

V302: Brückenschaltungen

Simon Schulte
simon.schulte@udo.edu

Tim Sedlaczek
tim.sedlaczek@udo.edu

Durchführung: 20.12.2016

Abgabe: 10.01.2017

Korrektur: 24.01.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Die allgemeine Brückenschaltung	3
2.2 Die Wheatstonesche Brücke	5
2.3 Die Kapazitätsmessbrücke	6
2.4 Die Induktivitätsmessbrücke	7
2.5 Die Maxwell-Brücke	8
2.6 Die Wien-Robinson-Brücke	9
3 Durchführung	10
3.1 Widerstandsmessung	10
3.2 Kapazitätsmessung	10
3.3 Induktivitätsmessung	11
3.4 Untersuchung der Frequenzabhängigkeit einer Wien-Robinson-Brücke . . .	11
4 Auswertung	12
4.1 Messwerte	12
4.2 a) Berechnung von zwei unbekannten Widerständen (Wheatstone)	15
4.3 b) Berechnung von zwei Kapazitäten sowie einer RC Kombination	15
4.4 c)+d) Berechnung der Induktivität einer Spule sowie ihres Verlustwiderstands	16
4.5 e) Frequenzabhängigkeit der Wien-Robinson-Brücke und f) Berechnung des Klirrfaktors des Generators	17
5 Diskussion	20
Literatur	20

1 Zielsetzung

Ziel des Versuchs ist es, mit Hilfe verschiedener Brückenschaltungen Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten zu bestimmen, sowie eine Brückenschaltung, die mit Wechselspannung betrieben wird, auf ihre Frequenzabhängigkeit zu untersuchen.

2 Theorie

2.1 Die allgemeine Brückenschaltung

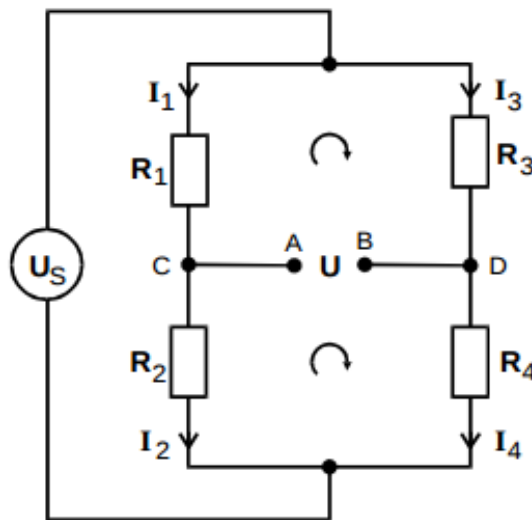


Abbildung 1: Schaltplan der allgemeinen Brückenschaltung. [TUD17]

In Abbildung 1 ist der Aufbau der allgemeinen Brückenschaltung zu sehen. An den Punkten A und B wird die Brückenspannung abgegriffen. Sie wird durch das Verhältnis der eingebrachten Widerstände R_1 und R_4 bestimmt. Wenn die Abgleichbedingung

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad (1)$$

gegeben ist, ist eine Nullspannung erreicht. Für komplexe Widerstände folgt:

$$Z = X + iY. \quad (2)$$

mit dem Wirkwiderstand X und dem Blindwiderstand Y . Die komplexen Wechselstromwiderstände von einer idealen Kapazität C und einer idealen Induktivität L sind, in Abhängigkeit von der Frequenz ω , folgendermaßen definiert:

$$Z_C = -\frac{i}{\omega C} \quad \text{und} \quad Z_L = i\omega L. \quad (3)$$

Zwei komplexe Zahlen sind nur dann gleich, wenn die Real- und die Imaginärteile dieser gleich sind. Für komplexe Widerstände ergibt sich aus Gleichung (1) die Abgleichbedingung

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3. \quad (4)$$

Damit folgt

$$X_1 X_4 - Y_1 Y_4 = X_2 X_3 - Y_2 Y_3 \quad (5)$$

und

$$X_1 Y_4 + X_4 Y_1 = X_2 Y_3 + X_3 Y_2. \quad (6)$$

2.2 Die Wheatstonesche Brücke

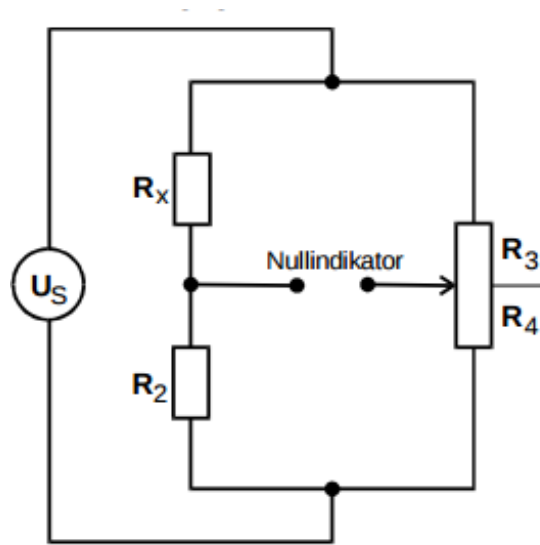


Abbildung 2: Schaltplan der Wheatstoneschen Brücke. [TUD17]

In Abbildung 2 zu sehen ist die Wheatstonesche Brückenschaltung. Sie wird genutzt um einen unbekannten ohmschen Widerstand R_x zu bestimmen. Bei einer Wheatstoneschen Brückenschaltung kann mit Gleich- und Wechselstrom gearbeitet werden. Durch die Abgleichbeziehung ergibt sich, dass durch die Änderung des Verhältnisses von R_3 und R_4 , die Brückenspannung auf 0 gebracht wird. Damit folgt

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (7)$$

2.3 Die Kapazitätsmessbrücke

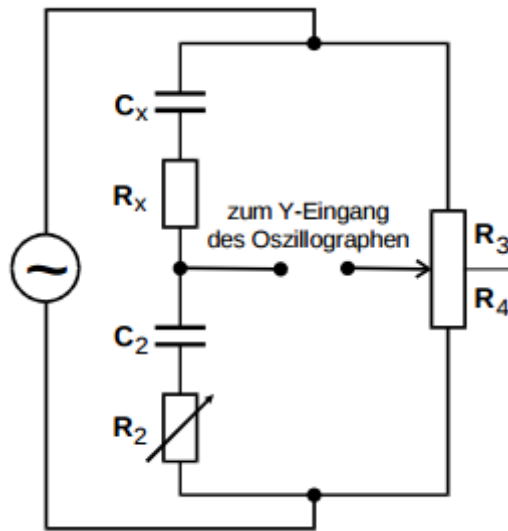


Abbildung 3: Schaltplan der Kapazitätsmessbrücke. [TUD17]

In Abbildung 3 zu sehen ist die Brückenschaltung für die Kapazitätsmessbrücke. Nun wird der unbekannte Widerstand R_x durch einen Kondensator C_x ersetzt. Da der Kondensator allerdings auch verlustbehaftet ist, ist im Schaltbild 3 ein fiktiver Widerstand R_x berücksichtigt. Aus den beiden vorherigen Ausgleichsbedingungen folgt für die Kapazitätsmessbrücke der Zusammenhang

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (8)$$

und

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3}. \quad (9)$$

2.4 Die Induktivitätsmessbrücke

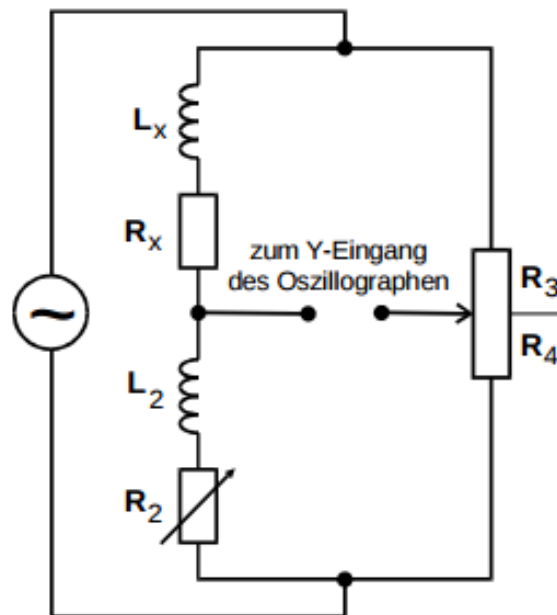


Abbildung 4: Schaltplan der Induktivitätsmessbrücke. [TUD17]

In Abbildung 4 zu sehen ist die Brückenschaltung für die Induktivitätsmessbrücke. Induktivitäten werden dabei analog wie bei der Kapazitätsmessbrücke bestimmt, mit dem Unterschied, dass die Kapazitäten durch Induktivitäten ersetzt werden. Dabei folgen aus den Abgleichbedingungen folgende Zusammenhänge

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (10)$$

$$L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4}. \quad (11)$$

2.5 Die Maxwell-Brücke

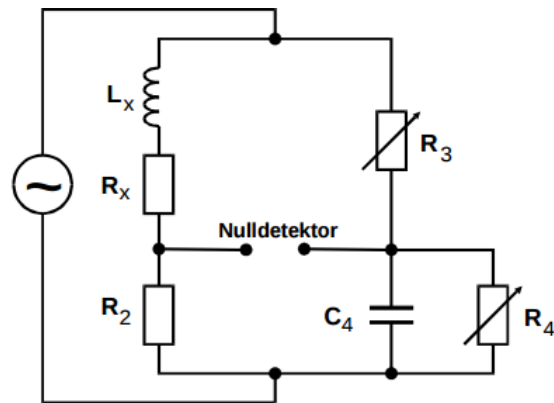


Abbildung 5: Schaltplan der Maxwell-Brücke. [TUD17]

In Abbildung 5 zu sehen ist die Brückenschaltung für die Maxwell-Brücke. Hier wird auf die Induktivität L_2 , welche bei der Induktivitätsmessbrücke noch verwendet wurde, verzichtet. Stattdessen wird mit einem Kondensator C_4 gearbeitet. Aus den Abgleichbedingungen folgen dann die Beziehungen

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad (12)$$

und

$$L_x = R_2 R_3 C_4. \quad (13)$$

2.6 Die Wien-Robinson-Brücke

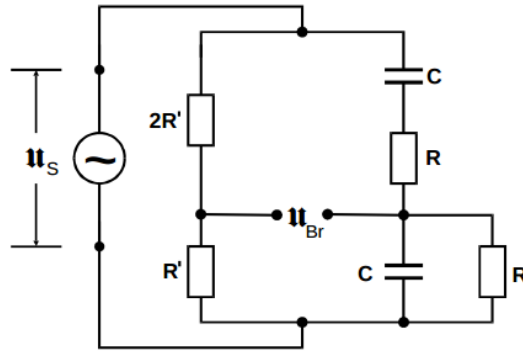


Abbildung 6: Schaltplan der Wien-Robinson-Brücke. [TUD17]

In Abbildung 6 zu sehen ist die Brückenschaltung für die Wien-Robinson-Brücke. Nun werden keine unbekannten Induktivitäten, Widerstände oder Kapazitäten mehr genutzt, sondern es wird die Frequenzabhängigkeit untersucht. Die Wien-Robinson-Brücke fungiert als Sperrfilter. Ein Sperrfilter filtert eine bestimmte Frequenz einer Spannungsquelle vollständig aus dem Spektrum heraus. Das Verhältnis zwischen Brückenspannung U_{Br} und Quellspannung U_S kann man mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln (??) als

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_S} \right|^2 = \frac{(\omega^2 R^2 C^2 - 1)^2}{9((1 - \omega^2 R^2 C^2)^2 + 9\omega^2 R^2 C^2)}. \quad (14)$$

ausdrücken.

3 Durchführung

3.1 Widerstandsmessung

Als erstes wird in dem Versuch mit einer Wheatstoneschen Brücke, wie in Abbildung 2 dargestellt, gearbeitet. Sie ist an einer Wechselstromspannungsquelle angeschlossen. Zu bestimmen ist der Widerstand R_x . Dieser ist unbekannt. Um R_x zu bestimmen, wird das am Potentiometer regelbare Verhältnis der beiden Widerstände R_3 und R_4 so eingestellt, dass der Oszillograph eine Nullspannung anzeigt. Diese Messung wird an zwei verschiedenen unbekannten Widerständen R_x durchgeführt, mit drei verschiedenen R_2 -Widerständen, um die Messgenauigkeit zu verbessern.

3.2 Kapazitätsmessung

Als nächstes wird eine Kapazitätsmessung durchgeführt. Dafür wird die Schaltung, wie in 3 dargestellt, verändert. Wie auch schon bei der Widerstandsmessung wird erneut die Nullspannung gesucht. Diese Messung wird für einen weiteren idealen Kondensator wiederholt. Bei der nächsten Messung wird ein Kondensator verwendet, der einen Wirkanteil in seinem Widerstand hat. Auch hier wird eine Nullspannung gesucht. Dabei wird so abwechselnd variiert, bis ein absolutes Minimum nahe Null gefunden wird. Dabei werden beide eingestellten Widerstände notiert. Außerdem wird jede Messung mit drei verschiedenen Kapazitäten C_2 durchgeführt.

3.3 Induktivitätsmessung

Als nächstes wird eine Induktivitätsmessung durchgeführt. Dafür wird ein Aufbau, wie in Abbildung 4 zu sehen, genutzt. Diese Messung ist, vom Ablauf her, analog zu der Kapazitätsmessung. Um hier eine bessere Messgenauigkeit zu gewährleisten wird die Messung mit drei verschiedenen L_2 -Induktivitäten durchgeführt. Daraufhin wird mit einer Maxwell-Brücke, wie in Abbildung 5 zu sehen, dieselbe Induktivität, wie bei der ersten Induktivitätsmessung, bestimmt. Die Werte werden für R_3 und R_4 bestimmt und die Messung wird für zwei weitere R_2 -Widerstände wiederholt.

3.4 Untersuchung der Frequenzabhängigkeit einer Wien-Robinson-Brücke

Als letztes wird die Frequenzabhängigkeit einer Brückenschaltung untersucht. Dafür nutzt man eine Wien-Robinson-Brücke, wie in Abbildung 6 zu sehen. Der in der Schaltung enthaltene Wechselstromgenerator liefert eine Quellspannung U_S . Diese Spannung hat eine variable bzw. einstellbare Frequenz. Zur Messung wird dann die Brückenspannung U_{Br} gegen die Frequenz f zwischen 20 Hz und 20 kHz aufgenommen. Es werden für die Frequenz, U_S und U_{Br} je 37 Werte aufgenommen. Dabei wird auf das Spannungsminimum von U_{Br} besonders Wert gelegt, indem man vor allem Spannungswerte zu den Frequenzen bestimmt, die nahe an dem Spannungsminimum bei einer Frequenz von 378 Hz liegen.

4 Auswertung

4.1 Messwerte

Bei den verschiedenen Versuchsabschnitten wurden die folgenden Werte Gemessen:

Tabelle 1: a) Messwerte zur Wheatstoneschen Brücke.

Widerstand 1 (Wert 11)			Widerstand 2 (Wert 12)		
R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
332	596,0	404,0	332	540	460
664	423,5	576,5	664	369	631
1000	328,0	672,0	1000	280	720

Tabelle 2: b) Messwerte zur Kapazitätsmessbrücke.

Kapazität 1 (Wert 1)			Kapazität 2 (Wert 3)		
C_2 / nF	R_3 / Ω	R_4 / Ω	C_2 / nF	R_3 / Ω	R_4 / Ω
399	376	624	399	486,5	513,5
597	475	525	597	587,0	413,0
994	600	400	994	702,0	298,0

Tabelle 3: b) Messwerte zur Kapazitätsmessbrücke.

RC Kombination (Wert 8)			
C_2 / nF	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
399	408,0	574,5	425,5
597	267,5	670,0	330,0
994	157,5	770,5	229,5

Tabelle 4: c) Messwerte zur Induktivitätsmessbrücke.

LR Kombination (Wert 18)			
L_2 / mH	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
14,6	104,5	772,0	228,0
20,1	139,0	713,0	287,0
27,5	196,0	645,5	354,5

Tabelle 5: d) Messwerte zur Maxwell-Brücke (Wert 18).

R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
1000	48,0	138,5
664	73,5	138,0
332	148,5	138,0

Für den Aufbau der Wien-Robinson-Brücke wurden die folgenden Bauteile verwendet:

$$R' = 332 \Omega \quad (15)$$

$$R = 1 \text{ k}\Omega \quad (16)$$

$$C = 421 \text{ nF} \quad (\text{Die zuvor bestimmte Kapazität Wert 3}) \quad (17)$$

Damit wurden dann die in Tabelle 7 stehenden Werte gemessen.

Tabelle 6: Messwerte zur Wien-Robinson-Brücke.

f / Hz	U_S / V	U_{Br} / V
300	2,94	0,384
305	2,94	0,364
310	2,94	0,336
315	2,94	0,312
320	2,94	0,290
325	2,94	0,266
330	2,925	0,240
335	2,925	0,208
340	2,925	0,188
345	2,925	0,156
350	2,925	0,131
355	2,925	0,102
360	2,94	0,0808
365	2,94	0,064
370	2,925	0,04
375	2,925	0,0176
378	2,925	0,0152
385	2,86	0,033
390	2,9	0,067
395	2,9	0,085
400	2,95	0,11
405	2,95	0,127
410	2,94	0,158
415	2,95	0,166
420	2,95	0,194
430	2,85	0,238
440	2,85	0,270
450	2,86	0,296
500	2,86	0,496
600	2,85	0,776
1000	2,8	1,46
1500	2,725	1,86
2000	2,79	2,06
5000	2,725	2,3
10 000	2,725	2,3
15 000	2,74	2,26
20 000	2,76	2,26

4.2 a) Berechnung von zwei unbekannten Widerständen (Wheatstone)

Zur Berechnung der zwei unbekannten Widerstände wird Formel (7) verwendet. Aus den jeweils drei Messungen folgen dann entsprechend sechs Ergebnisse:

Widerstand 1 (Wert 11)	Widerstand 2 (Wert 12)
490	390
488	388
488	389

Durch Mitteln ergibt sich für den ersten Widerstand (Wert 11)

$$R_{\text{Wert 11}} = (488,6 \pm 0,6) \Omega. \quad (18)$$

Für den zweiten Widerstand (Wert 12) ergibt sich

$$R_{\text{Wert 12}} = (389,0 \pm 0,6) \Omega. \quad (19)$$

4.3 b) Berechnung von zwei Kapazitäten sowie einer RC Kombination

Zur Berechnung der drei Kapazitäten wird Formel (9) verwendet, während für den Widerstand der RC Kombination Formel (8) verwendet wird. Die Ergebnisse der einzelnen Messungen sind:

Kapazität 1 (Wert 1)/ nF	Kapazität 2 (Wert 3)/ nF
662	421
660	420
663	422

Kapazität 3 (Wert 8)/ nF	Widerstand 3 (Wert 8)/ Ω
296	551
294	543
296	529

Durch Mitteln ergibt sich für die erste Kapazität (Wert 1)

$$C_{\text{Wert 1}} = (661,6 \pm 0,9) \text{ nF}. \quad (20)$$

Für die zweite Kapazität (Wert 3) ergibt sich

$$C_{\text{Wert 3}} = (421,0 \pm 0,6) \text{ nF}. \quad (21)$$

Als Kapazität und Widerstand der RC Kombination (Wert 8) ergeben sich

$$C_{\text{Wert 8}} = (295,2 \pm 0,6) \text{ nF} \quad (22)$$

$$R_{\text{Wert 8}} = (541 \pm 6) \Omega \quad (23)$$

4.4 c)+d) Berechnung der Induktivität einer Spule sowie ihres Verlustwiderstands

Zunächst wird die Induktivität und der Verlustwiderstand der Spule (Wert 18), mit den in Tabelle 4 stehenden Werten und den Formeln (11) sowie (10), berechnet. Die Ergebnisse davon sind:

Induktivität (Wert 18)/ mH	Verlustwiderstand (Wert 18)/ Ω
49,4	354
49,9	345
50,1	357

Schließlich folgen für die Induktivität und den Verlustwiderstand diese gemittelten Ergebnisse:

$$L_{\text{Wert 18}} = (49,8 \pm 0,2) \text{ mH} \quad (24)$$

$$R_{\text{Wert 18}} = (352 \pm 3) \Omega \quad (25)$$

Nun werden die selben Größen erneut, mit den Messwerten aus Tabelle 5 und den Formeln (13) und (12), berechnet. Die hierbei verwendete Kapazität C_4 beträgt 994 nF.

Daraus folgen diese Ergebnisse:

Induktivität (Wert 18)/ mH	Verlustwiderstand (Wert 18)/ Ω
47,7	347
48,5	354
49,0	357

Gemittelt ergeben sich dann folgende Werte für die Induktivität und den Widerstand:

$$L_{\text{Wert 18}} = (48,4 \pm 0,4) \text{ mH} \quad (26)$$

$$R_{\text{Wert 18}} = (352 \pm 3) \Omega \quad (27)$$

4.5 e) Frequenzabhängigkeit der Wien-Robinson-Brücke und f) Berechnung des Klirrfaktors des Generators

Zuerst soll der Quotient aus der Brückenspannung und der Quellspannung $\left(\frac{U_{\text{Br}}}{U_{\text{S}}}\right)$ gegen das Verhältnis aus eingestellter Frequenz ν und der kritischen Frequenz ν_0 , beim Minimalwert der Brückenspannung, halblogarithmisch aufgetragen werden. Zu beachten ist dabei, dass die Werte von U_{Br} in der Tabelle die Peak to Peak Messwerte sind. Für den Graphen werden diese halbiert und nach

$$U_{\text{eff}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \quad (28)$$

die Effektivspannung ausgerechnet.

Aus $R = 1 \text{ k}\Omega$ und $C = 421 \text{ nF}$ folgt nach

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (29)$$

eine kritische Kreisfrequenz von $\omega_0 = 2375/\text{s}$ und dem entsprechend eine kritische Frequenz von $\nu_0 = 378 \text{ Hz}$.

Durch einsetzen von (29) in Formel (14) ergibt sich

$$\left| \frac{U_{\text{Br}}}{U_{\text{S}}} \right| = \sqrt{\frac{(\Omega^2 - 1)^2}{9((1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2)}} \quad \text{mit } \Omega = \frac{\nu}{\nu_0}. \quad (30)$$

Diese Funktion wird ebenfalls in den Graphen eingezeichnet.

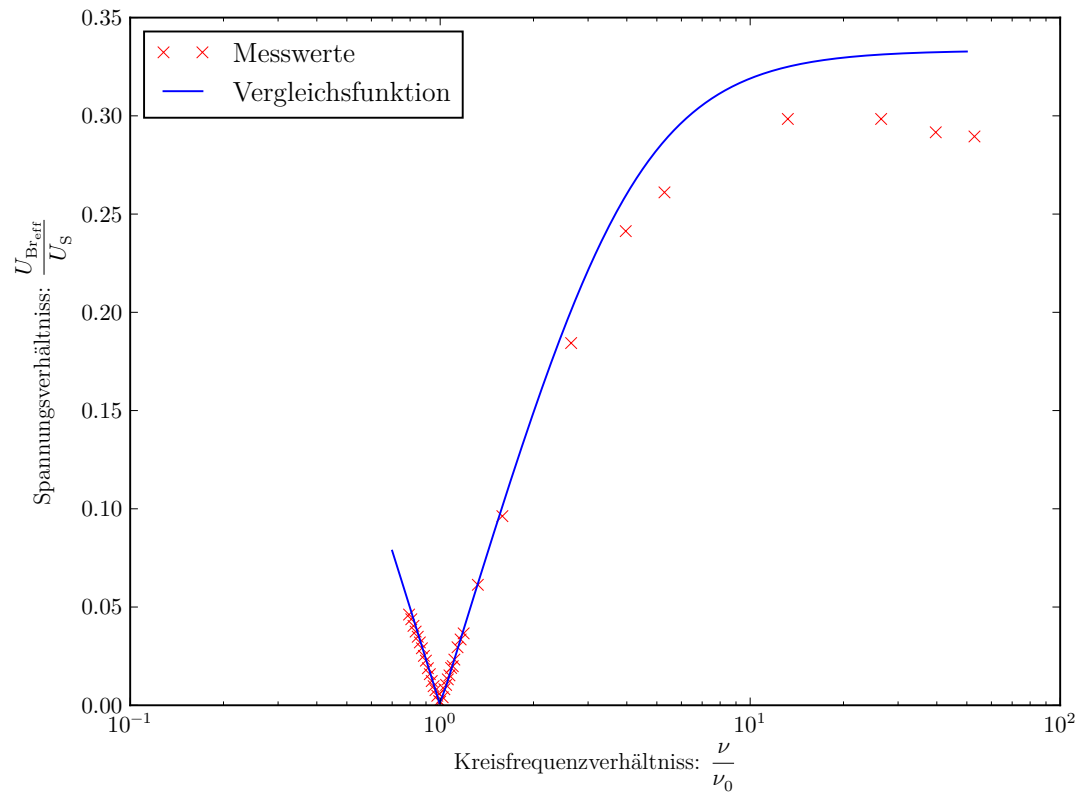


Abbildung 7: Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung bei der Wien-Robinson-Brücke

Tabelle 7: Im Plot verwendete Werte.

$\frac{U_{\text{Breff}}}{U_{\text{S}}}$	$\frac{\nu}{\nu_0}$
0,0462	0,794
0,0438	0,807
0,0404	0,82
0,0375	0,833
0,0349	0,847
0,032	0,86
0,029	0,873
0,0251	0,886
0,0227	0,899
0,0189	0,913
0,0158	0,926
0,0123	0,939
0,0097	0,952
0,0077	0,966
0,0048	0,979
0,0021	0,992
0,0018	1
0,0041	1,019
0,0082	1,032
0,0104	1,045
0,0132	1,058
0,0152	1,071
0,019	1,085
0,0199	1,098
0,0233	1,111
0,0295	1,138
0,0335	1,164
0,0366	1,190
0,0613	1,323
0,0963	1,587
0,1844	2,646
0,2413	3,968
0,261	5,291
0,2984	13,228
0,2984	26,455
0,2916	39,683
0,2895	52,91

Wie zu sehen ist, ist die Brückenspannung bei ν_0 nicht 0. Das liegt daran, dass der Generator neben der Grundwelle auch noch eine Oberwelle erzeugt. Die Größe des Anteils der Oberwelle wird durch den Klirrfaktor angegeben. Er berechnet sich in diesem Fall nach:

$$k = \frac{U_2}{U_1}. \quad (31)$$

Hierbei ist $U_1 = U_S$ bei ν_0 .

U_2 berechnet sich nach:

$$U_2 = \frac{U_{\text{Breff}}(\nu_0)}{\sqrt{\frac{(2^2-1)^2}{(9 \cdot ((1-2^2)^2 + 9 \cdot 2^2))}}} \quad (32)$$

Damit folgt für U_2 , U_1 und k :

$$U_1 = 2,925 \text{ V} \quad (33)$$

$$U_2 = 0,036 \text{ V} \quad (34)$$

$$k = 0,012 \quad (35)$$

5 Diskussion

Grundsätzlich kann gesagt werden, dass die verwendeten Methoden zur Bestimmung der verschiedenen Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten sehr präzise Ergebnisse liefern. Die gemessenen Werte bezüglich der Frequenzabhängigkeit der Wien-Robinson-Brücke liegen relativ genau auf der Kurve der Vergleichsfunktion. Nur bei sehr großen Frequenzen gibt es relativ große Abweichungen. Das Verhalten, dass die Wien-Robinson-Brücke einen gewissen Frequenzbereich nicht durch lässt, lässt sich damit bestätigen. Der Klirrfaktor des Generators scheint mit 1,2 % relativ klein zu sein.

Literatur

- [TUD17] TU-Dortmund. *Versuch 302: Elektrische Brückenschaltungen*. 9. Jan. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V302.pdf>.