V356: Kettenschaltungen mit LC-Gliedern

Simon Schulte
simon.schulte@udo.edu

Tim Sedlaczek
tim.sedlaczek@udo.edu

Durchführung: 10.1.2017
Abgabe: 17.1.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Ziel des Versuchs ist es, die Durchlasskurve, die Dispersion und die Eigenfrequenzen zweier LC-Ketten zu untersuchen. LC-Glieder sind Frequenzfilter. Sie sind entweder als Hochpass oder als Tiefpass aufgebaut. Die schematischen Aufbauten eines Hochpasses und eines Tiefpasses sind in Abbildung 1 zu sehen. In diesem Versuch sind alle LC-Glieder

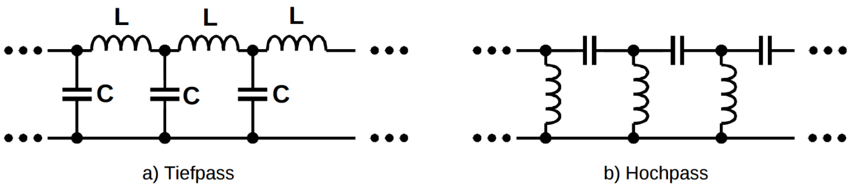

Abbildung 1: Schematischer Aufbau von einem Hochpass und einem Tiefpass [TUD17].

als Tiefpass aufgebaut. Sie filtern also alle hohen Frequenzen eines Signals heraus. Es wird zunächst ein Tiefpass in einer als unendlich lang simulierten LC-Kette betrachtet. Für diese Kette gilt mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln:

$$\omega^2 = \frac{2}{LC} \cdot (1 - \cos(\theta)). \tag{1}$$

ω kann dabei nur folgende Werte annehmen:

$$0 \leq \omega < \frac{2}{\sqrt{LC}}. \tag{2}$$

Das ist der Fall, da die LC-Kette, analog zu einem Tiefpass, Frequenzen ab einer bestimmten Frequenz rausfiltert. Diese Gleichung wird als Dispersionsrelation bezeichnet. Diese stellt die Phasenänderung pro Kettenglied in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz dar. In Abbildung 2 zu sehen ist der Aufbau einer LC_1C_2-Kette. Hier sind zwei unterschiedliche Kondensatoren in der Schaltung verbaut. Die Formel der durchgelassenen Frequenzen ist

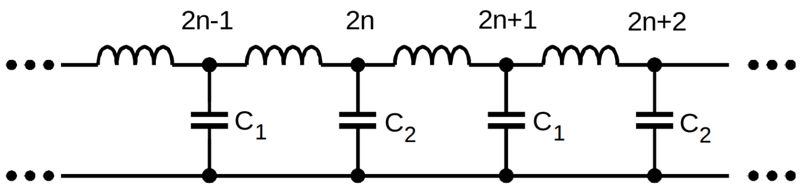

Abbildung 2: Aufbau einer LC-Kette mit alternierenden Kettengliedern [TUD17].

von der Kapazität abhängig und muss daher nun abgeändert werden, damit ergibt sich dann:

$$(\omega_{1/2})^2 = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \pm \frac{1}{L}\sqrt{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^2 - \frac{4\sin^2(\theta)}{C_1 C_2}}. \tag{3}$$

ω hat dabei die drei Grenzwerte $\sqrt{\frac{2}{LC_1}}$, $\sqrt{\frac{2}{LC_2}}$ und $\sqrt{\frac{2}{L}\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}}$, die dann zu dem in Abbildung 3 dargestelltem Graphen führen. Von dem Graphen wird die Dispersionskurve für eine alternierende LC-Kette dargestellt. Im Ursprung beginnt die Dispersionskurve und erreicht ihr Maximum $\omega_2 = \sqrt{\frac{2}{LC_1}}$ an der Stelle $\theta = \frac{\pi}{2}$. Für $\theta = \frac{\pi}{2}$ wird der Minimalwert der Kreisfrequenz erzeugt, also $\omega_1 = \sqrt{\frac{2}{LC_2}}$. Für $\theta = 0$ bekommt man den Wert $\omega_1(0) = \sqrt{\frac{2}{L}\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}}$. Der Graph besteht aus zwei Kurven. Die obere Kurve ist die

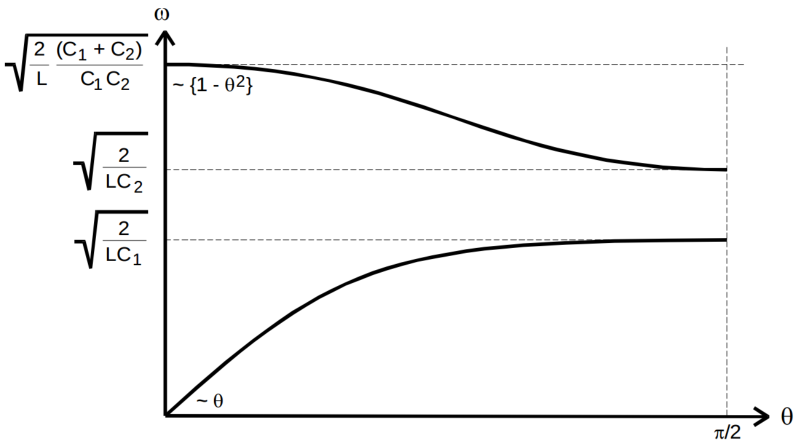

Abbildung 3: Dispersionskurve einer alternierenden LC-Kette [TUD17].

optische Kurve, da diese Frequenzen hoch sind und die untere Kurve heißt akustische Kurve, da diese Frequenzen tief sind. Der Grund dafür, dass zwei Kurven existieren ist das wechselnde Vorzeichen in (3). Die durchgelassenen Frequenzen sind daher endlich.

Trivialerweise ist Abbildung 2 schwingfähig. Daher besitzt dieses System Eigenfrequenzen und kann somit ohne äußere Einflüsse schwingen. Diese Eigenfrequenzen können bestimmt werden, da nun die Enden der LC-Ketten offen sind, also mit getrenntem Abschlusswiderstand ($Z \to \infty$). Es werden also die Spannungswellen ohne Phasensprung an den Enden reflekiert. Es ist auch möglich, durch minimieren des Abschlusswiderstandes ($Z \to 0$) eine stehende Welle zu erzeugen, in dem Fall mit festen Enden. Dies wird in dem Versuch allerdings nicht betrachtet. Das Spektrum der Frequenzen hängt von vielen Gerätspezifischen Beschaffenheiten ab. Zum Beispiel von der Dispersionsrelation, die für eine frequenzabhängige Phasengeschwindigkeit und damit eine frequenzabhängige Wellenlänge sorgt, die für stehende Wellen auf die Kette passen muss. Die entstehenden Eigenfrequenzen sind messbar am Kettenende in Form eines Maximums der Spannungsamplitude. Damit folgt für den Zusammenhang der verschiedenen Phasen:

$$n_{max} \cdot \theta_k = k \cdot \pi \tag{4}$$

k ist dabei definiert für

$$k = 1, 2, 3, ..., n_{max} \tag{5}$$

Bei n_{max} wird die Phase betrachtet, die am Kettenende vorliegt. In Abbildung 4 zu sehen ist, wie die nun entstandene stehende Welle aussieht. Die einlaufende und die reflektierte Welle überlagern sich so, dass die Phasenverschiebungen 0 oder ein vielfaches von π sind. Das widerum liegt daran, dass es an dem offenen Ende nicht zu einem Phasensprung kommt. Die Anzahl der Kettenglieder bestimmt die Anzahl an möglichen stehenden

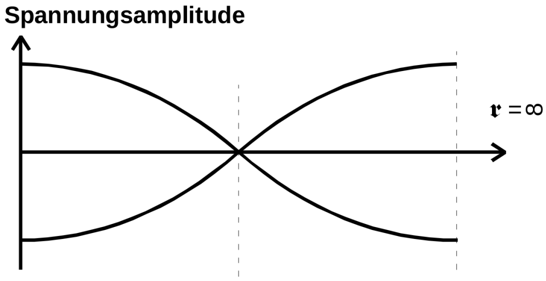

Abbildung 4: Spannungsamplitude einer stehenden Welle [TUD17].

Wellen. Wenn am Kettenende kein Widerstand vorliegt kann sich allerdings auch eine stehende Welle ausbilden. Auch hier muss dann die stehende Welle mit ihrer Wellenlänge auf die Wellenlänge der Kette passen.

Die Phasengeschwindigkeit ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von einer Welle in der Kettenschaltung. Solange die einzelnen Frequenzkomponenten einer Welle sich mit einer einheitlichen Phasengeschwindigkeit fortpflanzen, wird sich auch die jeweilige Wellengruppe mit der Phasengeschwindigkeit ausbreiten. Mit Hilfe der Dispersionsrelation ergibt sich dann für die Phasengeschwindigkeit:

$$v_{Ph} = \frac{\omega}{\theta} = \frac{\omega}{\arccos(1 - \frac{1}{2}\omega^2 LC)}. \tag{6}$$

2 Durchführung

Als erstes wurde die Durchlasskurve zweier LC-Ketten gemessen. Die dafür genutzte Schaltung ist in Abbildung 5 zu sehen. Die Kette bestand aus 16 Kettengliedern. Die Parameter der Induktivität L, der Kapazität C_1 und Kapazität C_2 waren mit der Apparatur gegeben mit:

$$L = 1{,}75\,\mathrm{mH} \tag{7}$$

$$C_1 = 22\,\mathrm{nF} \tag{8}$$

$$C_2 = 9{,}39\,\mathrm{nF}. \tag{9}$$

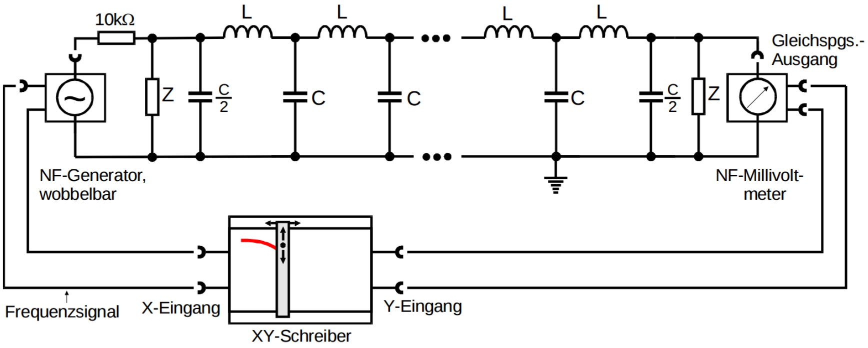

Abbildung 5: Versuchsaufbau zur Messung der Durchlasskurve [TUD17].

Zuerst wurde der Wellenwiderstand sowohl für die LC_1 als auch für die LC_1C_2-Kette gemessen. Die Werte der Wellenwiderstände ergeben sich mit den Formeln:

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = 282\,\Omega \qquad (LC - Kette) \tag{10}$$

$$Z = \sqrt{\frac{2L}{C_1 + C_2}} = 334\,\Omega \qquad (\mathrm{LC_1C_2 - Kette}). \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

Die Durchlasskurve, also die Ausgangsamplitude in Abhängigkeit von der Frequenz, wurde daraufhin mit einem XY-Schreiber aufgenommen. Auf dieser wurde dann an 5 verschiedenen Stellen die Frequenz der Eingansspannung notiert, um damit eine Skala für die Aufzeichnung zu erhalten. Bei der LC_1C_2-Kette mit alternierenden Kapazitäten wird die Kapazität jedes zweiten Kondensators verändert und dann erneut die gleiche Messung durchgeführt.

Als nächstes wird die Dispersionsrelation gemessen. Die dafür genutzte Schaltung ist in Abbildung 6 zu sehen.

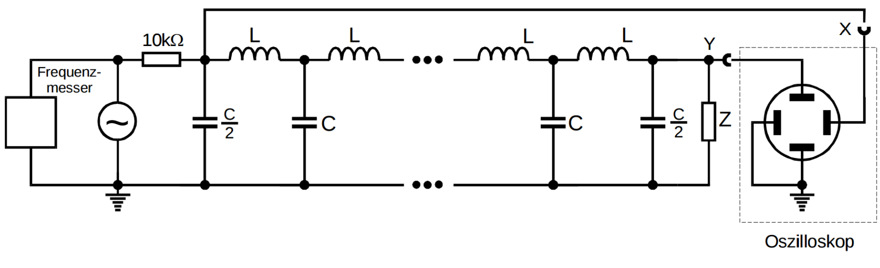

Abbildung 6: Versuchsaufbau zur Aufnahme der Dispersionsrelation [TUD17].

Auf dem Oszilloskop sind dabei Lissajous-Figuren zu beobachten. An den Figuren ist die jeweilige Phasenverschiebung zu sehen. Für beide Ketten wird immer, wenn die

Phasenverschiebung ein vielfaches von π beträgt, die entsprechende Frequenz notiert, bis keine Figur mehr zu erkennen ist.

Als letztes wird die Spannungsamplitude der LC-Kette an dem jeweiligen Kettenglied gemessen. Dazu werden die Eigenfrequenzen der ersten beiden Moden eingestellt. Diese liegen bei $5\,\mathrm{kHz}$ und $10\,\mathrm{kHz}$ vor. Gemessen wird für beide Frequenzen mit offenen Enden (Abschlusswiderstand getrennt) und für eine Frequenz mit aktivierten Abschlusswiderständen.

3 Auswertung

3.1 Bestimmung der Grenzfrequenzen

An den Markierungen auf den Zeichnungen des XY-Schreibers wurden die in Tabelle 1 stehenden Werte für die Frequenz gemessen.

Tabelle 1: Werte der Freqenz an den verschiedenen Punkten der Skala.

$LC-$Kette		LC_1C_2-Kette	
Abstand in cm	$f\,/\,$Hz	Abstand in cm	$f\,/\,$Hz
3	31 713	3	32 822
6	36 077	6	39 054
9	41 028	9	46 170
12	46 567	12	53 910
16	54 687	15	62 620

Zur Bestimmung der Grenzfrequenzen wird zunächst ein Referenzpunkt auf dem Papier gewählt. Mittels Python wird dann der Abstand auf dem Papier als Funktion der Frequenz nach

$$x\,(f) = a \cdot \log\left(|f|\right) + b \tag{13}$$

gefittet. Durch Umkehren der Funktion und Einsetzen des geometrisch bestimmten Abstands ergeben sich die jeweiligen Grenzfrequenzen. Die Funktion $f\,(x)$ lautet dann

$$f\,(x) = e^{\frac{x-b}{a}} \tag{14}$$

mit den Parametern

$$a = (23{,}8 \pm 0{,}2)\,\mathrm{cm} \tag{15}$$

und

$$b = (-244 \pm 2)\,\mathrm{cm} \tag{16}$$

für die LC-Kette bzw.

$$a = (18{,}6 \pm 0{,}3)\,\mathrm{cm} \tag{17}$$

und

$$b = (-190 \pm 4)\,\mathrm{cm} \tag{18}$$

für die LC_1C_2-Kette.
Die Grenzfrequenz, der LC-Kette, liegt bei 14,2 cm auf dem Papier und damit bei

$$f = 50{,}899\,\mathrm{kHz}. \tag{19}$$

Nach (2) ist mit den gegebenen Induktivitäten und Kapazitäten der Literaturwert dafür

$$f = 51{,}3\,\mathrm{kHz} \tag{20}$$

und die relative Abweichung des gemessenen Wertes beträgt 0,8 %.

Die Grenze, des akustischen Astes, der LC_1C_2-Kette, befindet sich bei 4,5 cm auf dem Papier. Das entspricht einer Fregenz von

$$f = 35{,}879\,\text{kHz}. \tag{21}$$

Der optische Ast beginnt bei 12,5 cm und endet bei 15,9 cm. Die Frequenzen dazu liegen dann bei

$$f = 55{,}207\,\text{kHz} \tag{22}$$

bis

$$f = 66{,}303\,\text{kHz}. \tag{23}$$

Zu den starken Schwankungen kommt es, da zuvor der Abschlusswiderstand auf den Wellenwiderstand bei $\omega = 0$ eingestellt wurde. Da der Wellenwiderstand von ω abhängt passt der zuvor eingestellte Wert, wenn die Frequenz erhöht wird, nicht mehr zur Welle. Es kommt zu Reflexionen. Bei bestimmten Frequenzen können sich stehende Wellen ausbilden, was sich dann in den Aufzeichnungen in Form dieser Schwankungen zeigt. Nach den Grenzwerten von Formel (3) folgen die Literaturwerte und relativen Abweichungen:

$$f = 36{,}275\,\text{kHz} \qquad 1{,}1\,\% \qquad \text{(Grenze akustischer Ast)} \tag{24}$$

$$f = 55{,}524\,\text{kHz} \qquad 0{,}6\,\% \qquad \text{(Anfang optischer Ast)} \tag{25}$$

$$f = 66{,}324\,\text{kHz} \qquad 0{,}03\,\% \qquad \text{(Ende optischer Ast)} \tag{26}$$

3.2 Dispersionskurven

Tabelle 2: Werte der Freqenz zur entsprechenden gesamten Phasenverschiebung $n \cdot \pi$.

n	$LC-$Kette $f\,/\,\text{Hz}$	LC_1C_2-Kette $f\,/\,\text{Hz}$
1	5015	5725
2	9950	11 550
3	14 900	17 125
4	19 580	22 380
5	24 220	27 210
6	28 550	31 490
7	32 400	34 830
8	36 100	38 710
9	39 550	
10	42 300	
11	45 200	
12	47 150	
13	48 900	
14	50 140	

In Tabelle 2 stehen die Frequenzen zu den mit den Lissajous-Figuren bestimmten Phasenverschiebungen. Dabei steht n für das n-Fache von π. Außerdem liegt bei $n = 1$ die Grundschwingung und bei jedem weiteren n die $n - 1$-te oberschwingung vor.
Nun wird nach Formel (1) die Dispersionskurve der LC-Kette berechnet und zusammen mit den gemessenen Werten aus Tabelle 2 in den Graphen 7 eingetragen.

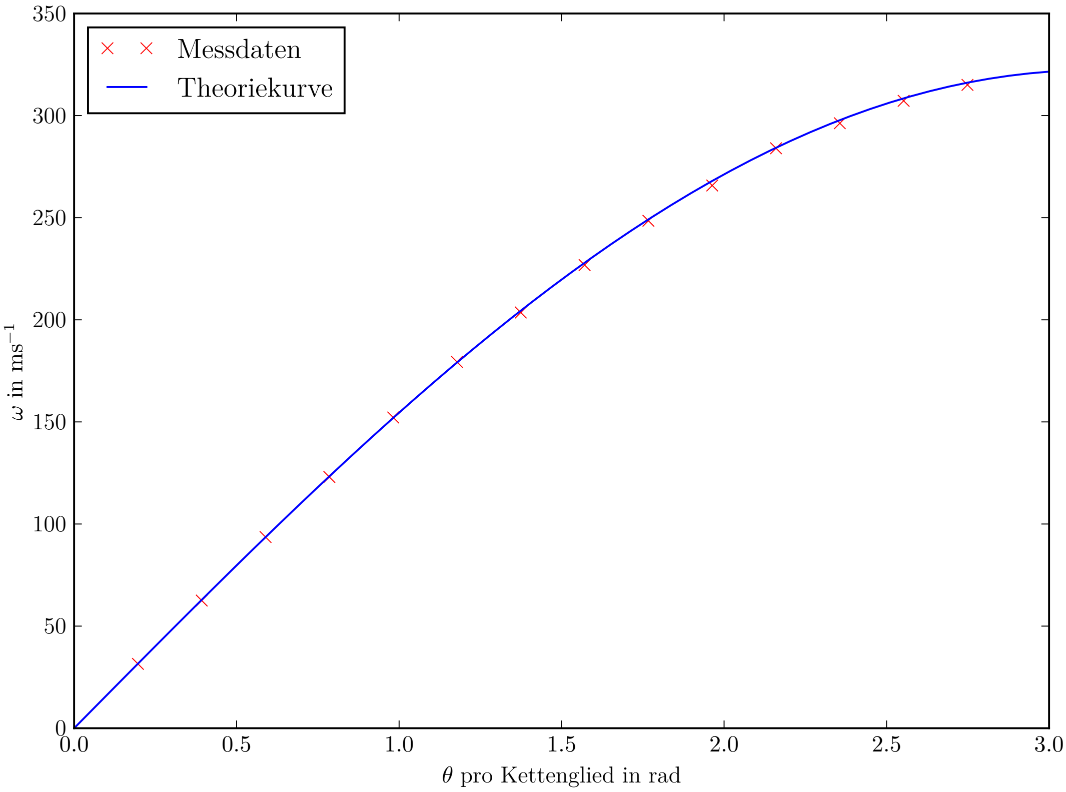

Abbildung 7: Dispersionskurve LC-Kette.

An dem Graphen ist zu sehen, dass sich die Kreisfrequenz bei einem Phasenwinkel von π einer Grenze von etwa $320\,\mathrm{ms}^{-1}$ nähert. Das entspricht also einer Frequenz von etwa $51\,\mathrm{kHz}$.

Nach Formel (3) ergibt sich, mit dem negativen Vorzeichen vor der Wurzel, der akustische Ast der LC_1C_2-Kette während das positive Vorzeichen vor der Wurzel zu dem optischen Ast führt. Beide Varianten, der Funktion, sind in Abbildung 8, zusammen mit den gemessenen Werten, aufgetragen.

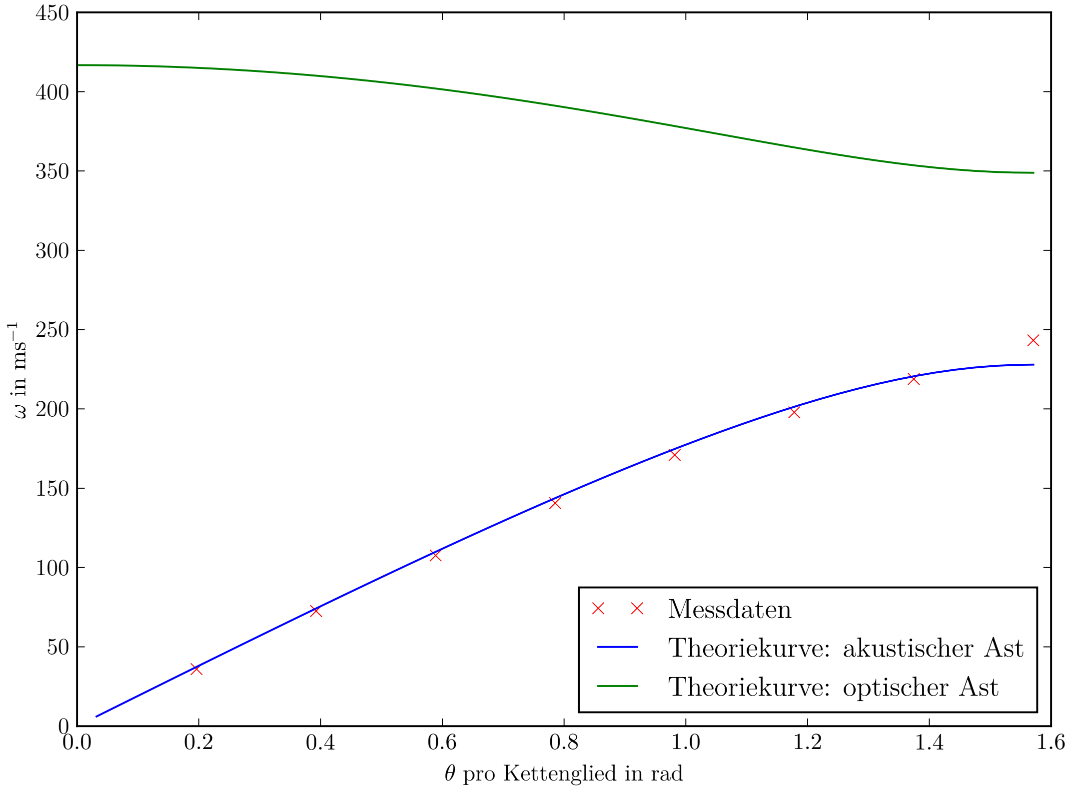

Abbildung 8: Dispersionskurve LC_1C_2-Kette.

Zu erkennen ist, dass sich der akustische Ast einer Kreisfrequenz von ca. $230\,\mathrm{ms}^{-1}$ bzw. einer Frequenz von $36\,\mathrm{kHz}$ nähert. Außerdem befindet sich zwischen den Kreisfrequenzen $350\,\mathrm{ms}^{-1}$ ($56\,\mathrm{kHz}$) und $420\,\mathrm{ms}^{-1}$ ($67\,\mathrm{kHz}$) die Theoriekurve des optischen Astes.

3.3 Berechnung der Phasengeschindigkeit

Um die Phasengeschwindigkeit der verschiedenen Eigenmoden zu bestimmen, wird der Quotient aus der Kreisfrequenz und der Phase berechnet. Die Ergebnisse davon stehen in Tabelle 3. Diese werden zusammen mit der Theoriekurve nach Formel (6), wie in Abbildung 9 aufgetragen.

Tabelle 3: Phasengeschwindigkeiten, der Wellen bei entsprechender Kreisfrequenz (LC-Kette).

$f\,/\,\mathrm{Hz}$	$v_{\mathrm{Ph}}\,/\,\mathrm{s}^{-1}$
5015	160 480
9950	159 200
14 900	158 933
19 580	156 640
24 220	155 008
28 550	152 267
32 400	148 114
36 100	144 400
39 550	140 622
42 300	135 360
45 200	131 491
47 150	125 733
48 900	120 369
50 140	114 606

In dem Graphen ist zu sehen, dass die Phasengeschwindigkeit bei zunehmender Frequenz immer stärker abnimmt und die Kreisfrequenz dabei gegen die Grenzfrequenz läuft.

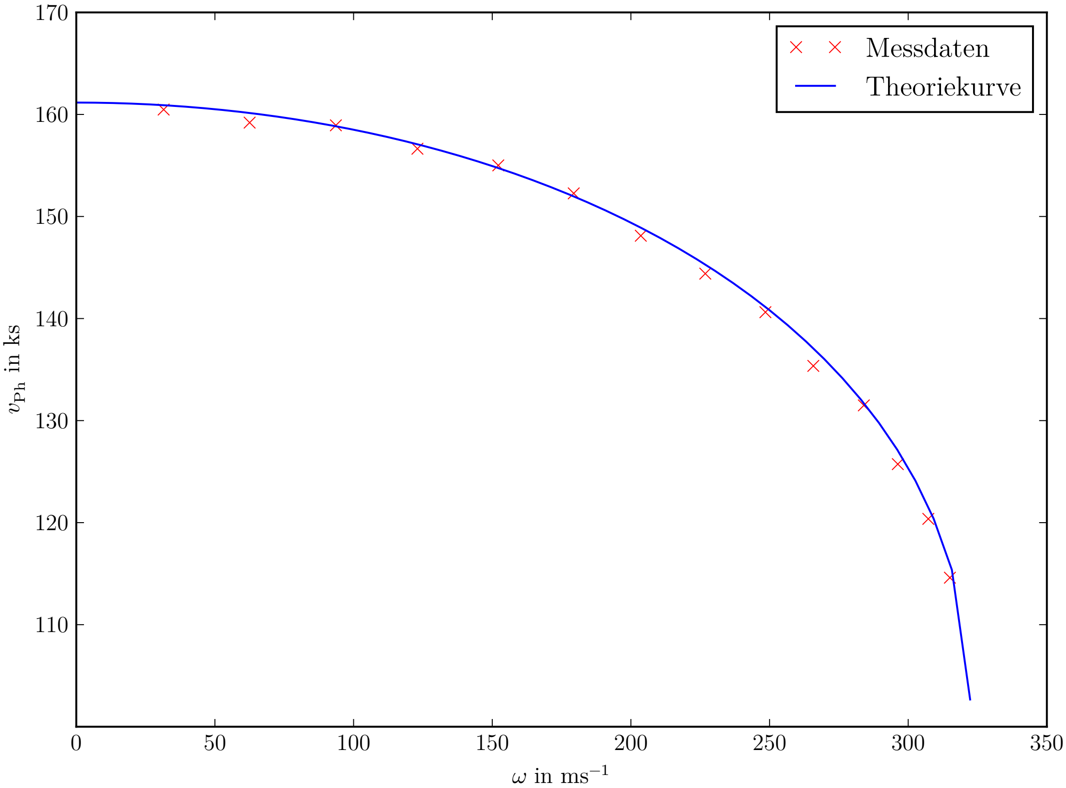

Abbildung 9: Phasengeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz.

3.4 Messung des Verlaufs der Stehenden Wellen bei $5\,\mathrm{kHz}$ und $10\,\mathrm{kHz}$

In Tabelle 4 stehen die gemessenen Spannungen am n-ten Kettenglied bei einer Frequenz von 5 kHz bzw. 10 kHz (also Grundschwingung und erste Oberschwingung).

Tabelle 4: Spannung am n-ten Kettenglied.

n	$f = 5\,\mathrm{kHz}$	$f = 10\,\mathrm{kHz}$ $U\,/\,\mathrm{V}$	$f = 5\,\mathrm{kHz}$
0	17,25	16,5	0,325
1	16,25	14,5	0,325
2	15	11	0,320
3	13	6	0,315
4	11	0,25	0,310
5	8,5	6	0,315
6	6	11,5	0,320
7	3	15,5	0,325
8	0,25	16,75	0,325
9	2,75	16	0,320
10	5,5	12,25	0,315
11	8	6,5	0,310
12	10	0,25	0,310
13	11,75	6,5	0,315
14	13,25	11,25	0,320
15	13,75	16	0,325
16	14,5	17,5	0,325

Nun wird die an den einzelnen Kettengliedern gemessene Spannung gegen die Nummer des jeweiligen Kettengliedes aufgetragen. Die Punkte wurden dabei miteinander verbunden um eine deutlichere und übersichtlichere Gestalt der Kurven zu erhalten.

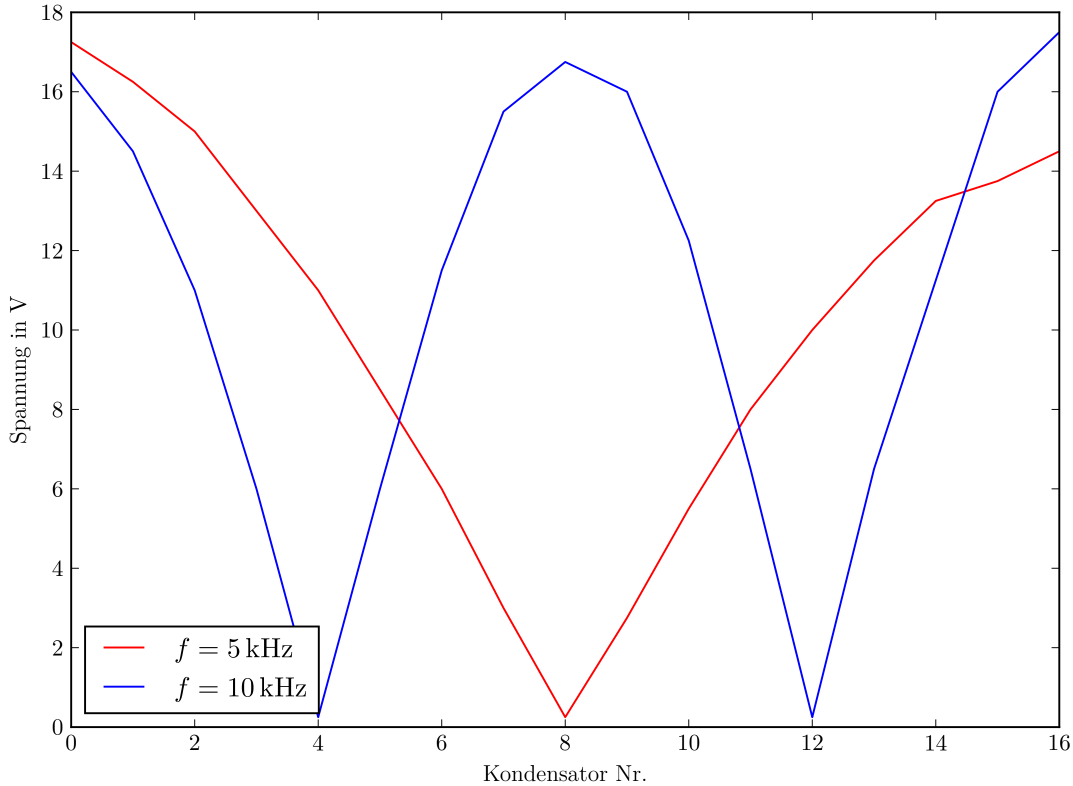

Abbildung 10: Spannung an den einzelnen Kettengliedern.

Zu sehen sind die Maxima an den Rändern, sowie ein (Grundschwingung) bzw. zwei (erste Oberschwingung) Knoten dazwischen.

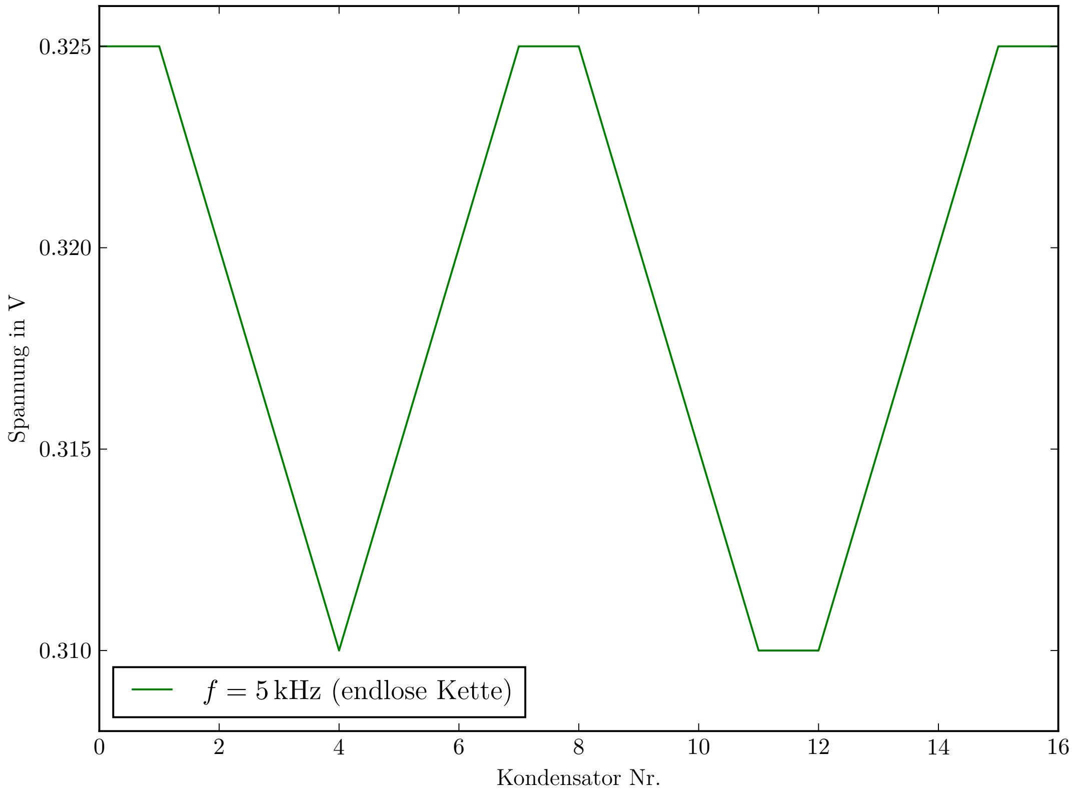

Abbildung 11: Spannung an den einzelnen Kettengliedern (endlose Kette).

Die grüne Kurve in Abbildung 11 soll zeigen, dass die Spannung bei einer endlosen Kette annähernd konstant ist.

4 Diskussion

Insgesamt fällt auf, dass der Versuch sehr gute Werte liefert. Die Abweichungen sind verschwindend gering. Der Unterschied zwischen den gemessenen Grenzfrequenzen

$$LC\text{-Kette:} \qquad 50{,}899\,\mathrm{kHz} \tag{27}$$
$$LC_1C_2\text{-Kette:} \qquad 35{,}879\,\mathrm{kHz} \tag{28}$$
$$55{,}207\,\mathrm{kHz} \tag{29}$$
$$66{,}303\,\mathrm{kHz} \tag{30}$$

und den rechnerisch bestimmten Werten liegt im Bereich von 0,03 % bis 1,1 %.

Die Dispersionskurve und die Kurve der Phasengeschwindigkeit der LC-Kette sind sehr genau. Bei der LC_1C_2-Kette weicht der letzte gemessene Wert etwas weiter ab. Eine Fehlerquelle ist, dass der Generator seine Frequenz ständig abändert, was dazu führt, dass sich beim bestimmen der Frequenzen mit den Lissajous-Figuren Abweichungen einschleichen können. Leichte Schwankungen der Werte z.B. bei dem Spannungsverlauf der endlosen Kette könnten dadurch zustande kommen, dass die Widerstände an den Enden nicht exakt auf den Wellenwiderstand eingestellt sind, wodurch es zu schwachen Reflexionen kommen kann.

Literatur

[TUD17] TU-Dortmund. *Versuch 356: Kettenschaltungen mit LC-Gliedern*. 16. Jan. 2017. URL: `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V356.pdf`.