V207: Das Kugelfall - Viskometer nach Höppler

Simon Schulte
simon.schulte@udo.edu

Tim Sedlaczek
tim.sedlaczek@udo.edu

Durchführung: 15.11.2016
Abgabe: 22.11.2016

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Es soll mit Hilfe der Kugelfallmethode bei einer laminaren Strömung die Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität von destilliertem Wasser bestimmt werden.

2 Theorie

Wenn ein Körper sich durch eine Flüssigkeit bewegt, wirken, in entgegengesetzter Richtung zur Gravitation Reibungskräfte. Diese hängen von der Fläche A, der Geschwindigkeit v des Körpers und von der Viskosität η der Flüssigkeit ab. Die Viskosität einer Flüssigkeit hängt von der Temperatur ab. In diesem Versuch wird die Viskosität von destilliertem Wasser untersucht, welche mit zunehmender Temperatur geringer wird. Um besagte Viskosität zu bestimmen, lässt man eine Kugel mit Radius r laminar durch ein mit destilliertem Wasser gefülltes Rohr fallen. Die Stokesche Reibung wird dann mit der Formel

$$F_R = 6\pi\eta v r \tag{1}$$

bestimmt, wobei v die Fallgeschwindigkeit ist. Die Reibungskraft $\vec{F_R}$ und die Antriebskraft $\vec{F_A}$ wirken dabei der Gravitationskraft $\vec{F_g}$ entgegen. Die beiden entgegengesetzten Kräfte werden stärker, umso schneller der Körper sich bewegt, solange, bis ein Kräftegleichgewicht entsteht und der Körper eine konstante Geschwindigkeit erreicht. Dabei wird eine annäherend laminare Strömung erzeugt. Indem man die Reynoldsche Zahl für die Bewegung errechnet, lässt sich dann sagen, ob die Bewegung des Körpers tatsächlich laminar war. Es gibt eine kritische Zahl für destilliertes Wasser, anhand welcher man sehen kann, wenn die errechnete Reynoldsche Zahl kleiner oder größer ist, ob die Bewegung laminar oder turbulent war. Um eine laminare Bewegung zu gewährleisten, wird das Fallrohr um wenige Grade geneigt, sodass die Kugel an der Rohrwand hinabgleitet und sich keine Wirbel ausbilden können. Der Durchmesser des Körpers selbst ist nur geringfügig geringer, als der des Rohres. Mithilfe der Dichte des destillierten Wassers ρ_{Fl}, der Dichte des Körpers ρ_K, der Apperaturkonstante K und der Fallzeit t lässt sich dann die Viskosität η berechnen:

$$\eta = K(\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot t \tag{2}$$

Dabei enthält die Apperaturkonstante K sowohl die Kugelgeometrie, als auch die Fallhöhe. Da die Viskosität von vielen Flüssigkeiten stark temperaturabhängig ist, wird die temperaturabhängige Viskosität durch die Andradesche Gleichung:

$$\eta(T) = Aexp(\frac{B}{T}) \tag{3}$$

beschrieben, mit den Konstanten A und B.

3 Durchführung

3.1 Versuchsaufbau

Wie in Abbildung 1 gezeigt fällt die Kugel durch ein Rohr, welches mit Wasser gefüllt ist. Durch zwei Stopfen und jeweils einer Schraube über diesen Stopfen an den beiden Rohrenden kann man sowohl Wasser, als auch die Kugel selbst, in das Rohr füllen. An dem Rohr sind drei Messmarken befestigt, die jeweils mit einem Abstand von 5 cm auseinander liegen. Diese werden zur Zeitmessung genutzt. Die Libelle wird genutzt, um zu prüfen, ob das Viskosimeter gerade steht. Um die Temperatur des Wassers im Rohr regulieren zu können, nutzt man ein Thermostat, an welchem man die Temperatur des Wassers, welches das Rohr in einem zylinderförmigen Körper umgibt, einstellen kann.

Abbildung 1: Das Höppler - Viskometer

3.2 Versuchsdurchführung

Zunächst bestimmt man die Masse und die geometrischen Maße der beiden Kugeln. Dabei fällt auf, dass eine Kugel größer als die andere ist. Daraufhin überprüft man mit Hilfe der Libelle, ob das Viskometer gerade steht. Als nächstes füllt man das Rohr mit destilliertem Wasser und sorgt dafür, dass sich möglichst keine Luftbläschen mehr am Rande des Rohres befinden. Dafür nutzt man einen Glasstab. Dann gibt man vorsichtig die Kugel in das Rohr und achtet darauf, dass auch an der Kugel möglichst keine Luftbläschen sind, denn diese würden die Messungen verfälschen. Nun misst man die Zeit, die die beiden Kugeln bei Zimmertemperatur brauchen, um 10 cm Strecke zurückzulegen, also von der obersten Markierung zur untersten zu gelangen. Dabei ist auf den bereits in der Theorie angesprochenen Kräfteausgleich zu achten. Die beiden Markierungen sind bewusst nicht am oberen Rand des Rohres befestigt, damit die Kugel etwas Zeit hat, um eine konstante Geschwindigkeit zu erreichen. Durch das Drehen des Rohres um 180 grad kann man dann die nächste Messung durchführen. Diese Messung führt man dann für beide Kugeln jeweils 10 mal durch und misst die Zeit. Für die große Kugel muss dann noch die Apperaturkonstante K bestimmt werden. Danach heizt man das Wasserbad, welches das Rohr umgibt auf. Man führt jeweils vier Messungen für 10 verschiedene Temperaturen durch. Diese befinden sich zwischen 25 °C und 70 °C. Es werden die Zeiten für die größere Kugel gemessen. Zuletzt errechnet man die Reynoldsche Zahl für die gemessenen Daten und überprüft, ob die Strömung laminar ist.

4 Auswertung

Sämtliche Fehlerrechnungen in der Auswertung wurden mit den Python-Bibliotheken Numpy und Uncertainties durchgeführt. Diese nutzen folgende Formel für die Mittelwerte:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4}$$

Der Standardfehler des Mittelwertes ergibt sich nach

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}. \tag{5}$$

Resultiert eine Größe über eine Gleichung aus mehreren anderen fehlerbehafteten Größen, so berechnet sich der Gesamtfehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_2}\Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_n}\Delta x_n\right)^2}. \tag{6}$$

4.1 Messwerte

Für die beiden Kugeln wurden folgende Daten gemessen:

Tabelle 1: Durchmesser und Masse

Kleine Kugel		Große Kugel	
d_{kl} / mm	m_{kl} / g	d_{gr} / mm	m_{gr} / g
$15{,}64 \pm 0{,}05$	$4{,}46 \pm 0{,}01$	$15{,}82 \pm 0{,}05$	$4{,}60 \pm 0{,}01$

Tabelle 2: Zeiten für beide Kugeln bei Raumtemperatur ca. 20 °C

t_{gr} / s	t_{kl} / s
98,41	12,87
98,41	13,03
98,20	13,27
98,64	13,04
97,96	13,03
98,01	12,81
97,46	12,86
97,60	12,84
97,04	12,91
97,52	12,72
98,16	12,78
97,84	12,80
98,46	12,76
97,72	12,92
98,04	12,93
98,18	12,93
97,64	12,92
97,72	12,87
97,64	12,84
97,04	12,78

Tabelle 3: Zeiten für die große Kugel bei der jeweiligen Temperatur

$t_{25\,°C}$ / s	$t_{30\,°C}$ / s	$t_{35\,°C}$ / s	$t_{40\,°C}$ / s	$t_{45\,°C}$ / s
89,58	79,35	72,87	66,58	60,46
89,07	79,87	72,04	65,77	59,75
89,75	79,55	73,04	66,41	60,40
88,70	79,48	72,16	65,56	59,82

$t_{50\,°C}$ / s	$t_{55\,°C}$ / s	$t_{60\,°C}$ / s	$t_{65\,°C}$ / s	$t_{70\,°C}$ / s
55,03	50,63	47,10	43,12	40,63
54,80	50,33	46,66	43,03	40,69
55,12	50,80	47,33	43,35	40,44
54,33	50,15	46,50	43,15	40,41

4.2 Bestimmung der Dichten

Zu Beginn soll die Dichte der beiden Kugeln bestimmt werden. Hierzu verwendet man die Masse und das Volumen der Kugel. Die Formel für das Volumen einer Kugel ist:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 \tag{7}$$

Bei einer homogenen Massenverteilung folgt dann für die Dichte:

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{8}$$

Damit ergeben sich dann folgende Werte für die Dichten der beiden Kugeln:

ρ_{kl} / g/cm^3	ρ_{gr} / g/cm^3
$2{,}23 \pm 0{,}02$	$2{,}22 \pm 0{,}02$

4.3 Bestimmung der Konstante K der großen Kugel

Um die in Formel (2) erwähnte Apparatekonstante K der großen Kugel zu bestimmen, ermittelt man zunächst die beiden Mittelwerte der Fallzeiten bei Raumtemperatur. Diese sind in der Tabelle 4 dargestellt.

Tabelle 4: Mittelwerte der Fallzeiten bei Raumtemperatur

$\bar{t}_{\text{kl}}$ / s	$\bar{t}_{\text{gr}}$ / s
$12{,}90 \pm 0{,}03$	$97{,}88 \pm 0{,}10$

Durch Einsetzen der oben angegebenen Dichte von Wasser, bei 20 °C, und der anderen Werte der kleinen Kugel in (2) erhält man die dynamische Viskosität η von Wasser bei 20 °C. Die Apparatekonstante K_{kl} war mit $K_{\text{kl}} = 0{,}076\,40\,\text{mPa}\,\text{cm}^3/\text{g}$ gegeben. Damit folgt: $\eta\,(20\,°\text{C}) = (1{,}21 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-2}\,\text{g}/(\text{cm}\,\text{s})$. Durch entsprechendes Umformen der Formel auf K und einsetzen der Werte der große Kugel erhält man schließlich K_{gr}.

$K_{\text{gr}} = (0{,}010\,13 \pm 0{,}000\,26)\,\text{mPa}\,\text{cm}^3/\text{g}$

4.4 Verhalten von destiliertem Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur

Um das verhalten der dynamischen Viskosität von destiliertem Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur zu analysieren, mittelt man zuerst die Fallzeiten, die bei Temperaturen von 20 °C bis 70 °C in 5er Schritten gemessen wurden. Die Ergebnisse dazu stehen in Tabelle 6

Tabelle 5: Dichte von Wasser bei der jeweiligen Temperatur nach [Uni16]

$T\,/\,°\mathrm{C}$	$\rho_{\mathrm{H_2O}}\,/\,\mathrm{g/cm^3}$
20	0,9982
25	0,9971
30	0,9957
35	0,9940
40	0,9932
45	0,9902
50	0,9880
55	0,9857
60	0,9832
65	0,9806
70	0,9778

Tabelle 6: Gemittelte Fallzeit bei der jeweiligen Temperatur

$T\,/\,°\mathrm{C}$	$\bar{t}\,/\,\mathrm{s}$
25	$89{,}27 \pm 0{,}24$
30	$79{,}56 \pm 0{,}11$
35	$72{,}53 \pm 0{,}25$
40	$66{,}08 \pm 0{,}25$
45	$60{,}11 \pm 0{,}19$
50	$54{,}82 \pm 0{,}18$
55	$50{,}48 \pm 0{,}15$
60	$46{,}90 \pm 0{,}19$
65	$43{,}16 \pm 0{,}07$
70	$40{,}54 \pm 0{,}07$

Durch Einsetzen in Formel (2) zusammen mit den Werten der großen Kugel erhält man diese verschiedenen Werte von η:

Tabelle 7: Dynamische Viskosität von dest. Wasser bei der jeweiligen Temperatur

$T\,/\,°\mathrm{C}$	$\eta\,(T)\;/\,\mathrm{g/(cm\,s)}$
20	$0{,}012\,10 \pm 0{,}000\,22$
25	$0{,}011\,05 \pm 0{,}000\,20$
30	$0{,}009\,86 \pm 0{,}000\,18$
35	$0{,}009\,00 \pm 0{,}000\,17$
40	$0{,}008\,20 \pm 0{,}000\,15$
45	$0{,}007\,48 \pm 0{,}000\,14$
50	$0{,}006\,83 \pm 0{,}000\,13$
55	$0{,}006\,30 \pm 0{,}000\,12$
60	$0{,}005\,87 \pm 0{,}000\,11$
65	$0{,}005\,41 \pm 0{,}000\,10$
70	$0{,}005\,10 \pm 0{,}000\,09$

In dem folgenden Graphen wurden die errechneten Werte von η logarythmiert gegen den Kehrwert der jeweiligen Temperatur in K aufgetragen. Außerdem wurde eine lineare Kurvenanpassung an die Andradesche Gleichung (3) durchgeführt um die Parameter A und B zu ermitteln. M ist dabei die Steigung der Ausgleichsgeraden, sodass $A = e^M$.
$M = -10{,}44 \pm 0{,}05$
$A = (2{,}9 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{g/(cm\,s)}$
$B = (1765 \pm 15)\,\mathrm{K}$

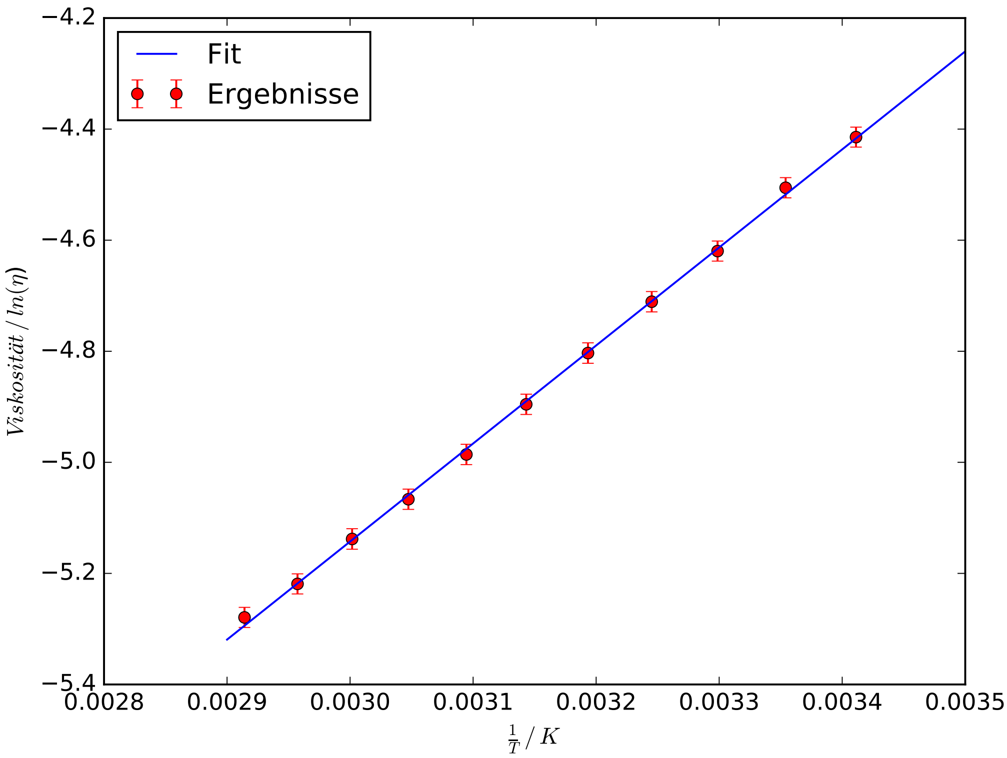

Abbildung 2: Graph der gemessenen Werte von η in Abhängigkeit von der Temperatur, mit Fit-Kurve.

4.5 Theoretische Rechnung zur Andradesche Gleichung

Um Vergleichswerte zu erhalten nutzen wir nun theoretische Werte für η 8 und führen erneut die Ausgleichsrechnung durch.

Tabelle 8: Literaturwerte: Dynamische Viskosität von dest. Wasser bei der jeweiligen Temperatur [Uni16].

$T\,/\,°\mathrm{C}$	$\eta\,(T)\ /\,\mathrm{g/(cm\,s)}$
20	0,010 02
25	0,008 90
30	0,007 98
35	0,007 20
40	0,006 53
45	0,005 96
50	0,005 47
55	0,005 04
60	0,004 67
65	0,004 33
70	0,004 04

Damit ergeben sich dann diese Werte für A und B:
$A = (1{,}9 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{g/(cm\,s)}$
$B = (1821 \pm 22)\,\mathrm{K}$

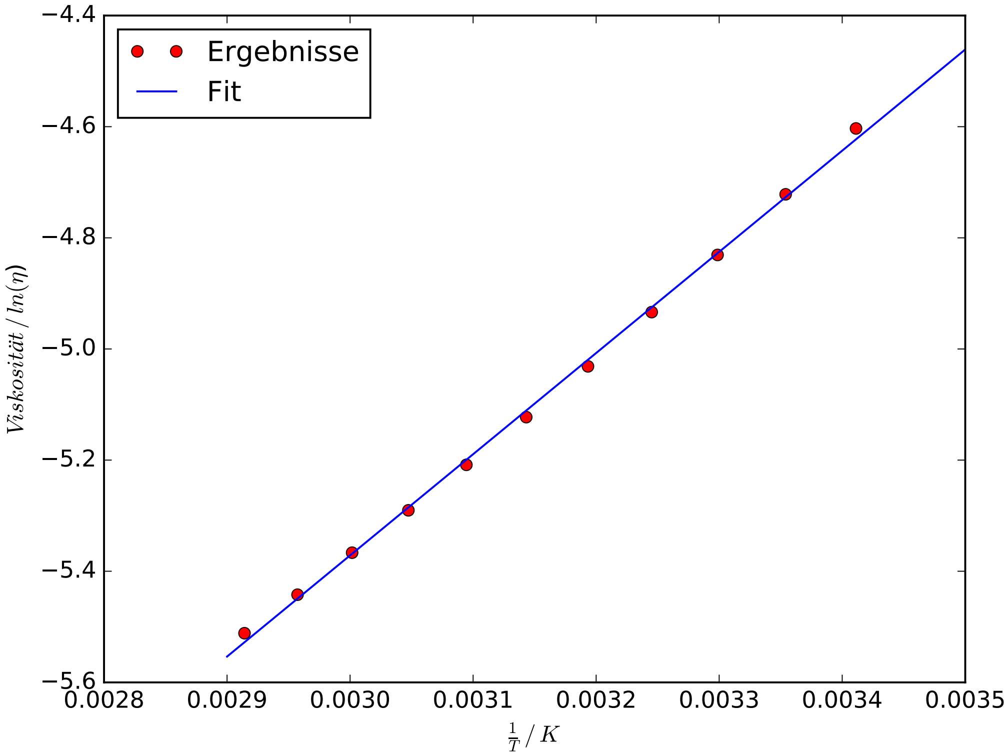

Abbildung 3: Graph der Literaturwerte von η in Abhängigkeit von der Temperatur, mit Fit-Kurve.

4.6 Berechnung der Reynoldszahlen und Beurteilung ob die Strömung laminar ist

Zur berechnung der Reynoldszahlen wird die Formel [Mas16]

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d_{\text{Kugel}}}{\eta} \tag{9}$$

verwendet. Dabei ist ρ die Dichte des Wassers und v die Geschwindigkeit der Kugel. Mit dieser ergeben sich dann die folgenden Werte für die Reynoldszahlen:

Tabelle 9: Reynoldszahlen der größeren Kugel bei der jeweiligen Temperatur

$T\,/\,°\mathrm{C}$	Re_{gr}
20	$13{,}3 \pm 0{,}2$
25	$16{,}0 \pm 0{,}3$
30	$20{,}1 \pm 0{,}4$
35	$24{,}1 \pm 0{,}5$
40	$29{,}0 \pm 0{,}6$
45	$34{,}8 \pm 0{,}7$
50	$41{,}7 \pm 0{,}8$
55	$49{,}0 \pm 0{,}9$
60	$56{,}5 \pm 1{,}1$
65	$66{,}4 \pm 1{,}2$
70	$74{,}9 \pm 1{,}4$

Für die kleinere Kugel beträgt die Reynoldszahl

$Re_{\mathrm{kl}} = 100 \pm 2$

Als Vergleichswert dient die kritische Reynoldszahl für eine Rohrströmung, welche 2300 beträgt [Spe16]. Da unsere Reynoldszahlen viel kleiner sind handelt es sich bei der vorliegenden Strömung um eine laminare Strömung. Das heißt, dass keine Turbulenzen entstehen.

5 Diskussion

Der Versuch ist an einigen Stellen fehleranfällig: Die Temperatur ist nicht immer perfekt konstant während der Zeitmessung, sondern verringert sich mit der Zeit. Zudem wurde sie nur mit einem Thermometer gemessen und dafür keine Fehler in betracht gezogen. Des Weiteren wurde die Zeit per Hand gemessen. Die Literaturwerte, die zum Vergleich genutzt wurden, entsprechen der Dynamischen Viskosität von Wasser bei 1 bar Druck. In unserem Fall haben wir den Druck nicht weiter berücksichtigt, was ebenfalls zu unterschieden führen kann. Daraus resultierende Fehler sind jedoch nicht besonders groß, wie man an den Ergebnissen sieht. Die gemessenen Werte weichen nicht stark von den Literaturwerten ab und die errechneten Reynoldzahlen lassen darauf schließen, dass wir in dem Versuch eine laminare Strömung erzeugt haben. Es ist sichtbar, dass sich die dynamische Viskosität von Wasser durch erhöhte Temperaturen verkleinert.

Literatur

[Mas16] Maschinenbau-Wissen.de. *Reynoldszahl und Strömungsarten.* 21. Nov. 2016. URL: `http://www.maschinenbau-wissen.de/skript3/fluidtechnik/hydraulik/202-reynoldszahl`.

[Spe16] Spektrum.de. *Lexikon der Physik-Rohrströmung.* 21. Nov. 2016. URL: `http://www.spektrum.de/lexikon/physik/rohrstroemung/12508`.

[TuD16] Tu-Dortmund. *Versuch 207: Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler.* 18. Nov. 2016. URL: `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Viskositaet.pdf`.

[Uni16] Uni-Magdeburg. *Stoffwerte-Flüssigkeiten.* 21. Nov. 2016. URL: `http://www.uni-magdeburg.de/isut/LSS/Lehre/Arbeitsheft/IV.pdf`.