

Auktionen und Märkte -

Übung 3 (Lösungsskizze)

Anmerkung: Die vorliegende Lösungsskizze wurde gewissenhaft erstellt. Es besteht jedoch keine Garantie auf Vollständige Richtigkeit.

Aufgabe 1: Procurement - Zwei-Preisauktion.

• Spielregeln:

↳ Procurement: Auktionator will Unternehmen finden, welches Auftrag möglichst günstig erfüllt.

↳ Unternehmen i macht Gebot. Wenn Bieter i gewinnt, zahlt Auktionator einen Preis an das gewinnende Unternehmen (Bieter).

↳ das niedrigste Gebot gewinnt die Auktion.

↳ Der Preis, den das gewünschte Unternehmen bestimmt, ist das zweitniedrigste Gebot.

a) GE in Schwach dominanter Strategien

• Bieter i hat Kosten c_i , und die Kosten eines anderen Bieters sind eine Zufallsvariable \bar{c}_j . (Jeder Bieter kennt seine eigenen Kosten, aber nicht die von anderen Bieter).

• für jeden Bieter i ist es eine schwache dominante Strategie, seine eigenen Kosten zu bieten.

• wenn Bieter i mit Gebot $b_i = c_i$ die Auktion gewinnt, und p erhält \Rightarrow Nutzen $p - b_i = p - c_i$. Das ist positiv, weil $b_i < p$ ($b_i = c_i$ ist das niedrigste Gebot, p ist zweitniedrigstes).
 \hookrightarrow Wenn Bieter i zum Gebot $b'_i \geq p$ abweicht, gewinnt i nicht die Auktion und

erhält der Nutzen 0 \Rightarrow nicht profitabel.

\hookrightarrow wenn Bids i zum Gebot $b_i < c_i$ abweicht,
ändert sich gar nichts \Rightarrow nicht profitabel.

- wenn Bids i mit Gebot $b_i = c_i$ die
Auktion nicht gewinnt, weil das niedrigste
Gebot p unter c_i liegt \Rightarrow i erhält Nutzen 0.

\hookrightarrow Abweichung zu $b'_i \in (p, c_i)$ macht keinen
Unterschied.

\hookrightarrow Abweichung zu $b'_i < p \Rightarrow$ i gewinnt die

Auktion, aber $p < c_i \Rightarrow$ Nutzen $p - c_i < 0$

\Rightarrow nicht profitabel!

b) Erwarteter Betrag ist Erwartungswert des zweitniedrigsten (d.h. höchsten) Gebots:

Jeder der $n=2$ Böter bietet $b_i = c_i$, und $c_i \in [1,2]$. Verteilungsfunktion von \tilde{c}_i ist

$$F(c) = \begin{cases} 0 & c < 1 \\ \frac{c-1}{2-1} & c \in [1,2] \\ 1 & c \geq 2 \end{cases}$$

wir brauchen also die Orderungsstatistiken $\tilde{c}_{(1:2)}$, mit Verteilungsfunktion $F_{(1:2)}(c)$ gegeben durch:

$$F_{(1:2)}(c) = \Pr(\tilde{c}_1 < c) \Pr(\tilde{c}_2 < c) = (c-1)^2$$

Verteilungsfunktion

Orderungsstatistik
höchstens aus
zwei Gittern.

Wahrscheinlichkeit, dass beide
Gitter unterhalb von c liegen.

$$\Rightarrow \text{Dichtefunktion} \quad f_{(1:2)}(c) = 2(c-1)$$

$$\Rightarrow \text{Erwarteter Betrag} = \int_1^2 c f_{(1:2)}(c) dc =$$

$$= \int_1^2 c[2(c-1)]dc = \int_1^2 [2c^2 - 2c]dc = \left[\frac{2}{3}c^3 - c^2 \right]_1^2 =$$

$$\left[\frac{2}{3} \cdot (8) - 4 \right] - \left[\frac{2}{3}(1) - 1 \right] = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \cancel{\frac{5}{3}}$$

Aufgabe 2: Firstprice

- Private Information von Käufer i : Wertschätzung zwischen 0 und 1 , gleichverteilt auf $[0,1]$.
 - Mögliche Aktionen für Käufer i : "Ja" und "Nein". "Ja" heißt, ich kaufe das Aut. "Nein" heißt, ich kaufe das Aut nicht.
- eine Strategie für einen Käufer besagt, ob er das Aut kaufen möchte oder nicht,

für jede mögliche Wertschätzung und jeden Preis, den der Auktionator festlegt.

$$\varphi: \underbrace{[0,1]}_{\text{Festpreis}} \times \underbrace{[0,1]}_{\text{Wertschätzungen}} \rightarrow \{\text{"Ja"}, \text{"Nein"}\}$$

- Schwach dominant Strategie: Gut kaufen, wenn $v_i \geq p$, und Gut nicht kaufen, wenn $v_i < p$.
- Erwarteter Profit, wenn alle diese Strategien eingespielt werden:
(van Biestr) ~~T_i~~:

$$\begin{aligned}
 \overline{\pi}_i &= \underline{(v_i - p)} \cdot \Pr(\text{nur } i \text{ sagt ja}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot (v_i - p) \cdot \Pr(i \text{ und ein anderer Spieler sagen ja}) \\
 &\quad + \frac{1}{3} \cdot (v_i - p) \cdot \Pr(i \text{ und zwei andere Spieler sagen ja}) \\
 \\
 &= (v_i - p) \cdot \left[\Pr(v_j < p) \cdot \Pr(v_k < p) \right] + \\
 &\quad \frac{1}{2} (v_i - p) \cdot \left[\Pr(v_j < p) \cdot \Pr(v_k \geq p) + \Pr(v_j \geq p) \cdot \Pr(v_k < p) \right] + \\
 &\quad \frac{1}{3} (v_i - p) \left[\Pr(v_j \geq p) \cdot \Pr(v_k \geq p) \right] =
 \end{aligned}$$

$$(v_i - p)(p^2) + \frac{1}{2}(v_i - p)[2p(l-p)] + \frac{1}{3}(v_i - p)[(l-p)^2] =$$

$$(v_i - p)[p^2 + p(l-p) + \frac{1}{3}(l-p)^2]$$

b) Erwarteter Erlös des Verkaufs bei Preis p .

$$\underline{R^V(p)} = p \cdot \Pr[\text{mindestens ein Käufer hat } \tilde{U}_j \geq p].$$
$$= p \cdot [1 - p^3]$$

$\underbrace{1 - \Pr[\text{alle haben } \tilde{U}_j < p]}_{= p^3}$

→ wir berechnen den Preis p^* , der den Erlös des Verkaufs maximiert.

$$\frac{\partial R^V(p)}{\partial p} = [1 - p^3] + p [-3p^2] \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - p^3 - 3p^3 = 0 \Leftrightarrow 4p^3 = 1 \Leftrightarrow$$

$$p^3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow p^* = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

\Rightarrow Einsetzen in $R^*(p)$ liefert maximalen Erlös:

$$R^*(p^*) = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \left[1 - \left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \right)^3 \right] \approx 0.4725$$

c) Vergleich mit Erlösen in der Zweitpreis-auktion (ZPA)

• Erlös in ZPA ohne Reservepreis:

↳ das ist der Erwartungswert des zweithöchsten Gebots (wcl jeder biebt einfach seine Zahlungsbereitschaft).

$$\text{↳ } F_{(2:n)}(y) = [Pr(\tilde{v}_i < y)]^n + n [Pr(v_i < y)]^{n-1} Pr(v_j > y)$$

\tilde{v}_i gleichverteilt auf $[0,1]$ \Rightarrow $y^n + ny^{n-1}(1-y) = ny^{n-1} - (n-1)y^n$

$$\Rightarrow f_{(2:n)}(y) = n(n-1)y^{n-2} - n(n-1)y^{n-1} = n(n-1)y^{n-2}(1-y)$$

\Rightarrow erwarteter Erlös:

$$R^{\text{ER}} = \int_0^1 y f_{(2:n)}(y) dy = \int_0^1 n(n-1)(y^{n-1} - y^n) dy$$

$$= \left[n(n-1) \left(\frac{1}{n} y^n - \frac{1}{n+1} y^{n+1} \right) \right]_0^1$$

$$= n(n-1) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = n(n-1) \left[\frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} \right] =$$

$$= \frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{2}$$

\uparrow
 $n=3$

\Rightarrow der Erlös der ZPA (ohne Revocationssatz)

liegt höher als der Erlös mit optimalm Festpreis.

• der Erlös einer ZPA mit Revocationssatz
liegt noch höher, nämlich bei

$$\frac{n-1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n+1}} > \frac{1}{2} \quad (\text{siehe Verteilung})$$

Aufgabe 3: ZPA mit Eintrittsgeld

a) Sobald ein Spieler die Eintrittsgebühr bezahlt, sind diese Sunk Costs. Dann ist es Schwach dominant, immer seine eigene Wertschätzung zu bieten.

→ das nehmen wir von nun an an.

b)

Wichtig: Teilnehmer sehen ihre Wertschätzung
und entscheiden, basierend darauf, ob sie
teilnehmen oder nicht.

↳ wir suchen ein Gleichgewicht, in
der Rente teilnehmen, genau dann wenn

ihre Wertschätzung über w liegt.

↳ wir finden jetzt w !

- ω ist eine Lösung zur folgenden Gleichung:

$$\underbrace{0}_{\text{Nutzen von Nicht-Teilnahme}} = -e + \underbrace{\left[\Pr(\tilde{U}_{(1:n-1)} < \omega) \right]}_{\text{Nutzen durch Teilnahme:}} (\omega - 0)$$

Nutzen von
Nicht-Teilnahme

Nutzen durch Teilnahme:

↳ Einheitskosten e

↳ Teilnehmer mit Wertschätzung ω

gewinnt genau dann wenn

alle andern Teilnehmer eine

Wertschätzung unter ω haben

→ dann zahlt er ω .

\Leftrightarrow

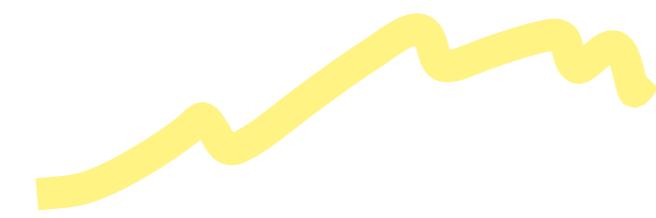
$$0 = -e + [f(\omega)]^{n-1} \cdot \omega$$

\Leftrightarrow

$$e = \omega^n \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\omega^*(e)}_{\omega^n} = e^{\frac{1}{n}}$$



c) Welches Eintrittsgeld maximiert den erwarteten Erlös?



$$R_n(e) = \underbrace{n \cdot (1 - F(\omega)) \cdot e}_{\text{Menge an Eintrittsgeld, die Auktionator erhält.}} + \Pr(\tilde{U}_{(2:n)} \geq \omega) \cdot E[\tilde{U}_{(2:n)} | \tilde{U}_{(2:n)} \geq \omega]$$

Menge an Eintrittsgeld, die Auktionator erhält.

Erlöse

Erlös des

Auktionator

Erwarteter Erlös aus Auktion:

$\hookrightarrow \tilde{U}_{(2:n)} \geq \omega$ muss gelten,

Sonst ist Erlös aus

Gebot 0.

\hookrightarrow Erlös aus Auktion ist dann

$E[\tilde{U}_{(2:n)} | \tilde{U}_{(2:n)} \geq \omega]$

$$n(1-F(\omega)) \cdot e + \Pr(\bar{U}_{(2:n)} \geq \omega) \cdot \int_{\omega}^1 \frac{f_{(2:n)}(u)}{\Pr(U_{(2:n)} \geq \omega)} du$$

$$n(1-\omega) \cdot e + \int_{\omega}^1 u n(n-1) u^{n-2} (1-u) du$$

$$\vdots$$

$$\frac{n-1}{n+1} + e - 2 \frac{n}{n+1} e^{\frac{n-1}{n}}$$

→ jetzt finden wir das erlösmaximierende e !

$$\rightarrow \max_e R_n(e) = \frac{n-1}{n+1} + e - 2 \frac{n}{n+1} e^{\frac{n+1}{n}}$$

$$\frac{\partial R_n(e)}{\partial e} = 1 - 2 e^{\frac{n+1}{n}-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow e^* = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

→ das setzen wir ein, um den Erlös im Optimum zu bestimmen.

$$R_n(e^*) = \frac{n-1}{n+1} + e^* - 2 \sum_{j=1}^n (e^*)^{\frac{n+1}{j}}$$

$$= \frac{n-1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^5 - 2 \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

$$= \frac{n-1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^5 - 2 \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{n-1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

→ das ist genau gleich dem Br(S) der
ZPA mit optimalem Reservationspreis

→ Grund: Die Allocationsregel ist gleich bei

ZPA mit optimalem Reservationspreis und

ZPA mit optimalem Einheitsgeld.

Aufgabe 4

• Auktion mit Outside Option

↳ wenn Biefer die Auktion nicht - gleint,

kann er das Gut auch von einem anderen Anbieter zum Preis P_m kaufen

↳ wichtig: Seine Zahlungsbereitschaft für dieses Gut und das Gut dann in der Auktion bereitgestellt wird, ist gleich.

↳ Implikation: Man will in der Auktion
niemals mehr als p^m bezahlen

a) Was ist die schwach dominante Strategie?

↳ es ist schwach dominant, dann liefert
min { v_i, p^m } abzugeben.

Zahlungsträger $\sigma_i = u[\sigma_i]$

Begründung

- definier $\tilde{b}_{(1:n-1)}$ als das höchste der $n-1$ anderen Gebote.
- wenn $\tilde{b}_{(1:n-1)} > p_m$
↳ es ist optimal, $b_i \leq p_m$ zu bieten \rightarrow
So gemeint man die Auktion nicht,
und kann daher das Gut zum Preis
 p_m kaufen.

↳ wenn man die Auktion gewinnt (durch Gebot $b_i > \tilde{b}_{(1:w-1)}$), so zahlt man $\tilde{b}_{(1:w-1)} > p_m \rightarrow$ keine profitable Abweichung.

- wenn $\tilde{b}_{(1:N-1)} \leq p_m$

↳ Gebot $b_i = v_i$ optimal.

↳ $v_i > \tilde{b}_{(1:w-1)} \Rightarrow$ bei Gebot $b_i = v_i$ erhält man Nutzen $v_i - \tilde{b}_{(1:w-1)}$, sonst der Nutzen 0.

$\hookrightarrow u_i \leq \tilde{b}_{(1:n-1)}$: man will die Auktion
 nicht gewinnen \Rightarrow Guts $b_i = u_i$ optimal.

b) Erwarteter Erlös ($b_i(u_i) = \min\{u_i, p_m\}$):

$$R_n(p_m) = \Pr(\tilde{u}_{(2:n)} < p_m) \cdot E[\tilde{u}_{(2:n)} | \tilde{u}_{(2:n)} < p_m]$$

$$+ \Pr(\tilde{u}_{(2:n)} \geq p_m) \cdot p_m$$

=

$$F_{(2:n)}(p_m) \cdot \int_0^{p_m} v f_{(2:n)}(v) dv +$$

$$(1 - F_{(2:n)}(p_m)) \cdot p_m =$$

$$\int_0^{p_m} v f_{(2:n)}(v) dv + (1 - F_{(2:n)}(p_m)) \cdot p_m =$$

$$\int_0^{p_m} (n(n-1)v^{n-1} - n(n-1)v^n) dv + (1 - np_m^{n-1} + (n-1)p_m^n) p_m$$

$$= \dots = P_3 - (P_3)^n + \frac{n-1}{n+1} (P_3)^{n+1}$$