

### 4.7.1. ДВОЙНОЕ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕ

**Цель работы:** изучение зависимости показателя преломления необыкновенной волны от направления в двоякопреломляющем кристалле; определение главных показателей преломления в кристалле.

**Оборудование:** гелий-неоновый лазер, вращающийся столик с неподвижным лимбом, призма из исландского шпата, поляроид.

#### Теоретическая часть

В некоторых кристаллах потенциальные ямы, в которых находятся электроны вблизи узлов решетки, не являются симметричными. Причем всегда можно выбрать систему координат, чтобы потенциальная энергия электрона при малых отклонениях имела следующий вид

$$U = a_x x^2 a_y y^2 a_z z^2.$$

Если два коэффициента равны  $a_y = a_z = a_{\perp}$ ,  $a_x = a$ , то кристалл называют одноосным, а ось  $x$  – главной оптической осью.

По сколько величины отклонений электрона от положения равновесия вдоль разных осей зависят от соответствующих коэффициентов  $a_x, a_y, a_z$ , то в случае одноосного кристалла вектор поляризации  $\mathbf{P}$  будет неколлинеарен вектору напряженности внешнего электрического поля  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}_{\parallel} + \alpha_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} + \varepsilon_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}. \quad (1)$$

Записав волны в общем виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$$

и подставив в уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

получим

$$\mathbf{D} = -\frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}. \quad (2)$$

Главной плоскостью будем называть плоскость, образованную оптической осью и волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Анализ уравнений (2) показывает, что возможны два расположения векторов  $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{k}, \mathbf{H}$  друг относительно друга:

(а)  $\mathbf{D} = \varepsilon_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}$  –  $\mathbf{D}$  перпендикулярен главной плоскости

(б)  $\mathbf{D} = \varepsilon_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} + \varepsilon_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}$  –  $\mathbf{D}$  лежит в главной плоскости

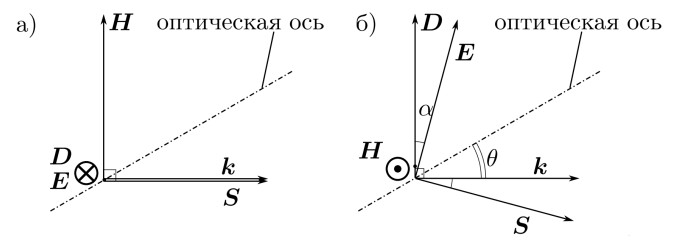


Рис. 1: Обыкновенная (а) и необыкновенная (б) волны

В первом случае волна называется обыкновенной, а во втором – необыкновенной. Поскольку уравнения Максвелла линейны, то в общем случае любое монохроматическое поле в кристалле можно представить как суперпозицию обыкновенной и необыкновенной волн.

Выразим фазовую скорость  $v = \frac{\omega}{k}$  для волны в анизотропной среде

$$(2) \Rightarrow v = \frac{cH}{D} = \frac{cE \cos \alpha}{H} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{c^2 E \cos \alpha}{D}} = c \sqrt{\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{D^2}}. \quad (3)$$

Тогда в соответствии с формулой (3) фазовая скорость обыкновенной волны

$$v_o = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} = \frac{c}{n_o}. \quad (4)$$

Для необыкновенной волны

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \varepsilon_{\parallel} E_{\parallel}^2 + \varepsilon_{\perp} E_{\perp}^2 = \frac{D_{\parallel}^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{D_{\perp}^2}{\varepsilon_{\perp}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_e = c \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_{\perp}}} = \frac{c}{n(\theta)}. \quad (5)$$

Величины  $n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ ,  $n_e = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$  называют главными показателями преломления. Используя эти обозначения можно записать формулу для  $n(\theta)$  из уравнения (5)

$$n^2(\theta) = \left( \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} \right)^{-1}. \quad (6)$$

При условии  $n_o - n_e \ll n_o, n_e$  формулу (6) можно упростить

$$n(\theta) \approx n_o + (n_o - n_e) \cos^2 \theta \quad (7)$$

## Экспериментальная установка

Исследуемая призма, изготовленная из исландского шпата, закреплена в центре поворотного столика. Оптическая ось кристалла параллельна длинному катету и верхней поверхности призмы. Преломляющий угол  $A$  можно рассчитать, если известны угловые координаты лучей отраженных от преломляющих граней.

Из рис.2 можно получить

$$\varphi_2 = A + \psi - \varphi_1, \quad (8)$$

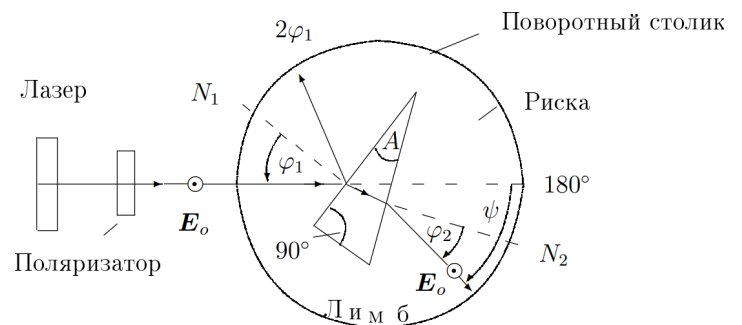


Рис. 2: Ход лучей в призме

где  $\psi$  – угол между первоначальным направлением и направлением преломленного луча – определяется по разности отсчетов на лимбе между точкой, куда попадает луч в отсутствии призмы, и точкой, куда попадает преломленный луч.

При монотонном увеличении угла падения  $\varphi_1$ , угол  $\psi$  сначала монотонно уменьшается, а затем монотонно увеличивается. Наименьшее значение угла  $\psi_m$  достигается при  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Тогда показатель преломления  $n$  можно рассчитать по формуле

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\psi_m + A}{2}\right)}{\sin \frac{A}{2}}. \quad (9)$$

Строго говоря, формулой (9) в случае анизотропной призмы можно воспользоваться только для обыкновенной волны. Но если учесть, что угол при вершине призмы мал и при угле наименьшего отклонения преломленный луч в призме распространяется под углом к оси кристалла, близким к  $\pi/2$ , то формулу (9) можно использовать в качестве оценки  $n_e$ .

## Результаты и обработка

### 1. Измерение преломляющего угла призмы $A$ :

- (а) устанавливаем луч, отраженный от длинного катета, на отметку  $10^\circ$  по лимбу;
- (б) записываем соответствующий отсчет по риску;
- (с) повторяем пункты (а), (б), изменяя координату отраженного луча от  $10^\circ$  до  $140^\circ$  с шагом  $10^\circ$ ;
- (д) повторяем пункты (а), (б) и (с), отражая луч от гипотенузы.

Результаты измерений приведены в Таблице 1. Используя формулу

$$A = r_{\text{гип}} - r_{\text{кат}} - 180^\circ,$$

где  $r_{\text{гип}}$ ,  $r_{\text{кат}}$  – отсчеты по риску для отражения от гипотенузы и от длинного катета соответственно, можно оценить значение преломляющего угла призмы

$$A = (38.8 \pm 0.2)^\circ$$

### 2. Определить, какой из преломленных лучей соответствует обыкновенной волне, а какой – необыкновенной, можно при помощи поляроида:

- (а) определяем разрешенное направление поляроида, смотря сквозь него на свет, отраженный от горизонтальной поверхности, при настраивании на минимум пропускания – разрешенное направление будет вертикальным;
- (б) получаем на лимбе изображения преломленных призмой лучей;
- (с) устанавливаем поляризатор между лазером и призмой;
- (д) вращая поляроид, определяем, какой луч соответствует вертикально поляризованному свету, а какой – горизонтально поляризованному;
- (е) так как оптическая ось призмы параллельна верхней горизонтальной поверхности, то вертикально поляризованный свет будет ей перпендикулярен, то есть соответствовать обыкновенной волне;
- (ф) аналогично горизонтально поляризованный свет, будет соответствовать необыкновенной волне.

## 3. Измерение главных показателей преломления:

- (а) направляем луч лазера на длинный катет так, чтобы координата отраженного луча по лимбу равнялась  $20^\circ$ ;
- (б) записываем координаты по лимбу преломленных лучей, соответствующих обыкновенной и необыкновенной волнам;
- (в) повторяем пункты (а) и (б), изменяя координату отраженного луча от  $20^\circ$  до  $140^\circ$  с шагом  $10^\circ$ ;
- (г) полученные значения приведены в Таблице 2;
- (е) 2 раза воспользуемся законом Снелла:

$$\sin \varphi_1 = n \sin \beta_1,$$

$$n \sin \beta_2 = \sin \varphi_2,$$

и получим,

$$n = \frac{1}{\sin A} \sqrt{\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos A} \quad (10)$$

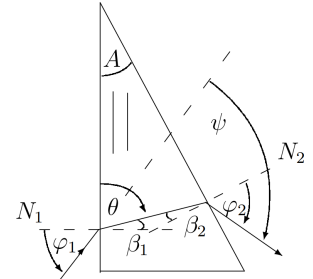


Рис. 3: Преломление луча в призме

- (ф) заметим, что в формуле (10) показатель преломления  $n$  в случае необыкновенной волны будет зависеть от угла  $\theta$ ;
- (г) используя специальное ПО для обработки значений углов, получим оценки для главных показателей преломления

$$n_o = (1.647 \pm 0.003) \quad \chi_o^2 \approx 56$$

$$n_e = (1.467 \pm 0.005) \quad \chi_e^2 \approx 2$$

- (х) при этом для принятия гипотезы, значения хи-квадрата должны быть меньше 20, то есть по проведенному нами эксперименту невозможно принять гипотезу о независимости главного показателя преломления  $n_o$  от угла  $\theta$ .

## Выводы

- ♦ В данной работе приведена оценка преломляющего угла призмы из исландского шпата

$$A = (38.8 \pm 0.2)^\circ.$$

- ♦ Был проведен эксперимент для оценки главных показателей преломления одноосного кристалла

$$n_o = (1.647 \pm 0.003) \quad \chi_o^2 \approx 56$$

$$n_e = (1.467 \pm 0.005) \quad \chi_e^2 \approx 2$$

значения отличаются от табличных

$$n_{o\text{табл}} = 1.655$$

$$n_{e\text{табл}} = 1.485$$

это может говорить о том, что погрешности в работе были занижены или наш образец отличается от эталона.

- ◆ Ожидания подкрепленные теоретическими выкладками подтвердились частично: гипотеза о том, что показатель преломления в случае обыкновенной волны не зависит от угла поворота призмы  $\theta$  не подтвердилась, тогда как гипотеза о зависимости показателя преломления в случае необыкновенной волны (см. уравнения (6), (7)) подтвердилась.
- ◆ Причем график (см. Приложение), построенный для случая обыкновенной волны, показывает зависимость похожую на зависимость в случае необыкновенной волны. Это может говорить о том, что падающий на призму луч лазера который, как считалось параллелен верхней поверхности кристалла, был направлен под некоторым углом к горизонту. То есть несогласование эксперимента с теорией могло произойти из-за неточной юстировки.

Таблица 1: Измерение преломляющего угла  $A$  призмы

	Лимб (отра- женный луч), °	Риска (отражение от длинного катета), °	Риска (отражение от гипотенузы), °
0	10	65	283
1	20	70	289
2	30	75	293
3	40	80	299
4	50	85	304
5	60	90	308
6	70	95	314
7	80	100	319
8	90	105	324
9	100	110	329
10	110	115	334
11	120	120	339
12	130	130	344
13	140	140	349

Таблица 2: Измерение главных показателей преломления  $n_o$ ,  $n_e$ 

	Отраженный луч	Преломленный обыкновенный луч	Преломленный необыкновенный луч
0	20	212.5	203.0
1	30	210.5	202.0
2	40	209.0	201.8
3	50	208.5	201.5
4	60	208.0	202.0
5	70	208.0	202.5
6	80	209.0	203.0
7	90	210.0	204.5
8	100	211.0	206.0
9	110	213.0	208.0
10	120	215.0	210.0
11	130	217.0	212.5
12	140	220.5	215.5