# Auktionen und Märkte –

# Übung 2 (Lösungsskizze)

<u>Anmerkung</u>: Die vorliegende Lösungsskizze wurde gewissenhaft erstellt. Es besteht jedoch keine Garantie auf vollständige Richtigkeit.

## Kochrezept zur Herleitung von Verteilungsfunktionen und Dichten (z.B. von Ordnungsstatistiken)

↳ eine Ordnungsstatistik ist eine Zufallsvariable.

↳ Verteilungsfunktion der Zufallsvariable: Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Realisation der Zufallsvariable unter einem gewissen Wert liegt?

↳ Herleitung der Verteilungsfunktion mit Logik

$\Rightarrow$ Ableitung der Verteilungsfunktion = Dichtefunktion.

## Aufgabe 0

- $\tilde{X}_i \sim U[0,1]$, d.h. gleichverteilt auf $[0,1]$

- $\underline{\underline{E[\tilde{x}_i] = 1/2}}$

↳ Erwartungswert von $\tilde{X}_i$.

↳ Herleitung:

$$E[\tilde{x}_i] = \int_0^1 x \underbrace{f(x)}\, dx = \int_0^1 x\, dx = 0{,}5$$

Dichtefunktion von $\tilde{x}_i$,
nämlich $\underline{\underline{f(x) = 1}}$.

- $E[\tilde{x}_{(1:5)}]$

↳ Erwartungswert der höchsten Realisation der 5 Zufallsvariablen.

↳ Herleitung der Dichte von $\tilde{x}_{(1:5)}$:

↳ Verteilungsfunktion $F_{(1:5)}(y)$

$$F_{(1:5)}(y) = Pr(\tilde{x}_{(1:5)} \leq y) = [Pr(\tilde{x}_i \leq y)]^5$$
$$= y^5$$

↳ Dichtefunktion $f_{(1:5)}(y)$

$$f_{(1:5)}(y) = \frac{\partial F_{(1:5)}(y)}{\partial y} = 5y^4.$$

$$\Rightarrow E\left[\breve{X}_{(1:5)}\right] = \int_0^1 x f_{(1:5)}(x)\,dx = \int_0^1 x\left(5x^4\right)dx$$

$$= \int_0^1 5x^5\,dx = \left[\frac{5}{6}x^6\right]_0^1 = \underline{\underline{5/6}}$$

- $E[\tilde{X}_{(2:5)}]$

↳ Erwartungswert der zweithöchsten Realisation der 5 Zufallsvariablen

↳ Verteilungsfunktion $F_{(2:5)}(y)$:

$$F_{(2:5)}(y) = \left[\Pr(\tilde{X}_i \leq y)\right]^5 + 5\left[\Pr(\tilde{X}_i \leq y)\right]^4 \cdot \Pr(\tilde{X}_i > y)$$

$$= y^5 + 5y^4(1-y) = 5y^4 - 4y^5$$

↳ Dichtefunktion $f_{(2:5)}(y)$:

$$f_{(2:5)}(y) = \frac{\partial F_{(2:5)}(y)}{\partial y} = 20y^3 - 20y^4 = 20y^3(1-y)$$

$$\Longrightarrow E\left[\hat{X}_{(2:5)}\right] = \int_0^1 x\, f_{(2:5)}(x)\,dx = \int_0^1 x\left[20x^3(1-x)\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[20x^4 - 20x^5\right]dx = 20\left[\left(\tfrac{1}{5}\right)x^5 - \tfrac{1}{6}(x)^6\right]_0^1$$

$$= 20\left[\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}\right] = 20\left[\tfrac{1}{30}\right] = \tfrac{2}{3}$$

- $\underline{E\left[\frac{4}{5}\tilde{X}_{(1:5)}\right]}$

↳ der Erwartungswert ist immer ein linearer Operator. Das bedeutet:

$$E\left[\frac{4}{5}\tilde{X}_{(1:5)}\right] = \frac{4}{5}\underbrace{E\left[\tilde{X}_{(1:5)}\right]}_{=5/6} = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6} = \underline{\underline{2/3}}$$

↳ generell gilt immer das Folgende, wenn $z$ eine Zufallsvariable und $b \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist:

$$E[b \cdot z] = b \cdot E[z].$$

$E[\breve{x}_i \mid \breve{x}_i \geq 1/2]$

↳ Erwartungswert von $\breve{x}_i$, wenn $\breve{x}_i \geq 1/2$.

↳ Dichte $f_{\breve{x}_i \geq 1/2}(y) = \dfrac{f(y)}{Pr(\breve{x}_i \geq 1/2)} = \dfrac{1}{1/2} = \underline{2}$

$$\Rightarrow E[\breve{x}_i \mid \breve{x}_i \geq 1/2] = \int_{1/2}^{1} x\, f_{\breve{x}_i \geq 1/2}(x)\, dx = \int_{1/2}^{1} 2x\, dx$$

$$= [x^2]_{1/2}^{1} = 1 - (1/2)^2 = \underline{\underline{3/4}}$$

## Aufgabe 1:

- Verteilungsfunktion $F_{(n:n)}$, d.h. von der niedrigsten Realisation der $n$ Zufallsvariablen.

- $$F_{(n:n)}(y) = Pr\left(\tilde{v}_{(n:n)} \leq y\right)$$
$$= 1 - Pr\left(\tilde{v}_{(n:n)} \geq y\right)$$
$$= 1 - \left[1 - F(y)\right]^n$$

$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$

unabhängig

$$\Rightarrow f_{(n:n)}(y) = \frac{\partial F_{(n:n)}(y)}{\partial y} = -n\left(1-F(y)\right)^{n-1} \cdot \left(-f(y)\right)$$

$$\Rightarrow f_{(n:n)}(y) = n\left(1-F(y)\right)^{n-1}\left(f(y)\right).$$

· Verteilungsfunktion $F_{(n-1:n)}(y)$, d.h. von der zweit-niedrigsten Realisation der $n$ Zufallsvariablen

· $F_{(n-1:n)}(y) = Pr\left(\underline{\tilde{U}_{(n-1:n)} \leq y}\right) = 1 -$

$Pr$(mindestens $n-1$ Realisationen $> y$) $=$

$1 - \Big[ Pr$(alle Realisation $> y$) $+$

$Pr$(genau $n-1$ Realisationen $> y$)$\Big] =$

$$1-\left[[1-F(y)]^n+n\cdot F(y)[1-F(y)]^{n-1}\right]$$

- Dichtefunktion $f_{(n-1:n)}(y)$:

$$f_{(n-1:n)}(y)=\frac{\partial F_{(n-1:n)}(y)}{\partial y}=$$

$$-\Big[n[1-F(y)]^{n-1}(-f(y))+nf(y)[1-F(y)]^{n-1}+$$

$$nF(y)(n-1)[1-F(y)]^{n-2}(-f(y))\Big]=$$

$$n(n-1)[1-F(y)]^{n-2}F(y)f(y)$$

Beispiel (wie gewünscht): $\breve{x}_i \in \{0,1\}$, mit $Pr(\breve{x}_i = 1) = 1/2$

↳ Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweithöchste Realisation unterhalb von 0 liegt?

↳ $Pr(\breve{v}_{(n-1:n)} \leq 0) = 1 - [Pr(3 \text{ Realisationen unterhalb } 0) + Pr(2 \text{ Realisationen unterhalb } 0)]$

↳ Warum? Wenn genau 1 oder 0 Realisationen unterhalb 0 liegen, so muss die zweithöchste Realisation überhalb 0 liegen!

↳ Somit gilt: $Pr(\breve{v}_{(2:3)} \leq 0) = 1 - \left[(1/2)^3 + 3(1/2)^3\right]$

$$= 1 - \frac{4}{8} = \underline{\underline{1/2}}$$

## Aufgabe 2

- $F_{(1:3)}(y)$, $f_{(1:3)}(y)$, $F_{(2:3)}(y)$, und $f_{(2:3)}(y)$ leiten wir wie in Aufgabe 0 her:

↳ $F_{(1:3)}(y) = \left[ Pr(\tilde{v}_i \leq y) \right]^3 = \left[ F(y) \right]^3$

↳ $f_{(1:3)}(y) = 3\left[ F(y) \right]^2 f(y)$

↳ $F_{(2:3)}(y) = \left[ F(y) \right]^3 + 3\left[ 1-F(y) \right]\left[ F(y) \right]^2$

$$= 3\left[ F(y) \right]^2 - 2\left[ F(y) \right]^3$$

↳ $f_{(2:3)}(y) = 6F(y)f(y) - 6\left[ F(y) \right]^2 f(y) = 6F(y)f(y)\left[ 1-F(y) \right]$

· Herleitung von $F_{(3:3)}(y)$ und $f_{(3:3)}(y)$ wie in Aufgabe 1.

↳ $F_{(3:3)}(y) = 1 - [1-F(y)]^3$

↳ $f_{(3:3)}(y) = -3[1-F(y)]^2(-f(y)) = 3f(y)[1-F(y)]^2$

b) $E[\tilde{v}_{(1:3)}]$

$$E[\tilde{v}_{(1:3)}] = \int_0^1 v \, f_{(1:3)}(v) \, dv = \int_0^1 v \left[3 (F(v))^2 f(v)\right] dv$$

aus Aufgabe:

$F(v) = v^2$

$f(v) = 2v$

$$= \int_0^1 v \left[3 \cdot [v^2]^2 \cdot 2 \cdot v\right] dv = \int 6 v^6 dv$$

$$= \left[\frac{6}{7} v^7\right]_0^1 = \underline{\underline{6/7}}$$

$E[U_{(2:3)}]$

$$E[U_{(2:3)}] = \int_0^1 u\, f_{(2:3)}(u)\,du = \int_0^1 u\left[\underline{6F(u)f(u)\,[1-F(u)]}\right]du =$$

$F(u) = u^2$, $f(u) = 2u$

$$= \int_0^1 u\left[6[u^2][2u][1-u^2]\right]du = \int_0^1 u\left[12u^3 - 12u^5\right]du$$

$$= \left[\frac{12}{5}u^5 - \frac{12}{7}u^7\right]_0^1 = \frac{12}{5} - \frac{12}{7} = \underline{\underline{\frac{24}{35}}}$$

c) $\Pr\left(\tilde{U}_{(2:3)} \geq 1/2\right) = 1 - F_{(2:3)}(1/2)$

$$= 1 - \left[3\left(F(1/2)\right)^2 - 2\left(F(1/2)\right)^3\right]$$

$$= 1 - \left[3\left(1/4\right)^2 - 2\left(1/4\right)^3\right] = 1 - \left[\frac{3}{16} - \frac{2}{64}\right]$$

$$= 1 - \left[\frac{10}{64}\right] = \frac{54}{64} = \frac{27}{32}$$

$$E\left[\tilde{U}_{(2:3)} \mid \tilde{U}_{(2:3)} \geq 1/2\right] =$$

$$\int_{1/2}^{1} u \, \frac{f_{(2:3)}(u)}{\underbrace{1 - F_{(2:3)}(1/2)}_{= 27/32}} \, du = \frac{32}{27} \int_{1/2}^{1} (12u^4 - 12u^6) \, du$$

$$= \dots = \frac{233}{315}$$

## Aufgabe 3

a) Stärkeres Team = Team mit mehr Wahrscheinlichkeitsmasse auf hohen Spielstärken.

↳ wir schauen uns also die Dichtefunktionen an.

Team 1:

↳ Gleichverteilung auf $[0,1]$ => Dichte $f_1(x) = 1$ für alle $x \in [0,1]$.

$G(x) = x^2$, aus Aufgabe

# Team 2:

↳ Dichte $f_2(x) = \frac{\partial G(x)}{\partial x} \overset{!}{=} \frac{\partial [x^2]}{\partial x} = 2x$

↳ für alle $x < 1/2$ gilt $f_2(x) < f_1(x)$

↳ für alle $x > 1/2$ gilt $f_2(x) > f_1(x)$

⇒ Team 2 ist stärker! Das kann man auch am Erwartungswert der Stärken sehen.

↳ Erwartete Stärke von Team 1 $= 1/2$

↳ Erwartete Stärke von Team 2:

$$\int_0^1 x f_2(x)\,dx = \int_0^1 x\,[2x]\,dx = \int_0^1 2x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \underline{\underline{2/3}}$$

b)

Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler aus Team 1 gewinnt = Wahrscheinlichkeit, dass $X > Y$, gegeben dass $X \sim F$ und $Y \sim G$.

↳ Verteilungsfunktion $F(x) = x \longrightarrow$ Dichte $f(x) = 1$.

↳ Verteilungsfunktion $G(y) = y^2 \longrightarrow$ Dichte $g(y) = 2y$

Wahrscheinlichkeit, dass $X > Y$:

$$\Pr(X>Y) = \int_0^1 \int_0^1 \underbrace{\mathbb{1}[X>Y]}_{\text{Indikatorfunktion:}} f(x)\,dx \; g(y)\,dy$$

$$\mathbb{1}[X>Y] = \begin{cases} 1 & \text{wenn } X>Y \\ 0 & \text{wenn } X \le Y \end{cases}$$

$$= \int_0^1 \int_y^1 (1)\, f(x)\,dx \; g(y)\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_y^1 (1)\cdot(1)\,dx \; (2y)\,dy$$

$$= \int_0^1 (1-y)\,(2y)\,dy = \int_0^1 (2y - 2y^2)\,dy$$

$$= \left[ y^2 - \frac{2}{3}y^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \underline{\underline{1/3}}$$

· Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass Team 1 alle 3 Spiele gewinnt $[Pr(x>y)]^3$, d.h. $[1/3]^3 = \underline{\underline{1/27}}$.

· Die Wahrscheinlichkeit, dass Team 2 alle 3 Spiele gewinnt, ist $[1-Pr(x>y)]^3 = \left[\frac{2}{3}\right]^3 = \underline{\underline{\frac{8}{27}}}$.

c)

i) Duell der stärksten Spieler

-> wir benötigen die Ordnungsstatistiken der jeweils höchsten Spielstärke. Die Verteilungen davon sind

↳ $F_{(1:3)}(x) = x^3$ ↳ $G_{(1:3)}(y) = y^6$

-> die Wahrscheinlichkeit, dass in diesem Duell Team 1 gewinnt, ist $Pr[\tilde{x}_{(1:3)} > \tilde{y}_{(1:3)}]$, d.h.:

$$\Pr\left[\tilde{x}_{(1:3)} > \tilde{y}_{(1:3)}\right] = \int_0^1 \int_y^1 \mathbb{1}[x > y]\, f_{(1:3)}(x)\,dx\; g_{(1:3)}(y)\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[1 - F_{(1:3)}(y)\right] g_{(1:3)}(y)\,dy = 1 - \int_0^1 y^3 \left(6y^5\right) dy$$

$$= 1 - \int_0^1 \frac{6}{5} y^9\, dy = 1 - \frac{2}{3} = \underline{\underline{1/3}}$$

ii) Duell der zweitstärksten Spieler. Wir brauchen die Verteilungen der Zufallsvariablen $\tilde{x}_{(2:3)}$ und $\tilde{y}_{(2:3)}$, nämlich:

$\hookrightarrow F_{(2:3)}(x) = 3x^2 - 2x^3$

$\hookrightarrow G_{(2:3)}(y) = 3y^4 - 2y^6$

$\Rightarrow$ daraus folgt:

$$Pr[\tilde{x}_{(2:3)} < \tilde{y}_{(2:3)}] = \int_0^1 [3y^2 - 2y^3](12y^3 - 12y^5)\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[36y^5 - 36y^7 - 24y^6 + 24y^8\right] dy$$

$$= \frac{36}{6} - \frac{36}{8} - \frac{24}{7} + \frac{24}{9} \approx 0{,}73$$

iii) Quell der Schwächsten

$$\Pr\left(\tilde{y}_{(3:3)} > \hat{x}_{(3:3)}\right) \approx 0{,}77.$$

iv) Nein, diese sind nicht stochastisch unabhängig. Wenn der stärkste Spieler in Team 1 eine höhere Gewinnwahrscheinlichkeit erhält, so wird auch die Gewinnwahrscheinlichkeit für Team 1 in allen anderen Duellen steigen, weil die Stärke aller Spieler in einem Team aus der gleichen Verteilung gezogen ist.