

# **V354: Gedämpfte und erzwungene Schwingungen**

Simon Schulte  
simon.schulte@udo.edu

Tim Sedlaczek  
tim.sedlaczek@udo.edu

Durchführung: 24.01.2017  
Abgabe: 31.01.2016

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Gedämpfte Schwingung . . . . .	3
2.2	Erzwungene Schwingung . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Versuchsaufbau</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Durchführung</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Auswertung</b>	<b>9</b>
5.1	Gedämpfte Schwingung . . . . .	9
5.2	Aperiodischer Grenzfall . . . . .	12
5.3	Frequenzabhängigkeit der Spannung am Kondensator und der Phase . . .	13
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>19</b>

# 1 Zielsetzung

Ziel des Versuchs ist die Untersuchung eines gedämpften elektrischen RCL-Schwingkreises.

## 2 Theorie

### 2.1 Gedämpfte Schwingung

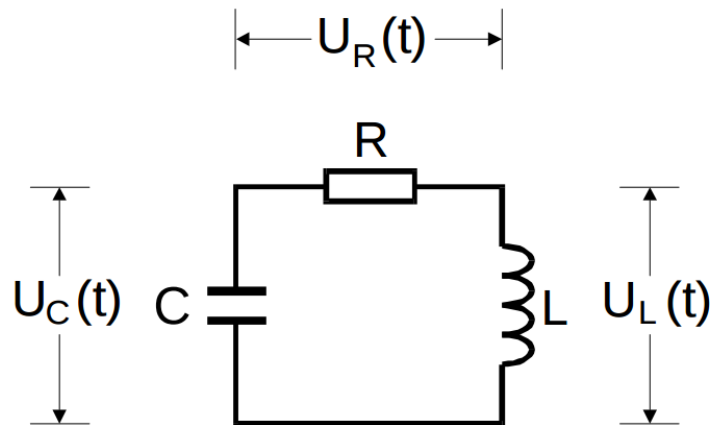


Abbildung 1: Der Aufbau eines gedämpften Schwingkreises [TUD17].

In Abbildung 1 zu sehen ist der Aufbau eines elektrischen Schwingkreises. Dieser ist in der Lage nach kurzer Anregung Energie entweder im magnetischen Feld der Spule oder im elektrischen Feld des Kondensators zu speichern. Er besteht aus einer Kapazität  $C$ , einer Induktivität  $L$  und einem ohmschen Widerstand  $R$ . Die Energie schwingt periodisch zwischen den beiden Energiereservoirs. Logischerweise ändert der Strom dabei auch seine Richtung. Die Schwingung kommt irgendwann zum Erliegen, da über den ohmschen Widerstand  $R$  stets Energie in Form von Wärme verloren geht. Durch diesen Widerstand entsteht dabei eine kontinuierliche Dämpfung.

Das Zeitgesetz lässt sich aus dem 2. Kirchhoffschen Gesetz herleiten. Es macht eine Aussage über die Amplitude der Kondensatorspannung. Es gilt:

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0. \quad (1)$$

Daraus folgt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}I(t) + \frac{R}{L} \frac{d}{dt}I(t) + \frac{1}{LC}I(t) = 0. \quad (2)$$

Die Lösung dieser gewöhnlichen homogenen DGL 2. Ordnung erfolgt über den komplexen Ansatz:

$$I(t) = Ae^{i\omega t}. \quad (3)$$

Dieser führt durch Einsetzen, Kürzen und Zusammenfassen zu einem wichtigen Ausdruck für den Parameter  $\omega$ :

$$\omega_{1,2} = i\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (4)$$

Unter Zuhilfenahme der Abkürzungen

$$2\pi\mu := \frac{R}{2L} \qquad 2\pi\nu := \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (5)$$

ergibt sich die allgemeine Lösung von Gleichung (2) als

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} (A_1 e^{i2\pi\nu t} + A_2 e^{-i2\pi\nu t}). \quad (6)$$

Eine Betrachtung der Lösungen (6) unter physikalischen Gesichtspunkten ergibt im Wesentlichen zwei zu unterscheidende Fälle mit einem Spezialfall:

Für den ersten Fall:  $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$

In diesem Fall ist  $\nu$  reell; es existieren weiterhin imaginäre Exponenten in der Lösungsfunktion  $I(t)$ . Damit hat die Lösung die Form einer Schwingung mit exponentiellem Dämpfungsterm, die sich als

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta) \quad (7)$$

schreiben lässt.  $\eta$  bezeichnet hierbei eine Phasenverschiebung, die neben der Anfangsauslenkung  $A_0$  durch die Anfangsbedingungen festgelegt wird. Die Schwingungsdauer  $T$  des Oszillators ergibt sich zu

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (8)$$

Eine weitere wichtige Größe in diesem Zusammenhang ist die sogenannte Abklingdauer  $T_{\text{ex}}$ . Sie gibt die Zeit an, nach welcher die Amplitude der Schwingung nur noch den e-ten Teil ihres Ausgangswertes angenommen hat:

$$T_{\text{ex}} := \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R}. \quad (9)$$

Für den zweiten Fall:  $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$

Tritt dieser Fall ein, so ist  $\nu$  imaginär, was zur Folge hat, dass alle Exponenten der Lösungsfunktion rein reell werden. Daraus folgt, dass physikalisch betrachtet keine gedämpfte Schwingung sondern eine Relaxation vorliegt, wobei die Spannung noch maximal ein lokales Extremum annehmen kann.

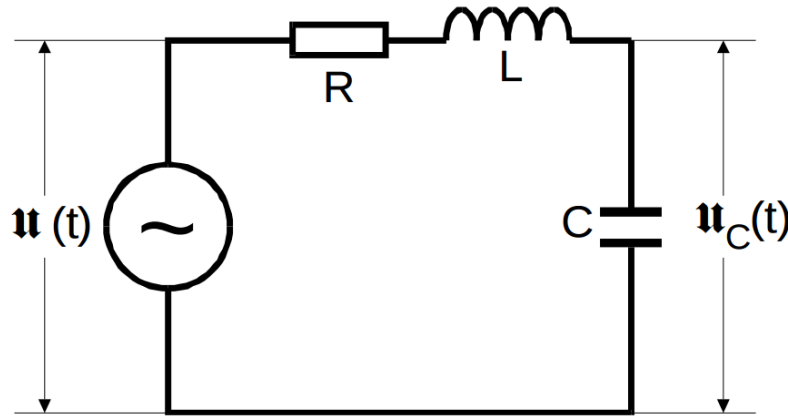
Für den Spezialfall:  $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$

In diesem Fall ist  $\nu = 0$ . Die Lösungsfunktion  $I(t)$  wird dann zu

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t} = Ae^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}. \quad (10)$$

Für diesen, auch als aperiodischen Grenzfall bezeichneten Fall, geht die Spannung auf schnellstem Weg, ohne ein lokales Extremum anzunehmen, gegen Null.

## 2.2 Erzwungene Schwingung



**Abbildung 2:** Der Aufbau eines gedämpften Schwingkreises mit periodischer Anregung [TUD17].

Wenn man nun eine weitere Spannungsquelle an den Schwingkreis anschließt, die eine Sinusspannung liefert, ergibt sich eine neue DGL aus den Kirchhoffschen Regeln:

$$LC \frac{d^2}{dt^2} U_C(t) + RC \frac{d}{dt} U_C(t) + U_C(t) = U_0 e^{i\omega t}. \quad (11)$$

Dabei ist  $U_C$  die Spannung am Kondensator. Mit dem gleichen Ansatz wie in (3) folgt:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right). \quad (12)$$

Dabei ist allerdings  $A$  nun abhängig von  $\omega$  und eine komplexe Zahl  $A(\omega)$ .  $\phi$  ist die Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Erregerspannung. Für die von  $\omega$  abhängige Spannungsamplitude am Kondensator folgt:

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (13)$$

Während die Spannungsamplitude für  $\omega \rightarrow \infty$  gegen Null und für  $\omega \rightarrow 0$  gegen  $U_0$  strebt, erreicht sie bei Einstellung der sogenannten Resonanzfrequenz  $\omega_{\text{res}}$  einen Wert der größer als  $U_0$  ist. Für die Resonanzfrequenz folgt:

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (14)$$

Bei einer schwachen Dämpfung wird die Kondensatorspannung bei dieser Frequenz um den Faktor

$$q = \frac{U_{C,\text{max}}}{U_0} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0 \quad (15)$$

im Bezug auf die Erregerspannung vergrößert.  $q$  ist dabei die Güte. Die Resonanz eines Schwingkreises ist definiert durch die Breite des Bereichs zwischen den beiden Frequenzen, bei denen die Spannung bei einer Resonanzfrequenz auf den  $1/\sqrt{2}$ -ten Teil gefallen ist. Für  $R^2/L^2 \ll \omega_0^2$  gilt näherungsweise:

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}. \quad (16)$$

Für die Phasenverschiebung ergeben sich drei Orientierungsgrößen  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  und  $\omega_2$ .  $\omega_0$  ist nach

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (17)$$

definiert. Dort beträgt die Phasenverschiebung  $\frac{\pi}{2}$ . Bei  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , welche sich nach

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \quad (18)$$

berechnen liegt eine Phase von  $\frac{\pi}{4}$  bzw.  $\frac{3\pi}{4}$  vor.

### 3 Versuchsaufbau

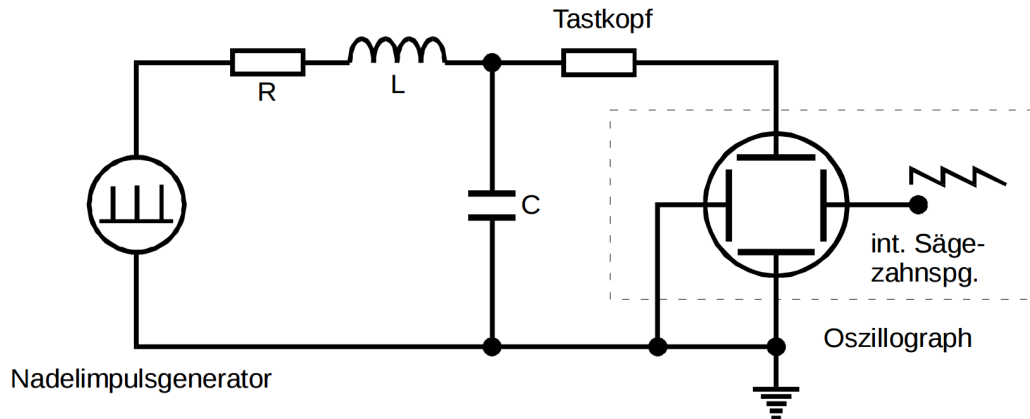


Abbildung 3: Versuchsaufbau zur Untersuchung der Kondensatoramplitude eines gedämpften Schwingkreises [TUD17].

### 4 Durchführung

Der Versuch besteht aus 4 Teilversuchen, dabei werden ein Funktionsgenerator, ein Speicheroszilloskop und ein RCL-Kreis verwendet. Bei dem RCL-Kreis besteht die Möglichkeit über verschiedene Anschlüsse zwischen einem variablen Widerstand und zwei festen Widerständen,  $R_1$  und  $R_2$ , zu wählen.

Als erstes wird versucht aus der Untersuchung der Kondensatoramplitude eines gedämpften Schwingkreises dessen Dämpfungswiderstand  $R_{\text{eff}}$  zu bestimmen. Der dafür genutzte Versuchsaufbau ist in Abbildung 3 zu sehen. Der Rechteckgenerator liefert die gedämpften Schwingungen des RCL-Kreises, diese sind auf einem Oszilloskop zu sehen. Die Generatorfrequenz ist dabei 1468 Hz und es wird  $R_1$  verwendet.

Als nächstes soll der Widerstand  $R_{\text{ap}}$  gefunden werden, bei dem die Dämpfung genau so stark ist, dass der aperiodische Grenzfall eintritt. Dort wird dann der variable Widerstand genutzt. Dieser ersetzt dann den Widerstand  $R_1$ . Es wird solange der Widerstand  $R_{\text{ap}}$  variiert, bis der Wert erreicht ist, an dem kein lokales Spannungsextremum existiert, sondern die Spannung auf 0 gedämpft wird.

Zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit des RCL-Kreises wird zunächst die Kondensatorspannung beobachtet. Hier wird nun der vorher verwendete Widerstand mit dem Widerstand  $R_2$  ersetzt. Der RCL-Kreis wird jetzt über einen frequenzvariablen Sinusgenerator angeregt und die Kondensatorspannung sowie die Generatorspannung werden nebeneinander dargestellt. Es werden in dem Frequenzspektrum 4,183 kHz bis 100 kHz 15 Messwerte aufgenommen. Dabei ist Generatorspannung  $U_0 = 10 \text{ V}$  und es

werden Werte für die Kondensatorspannung  $U_C$  aufgenommen.

Zuletzt wird die Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator und Generatorspannung beobachtet. Dabei wird die Phasendifferenz zwischen  $U_0$  und  $U_C$  untersucht. Der Ablauf verläuft so, wie bei der Messung der Abhängigkeit der Spannung.

Die Daten des verwendeten Geräts sind:

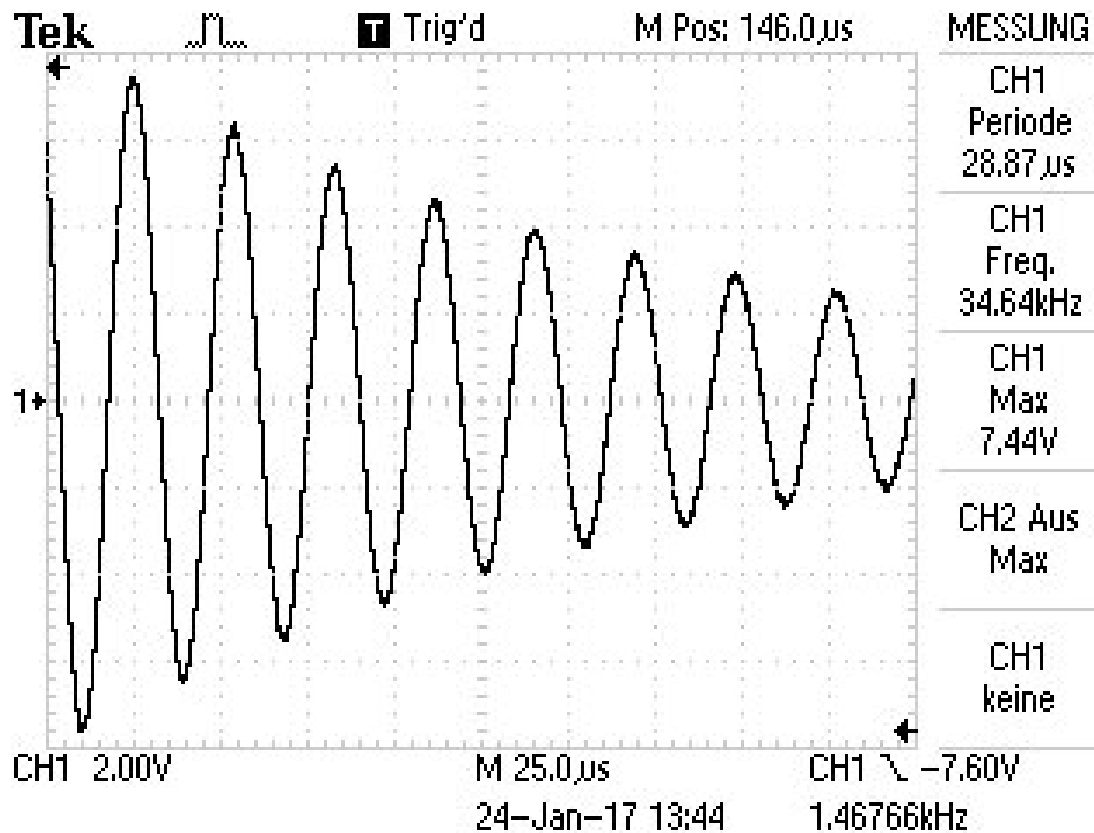
$$L = (10,11 \pm 0,03) \text{ mH} \qquad C = (2,098 \pm 0,006) \text{ nF} \qquad (19)$$

$$R_1 = (48,1 \pm 0,1) \Omega \qquad R_2 = (509,5 \pm 0,5) \Omega \qquad (20)$$



## 5 Auswertung

### 5.1 Gedämpfte Schwingung



**Abbildung 4:** Bildschirmabbild des Oszilloskops von der gedämpften Schwingung.

In Abbildung 4 ist das Bild von der gedämpften Schwingung zu sehen. An diesem wurden die Extrema der Schwingung ausgemessen und damit jeweils die Spannungsamplitude  $U_C$  gegen die Zeit aufgetragen. Die gemessenen Werte stehen in Tabelle 1.

Zudem wurde nach der Funktion

$$f(t) = a \cdot \exp(-b \cdot t) \quad (21)$$

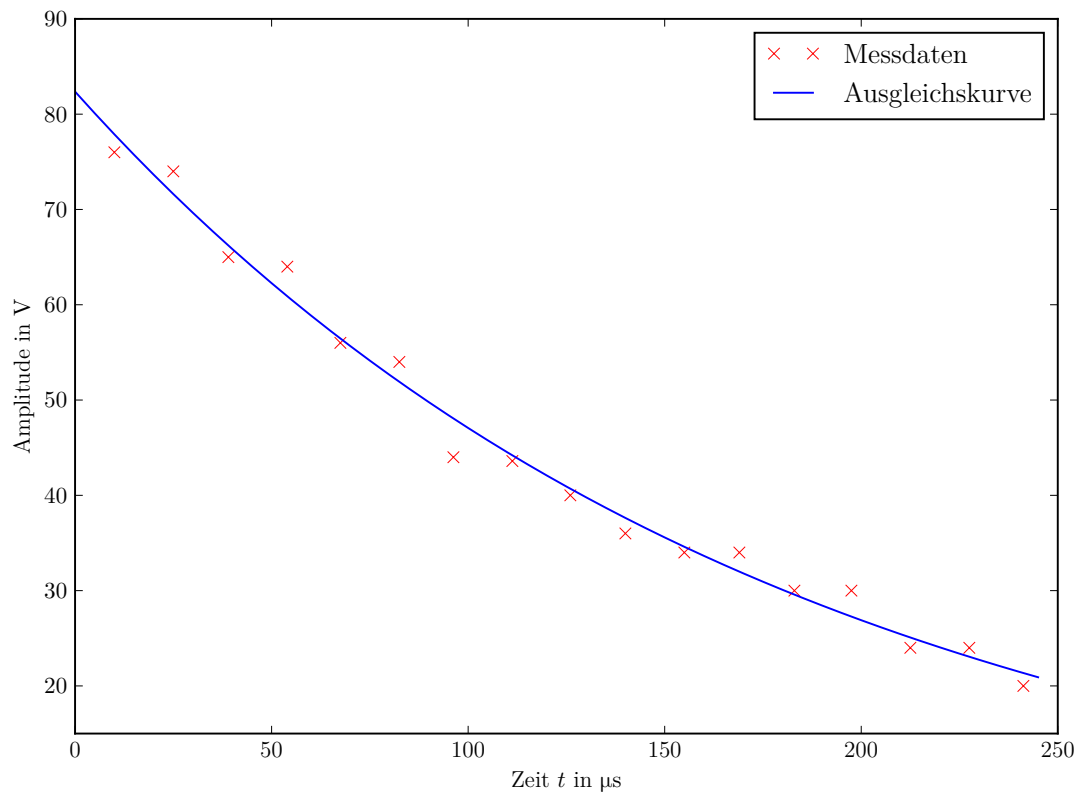
eine Ausgleichskurve bestimmt. Die entsprechenden Parameter sind:

$$a = (82 \pm 1) \text{ V} \quad b = (5596 \pm 173) \text{ s}^{-1} \quad (22)$$

Der Graph dazu ist in Abbildung 5 zu sehen.

**Tabelle 1:** Gemessene Amplituden der gedämpften Schwingung.

$t / \mu\text{s}$	$U_C / \text{V}$
10	76
25	74
39	65
54	64
67,5	56
82,5	54
96,25	44
111,25	43,6
126	40
140	36
155	34
169	34
183	30
197,5	30
212,5	24
227,5	24
241,25	20



**Abbildung 5:** Amplituden der Schwingung in Abhängigkeit von der Zeit.

Der so bestimmte Exponent entspricht dem  $2\pi\mu$  in den Formeln (7) und (9). Daraus folgt die Abklingdauer der Schwingung zu

$$T_{\text{ex}} = (179 \pm 6) \mu\text{s} \quad (23)$$

und der effektive Widerstand, durch multiplizieren mit der zweifachen Induktivität, der eingebauten Spule zu

$$R_{\text{eff}} = (113 \pm 4) \Omega. \quad (24)$$

## 5.2 Aperiodischer Grenzfall

In Abbildung 6 ist der Verlauf der Spannung beim aperiodischen Grenzfall zu sehen. Der hierzu eingestellte Widerstand beträgt

$$R = 3600 \, \Omega. \quad (25)$$

Rechnerisch ergibt sich der Wert, mit der Bedingung für den aperiodischen Grenzfall, nach

$$R_{\text{ap}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (26)$$

zu

$$R_{\text{ap}} = (4390 \pm 9) \, \Omega. \quad (27)$$

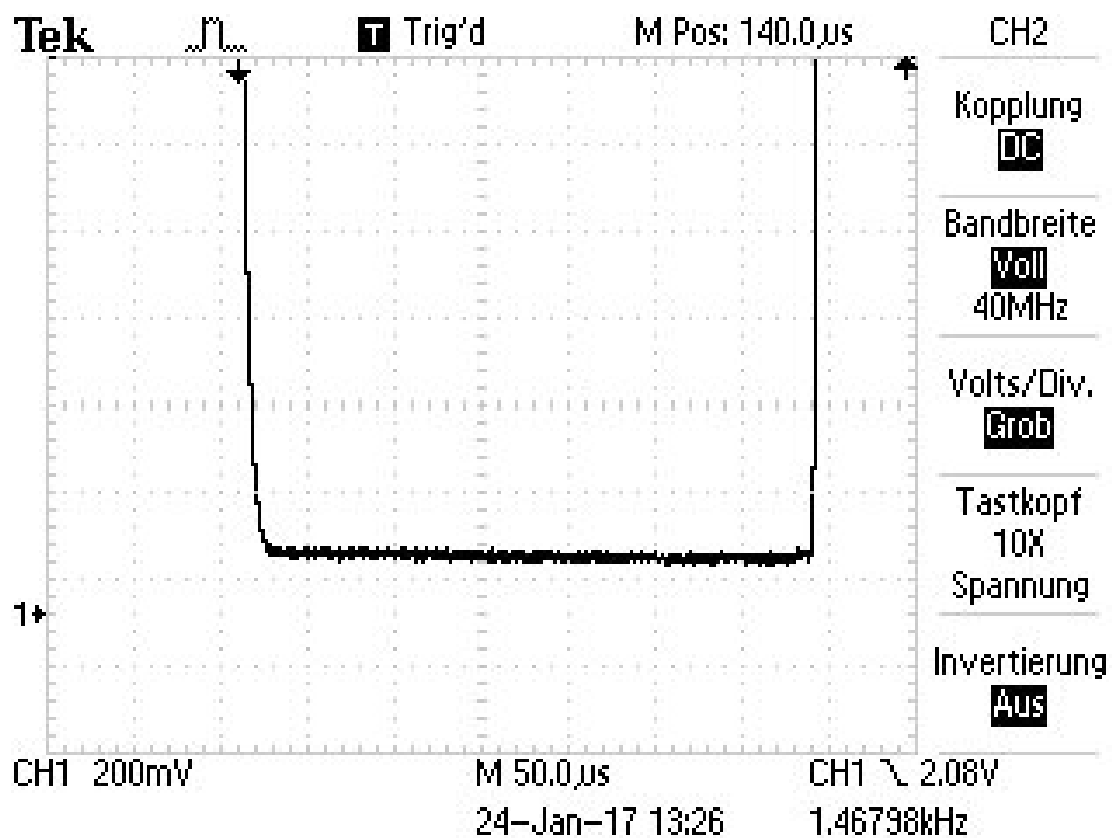


Abbildung 6: Bildschirmabbild des Oszilloskops vom aperiodischen Grenzfall.

### 5.3 Frequenzabhängigkeit der Spannung am Kondensator und der Phase

Die mit der Cursor-Funktion des Oszilloskops bestimmten Werte stehen in Tabelle 2.

**Tabelle 2:** Werte der Spannung, sowie der Phasenverschiebung.

Frequenz $\nu$ des Generators in kHz	$\Delta t / \mu\text{s}$	$\frac{U_C}{U}$
4,183	1,24	1
10	1,31	1,08
20	1,4	1,44
24	1,64	1,8
28	2,29	2,6
32	4,41	3,6
33	6,5	3,62
34	7,4	3,7
35	8,3	3,62
36	9	3,4
40	10	1,92
44	9,9	1,25
48	9,35	0,9
60	7,9	0,45
100	5,4	0,108

Zur bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Spannung am Kondensator wird der Quotient  $\frac{U_C}{U}$  gegen die Frequenz  $\nu$  einmal halblogarithmisch (Abbildung 7) und einmal linear (Abbildung 8) aufgetragen. Dabei ist  $U$  die Amplitude der Generatorspannung. Aus dem Graphen wird dann die Resonanzüberhöhung  $q$  entnommen.

Das Maximum befindet sich bei einer Frequenz von 33,5 kHz und beträgt 37 V. Der theoretische Wert für die Resonanzfrequenz berechnet sich nach Formel (14) zu

$$\nu_{\text{res}} = 34,1 \text{ kHz.} \quad (28)$$

Damit ergibt sich für die Güte/Resonanzüberhöhung:

$$q = 3.7 \quad (29)$$

Geometrisch werden nun die Frequenzen  $\nu_+$  und  $\nu_-$  bestimmt bzw. abgeschätzt. Sie liegen bei

$$\nu_- = 28 \text{ kHz} \quad \text{und} \quad \nu_+ = 38 \text{ kHz.} \quad (30)$$

Die Breite der Resonanzkurve beträgt damit

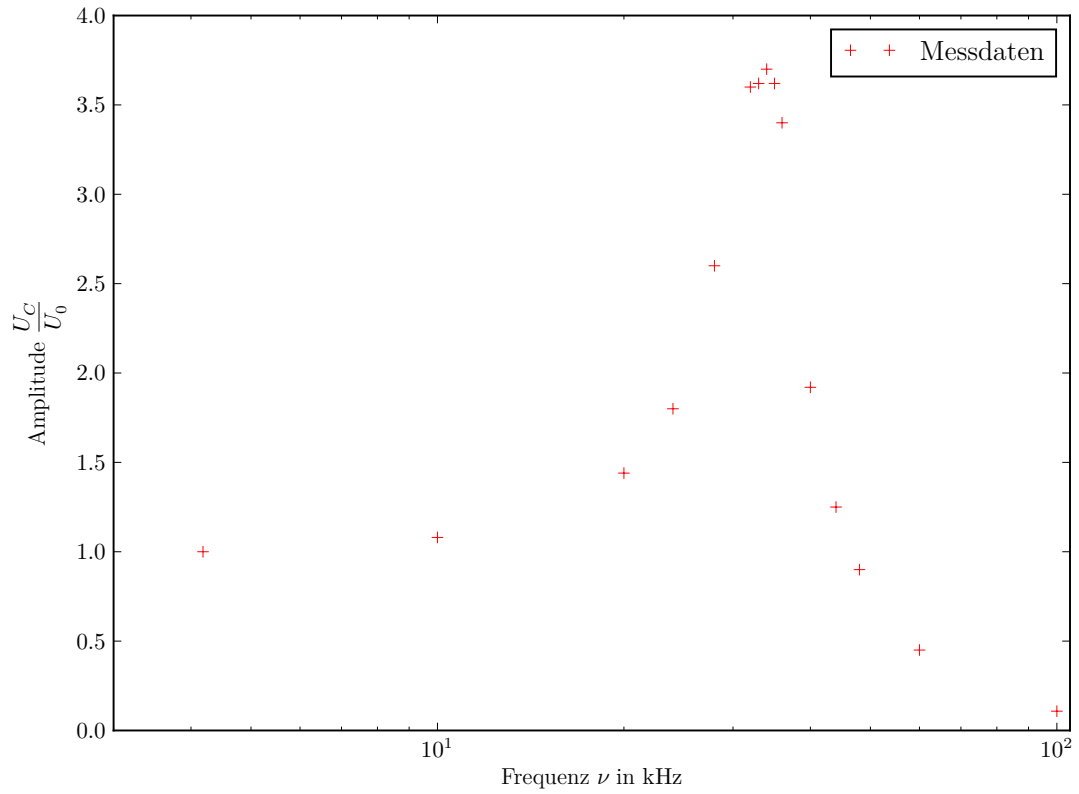
$$\nu_+ - \nu_- = 10 \text{ kHz.} \quad (31)$$

Mit Formel (15) ergibt sich für die Güte ein Wert von

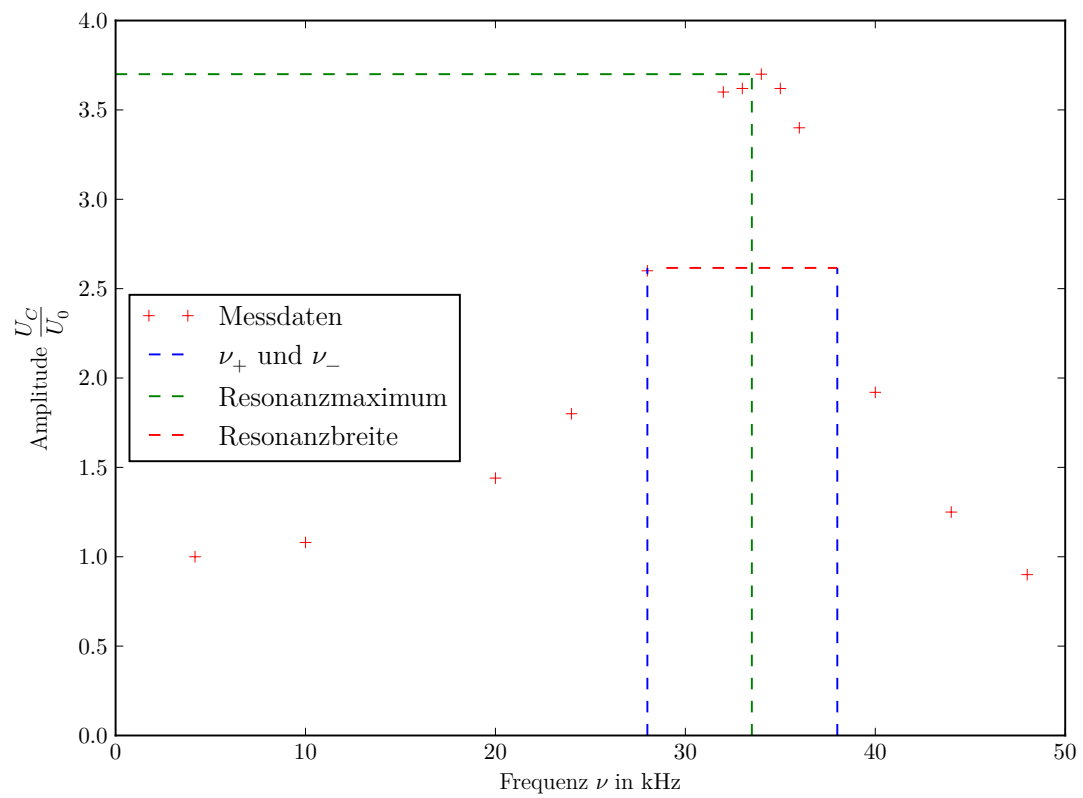
$$q = 4.3 \quad (32)$$

und nach (16) für die Breite ein Wert von ca.

$$\nu_+ - \nu_- = 8 \text{ kHz}. \quad (33)$$



**Abbildung 7:** Halblogarithmische Darstellung des Spannungsverlaufes.



**Abbildung 8:** Lineare Darstellung des Spannungsverlaufes.

Mit den Werten für  $\Delta t$  und  $\nu$  aus Tabelle 2 lässt sich die eigentliche Phasenverschiebung  $\phi$  nach

$$\phi = \frac{\Delta t}{T} \cdot 360^\circ = \Delta t \cdot \nu \cdot 360^\circ \quad (34)$$

bzw.

$$\phi = \frac{\Delta t}{T} \cdot 2\pi = \Delta t \cdot \nu \cdot 2\pi \quad (35)$$

bestimmen. Die Ergebnisse davon stehen in Tabelle 3

**Tabelle 3:** Phasenverschiebung.

Frequenz $\nu$ des Generators in kHz	$\phi / ^\circ$	$\phi$ in rad
4,183	1,87	0,033
10	4,72	0,082
20	10,08	0,176
24	14,17	0,247
28	23,08	0,403
32	50,8	0,887
33	77,22	1,348
34	90,58	1,581
35	104,58	1,825
36	116,64	2,036
40	144	2,513
44	156,82	2,737
48	161,57	2,82
60	170,64	2,978
100	194,4	3,393

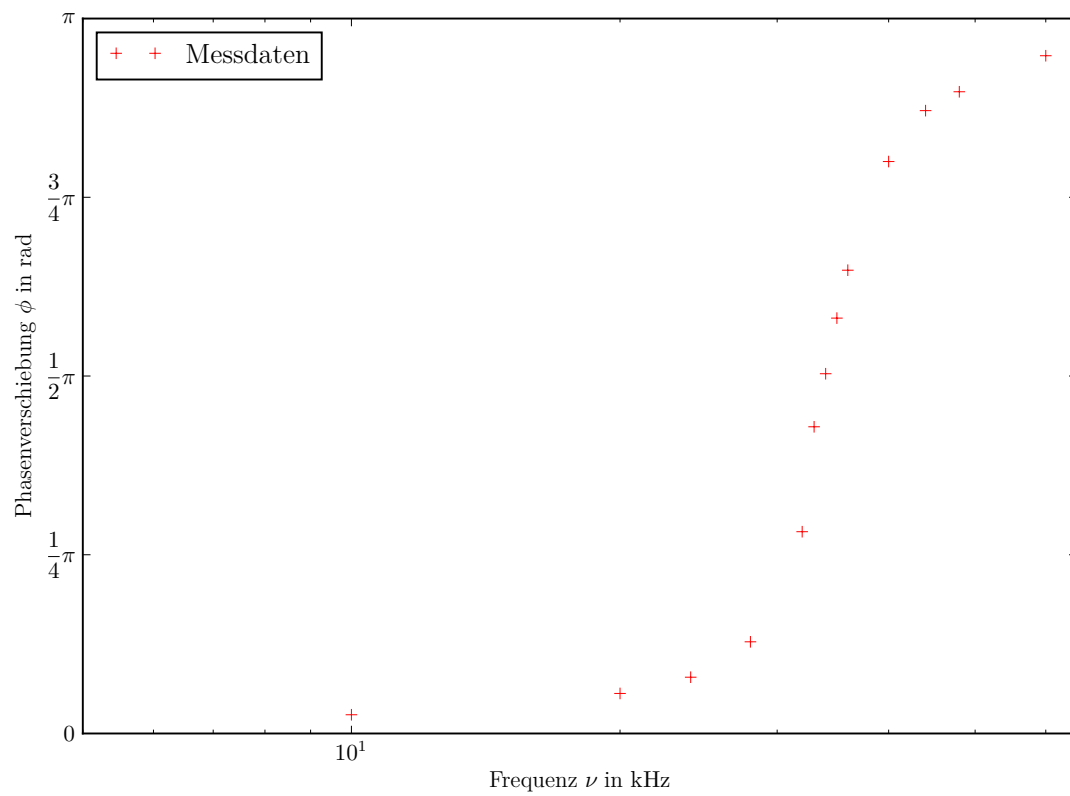
Diese werden nun ebenfalls einmal halblogarithmisch (Abbildung 9) und einmal linear (Abbildung 10) aufgetragen. Der Letzte Wert liegt über der Grenze von  $\pi$ . Daher wird er in den Graphen vernachlässigt. Geometrisch werden nun die Frequenzen  $\nu_0$ ,  $\nu_1$  und  $\nu_2$  bestimmt.

$$\nu_0 = 34,1 \text{ kHz} \quad \nu_1 = 30,8 \text{ kHz} \quad \nu_2 = 38,8 \text{ kHz.} \quad (36)$$

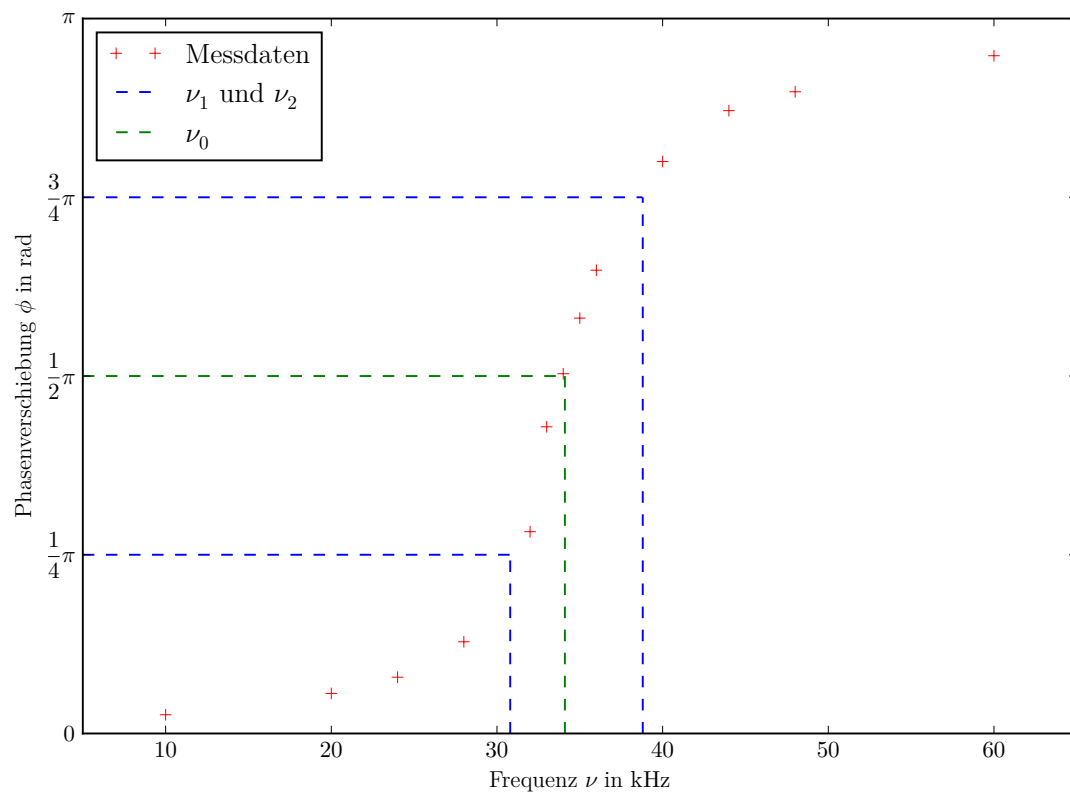
Mit den Formeln (17) und (18) ergeben sich folgende theoretischen Werte:

$$\nu_0 = 34,6 \text{ kHz} \quad \nu_1 = 30,8 \text{ kHz} \quad \nu_2 = 38,8 \text{ kHz.} \quad (37)$$





**Abbildung 9:** Halblogarithmische Darstellung der Phase.



**Abbildung 10:** Lineare Darstellung der Phase.

## 6 Diskussion

**Tabelle 4:** Ergebnisse, Theoriewerte und relative Abweichung.

	Theoretischer Wert	Ergebniss	relative Abweichung
$T_{\text{ex}}$	$420 \mu\text{s}$	$(179 \pm 6) \mu\text{s}$	57,4 %
$R_{\text{eff}}$	$48,1 \Omega$	$(113 \pm 4) \Omega$	135 %
$R_{\text{ap}}$	$(4390 \pm 9) \Omega$	$3600 \Omega$	18 %
$\nu_{\text{res}}$	$34,1 \text{ kHz}$	$33,5 \text{ kHz}$	1,8 %
$q$	4,3	3,7	14 %
$\nu_+ - \nu_-$	$8 \text{ kHz}$	$10 \text{ kHz}$	25 %
$\nu_0$	$34,6 \text{ kHz}$	$34,1 \text{ kHz}$	1,4 %
$\nu_1$	$30,8 \text{ kHz}$	$30,8 \text{ kHz}$	0 %
$\nu_2$	$38,8 \text{ kHz}$	$38,8 \text{ kHz}$	0 %

In Tabelle 4 stehen die Ergebnisse der Auswertung zusammen mit den theoretischen Werten. Die Abweichung bei der Abklingdauer lässt sich auf den Unterschied bei den effektiven Widerständen zurück führen. Dieser wiederum kommt wahrscheinlich durch nicht bedachte Leitungswiderstände oder z.B. den Innenwiderstand des Generators zustande. Selbige Gründe sind voraussichtlich für den Unterschied bei dem Widerstand für den aperiodischen Grenzfall verantwortlich. Zudem kam es wahrscheinlich zu Abweichungen durch Ungenauigkeiten an dem Verstellrädchen. Die gemessene Resonanzfrequenz befindet sich relativ nah an dem theoretischen Wert. Der etwas kleinere gemessene Wert bei der Güte kann ebenfalls mit dem Unterschied zwischen eingebautem und effektivem Widerstand begründet werden. Da Formel (16) nur eine Näherung darstellt, weicht der gemessene Wert von  $\nu_+ - \nu_-$  etwas vom Theoretischen ab. Die restlichen gemessenen Werte für  $\nu_0$ ,  $\nu_1$  und  $\nu_2$  passen sehr gut zu den theoretischen Werten.

## Literatur

- [TUD17] TU-Dortmund. *Versuch 354: Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. 30. Jan. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V354.pdf>.