Auktionen und Märkte – Übung 1 (Lösungsskizze)

Anmerkung: Die vorliegende Lösungsskizze wurde gewissenhaft erstellt. Es besteht jedoch keine Garantie auf vollständige Richtigkeit.

Aufgabe 1

- allgemeine Formulierung einer Strategie (rein oder gemischt), in der Preise aus einem Intervall $[\underline{v}, \bar{v}]$ gleichverteilt gezogen werden → Notation $s(\underline{v}, \bar{v})$.

↳ laut der Strategie werden Preise im Intervall $[\underline{v}, \bar{v}]$ gezogen.

↳ Verteilungsfunktion der Preise:

$$F(x \mid \underline{v}, \bar{v}) = \begin{cases} 0 & , x \leq \underline{v} \\ \dfrac{x - \underline{v}}{\bar{v} - \underline{v}} & , x \in (\underline{v}, \bar{v}) \\ 1 & , x \geq \bar{v} \end{cases}$$

- Definition des Erwartungsnutzens von Spieler i: $U_i(x \mid s_j)$
  - ↳ Interpretation: Wenn Spieler j die Strategie s_j spielt und ich den Preis x biete, so ist mein Erwartungsnutzen $U_i(x \mid s_j)$.
  - ↳ wenn Spieler i eine reine Strategie s_i^* spielt, muss $U_i(s_i^* \mid s_j) \geq U_i(y \mid s_j)$ für alle $y \in \mathbb{R}_+$ (Strategiemenge $\mathbb{R}_+$) gelten.

↳ wenn Spieler i eine gemischte Strategie $s(\underline{v}, \bar{v})$ spielt, so muss das Folgende gelten:

i) $U_i(x \mid s_j) = U_i(y \mid s_j) \quad \forall x, y \in [\underline{v}, \bar{v}]$

<u>und</u>

ii) $U_i(x \mid s_j) \geq U_i(z \mid s_j) \quad \forall x \in [\underline{v}, \bar{v}]$

$\forall z \notin [\underline{v}, \bar{v}]$.

→ zu zeigen: die Gleichgewichtskandidaten in (a)-(c) sind keine Gleichgewichte!

Es gibt immer eine profitable Abweichung.

a) $s_i = s_j = s\left(\frac{v_L}{2}, \frac{v_L}{2}\right)$

→ profitable Abweichung für beide Spieler:

Gebot $b = \frac{v_L}{2} + 0{,}00001$

→ dadurch springt die Gewinnwahrscheinlichkeit nach oben (von $\frac{1}{2}$ auf 1) und somit erhöht sich der Erwartungsnutzen, weil die Kosten nur um 0,00001 steigen.

b) $S_H = s(v', v_L)$, $S_L = s(v'', v_L)$,

mit $0 < v' < v'' < v_L$

(beide spielen eine gemischte Strategie. Die Untergrenze der Preise für Spieler H liegt niedriger)

→ Spieler H hat eine <u>profitable Abweichung</u> von allen Preisen $x \in (v', v'')$. Für alle diese Preise gewinnt Spieler H das Gut niemals, aber er zahlt immer sein Gebot

→ es wäre besser, das Gebot 0 zu machen, anstatt Preise zwischen v' und v'' anzubieten.

c) Spieler H wählt eine Strategie, wo die Preise die folgende Verteilungsfunktion haben; mit $a > 0$:

"Preis 0 wird mit positiver Wahrscheinlichkeit gespielt"

$$F_H(x) = \begin{cases} a & , x \in [0, v''] \\ \frac{x - v''}{v_L - v''} & , x \in (v'', v_L] \\ 1 & , x > v_L \end{cases}$$

→ Spieler L:

$$F_L(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [0, v''] \\ \frac{x - v''}{v_L - v''} & , x \in (v'', v_L] \\ 1 & , x > v_L \end{cases}$$

→ Spieler H hat eine profitable Abweichung. Es ist nicht optimal, den Preis v'' zu setzen. Wenn Spieler H den Preis v'' bietet, so gewinnt er niemals die Auktion (da Spieler L mit Wahrscheinlichkeit 1 ein höheres Gebot macht) aber Spieler H zahlt immer v''.

→ profitable Abweichung zum Gebot 0!

Aufgabe 2

- wichtige Punkte:
  ↳ wenn $b_1 = b_2$, so erhält jeder das Gut mit Wahrscheinlichkeit $1/2$.

  ↳ wenn $b_1 < b_2$, so möchte Spieler 1 sein Gebot so niedrig wie möglich halten.

  ↳ wir suchen Gleichgewichte in <u>reinen</u> Strategien.

Auszahlungsmatrix ($v_1 = v_2 = 4$)

		Spieler 2			
		$b_2 = 0$	$b_2 = 1$	$b_2 = 2$	$b_2 = 3$
Spieler 1	$b_1 = 0$	2, 2	0, 3	0, 2	0, 1
	$b_1 = 1$	3, 0	1, 1	−1, 2	−1, 1
	$b_1 = 2$	2, 0	2, −1	0, 0	−2, 1
	$b_1 = 3$	1, 0	1, −1	1, −2	−1, −1

Beste Antworten ($v_1 = v_2 = 4$)

Spieler 2 (BA $\underline{\quad}$)

Spieler 1 (BA $\underline{\quad}$)

	$b_2 = 0$	$b_2 = 1$	$b_2 = 2$	$b_2 = 3$
$b_1 = 0$	$2, 2$	$0, \underline{3}$	$0, 2$	$\underline{0}, 1$
$b_1 = 1$	$\underline{3}, 0$	$1, 1$	$-1, \underline{2}$	$-1, 1$
$b_1 = 2$	$2, 0$	$\underline{2}, -1$	$0, 0$	$-2, \underline{1}$
$b_1 = 3$	$1, \underline{0}$	$1, -1$	$\underline{1}, -2$	$-1, -1$

→ Implikation: Keine NGG in reinen Strategien!

Aufgabe 2b

- nun gilt : $v_1 = 2$, $v_2 = 4$

Auszahlungsmatrix $(v_1=2, v_2=4)$

Spieler 2 (–)

Spieler 1 (–)

	$b_2=0$	$b_2=1$	$b_2=2$	$b_2=3$
$b_1=0$	$\underline{1}, 2$	$\underline{0}, \underline{3}$	$\underline{0}, 2$	$\underline{0}, 1$
$b_1=1$	$\underline{1}, 0$	$\underline{0}, 1$	$-1, \underline{2}$	$-1, 1$
$b_1=2$	$0, 0$	$\underline{0}, -1$	$-1, 0$	$-2, \underline{1}$
$b_1=3$	$-1, \underline{0}$	$-1, -1$	$-1, -2$	$-2, -1$

→ das GG in reinen Strategien ist

$(b_1 = 0, \; b_2 = 1)$

Aufgabe 3a

- wichtig: für $i \in \{1,2\}$ können nur die Gebote $b_i \in \{0,1,2\}$ optimal sein. Für Bieter 3 können nur die Gebote $b_3 \in \{0,1\}$ optimal sein. Der Grund ist, dass es niemals optimal sein kann, mehr als seine Wertschätzung zu bieten.

→ wir machen also eine Auszahlungsmatrix für alle Kombinationen von $b_1 \in \{0,1,2\}$, $b_2 \in \{0,1,2\}$, und $b_3 \in \{0,1\}$.

Beispielfälle für Auszahlungen

- $\underline{b_1 = b_2 = b_3 = 0} \Rightarrow (u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

↳ alle bieten das Gleiche ⇒ jeder erhält das Gut mit Wahrscheinlichkeit ⅓, und bezahlt niemals etwas.

- $\underline{b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 0} \Rightarrow (u_1, u_2, u_3) = (-1, 0, 0)$

↳ Bieter 2 gewinnt die Auktion und erhält das Gut (für das seine Wertschätzung 2 ist), und zahlt immer 2. Bieter 1 bezahlt 1, erhält aber niemals das Gut.

- $\underline{b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ b_3 = 1} \Rightarrow (u_1, u_2, u_3) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

  ↳ alle erhalten das Gut mit Wahrscheinlichkeit $1/3$, und zahlen immer 1.

- $\underline{b_1 = 2,\ b_2 = 1,\ b_3 = 1} \Rightarrow (u_1, u_2, u_3) = (0, -1, -1)$

  ↳ Spieler 1 erhält das Gut, und bezahlt 2.

  ↳ Spieler 2 und 3 erhalten nicht das Gut, und bezahlen 1.

Auszahlungsmatrix $(v_1 = 2, v_2 = 2, v_3 = 1)$

Spieler 3 spielt $b_3 = 0$

Spieler 2 (Spalten), **Spieler 1** (Zeilen)

	$b_2 = 0$	$b_2 = 1$	$b_2 = 2$
$b_1 = 0$	$\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$	$0, 1, 0$	$0, 0, 0$
$b_1 = 1$	$1, 0, 0$	$0, 0, 0$	$-1, 0, 0$
$b_1 = 2$	$0, 0, 0$	$0, -1, 0$	$-1, -1, 0$

Auszahlung Sp.1
Auszahlung Sp2
Auszahlung Sp.3

Spieler 3 spielt $b_3 = 1$

Spieler 2 (Spalten), **Spieler 1** (Zeilen)

	$b_2 = 0$	$b_2 = 1$	$b_2 = 2$
$b_1 = 0$	$0, 0, 0$	$0, 0, -\frac{1}{2}$	$0, 0, -1$
$b_1 = 1$	$0, 0, -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$	$-1, 0, -1$
$b_1 = 2$	$0, 0, -1$	$0, -1, -1$	$-1, -1, -1$

Auszahlungsmatrix (BA: Sp. 1 —, Sp. 2 —, Sp. 3 —)

Spieler 3 spielt $b_3 = 0$

Spieler 1 \ Spieler 2	$b_2 = 0$	$b_2 = 1$	$b_2 = 2$
$b_1 = 0$	$\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$	* $0, 1, 0$	$0, 0, 0$
$b_1 = 1$	* $1, 0, 0$	* $0, 0, 0$	$-1, 0, 0$
$b_1 = 2$	$0, 0, 0$	$0, -1, 0$	$-1, -1, 0$

Spieler 3 spielt $b_3 = 1$

Spieler 1 \ Spieler 2	$b_2 = 0$	$b_2 = 1$	$b_2 = 2$
$b_1 = 0$	$0, 0, 0$	$0, 0, -\frac{1}{2}$	$0, 0, -1$
$b_1 = 1$	$0, 0, -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$	$-1, 0, -1$
$b_1 = 2$	$0, 0, -1$	$0, -1, -1$	$-1, -1, -1$

→ Nein, es gibt kein NGG, in dem Spieler 3 das Gut manchmal (also mit positiver Wahrscheinlichkeit) erhält.

Aufgabe 36

b) Ja, so ein GG gibt es.

$$\boxed{b_1 = b_2 = b_3 = 0}$$

↳ Nutzen im Gleichgewicht $(u_1, u_2, u_3) = (1/2, 1/2, 1/3)$

↳ Abweichungen für Sp. 1 (oder Sp. 2, analog)

↳ Gebot $b_1 = 1$ machen → er gewinnt das Gut immer → Erwartungsnutzen ist

$$v_1 \cdot 1 - b_1 = 1{,}5 \cdot 1 - 1 = \underline{\underline{0{,}5}}$$

→ diese Abweichung zu $b_1 = 1$ ist nicht profitabel, da Sp. 1 den gleichen Nutzen wie im Gleichgewicht erhält.

→ Abweichungen zu $b_1 > 1$ sind nicht profitabel, da es niemals optimal ist, mehr als seine Wertschätzung zu bieten.

- Spieler 3 hat auch keine profitablen Abweichungen:

↳ Gebot $b_3 = 1$ → Erwartungsnutzen $v_3 \cdot 1 - b_3$

$= 1 - 1 = \underline{0}$ → nicht profitabel

.

Aufgabe 4

- damit eine Strategie b_i eine beste Antwort (für Sp i) auf die Strategie b_j ist, muss gelten:

  ↳ wenn $b_i < b_j \Rightarrow b_i = 0$ (sonst gewinnt man nicht die Auktion und erhält den Bonus nicht)

  ↳ wenn $b_i \geq b_j \Rightarrow b_j \leq v_i$ muss gelten (sonst liegt die Zahlung von Spieler i über seiner Wertschätzung).

(Achtung: das waren nur notwendige und keine hinreichenden Bedingungen.

① Kein NGG.

↳ es gibt für Spieler 1 eine profitable Abweichung, nämlich zum Gebot $b_1 = 0$. In jedem Fall gewinnt Sp. 2 die Auktion, aber Spieler 1 erhält durch die Abweichung einen Euro.

② NGG.

↳ Spieler 1 erhält bei $b_1 \in [0,20)$ den Nutzen 0, und durch Gebot $b_2 \geq 20$ einen negativen Nutzen, da die Zahlung (20) über der Wertschätzung liegt.

↳ Spieler 2 erhält beim Gebot $b_2 = 20$ den Nutzen 20. Für jedes Gebot $b_2 \in (0,20)$ erhält der Spieler den gleichen Nutzen.

Wenn Spieler 2 $b_2 = 0$ bietet, so erhält der Spieler den Nutzen $20 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 11$.

↳ Somit haben Spieler 1 und 2 <u>keine</u> profitable Abweichungen → wir haben ein Nash-Gleichgewicht.

③ NGG.

↳ Ähnliche Argumente wie bei ②.

④ Kein NGG.

↳ Spieler 1 hat eine profitable Abweichung zu $b_1 = 10$. Dadurch erhält Spieler 1 den Nutzen $v_1 - b_2 = 3$. Bei $b_1 = 0$ erhält Spieler 1 den Nutzen 1.

(5) Kein NGG.

↳ sowohl Spieler 1 als auch Spieler 2 haben eine profitable Abweichung, zum Beispiel zum Gebot 1.

(6) kein NGG

↳ Spieler 2 hat eine profitable Abweichung zum Gebot $b_2 = 20$. Dann erhält Spieler 2 den Nutzen $v_2 - b_1 = 10$. Bei $b_2 = 0$ erhält Spieler 2 den Nutzen 1.

⑦ Kein NGG

↳ Spieler 1 hat eine profitable Abweichung zum Gebot $b_1 = 0$. Dann erhält Spieler 1 den Nutzen 1. Bei $b_1 = 30$ erhält Spieler 1 den Nutzen $v_1 - b_2 = \underline{-10}$.

⑧ NGG

↳ Spieler 1 zahlt 0 im Gleichgewicht, erhält aber das Gut, und somit den Nutzen 10. Der Spieler hat keine profitable Abweichung. Spieler 2 kann das Gut nur erhalten, wenn er mehr als seine Wertschätzung bietet → nicht profitabel.

9 Kein NGG

↳ Spieler 1 hat eine profitable Abweichung zu $b_1 = 0$.

10 NGG.

↳ Argumente wie in 8.

Aufgabe 46

→ nur GG 1. Seine eigene Wertschätzung zu bieten ist eine schwach dominante Strategie. Somit ist dieses GG das plausibelste.