des zweiten Käufers sei gleichverteilt mit $\tilde{v}_2 \sim U[0,1]$.

(a) Betrachten Sie die Zweitpreisauktion mit Reservationspreis. Bestimmen Sie den optimalen Reservationspreis!

(b) Betrachten Sie nun die Situation, dass der Verkäufer zuerst ein Take-it-or-leave-it Angebot (TIOLI Angebot) an Käufer 1 macht. Lehnt dieser ab, macht er ein TIOLI Angebot an Käufer 2. Bestimmen sie die optimalen Preise p_1^* und p_2^*!

(c) Geben Sie die Allokationsregel im optimalen direkten Mechanismus an! Vergleichen Sie diese Allokationsregel graphisch mit der Allokationsregel aus (b)!

Betrachten sie nun folgende Modifikation der Zweitpreisauktion: Käufer 2, also der schwächere Käufer, erhält einen Bonus in Höhe von k. Mit einem Gebot b_2 gewinnt er die Auktion wenn $b_2 + k > b_1$. Im Falle eines Gewinns muss er $b_1 - k$ bezahlen. (Bemerkung: Dieser Preis entspricht dem niedrigsten Gebot mit dem er gegen b_1 gewinnen würde.) Umgekehrt gewinnt der erste Käufer wenn $b_1 > b_2 + k$ und bezahlt im Falle eines Gewinns $b_2 + k$.

(d) Überzeugen Sie sich, dass es für beide Käufer eine schwach dominante Strategie ist, ihre wahre Wertschätzung zu bieten!

(e) Kann man k so wählen, dass die optimale Allokation implementiert wird? Falls ja, ist die ZPA mit optimalem k ein optimaler Mechanismus?

[Hinweis: Es bietet sich an, sich den Effekt des Bonus auf die implementierte Allokationsperformance graphisch klar zu machen.]