

V64: Moderne Interferometrie

Simon Schulte
simon.schulte@udo.edu

Tim Sedlaczek
tim.sedlaczek@udo.edu

Durchführung: 13.06.2018

Abgabe: 04.07.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Theorie

Bei diesem Versuch sollen mittels Interferometrie die Brechungsindizes von Glas und Luft bestimmt werden. Dazu wird in diesem Fall ein Sagnac-Interferometer verwendet, welches sich baulich von einem Michelson-Interferometer vor allem dadurch unterscheidet, dass beide Strahlen ungefähr den gleichen Strahlengang durchqueren und damit äußere Einflüsse zu kleineren Abweichungen führen.

1.1 Funktionsweise des Sagnac-Interferometers

Bei dem Sagnac-Interferometer wird ein Laserstrahl, der von einem Helium-Neon-Laser erzeugt wird, über zwei Spiegel auf einen so genannten PBSC gelenkt. PBSC steht für Polarizing-Beam-Splitter-Cube. Er wirkt dabei, wie der halbdurchlässige Spiegel in einem Michelson-Interferometer, als Strahlteiler. Hierzu besteht er aus zwei Prismen, die über ein Dielektrikum verbunden sind. Das Dielektrikum sorgt dafür, dass der transmittierte Strahl dem P-polarisierten Anteil des einfallenden Strahls entspricht und der reflektierte Strahl dem S-polarisierten Anteil. Die beiden Strahlen durchlaufen anschließend die, durch drei weitere Spiegel geformte, Bahn in entgegengesetzter Richtung und treffen dann an dem PBSC wieder aufeinander. Da sie senkrecht aufeinander liegende Polarisationsrichtungen besitzen interferieren sie an dieser Stelle noch nicht. Hierzu befindet sich im weiteren Strahlengang ein zweiter PBSC, welcher um 45° gekippt ist. Durch den Winkel besitzen beide Strahlen in der Ebene des PBSC eine senkrechte und eine parallele Komponente. Diese werden entsprechend aufgespalten und treffen als zwei überlagerte Strahlen mit je einer gemeinsamen Polarisationsrichtung auf zwei Photodioden. Der Aufbau eines Sagnac-Interferometers ist in Abbildung 1 zu sehen.

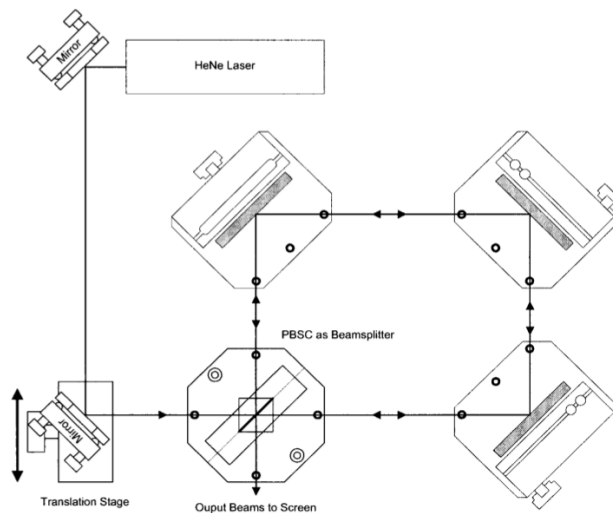


Abbildung 1: Aufbau eines Sagnac-Interferometers [Phy18].

1.2 Kontrast

Bei der Interferometrie ist es sinnvoll bei maximalem Kontrast zu arbeiten. Der Kontrast beschreibt dabei die Differenz der Intensität von Interferenzmaximum und Minimum. Dafür gilt:

$$K = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (1)$$

In dem Optimalfall ($I_{\min} = 0$) ergibt sich also ein Kontrast von 1.

Da bei dem Sagnac-Interferometer die Stärke der Interferenz von der Intensität der beiden Strahlen abhängt, die den ersten PBSC verlassen, wird die Maximierung des Kontrastes über einen Polarisationsfilter vor dem ersten PBSC vorgenommen. Um einen Zusammenhang zwischen Polarisationswinkel ϕ und Kontrast zu erhalten wird zunächst das Verhalten der Intensität in Abhängigkeit von dem Winkel untersucht. Für die Intensität gilt:

$$I \propto \langle |E_1 \cos(\phi) \cos(\omega t) + E_2 \sin(\phi) \cos(\omega t + \delta)|^2 \rangle. \quad (2)$$

Dies ist ein zeitliche Mittelwert über eine Periode. E_1 und E_2 sind die elektrischen Feldstärken der beiden Lichtstrahlen, die den PBSC verlassen. δ ist ein Phasenunterschied, der für konstruktive bzw. destruktive Interferenz sorgt. Es kommt zur Auslöschung, wenn:

$$\delta = 2\pi \cdot n + \pi$$

und zur Verstärkung, wenn:

$$\delta = 2\pi \cdot n,$$

mit n einer ganzen Zahl größer oder gleich 0. Unter Berücksichtigung, dass:

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

ergibt sich dann für die maximale bzw. minimale Intensität:

$$I_{\max/\min} \propto I_{\text{Laser}} (1 \pm 2 \cos(\phi) \sin(\phi)), \quad (3)$$

wobei

$$I_{\text{Laser}} \propto (E_1 + E_2)^2$$

Durch Einsetzen der Minimal- und Maximal-Intensität in Gleichung (1) ergibt sich die Winkelabhängigkeit des Kontrastes:

$$K(\phi) \propto |\sin(\phi) \cos(\phi)|. \quad (4)$$

Offenbar ist also ein Polarisationswinkel von 45° optimal.

1.3 Brechungsindex eines Mediums

Die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium ist abhängig von dessen Brechungsindex n :

$$v = \frac{c}{n}. \quad (5)$$

Zusätzlich beeinflusst der Brechungsindex auch den Wellenvektor:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vac}}} n, \quad (6)$$

Mit der Vakuumwellenlänge λ_{vac} . Dadurch ergibt sich für den Strahl sobald er durch ein Medium der Länge L fällt eine Phasenverschiebung:

$$\delta = (k_{\text{med}} - k_{\text{vac}})L = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vac}}}(n - 1)L. \quad (7)$$

Immer wenn die Phasenverschiebung ein Vielfaches von 2π annimmt kommt es zu einem Interferenzmaximum. Daher lässt sich also der Brechungsindex über die Anzahl N der Interferenzmaxima bestimmen. Es gilt:

$$N = \frac{\delta}{2\pi}. \quad (8)$$

Durch Einsetzen und Umformen ergibt sich:

$$n = \frac{N \cdot \lambda_{\text{vac}}}{L} + 1. \quad (9)$$

1.4 Brechungsindex von Glas

Auch die Bestimmung des Brechungsindex von Glas kann über das Abzählen der Maxima erfolgen. Hierbei kommt es allerdings zu einem zweiten Effekt, der den Phasenunterschied beeinflusst. Neben der Phasenverschiebung in dem Glas kommt es über die Lichtbrechung auch zu einer geometrischen Phasenverschiebung. Für die Phase einer Lichtwelle im Glas gilt allgemein, wie zuvor:

$$\frac{2\pi}{\lambda_{\text{vac}}} nL. \quad (10)$$

L variiert in diesem Fall jedoch mit dem Winkel zwischen Glas und einfallendem Lichtstrahl. Nach Snellius ergibt sich dann für die Phasenverschiebung zwischen einem Strahl, der auf eine um den Winkel θ gedrehte Glasscheibe trifft, und einem Strahl, der im Lot auf eine vergleichbare Scheibe trifft:

$$\delta(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vac}}} T \left(\frac{n - \cos(\theta - \theta')}{\cos(\theta')} - \frac{n - 1}{1} \right). \quad (11)$$

θ' ist dabei der Winkel des Strahls nach der Brechung im Glas und hängt über das Snellius Brechungsgesetz mit θ zusammen. In diesem Versuch wird eine Halterung mit

2 Scheiben verwendet, die in einem relativen Winkel $\Theta = 2\theta_0$ zueinander stehen. Die Anzahl der Maxima N ergibt sich demnach zu:

$$N = 2 \frac{\delta}{2\pi}. \quad (12)$$

Formel (11) wird in (12) eingesetzt:

$$N = 2 \frac{T}{\lambda_{\text{vac}}} \left(\frac{n - \cos(\theta - \theta')}{\cos(\theta')} - \frac{n-1}{1} \right). \quad (13)$$

Gleichung (13) wird nun unter Kleinwinkelnäherung um $\pm\theta_0$ entwickelt und Terme mit einer größeren Ordnung als θ^2 vernachlässigt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(1)}N(\theta, \theta_0) &= \frac{T}{\lambda_{\text{vac}}} \cdot \frac{n-1}{2n} (\theta_0^2 + 2\theta_0(\theta - \theta_0)), \\ \mathcal{T}_{(1)}N(\theta, -\theta_0) &= \frac{T}{\lambda_{\text{vac}}} \cdot \frac{n-1}{2n} (\theta_0^2 - 2\theta_0(\theta + \theta_0)). \end{aligned}$$

Um einen Zusammenhang für den Brechungsindex des Scheibenmaterials zu erhalten, muss die Differenz der beiden Entwicklungen gebildet werden. Umgestellt nach n folgt:

$$n = \frac{2\theta_0\theta T}{2\theta_0\theta T - N\lambda_{\text{vac}}}. \quad (14)$$

2 Durchführung

2.1 Justage und Kontrast

Das Interferometer wird wie in Abbildung 1 aufgebaut. Vor dem ersten PBSC befindet sich dabei der Polarisationsfilter für die Kontrast-Maximierung. Alle Spiegel in der Apparatur besitzen Schrauben zur Justage der optischen Achsen. Die Spiegel werden nun so justiert, dass die Strahlen die Bahn nach dem PBSC leicht versetzt durchlaufen, sich am Ende überlagern und dabei auch die Photodioden treffen. Dazu werden Beam-Paddles als Hilfsmittel verwendet, welche an den Stellen 1-9 in Abbildung 2 platziert werden können und anzeigen ob die optische Achse gut definiert ist.

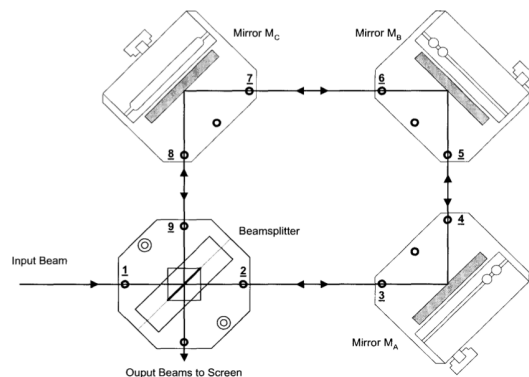


Abbildung 2: Der Strahlengang mit möglichen Positionen der Beam-Paddles [Phy18].

Nach der Justage wird zunächst eine Messung zur Maximierung des Kontrastes durchgeführt. Dazu wird der Doppelglashalter im Strahlengang platziert und der Winkel des Polarisationsfilters zwischen 0° und 90° variiert (zwischen 0° und 30° und zwischen 60° und 90° in 10er Schritten, zwischen 30° und 60° in 5er Schritten). Dabei wird jeweils die minimale und maximale Diodenspannung (bei Auslöschung und Verstärkung) gemessen, welche an einem Oszilloskop angezeigt wird.

2.2 Bestimmung der Brechungsindizes

Für die Bestimmung der Brechungsindizes von Glas und Luft wird eine Zählapparatur verwendet, die die Nulldurchgänge der fallenden Flanke der Diodenspannung zählt. Der Winkel des Doppelglashalters wird nun in einem Bereich von 10° bei konstanter langsamer Geschwindigkeit variiert. Anschließend wird die Anzahl, der Nulldurchgänge und damit die Anzahl der Maxima abgelesen. Diese Messung wird fünf mal durchgeführt. Anschließend wird der Doppelglashalter aus dem Strahlengang entfernt und stattdessen eine Gaszelle in dem Strahlengang eines Strahls platziert, in welcher über einen Kompressor ein möglichst gutes Vakuum erzeugt werden kann. Anschließend wird wieder über Ventile langsam Luft in die Gaszelle gelassen und dabei die Anzahl der Nulldurchgänge gezählt, die bis zum vollständigen Druckausgleich auftreten. Diese Messung wird drei mal durchgeführt.

3 Auswertung

3.1 Fehlerrechnung

Für die Fehlerrechnung sowie den mathematischen Teil der Auswertung wird auf PYTHON [Fou17] zurückgegriffen:

Die in der Auswertung verwendeten Mittelwerte mehrfach gemessener Größen sind gemäß der Gleichung

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (15)$$

bestimmt. Dieser ist implementiert durch die Funktion MEAN aus dem Paket NUMPY [Oli07]. Die Standardabweichung des Mittelwertes ergibt sich dabei zu

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (16)$$

Dieser wird durch die SCIPY.STATS [JOP+] Funktion SEM berechnet.

Fehlerfortpflanzung wird durch die Bibliothek UNCERTAINTIES [Leb] automatisiert. Regressionen sowie deren Fehler wurden durch die NUMPY Funktion CURVE-FIT berechnet. Grafiken wurden mit MATPLOTLIB [Hun07] erstellt.

3.2 Kontrastmessung

Um den Kontrast zu bestimmen werden an einer Photodiode abfallende Minimal- und Maximalspannungen für verschiedene Polarisatorstellungen θ_P gemessen. Die gemessenen Werte und die damit errechneten Kontrastwerte nach Formel (1) sind in Tabelle 1 zu sehen. Der Kontrast, der abhängig von eingestellten Winkel ist, wird nach Formel (4) mit einer Funktion

$$K(\theta_P) = |\alpha \sin(\beta\theta_P + \gamma)| + \delta \quad (17)$$

gefittet. Dabei ergeben sich die Parameter:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,758 \pm 0,003 \\ \beta &= 1,916 \pm 0,035 \\ \gamma &= (-0,087 \pm 0,031)^\circ \\ \delta &= 0,007 \pm 0,025 \end{aligned} \quad (18)$$

Der dazugehörige Fit ist in Abbildung 3 dargestellt.

Tabelle 1: Die Mess- und Kontrastwerte K .

$\theta_P / ^\circ$	I_{\max} / V	I_{\min} / V	K
0	-4.31	-3.72	0.07
10	-3.62	-2.31	0.22
20	-3.22	-1.28	0.43
30	-2.94	-0.72	0.61
35	-2.92	-0.67	0.63
40	-3.08	-0.53	0.70
45	-3.23	-0.47	0.75
50	-3.56	-0.41	0.80
55	-3.88	-0.50	0.77
60	-4.28	-0.75	0.70
70	-5.03	-1.06	0.65
80	-5.25	-2.19	0.41
90	-4.84	-3.72	0.13

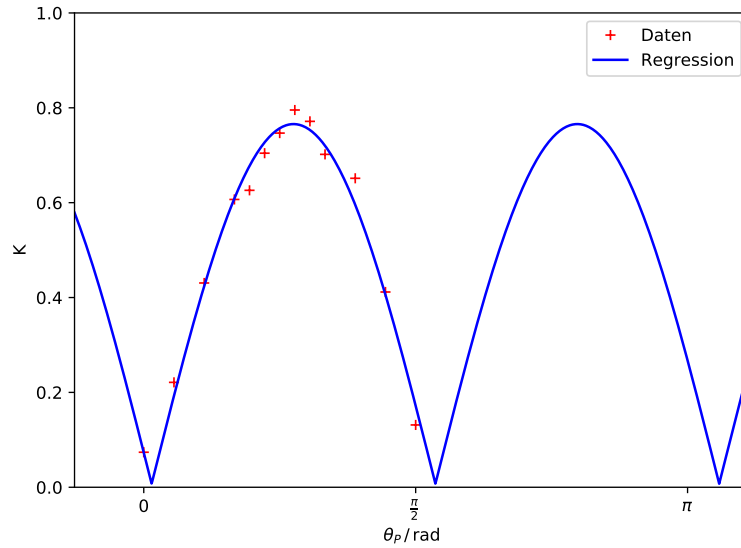


Abbildung 3: Der Kontrast K des Interferometers in Abhängigkeit von der Polarisatorstellung θ_P mit einer Regression.

Um den Kontrast optimal untersuchen zu können, wird das Maximum der Kontrastfunktion (17) gesucht. Dafür nutzt man die Ableitung und es ergibt sich die notwendige Bedingung:

$$\frac{dK(\theta_P)}{d\theta_P} = \alpha\beta \cos(\beta\theta_P + \gamma) \stackrel{!}{=} 0.$$

Mit Hilfe von

$$\beta\theta_{\text{P,max}} + \gamma = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow \theta_{\text{P,max}} = \frac{\frac{\pi}{2} - \gamma}{\beta}$$

folgt, mit Hilfe der Fitparameter aus (18) ein Wert von

$$\theta_{\text{P,max}} = (49,6 \pm 1,3)^\circ.$$

Die folgenden Messungen wurden bei dieser Polarisatorstellung durchgeführt.

3.3 Brechungsindex von Glas

Die Glasplättchen sind in einem relativen Winkel $\Theta = 2\theta_0 = 2 \cdot 10^\circ$ zueinander angeordnet. Zusammen mit der Plättchendicke von $T = 1 \text{ mm}$ sowie einer Laserwellenlänge von 633 nm in Formel (14) eingesetzt ergeben sich aus den Messdaten die Werte, welche in Tabelle 2 stehen, wobei $\theta_0 = 10^\circ$ gilt. Es wurden 5 Messreihen aufgenommen. Mittelung über die Messwerte aller Messreihen liefert einen Wert von:

$$n_{\text{Glas}} = 1,561 \pm 0,012.$$

Tabelle 2: Messwerte mit Brechungsindizes der 5 Messreihen. Es wurde ein Intervall von 10° abgefahren.

M	n
34	1.60
34	1.55
35	1.57
35	1.57
35	1.52

3.4 Brechungsindex von Luft

Messwerte und nach Formel (9) bestimmte Brechungsindizes sind in Tabelle 3 dargestellt. Alle Interferenzstreifenmessungen wurden mit einem Fehler von ± 2 versehen, da es bei der Rückkehr auf Umgebungsdruck in der Gaszelle zu Fehlzählungen kommt. Die Länge der Zelle beläuft sich auf $L = 10 \text{ cm}$. Wieder beträgt die Laserwellenlänge 633 nm . Es ergibt sich also ein Wert von

$$n_{\text{Luft}} = 1,000\,268 \pm 0,000\,013.$$

Tabelle 3: Gezählte Interferenzstreifen N mit berechneten Brechungsindizes für Luft und Mittelwert \bar{n} .

N	n
43 ± 2	$1,000\,272 \pm 0,000\,013$
42 ± 2	$1,000\,266 \pm 0,000\,013$
42 ± 2	$1,000\,266 \pm 0,000\,013$
\bar{n}	$1,000\,268 \pm 0,000\,013$

4 Diskussion

Tabelle 4: Übersicht über die Messergebnisse mit Literaturwerten.

	Messung	Literatur
n_{Glas}	$1,561 \pm 0,012$	1,5 [Phy18, S. 11-5]
$n_{\text{Luft}, 633\text{ nm}}$	$1,000\,268 \pm 0,000\,013$	1,000 277 [Pol96]

Tabelle 4 beinhaltet die gemessenen und die Literaturwerte. Es zeigt sich, dass der Literaturwert für die Luftmessung in der Messungenauigkeit liegt. Der in dem Versuch errechnete Wert für die Glasmessung hat allerdings nur eine sehr kleine Abweichung zum Literaturwert. Das könnte eventuell an dem verwendeten Glas liegen. Dies könnte eine andere Zusammensetzung haben, als das, das für den Literaturwert genutzt wurde. Bei der Messung des Brechungsindex' von Luft konnte das Fehlerintervall nur getroffen werden, da die Interferenzstreifen zählung nicht als fehlerfrei angesehen werden konnte und ein pauschaler Fehler von ± 2 angenommen wurde. Es konnte außerdem beobachtet werden, dass manchmal die Interferenzstreifen von der Ausleseelektronik nicht aufgenommen werden konnten, da der Druck in der Gaszelle etwas zu rasant anstieg. Daher ist hier ein systematischer Fehler nicht auszuschließen. Dennoch ist der errechnete Wert ziemlich präzise am Literaturwert.

Als weitere Fehlerquelle ergibt sich auch die Justage des Interferometers. Bei der Kontrastfunktion zeigt sich eine relativ eindeutige $\frac{\pi}{2}$ -Periode und auch das Maximum ist in dem zu erwarteten Bereich. Allerdings sind auch Fehler sichtbar, die durch eine bessere Justage verbessert werden könnten. Dadurch würde sich ein besserer Kontrastwert ergeben und damit wäre das Auflösungsvermögen des Interferometers besser.

Literatur

- [Fou17] Python Software Foundation. „Python“. Version 3.6.3. In: (2017). URL: <http://python.org/>.
- [Hun07] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [JOP+] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [Leb] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [Oli07] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [Phy18] TU Dortmund Physikalisches Praktikum der Fakultät Physik. *V64: Interferometrie*. 19. Juni 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/FP/SKRIPT/Interferometrie.pdf>.
- [Pol96] Mikhail Polyanskiy. *Optical constants of Air*. 1996. URL: <https://refractiveindex.info/?shelf=other&book=air&page=Ciddor>.