

# 1 Auswertung

## 1.1 Messwerte

An den Markierungen auf den Zeichnungen des XY-Schreibers wurden die in Tabelle 1 stehenden Werte für die Frequenz gemessen.

**Tabelle 1:** Werte der Frequenz an den verschiedenen Punkten der Skala.

| Markierung | $LC - \text{Kette}$ | $LC_1C_2 - \text{Kette}$ |
|------------|---------------------|--------------------------|
|            | $f / \text{Hz}$     | $f / \text{Hz}$          |
| 1          | 31 713              | 32 822                   |
| 2          | 36 077              | 39 054                   |
| 3          | 41 028              | 46 170                   |
| 4          | 46 567              | 53 910                   |
| 5          | 54 687              | 62 620                   |

In Tabelle 2 stehen die Frequenzen zu den mit den Lissajous-Figuren bestimmten Phasenverschiebungen. Dabei steht  $n$  für das  $n$ -Fache von  $\pi$ . Außerdem liegt bei  $n = 1$  die Grundschiwingung und bei jedem weiteren  $n$  die  $n - 1$ -te Oberschiwingung vor.

**Tabelle 2:** Werte der Frequenz zur entsprechenden gesamten Phasenverschiebung  $n \cdot \pi$  ( $LC - \text{Kette}$ ).

| $n$ | $LC - \text{Kette}$ | $LC_1C_2 - \text{Kette}$ |
|-----|---------------------|--------------------------|
|     | $f / \text{Hz}$     | $f / \text{Hz}$          |
| 1   | 5015                | 5725                     |
| 2   | 9950                | 11 550                   |
| 3   | 14 900              | 17 125                   |
| 4   | 19 580              | 22 380                   |
| 5   | 24 220              | 27 210                   |
| 6   | 28 550              | 31 490                   |
| 7   | 32 400              | 34 830                   |
| 8   | 36 100              | 38 710                   |
| 9   | 39 550              |                          |
| 10  | 42 300              |                          |
| 11  | 45 200              |                          |
| 12  | 47 150              |                          |
| 13  | 48 900              |                          |
| 14  | 50 140              |                          |

In Tabelle 3 stehen die gemessenen Spannungen am  $n$ -ten Kettenglied bei einer Frequenz von 5 kHz bzw. 10 kHz (also Grundschwingung und erste Oberschwingung).

**Tabelle 3:** Spannung am  $n$ -ten Kettenglied.

| $n$ | $f = 5 \text{ kHz}$ | $f = 10 \text{ kHz}$ | $f = 5 \text{ kHz}$ |
|-----|---------------------|----------------------|---------------------|
|     | $U / \text{V}$      |                      |                     |
| 0   | 17,25               | 16,5                 | 0,325               |
| 1   | 16,25               | 14,5                 | 0,325               |
| 2   | 15                  | 11                   | 0,320               |
| 3   | 13                  | 6                    | 0,315               |
| 4   | 11                  | 0,25                 | 0,310               |
| 5   | 8,5                 | 6                    | 0,315               |
| 6   | 6                   | 11,5                 | 0,320               |
| 7   | 3                   | 15,5                 | 0,325               |
| 8   | 0,25                | 16,75                | 0,325               |
| 9   | 2,75                | 16                   | 0,320               |
| 10  | 5,5                 | 12,25                | 0,315               |
| 11  | 8                   | 6,5                  | 0,310               |
| 12  | 10                  | 0,25                 | 0,310               |
| 13  | 11,75               | 6,5                  | 0,315               |
| 14  | 13,25               | 11,25                | 0,320               |
| 15  | 13,75               | 16                   | 0,325               |
| 16  | 14,5                | 17,5                 | 0,325               |

## 1.2 Bestimmung der Grenzfrequenzen

Zur Bestimmung der Grenzfrequenzen wird zunächst ein Referenzpunkt auf dem Papier gewählt. Mittels Python wird dann der Abstand auf dem Papier als Funktion der Frequenz nach

$$x(f) = a \cdot \log(|f|) + b \quad (1)$$

gefittet. Durch Umkehren der Funktion und einsetzen des geometrisch bestimmten Abstands ergeben sich die jeweiligen Grenzfrequenzen. Die Funktion  $f(x)$  lautet dann

$$f(x) = e^{\frac{x-b}{a}} \quad (2)$$

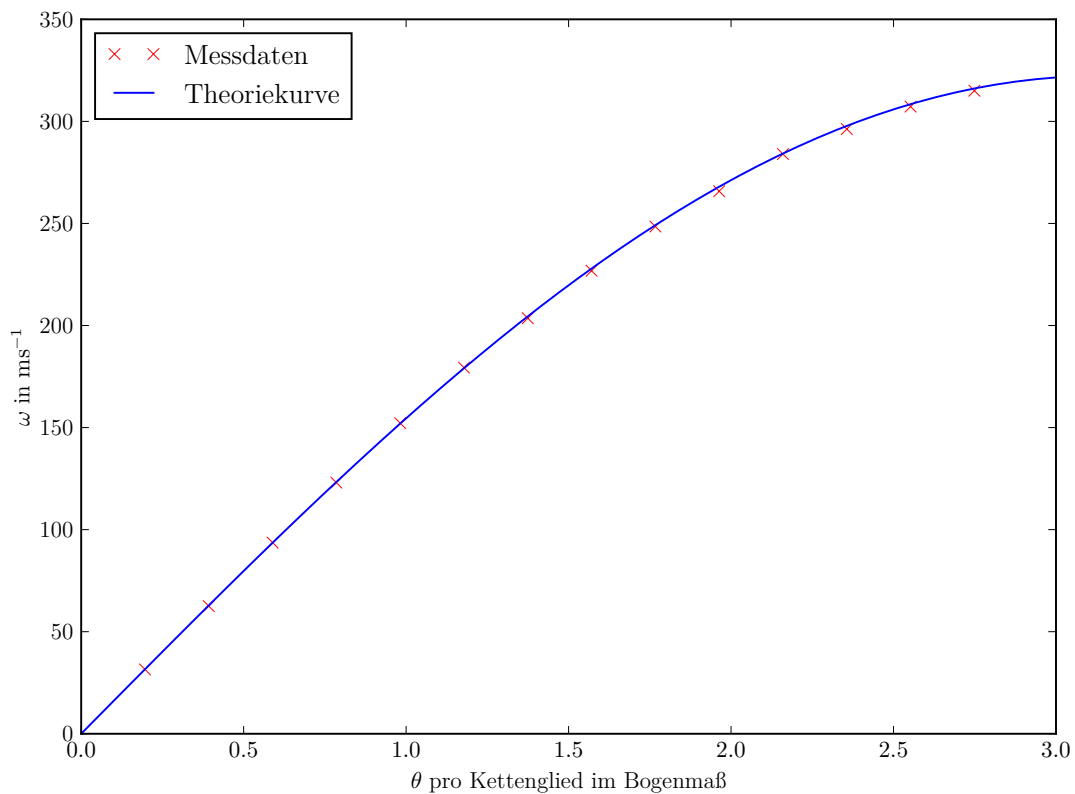
mit den Parametern  $a = (23,8 \pm 0,2) \text{ cm}$  und  $b = (-244 \pm 2) \text{ cm}$  für die  $LC$ -Kette bzw.  $a = (18,6 \pm 0,3) \text{ cm}$  und  $b = (-190 \pm 4) \text{ cm}$  für die  $LC_1 C_2$ -Kette.

Die Markierungen, bei der Aufzeichnung der  $LC$ -Kette, liegen bei einem Abstand von 3 cm, 6 cm, 9 cm, 12 cm und 16 cm vom Referenzpunkt. Damit liegt die Grenzfrequenz, der  $LC$ -Kette, bei 50,899 kHz. Nach (??) ist mit den gegebenen Induktivitäten und Kapazitäten der Literaturwert dafür 51,3 kHz und die relative Abweichung des gemessenen Wertes beträgt 0,8 %.

Für die Aufzeichnung der  $LC_1C_2$ -Kette liegen die Markierungen bei 3 cm, 6 cm, 9 cm, 12 cm und 15 cm vom Referenzpunkt. Damit ergibt sich die Grenzfrequenz, des akustischen Astes, zu 35,879 kHz. Der optische Ast beginnt bei 55,207 kHz und endet bei 66,303 kHz. Zu den starken Schwankungen kommt es, da zuvor der Wellenwiderstand für  $\omega = 0$  eingestellt wurde. Da der Wellenwiderstand von  $\omega$  abhängt passt der zuvor eingestellte Wert nicht mehr zur Welle. Es kommt zu Reflexionen. Bei bestimmten Frequenzen können sich dann stehende Wellen ausbilden, was sich dann in den Aufzeichnungen in Form dieser Schwankungen zeigt. Nach den Formeln (??), (??) und (??) folgen die Literaturwerte 36,275 kHz, 55,524 kHz und 66,324 kHz. Die relativen Abweichungen betragen 1,1 %, 0,6 % und 0,03 %.

### 1.3 Dispersionskurven

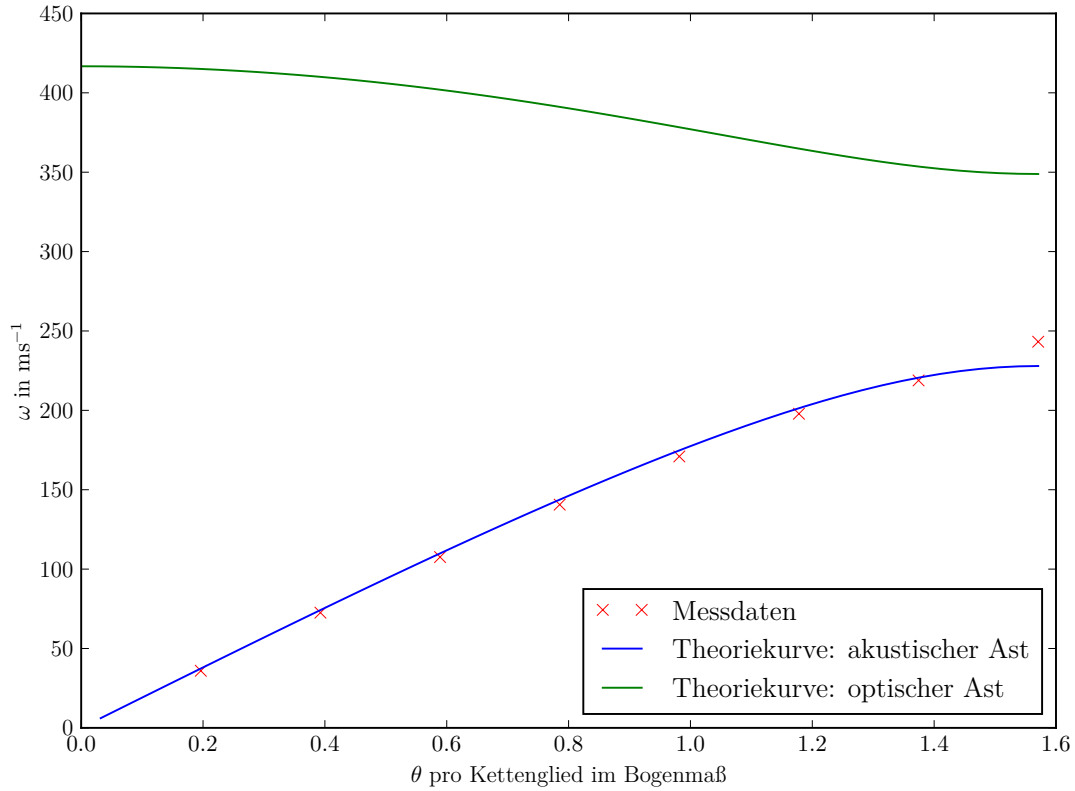
Nun wird nach Formel (??) die Dispersionskurve der  $LC$ -Kette berechnet und zusammen mit den gemessenen Werten aus Tabelle 2 in den Graphen 1 eingetragen.



**Abbildung 1:** Dispersionskurve  $LC$ -Kette.

An dem Graphen ist zu sehen, dass sich die Kreisfrequenz bei einem Phasenwinkel von  $\pi$  einer Grenze von etwa 320/ms nähert. Das entspricht also einer Frequenz von etwa 51 kHz.

Nach Formel (??) ergibt sich, mit dem negativen Vorzeichen vor der Wurzel, der akustische Ast der  $LC_1C_2$ -Kette während das positive Vorzeichen vor der Wurzel zu dem optischen Ast führt. Beide Varianten, der Funktion, sind in Abbildung 2, zusammen mit den gemessenen Werten, aufgetragen.



**Abbildung 2:** Dispersionskurve  $LC_1C_2$ -Kette.

Zu erkennen ist, dass sich der akustische Ast einer Kreisfrequenz von ca. 230/ms bzw. einer Frequenz von 36 kHz nähert. Außerdem befindet sich zwischen den Kreisfrequenzen 350/ms (56 kHz) und 420/ms (67 kHz) die Theoriekurve des optischen Astes.

#### 1.4 Berechnung der Phasengeschwindigkeit

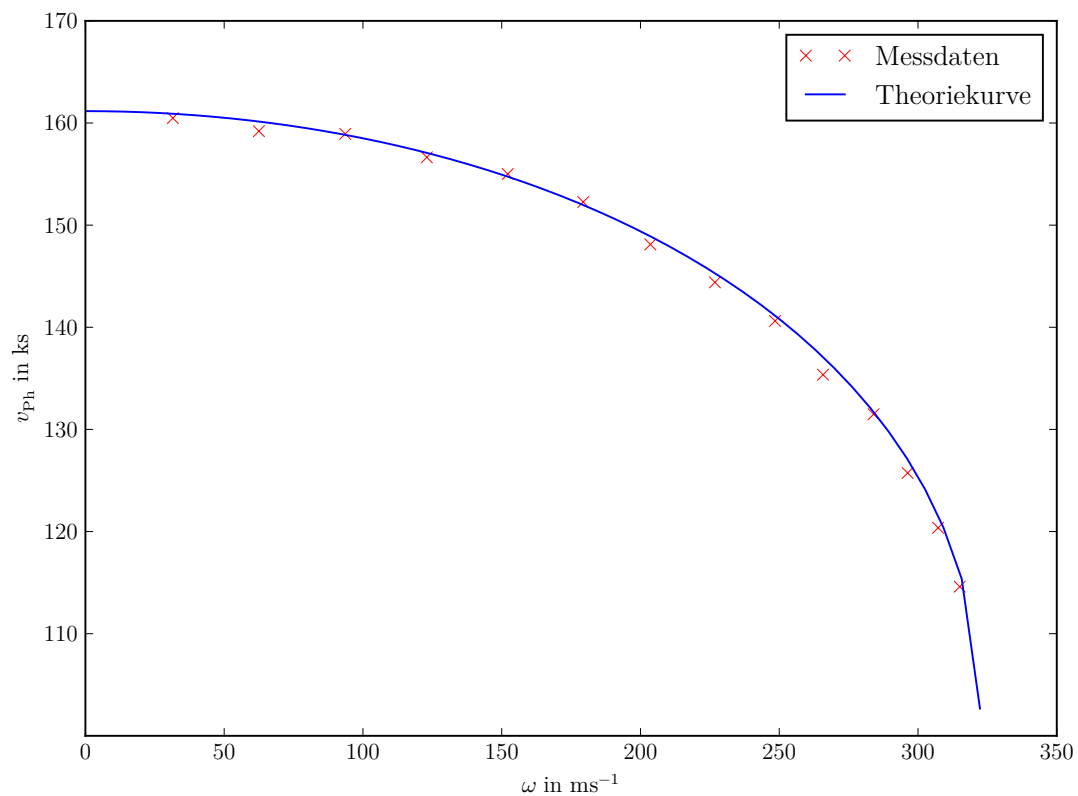
Um die Phasengeschwindigkeit der verschiedenen Eigenmoden zu bestimmen, wird der Quotient aus der Kreisfrequenz und der Phase berechnet. Die Ergebnisse davon stehen in Tabelle 4.

**Tabelle 4:** Phasengeschwindigkeiten, der Wellen bei entsprechender Kreisfrequenz ( $LC$ -Kette).

| $f / \text{Hz}$ | $v_{\text{Ph}} / 1/\text{s}$ |
|-----------------|------------------------------|
| 5015            | 160 480                      |
| 9950            | 159 200                      |
| 14 900          | 158 933                      |
| 19 580          | 156 640                      |
| 24 220          | 155 008                      |
| 28 550          | 152 267                      |
| 32 400          | 148 114                      |
| 36 100          | 144 400                      |
| 39 550          | 140 622                      |
| 42 300          | 135 360                      |
| 45 200          | 131 491                      |
| 47 150          | 125 733                      |
| 48 900          | 120 369                      |
| 50 140          | 114 606                      |

Diese werden zusammen mit der Theoriekurve nach Formel (??), wie in Abbildung 3 aufgetragen.

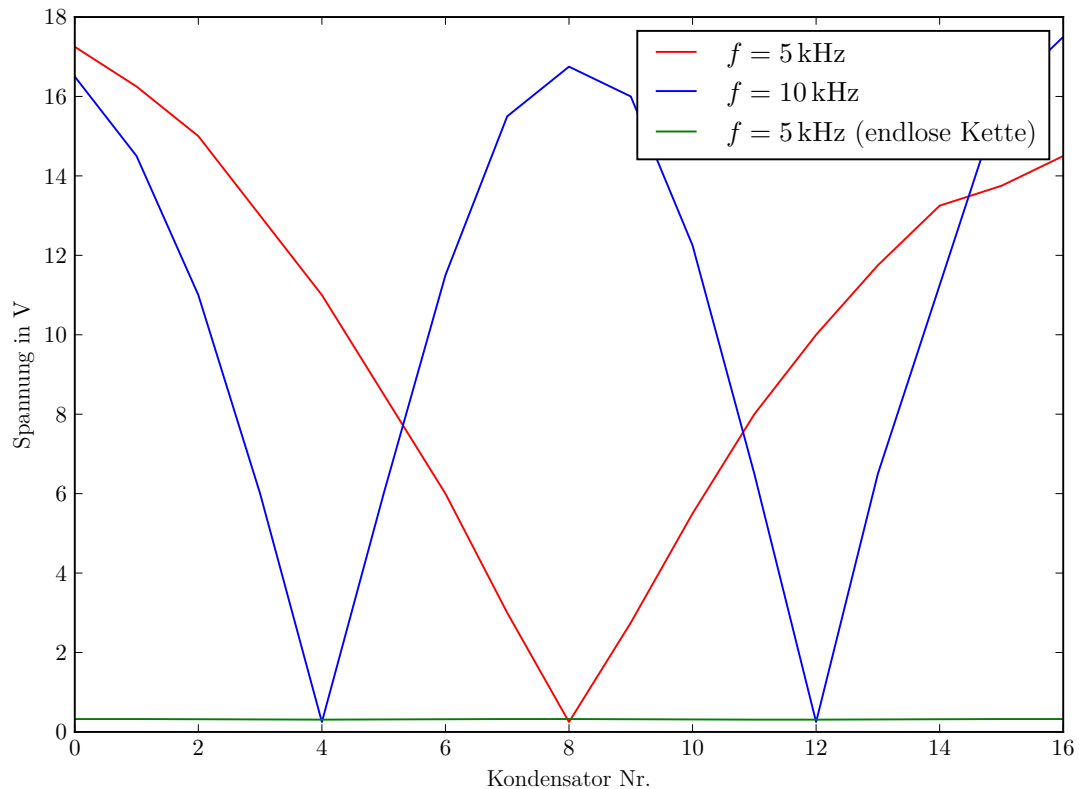
In dem Graphen ist zu sehen, dass die Phasengeschwindigkeit bei zunehmender Frequenz immer stärker abnimmt und die Kreisfrequenz dabei gegen die Grenzfrequenz läuft.



**Abbildung 3:** Phasengeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz.

### 1.5 Messung des Verlaufs der Stehenden Wellen bei 5 kHz und 10 kHz

Zuletzt wird die an den einzelnen Kettengliedern gemessene Spannung, aus Tabelle 3, gegen die Nummer des jeweiligen Kettengliedes aufgetragen. Die Punkte wurden dabei miteinander verbunden um eine deutlichere und übersichtlichere Gestalt der Kurven zu erhalten.



**Abbildung 4:** Spannung an den einzelnen Kettengliedern.

Zu sehen sind die Maxima an den Rändern, sowie ein (Grundschiwingung) bzw. zwei (erste Oberschiwingung) Knoten dazwischen. Die grüne Kurve zeigt, dass die Spannung bei einer endlosen Kette konstant ist.

## 2 Diskussion

Insgesamt fällt auf, dass der Versuch sehr gute Werte liefert. Die Abweichungen sind verschwindend gering. Der Unterschied zwischen den gemessenen Grenzfrequenzen ( $LC$ -Kette: 50,899 kHz;  $LC_1C_2$ -Kette: 35,879 kHz, 55,207 kHz und 66,303 kHz) und den rechnerisch bestimmten Werten liegt im Bereich von 0,03 % bis 1,1 %. Leichte Schwankungen der Werte z.B. bei dem Spannungsverlauf der endlosen Kette könnten dadurch zustande kommen, dass die Widerstände an den Enden nicht exakt auf den Wellenwiderstand eingestellt sind, wodurch es zu schwachen Reflexionen kommen kann.