Auktionen und Märkte

Spieltheoretische Grundlagen

Groh/von Wangenheim

Universität Bonn, Wintersemester 2024/2025

Spiel und Dominanz

Ein statisches Spiel (unter vollständiger Information) besteht aus:

1. Einer Menge an Spielern N = 1, . . . , n.
2. Für jeden Spieler $i \in N$ einer Menge von möglichen Aktionen A_i.
3. Für jeden Spieler $i \in N$ einer Nutzenfunktion $u_i : A_1 \times ... \times A_n \to \mathbb{R}$

Wir schreiben $(a_1, ..., a_n)$ oder (a_i, a_{-i}) für ein Aktionsprofil, also eine Kombination aus je einer gewählten Aktion pro Spieler.

Dominanz

Wir sagen eine Aktion $a_i \in A_i$ dominiert eine Aktion $a_i' \in A_i$ schwach, wenn für alle a_{-i} gilt dass

$$u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a_i', a_{-i}).$$

Eine Aktion ist schwach dominant, wenn sie jede andere schwach dominiert.

Nash Gleichgewicht

Ein Aktionsprofil $(a_1, ..., a_n) \in A_1 \times ... \times A_n$ ist ein **Nash Gleichgewicht**, wenn sich - für gegebene Aktionen der anderen - kein Spieler mit Abweichen auf eine andere Aktion besser stellen kann, also wenn für alle Spieler i

$$u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a_i', a_{-i}).$$

Nash Gleichgewicht erzeugen in gewisser Weise "stabile" Allokationen:

→ so lang die anderen nichts verändern, werde ich auch nichts verändern

Fokale Gleichgewichte

- Problem: Es gibt häufig eine große Menge an Nash GG.
- Die Frage, welches GG gespielt wird, ist häufig eine Frage der Koordinierung.
- In vielen Kontexten sticht ein GG als "natürlich" heraus, möglicherweise aufgrund einer herausgebildeten Konvention.
  - Wenn man aneinander vorbei muss geht jeder rechts.
  - Wenn man sich sucht, dann am letzten gemeinsam besuchten Platz.
- Man sagt in diesem Fall, ein GG ist fokal.
- Auch GG, in denen ein oder mehrere Spieler eine (schwach) dominante Aktion spielen, können fokal sein.
  - Es ist unplausibel anzunehmen, dass mein Gegner eine schwach dominierte Aktion spielt.
  - Wenn das alle Spieler antizipieren: Koordinierung auf das GG mit schwach dominanten Aktionen.

Motivation Unvollständige Information

Problem: Spieler sind oft nicht perfekt über Charakteristika von anderen (oder sich selbst) informiert.

Beispiele:

- Oligopolisten kennen die Kosten ihrer Wettbewerber nicht.
- Manche Oligopolisten sind besser über die Nachfrage informiert.
- In einer Auktion kennen die Bieter typischerweise die Wertschätzungen der anderen Bieter nicht.

Ziel: Verallgemeinerung des Spielbegriffs, um solche Situationen abbilden und analysieren zu können.

$\rightarrow$ **Bayesianische Spiele**

Statische Bayesianische Spiele (Spezialfall Auktionen)

Ein **Bayesianisches Spiel in strategischer Form** mit unabhängig und stetig verteilter Information und privatem Nutzen wird vollständig durch die folgenden Elemente beschrieben:

1. Menge von Spielern $N = \{1, \ldots, n\}$.
2. Für jeden Spieler $i \in N$: Menge von Aktionen A_i.
3. Für jeden Spieler $i \in N$: Menge möglicher Typen $V_i = [\underline{v}_i, \overline{v}_i]$.
4. Für jeden Spieler $i \in N$: Bernoulli Nutzenfunktion $u_i : A_1 \times \cdots \times A_n \times V_i \to \mathbb{R}$.
5. Für jeden Spieler $i \in N$: Eine Randdichtefunktion $f_i(v_i)$ mit Support V_i.

Modellierung als Spiel unter imperfekter Info (Harsanyi)

Timing (nach Harsanyi, 1967):

1. Die Natur zieht einen Typenvektor $(v_1, \ldots, v_n)$ bzgl. der gemeinsamen Dichte $f_1(v_1) \cdot \ldots \cdot f_n(v_n)$. D.h., jeder Typ v_i wird unabhängig voneinander bzgl. der Dichte $f_i(v_i)$ aus V_i gezogen.

2. Die Natur enthüllt jedem Spieler i seinen eigenen Typ v_i, nicht aber die Typen der anderen Spieler.

3. Jeder Spieler i wählt simultan eine Aktion $a_i \in A_i$.

4. Jeder Spieler i erhält seine Auszahlung $u_i(a_1, \ldots, a_n, v_i)$.

Definition: Bayesianisches Nash-GG (BNGG)

Ein **Bayesianisches Nash-Gleichgewicht** ist ein Strategienprofil $(s_1(v_1), \ldots, s_n(v_n))$, so dass für jeden Spieler i und für jeden Typ $v_i \in V_i$ die Aktion $a_i = s_i(v_i)$ den erwarteten Nutzen von Spieler i maximiert, gegeben die Strategien der anderen Spieler.

Beispiel: Erwarteter Nutzen für $n = 2$:

Erwarteter Nutzen von Spieler 1 mit Typ v_1 gegeben die Strategie $s_2(v_2)$ von Spieler 2 wenn $V_i = [0, 1]$:

$$U_1(a_1, v_1) \equiv \int_0^1 u_1(a_1, s_2(v_2), v_1) f_2(v_2) \mathrm{d}v_2$$

Beispiel: EPA

Betrachte die EPA mit $n = 2$ (in der hier eingeführten Notation)

Nutzen von Bieter 1:

$$u_1(a_1, s_2(v_2), v_1) = \begin{cases} v_1 - a_1 & \text{wenn } a_1 > s_2(v_2) \\ 0 & \text{wenn } a_1 < s_2(v_2) \end{cases}$$

Erwarteter Nutzen von Bieter 1 mit Typ v_1:

$$\begin{aligned} U_1(a_1, v_1) &= \int\limits_{s_2(v_2)<a_1} (v_1 - a_1) \cdot f_2(v_2)\mathrm{d}v_2 + \int\limits_{s_2(v_2)>a_1} 0 \cdot f_2(v_2)\mathrm{d}v_2 \\ &= \int\limits_{s_2(v_2)<a_1} f_2(v_2)\mathrm{d}v_2 \cdot (v_1 - a_1) \\ &= \mathrm{Prob}\{s_2(v_2) < a_1\} \cdot (v_1 - a_1) \end{aligned}$$

Beispiel: APA

Betrachte die APA mit $n = 2$ (in der hier eingeführten Notation)

Nutzen von Bieter 1:

$$u_1(a_1, s_2(v_2), v_1) \quad = \quad \begin{cases} v_1 - a_1 & \text{wenn } a_1 > s_2(v_2) \\ -a_1 & \text{wenn } a_1 < s_2(v_2) \end{cases}$$

Erwarteter Nutzen von Bieter 1 mit Typ v_1:

$$\begin{aligned} & U_1(a_1, v_1) \\ = & \int\limits_{s_2(v_2) < a_1} (v_1 - a_1) \cdot f_2(v_2) \mathrm{d}v_2 + \int\limits_{s_2(v_2) > a_1} (-a_1) \cdot f_2(v_2) \mathrm{d}v_2 \\ = & \int\limits_{s_2(v_2) < a_1} f_2(v_2) \mathrm{d}v_2 \cdot v_1 - a_1 \\ = & \operatorname{Prob}\{s_2(v_2) < a_1\} \cdot v_1 - a_1 \end{aligned}$$

Beispiel: ZPA

Betrachte die ZPA mit $n = 2$ (in der hier eingeführten Notation)

Nutzen von Bieter 1:

$$u_1(a_1, s_2(v_2), v_1) = \begin{cases} v_1 - s_2(v_2) & \text{wenn } a_1 > s_2(v_2) \\ 0 & \text{wenn } a_1 < s_2(v_2) \end{cases}$$

Erwarteter Nutzen von Bieter 1 mit Typ v_1:

$$\begin{aligned} & U_1(a_1, v_1) \\ = & \int\limits_{s_2(v_2) < a_1} (v_1 - s_2(v_2)) \cdot f_2(v_2) \mathrm{d}v_2 + 0 \\ = & \operatorname{Prob}\{s_2(v_2) < a_1\} \left(v_1 - \int\limits_{s_2(v_2) < a_1} s(v_2) \frac{f_2(v_2)}{\operatorname{Prob}\{s_2(v_2) < a_1\}} \mathrm{d}v_2 \right) \\ = & \operatorname{Prob}\{s_2(v_2) < a_1\} \cdot (v_1 - \mathbb{E}[s_2(v_2) | s_2(v_2) < a_1]) \end{aligned}$$

Erwarteter Nutzen (allgemeiner Fall: $n \geq 2$)

Notation:

$$s_{-i}(v_{-i}) = (s_1(v_1), \ldots, s_{i-1}(v_{i-1}), s_{i+1}(v_{i+1}), \ldots, s_n(v_n))$$
$$dv_{-i} = dv_1 \cdots dv_{i-1} dv_{i+1} \cdots dv_n$$

Erwarteter Nutzen von Spieler i mit Typ v_i gegeben die Strategien $s_{-i}(v_{-i})$ der anderen Spieler wenn $V_i = [0, 1]$ für alle $i \in N$:

$$U_i(a_i, v_i) \equiv \int_0^1 \cdots \int_0^1 u_i(a_i, s_{-i}(v_{-i}), v_i) \, f_1(v_1) \ldots f_{i-1}(v_{i-1}) f_{i+1}(v_{i+1}) \ldots f_n(v_n) dv_{-i}$$

Schwache Dominanz in Bayesianischen Spielen

Definition: Schwach dominante Strategie

(a) Eine Strategie s_i' **dominiert** eine Strategie s_i'' **schwach**, wenn für jedes $v_i \in V_i$ und alle $a_{-i} \in A_{-i}$ die Ungleichung

$$u_i(s_i'(v_i), a_{-i}, v_i) \geq u_i(s_i''(v_i), a_{-i}, v_i)$$

gilt und für mindestens eine Kombination von v_i, v_{-i} und a_{-i} strikt ist.

(b) Eine Strategie s_i' ist **schwach dominant**, wenn sie jede andere Strategie s_i'' schwach dominiert.

Definition: Gleichgewicht in schwach dominanten Strategien

Ein GG in schwach dominanten Strategien ist ein Strategienprofil $(s_1(v_1), \dots, s_n(v_n))$, so dass für jeden Spieler i die Strategie $s_i(v_i)$ schwach dominant ist.