

V355: Gekoppelte Schwingkreise

Simon Schulte
simon.schulte@udo.edu

Tim Sedlaczek
tim.sedlaczek@udo.edu

Durchführung: 31.1.2017

Abgabe: 07.02.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
2	Durchführung	5
2.1	Versuchsaufbau	5
2.2	Versuchsdurchführung	6
3	Auswertung	8
3.1	Fehlerrechnung	8
3.2	Berechnung der theoretischen Fundamentalfrequenzen	8
3.3	Justierung	9
3.4	Bestimmung der Eigenfrequenzen	9
3.5	Bestimmung des Verhältnisses von Schwebungsfrequenz und Schwingungs- frequenz	12
4	Diskussion	12
	Literatur	13

1 Theorie

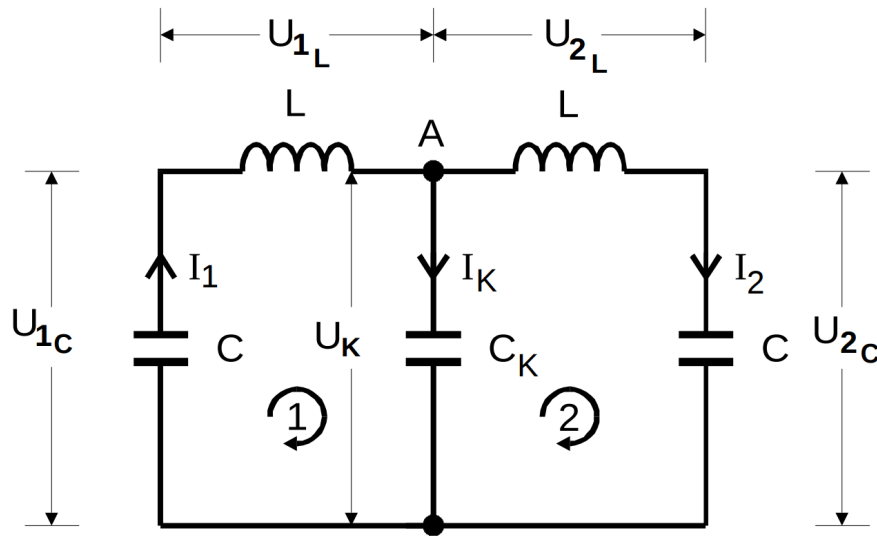


Abbildung 1: Der Versuchsaufbau von zwei gekoppelten Schwingkreisen [TUD17].

In diesem Versuch werden gekoppelte Schwingkreise im Hinblick auf Energietausch und auf ihre Fundamentalschwingungen untersucht. In Abbildung 1 zu sehen ist das Schaltbild zweier kapazitiv gekoppelter Schwingkreise. In diesem Schaltkreis werden Induktivitäten L und Kapazitäten C verwendet. C_K charakterisiert dabei den Kopplungskondensator. Mit Hilfe der Kirchhofschen Regeln lassen sich dann 2 Schwingungsgleichungen aufstellen. Die Maschenregel ist in der Abbildung visualisiert für die beiden Maschen 1 und 2. Die beiden Schwingungsgleichungen lauten:

$$L \frac{d^2 I_1}{dt^2} + \frac{1}{C} I_1 + \frac{1}{C_K} (I_1 - I_2) = 0 \quad (1)$$

$$L \frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{1}{C} I_2 - \frac{1}{C_K} (I_1 - I_2) = 0. \quad (2)$$

Wenn man Gleichung (1) und Gleichung (2) subtrahiert folgt:

$$L \frac{d^2}{dt^2} (I_1 + I_2) + \frac{1}{C} (I_1 + I_2) = 0 \quad (3)$$

$$L \frac{d^2}{dt^2} (I_1 - I_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K} \right) (I_1 - I_2) = 0. \quad (4)$$

Die Subtraktion wird durchgeführt, damit die beiden Differentialgleichungen nicht mehr voneinander abhängig sind. Nun ist es möglich beide unabhängig voneinander zu lösen. Als Lösung für Gleichung 3 folgt eine harmonische Schwingung, welche als gleichphasig bezeichnet wird. Beide Schwingkreise schwingen dabei so, als wäre keine Kopplung

vorhanden. Es verhält sich dann als zwei Schwingkreise, die mit gleicher Amplitude und Phase anfangen zu oszillieren. Die Schwingungsfrequenz dieser ist definiert durch:

$$\nu_+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (5)$$

Bei einer gegenphasigen Schwingung beginnt die Oszillation mit gleicher Amplitude und einer entgegengesetzten Phase. Die Schwingungsfrequenz dieser ist definiert durch:

$$\nu_- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K})^{-1}}}. \quad (6)$$

ν_+ und ν_- sind die Frequenzen zu den Fundamentalschwingungen des gekoppelten Systems, wobei die folgende Ungleichung gilt:

$$\nu_- > \nu_+ \quad (7)$$

Die erste Masche aus Abbildung 1 hat zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Strom von ungleich 0. Dann hat die Amplitude der ersten Schwingung genau dann ein Maximum, wenn die Amplitude der zweiten Schwingung gleich 0 ist. Es ergibt sich dann aus den Gleichungen 3 und 4:

$$I_1(t) = I_{10} \cos(\frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-)t) \cos(\frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)t) \quad (8)$$

$$I_2(t) = I_{10} \sin(\frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-)t) \sin(\frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)t). \quad (9)$$

Im Verlauf der Zeit wird I_2 größer und I_1 kleiner, bis zu dem Zeitpunkt, an dem die Ausgangslage umgekehrt wurde. Außerdem wird die Annahme getroffen, dass $C_K \gg C$ gilt und damit auch:

$$\frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-) \approx \omega_+ \quad (10)$$

$$\omega_- - \omega_+ \ll \omega_+. \quad (11)$$

In Abbildung 2 zu sehen ist dann der Amplitudenverlauf zweier Schwingungen, wenn eine Schwebung eintritt, wie durch die vorherigen Gleichungen beschrieben. Dabei wird die Frequenz

$$\nu_{\text{Sch}} = \nu_- - \nu_+ \quad (12)$$

als Schwebungsfrequenz bezeichnet. Die Schwebungsfrequenz ist die Frequenz, mit der die Gesamtenergie des Systems zwischen den Schwingkreisen oszilliert.

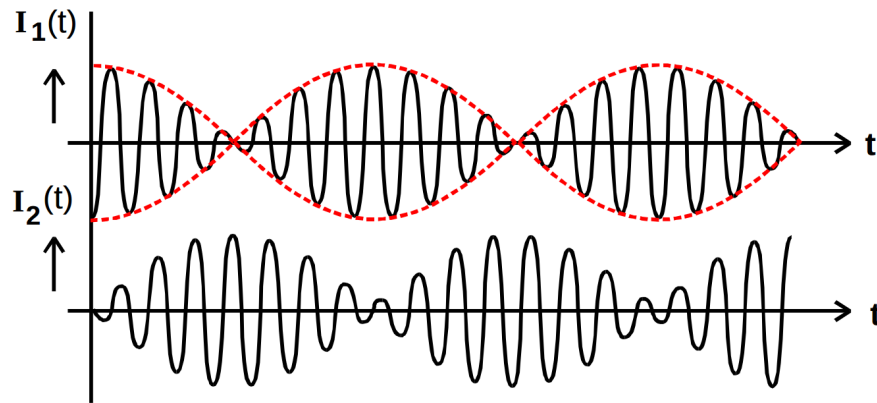


Abbildung 2: Der Amplitudenverlauf von zwei Schwingungen überlagert mit einer Schwebung [TUD17].

2 Durchführung

2.1 Versuchsaufbau

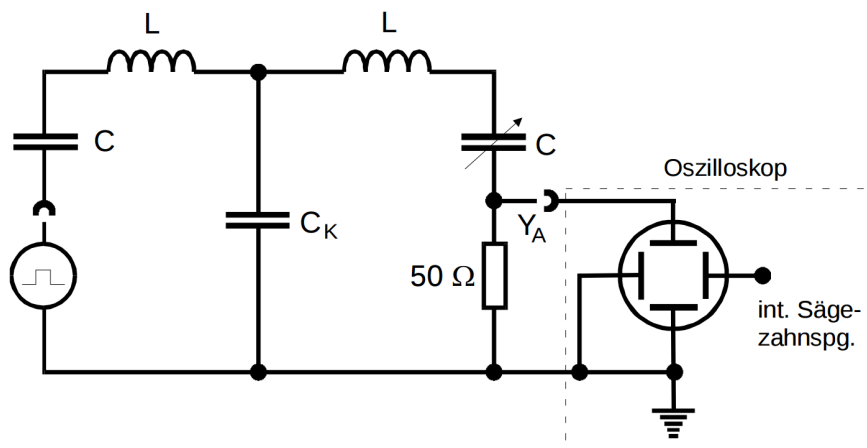


Abbildung 3: Der zur Untersuchung des Schwebungsphänomens und der Fundamentalschwingungen verwendete Versuchsaufbau. Für die Messung der Fundamentalschwingungen wurden kleine Änderungen an dem Schaltkreis vorgenommen [TUD17].

In Abbildung 3 zu sehen ist der genutzte Versuchsaufbau zur Untersuchung des Schwebungsphänomens und, mit leichten Abwandlungen, zur Ermittlung der Fundamentalschwingungen. Dabei wird mit einer Rechteckspannung Masche 1 angeregt. Über den Kopplungskondensator C_K gelangt dann die Schwingung in die zweite Masche des gekoppelten Schwingkreises. Dort wird über den Ohmschen Widerstand beim Oszilloskop die Schwebung sichtbar gemacht. Danach werden die Fundamentalschwingungen bestimmt.

Dazu wird die Rechteckspannung mit einer Sinusspannung ersetzt.

2.2 Versuchsdurchführung

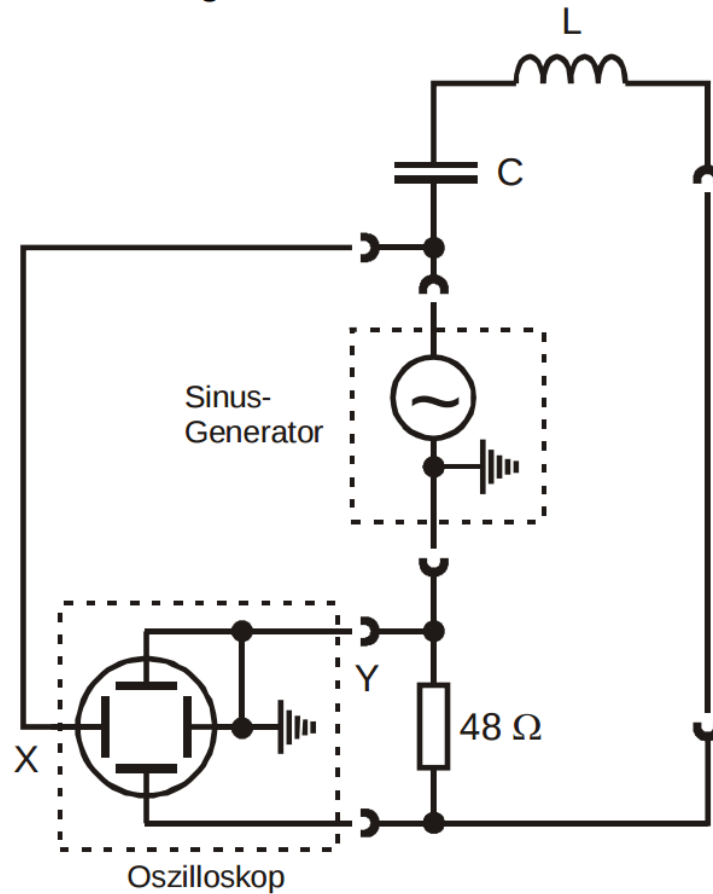


Abbildung 4: Versuchsaufbau zur Justierung des einstellbaren Kondensators [TUD17].

In Abbildung 4 zu sehen ist die Schaltskizze zur Justierung des einstellbaren Kondensators von Masche 2 aus Abbildung 3. Justiert wird dabei der Schwingkreis aus Abbildung 3 auf die Resonanzfrequenz des anderen Schwingkreises. Dafür sucht man mit Hilfe von Lissajous-Figuren, die auf dem Oszilloskop zu sehen sind, die Frequenz, bei der die Phase zwischen Generatorspannung und Schwingkreisstrom in Masche 1 gleich $\frac{\pi}{2}$ ist. Danach wird der Vorgang für Masche 2 wiederholt, mit dem Unterschied, dass nun die zuvor bestimmte Resonanzfrequenz durch den verstellbaren Kondensator eingestellt wird.

Nach der Justierung wird dann als erstes das Verhältnis zwischen Schwingungsfrequenz und Schwebungsfrequenz bestimmt. Dafür wird die Anzahl der Schwingungsmaxima innerhalb einer Schwebungsperiode für $2 \leq C_K \leq 12 nF$, für den Kopplungskondensator, gemessen.

Danach werden die beiden Fundamentalschwingungen ν_- und ν_+ bestimmt. Auch hier wird die Kapazität des Kopplungskondensators zwischen $2 \leq C_K \leq 12 \text{ nF}$ variiert. Es werden zur Messung Sinusspannung und Schwingkreisstrom im Oszilloskop gegeneinander aufgetragen. Dann wird mit Hilfe von Lissajous-Figuren genau die Frequenz gesucht, bei der die jeweilige Phase 0, für ν_+ , oder π , für ν_- wird.

Als letztes werden erneut, abhängig von $2 \leq C_K \leq 12 \text{ nF}$, die beiden Fundamentalschwingungen bestimmt. Dafür wird allerdings jetzt der Sweep genutzt. Beim Sweep wird in einer Sekunde das Frequenzspektrum einer beliebigen Anfangsfrequenz bis zu einer, ebenfalls beliebigen, Endfrequenz auf dem Oszilloskop sichtbar gemacht. Primär sichtbar sind dann zwei große Peaks, die die Frequenzen ν_+ und ν_- darstellen.

Es wurde Schaltung 2 genutzt mit den folgenden Bauteilwerten:

$$L = 23,954 \text{ mH} \quad (13)$$

$$C = 0,7932 \text{ nF} \quad (14)$$

$$C_{sp} = 0,028 \text{ nF} \quad (15)$$

$$R = 48 \Omega \quad (16)$$

Dabei gibt C_{sp} die Spuleneigene Kapazität an. Der verstellbare Kondensator konnte die in Tabelle 1 stehenden Werte annehmen, wobei der Wert jeweils einen Fehler von 3 % besitzt.

Tabelle 1: Mögliche Kapazitäten C_K .

C_K / nF
12
9,99
8,18
6,86
4,74
2,86
2,19
0,997

3 Auswertung

3.1 Fehlerrechnung

Alle Fehler, die sich beim Rechnen mit Formeln aus mehreren fehlerbehafteten Größen ergeben, werden mit Python berechnet. Dazu wird die Fehlerfortpflanzung nach

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\left(\frac{df}{dx_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{df}{dx_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{df}{dx_n} \Delta x_n\right)^2}. \quad (17)$$

verwendet.

3.2 Berechnung der theoretischen Fundamentalfrequenzen

Zu Beginn werden die theoretischen Eigenfrequenzen der gleichphasigen und der gegenphasigen Schwingung berechnet. Diese berechnen sich nach den Formeln (5) und (6). Allerdings sind noch die Kapazitäten der Spulen zu berücksichtigen, weshalb die Formeln die folgenden Formen annehmen:

$$\nu_+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C + C_{\text{sp}})}} \quad (18)$$

$$\nu_- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L((\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K})^{-1} + C_{\text{sp}})}} \quad (19)$$

Mit diesen und den gegebenen Bauteilwerten ergibt sich für $\nu_{+\text{th}}$

$$\nu_{+\text{th}} = 35,9 \text{ kHz}. \quad (20)$$

In Tabelle 2 stehen die möglichen Kapazitäten C_K und die damit berechneten Werte von ν_- .

Tabelle 2: Eigenfrequenzen der gegenphasigen Schwingung bei der jeweiligen Kapazität C_K .

C_K / nF	$\nu_{-\text{th}} / \text{kHz}$
$12,0 \pm 0,4$	$38,1 \pm 0,1$
$10,0 \pm 0,3$	$38,5 \pm 0,1$
$8,2 \pm 0,2$	$39,1 \pm 0,1$
$6,9 \pm 0,2$	$39,7 \pm 0,1$
$4,7 \pm 0,1$	$41,2 \pm 0,1$
$2,9 \pm 0,1$	$44,3 \pm 0,2$
$2,2 \pm 0,1$	$46,6 \pm 0,3$
$1,00 \pm 0,03$	$56,3 \pm 0,5$

3.3 Justierung

Bei der Justierung, wie in Abschnitt 2.2 beschrieben wurde eine Resonanzfrequenz von

$$\nu_+ = (37 \pm 1) \text{ kHz} \quad (21)$$

für den einzelnen Schwingkreis notiert. Der Fehler beruht auf eigener Abschätzung. Der Wert weicht um 3,3 % vom theoretischen Wert ab.

3.4 Bestimmung der Eigenfrequenzen

Die Eigenfrequenzen wurden wie in Abschnitt 2.2 beschrieben auf zwei verschiedene Weisen gemessen. Die Messwerte dazu stehen in den Tabellen 3 und 4. Der Fehler der Kapazitäten entspricht den 3 %, während die anderen Abweichungen geschätzt sind. Bei dem Sweep wurde innerhalb von einer Sekund das Spektrum von 25 kHz bis 66 kHz durchlaufen.

Tabelle 3: Eigenfrequenzen der Schwingungen bei der jeweiligen Kapazität C_K (direkt am Oszilloskop gemessen).

C_K / nF	ν / kHz	ν_+ Abweichung in %	ν / kHz	ν_- Abweichung in %
$12,0 \pm 0,4$	$35,6 \pm 0,3$	1	$38,3 \pm 0,3$	0,5
$10,0 \pm 0,3$	$35,6 \pm 0,3$	1	$38,6 \pm 0,3$	0,3
$8,2 \pm 0,2$	$35,6 \pm 0,3$	1	$39,0 \pm 0,3$	0,3
$6,9 \pm 0,2$	$35,6 \pm 0,3$	1	$39,5 \pm 0,3$	0,5
$4,7 \pm 0,1$	$35,6 \pm 0,3$	1	$41,1 \pm 0,3$	0,2
$2,9 \pm 0,1$	$35,6 \pm 0,3$	1	$44,3 \pm 0,2$	0,0
$2,2 \pm 0,1$	$35,6 \pm 0,3$	1	$46,5 \pm 0,3$	0,2

Tabelle 4: Zeitpunkt beim Sweep bei der jeweils das Resonanzmaximum gemessen wurde.

C_K / nF	t_{ν_+} / ms	t_{ν_-} / ms
$12,0 \pm 0,4$	256 ± 4	304 ± 4
$10,0 \pm 0,3$	256 ± 4	316 ± 4
$8,2 \pm 0,2$	260 ± 4	336 ± 4
$6,9 \pm 0,2$	256 ± 4	344 ± 4
$4,7 \pm 0,1$	256 ± 4	384 ± 4
$2,9 \pm 0,1$	256 ± 4	460 ± 4
$2,2 \pm 0,1$	260 ± 4	512 ± 4
$1,00 \pm 0,03$	252 ± 4	740 ± 4

Da der Sweep linear verläuft und sich damit mit einer Funktion

$$f(t) = m \cdot t + b \quad (22)$$

beschreiben lässt, ist es nun möglich daraus die Frequenzen zu bestimmen. Als Steigung m wird aus dem Anfangs und Endwert

$$m = 41 \frac{\text{kHz}}{\text{s}} \quad (23)$$

bestimmt. b entspricht dem Anfangswert von 25 kHz. Damit ergeben sich die in Tabelle 5 stehenden Frequenzen der Eigenschwingungen.

Tabelle 5: Eigenfrequenzen der Schwingungen bei der jeweiligen Kapazität C_K (direkt am Oszilloskop gemessen).

C_K / nF	ν / kHz	ν_+ Abweichung in %	ν / kHz	ν_- Abweichung in %
$12,0 \pm 0,4$	$35,5 \pm 0,2$	1,1	$37,5 \pm 0,2$	1,6
$10,0 \pm 0,3$	$35,5 \pm 0,2$	1,1	$38,0 \pm 0,2$	1,3
$8,2 \pm 0,2$	$35,7 \pm 0,2$	0,6	$38,8 \pm 0,2$	0,8
$6,9 \pm 0,2$	$35,5 \pm 0,2$	1,1	$39,1 \pm 0,2$	1,5
$4,7 \pm 0,1$	$35,5 \pm 0,2$	1,1	$40,7 \pm 0,2$	1,2
$2,9 \pm 0,1$	$35,5 \pm 0,2$	1,1	$43,9 \pm 0,2$	0,9
$2,2 \pm 0,1$	$35,7 \pm 0,2$	0,6	$46,0 \pm 0,2$	1,3
$1,00 \pm 0,03$	$35,3 \pm 0,2$	1,7	$55,3 \pm 0,2$	1,8

Die Theoriewerte sowie die bei den Messungen bestimmten Frequenzen sind in Abbildung 5 dargestellt.

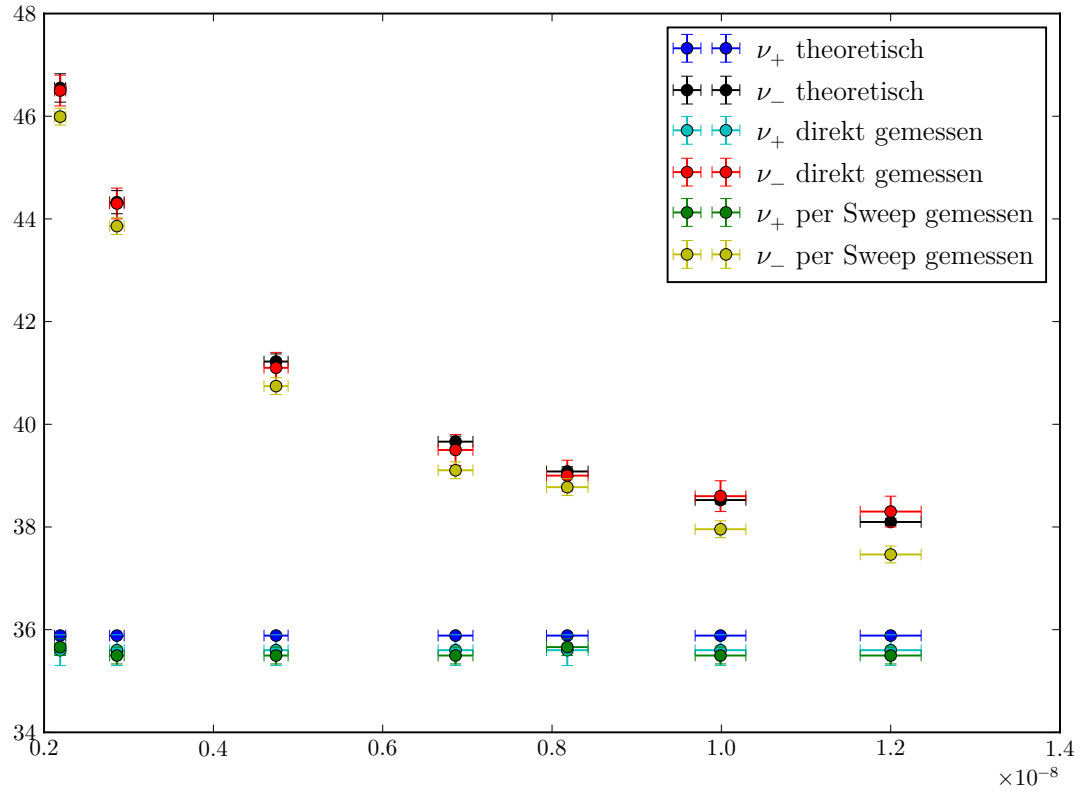


Abbildung 5: Eigenfrequenzen der Schwingkreise in Abhängigkeit von der Kapazität.

3.5 Bestimmung des Verhältnisses von Schwebungsfrequenz und Schwingungsfrequenz

Durch kombination von Formel (10) und Formel (12) lässt sich das Verhältnis der Schwingungsfrequenz zur Schwebungsfrequenz bestimmen.

$$\frac{\nu_+}{\nu_{\text{Sch}}} = \frac{1}{2} \frac{\nu_+ + \nu_-}{\nu_- - \nu_+} \quad (24)$$

In Tabelle 6 stehen die mit den theoretischen Frequenzen bestimmten und die abgezählten Verhältnisse, sowie deren prozentualen Abweichungen.

Tabelle 6: Verhältniss der Schwingungsfrequenz zur Schwebungsfrequenz.

C_K / nF	n_{theorie}	n_{gemessen}	Abweichung in %
$12,0 \pm 0,4$	$16,7 \pm 0,5$	$16,0 \pm 0,5$	4,2
$10,0 \pm 0,3$	$14,1 \pm 0,4$	$14,0 \pm 0,5$	0,7
$8,2 \pm 0,2$	$11,7 \pm 0,3$	$12,0 \pm 0,5$	2,6
$6,9 \pm 0,2$	$10,0 \pm 0,3$	$10,0 \pm 0,5$	0,0
$4,7 \pm 0,1$	$7,2 \pm 0,2$	$7,0 \pm 0,5$	2,7
$2,9 \pm 0,1$	$4,8 \pm 0,1$	$5,0 \pm 0,5$	4,2
$2,2 \pm 0,1$	$3,86 \pm 0,09$	$4,0 \pm 0,5$	3,6

4 Diskussion

Bei der Justage ergab sich eine Resonanzfrequenz von $(37 \pm 1) \text{ kHz}$. Diese liegt etwas über der theoretischen Frequenz was daran liegt, dass die Phase mit der Lissajous-Figur, aufgrund der ungleichen Amplitudenskaalen, nur grob auf ein Oval eingestellt werden konnte und somit mit gewisser Ungenauigkeit nur $\frac{\pi}{2}$ beträgt. Diese nicht unbedingt optimale Justierung ist ebenfalls ein möglicher Grund für spätere Abweichungen. Grundsätzlich liegen alle Ergebnisse sehr nah an den Theorie-Werten. Die Frequenzen der gleichphasigen Schwingung liegen mit $35,6 \text{ kHz}$ und $\approx 35,5 \text{ kHz}$ etwas unterhalb des Theorie-Wertes. Die direkt gemessenen Werte der gegenphasigen Schwingung liegen sehr gut auf den Theorie-Werten. Beim Sweep gibt es generell etwas größere Abweichungen, sodass die Fehler die Abweichungen nur teilweise überstrecken. Bei den direkten Messungen der Eigenfrequenzen und bei der Messung der Frequenzverhältnisse liegen die Werte insgesamt im Bereich der Fehler.

Literatur

- [TUD17] TU-Dortmund. *Versuch 355: Gekoppelte Schwingkreise*. 6. Feb. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V355.pdf>.