V103: Biegung elastischer Stäbe

Simon Schulte
simon.schulte@udo.edu

Tim Sedlaczek
tim.sedlaczek@udo.edu

Durchführung: 22.12.2016
Abgabe: 10.01.2016

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Ziel des Versuchs ist die Bestimmung des Elastizitätsmodules E verschiedener Metalle über die Untersuchung der Durchbiegung D eingespannter metallischer Stäbe.

2 Theorie

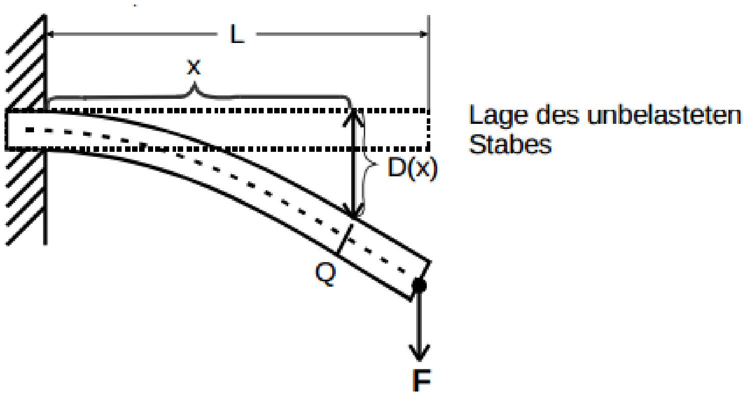
Wenn auf einen eingespannten Festkörper eine Kraft wirkt, verformt sich dieser. Diese Änderung kann als Volumenänderung oder als Gestaltsänderung vorliegen. Es ist von der sogenannten Spannung σ abhängig, ob ein Festkörper unter Einwirkung von Kräften eine Volumen- oder Gestaltsänderung erfährt. σ ist als Kraft pro Fläche definiert. Die Spannung σ wirkt in Normalrichtung der angegriffenen Fläche des Körpers und ist über das Hooksche Gesetz durch

$$\sigma = E\,\frac{\Delta L}{L} \tag{1}$$

definiert. Dabei ist E der Elastizitätsmodul. Damit gibt die Spannung σ an, wie stark die am Körper wirkende Spannung bei einer relativen Änderung einer linearen Körperdimension ausfällt. Dieser Zusammenhang ist in dem sogenannten Hookschen Bereich linear. Vergleichbar mit der Kleinwinkelnäherung ist der Hooksche Bereich in einem Bereich kleiner Auslenkungen definiert. Durch die Bestimmung der Längenänderung ΔL bei einer bekannten Kraft kann somit der Elastizitätsmodul E bestimmt werden. Bei der Messung der Biegung D treten bei gleichen Kraftverhältnissen und Abmessungen des Versuchsaufbaus deutlich größere und genauer zu bestimmende Werte auf. D ist deutlich besser und genauer zu bestimmen, als der Elastizitätsmodul E. Es gilt allerdings bei der Biegung elastischer Metallstäbe zwei Fälle zu unterscheiden.

2.1 Biegung des einseitig eingespannten homogenen Stabes

Abbildung 1: Schematische Darstellung der Durchbiegung bei einseitiger Einspannung.



In Abbildung 1 dargestellt ist ein einseitig fest eingespannter, homogener Stab, auf den eine Kraft F am freien Ende wirkt. Dann biegt sich dieser Stab durch. Durch diese

Durchbiegung erfährt der Stab eine kontinuierliche Längenänderung δL, welche widerum über den Querschnitt Q, des jeweiligen Metallstabs, der gerade eingespannt ist, variiert. $D(x)$ ist die Durchbiegung des Stabs. Das darin enthaltene x gibt die Strecke von dem Ort, an dem der Stab eingespannt ist, bis zu dem Ort, an dem die Durchbiegung gemessen wird, an. Wenn man sich den Metallstab als Stab, welcher aus vielen "Metallfasern" besteht vorstellt, dann folgt: Fasern, die weiter oben liegen werden gestreckt und somit auseinandergezogen. Fasern, die unterhalb der längeninvarianten neutralen Faser liegen, also jene, die in 1 gestrichelt mitten durch den Metallstab geht, werden gestaucht, also verkürzt. Die neutrale Faser bahält immer ihre Ausgangslänge. Durch die wirkende Kraft F am Ende des Stabes folgt ein Drehmoment M_f mit Hebelarm $(L-x)$, was die zuvor beschriebene Verbiegung zur Folge hat. Es wirkt dabei mit entgegengesetzter Richtung ein Drehmoment M_σ entgegen, welches aus der Elastizität des jeweiligen Stoffes, aus dem der Metallstab besteht, folgt. Die messbare Auslenkung des Stabes charakterisiert also das Gleichgewicht dieser Drehmomente, für das

$$M_f = M_\sigma \tag{2}$$

$$F(L-x) = \int_Q y\sigma(y)\mathrm{d}q \tag{3}$$

gilt. Das Gleichgewicht wird also von der hebelnden Kraft und der Spannung charakterisiert. Die Gleichung **??** lässt sich mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{1}{R} \approx \frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}x^2} \tag{4}$$

aus der Differentialgeometrie vereinfachen. Daraus folgt mit Definition des Flächenträgheitsmomentes I als

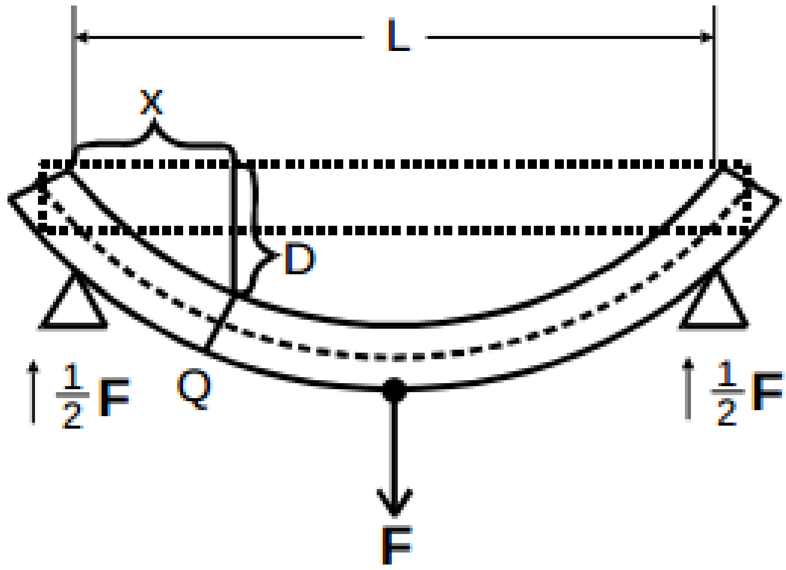
$$I := \int_Q y^2 \mathrm{d}q(y) \tag{5}$$

für die Durchbiegung auf der Länge L des Stabes die Gleichung

$$D(x) = \frac{F}{2EI}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right). \tag{6}$$

2.2 Biegung des beidseitig eingespannten homogenen Stabes

Abbildung 2: Schematische Darstellung der Durchbiegung bei zweiseitiger Einspannung.



In Abbildung 2 dargestellt ist ein beidseitig eingespannter Stab. Hier wirkt nun mittig auf den Stab die Kraft F. Durch diese wirkende Kraft F ergibt sich auch hier jeweils ein Drehmoment auf beiden Seiten der Auslenkung. Links von der Auslenkung ergibt sich folgendes Drehmoment:

$$M_F = -\frac{F}{2}x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{2}, \tag{7}$$

Rechts von der Auslenkung ergibt sich folgendes Drehmoment:

$$M_F = -\frac{F}{2}(L-x), \quad \frac{L}{2} \leqslant x \leqslant L \tag{8}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist es möglich, mit dem gleichen Ansatz, wie bei der einseitigen Einspannung, zwei Differentialgleichungen dür die Durchbiegung zu bestimmen.

$$\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{F \cdot x}{2EI}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{2}, \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{F}{2EI}(L-x), \quad \frac{L}{2} \leqslant x \leqslant L \tag{10}$$

Mit zweifacher Integration der Gleichungen 9 und 10 ergibt sich für die Durchbiegung D:

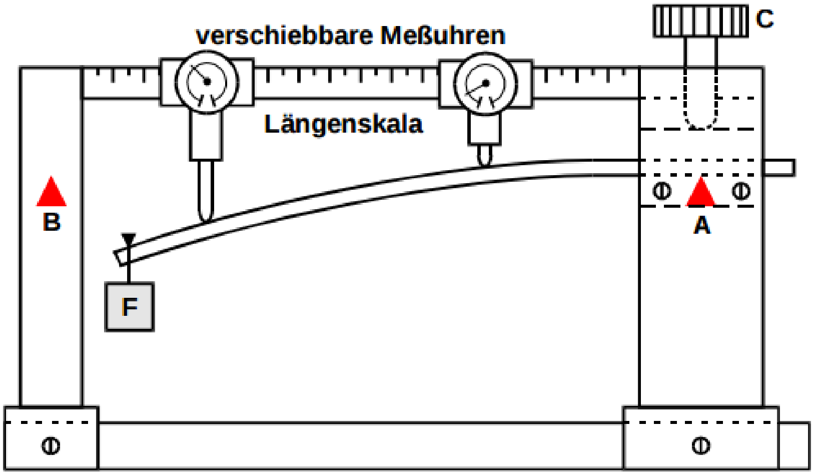
$$D(x) = \frac{F}{48EI}(3L^2x - 4x^3), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{2}, \tag{11}$$

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3), \quad \frac{L}{2} \leqslant x \leqslant L \tag{12}$$

Allerdings nur unter der Bedingung, dass die Stabmitte, also der Ort, an dem die Kraft angreift, eine horizontale Tangente aufweist. Außerdem muss die Durchbiegung an beiden Auflagepunkten gleich Null sein. Mit den beiden Gleichungen 12 und 11 kann man durch Herleiten eines Zusammenhanges von D und x aus den gemessenen Messwerten der Elastizitätsmodul E berechnen.

3 Durchführung

Abbildung 3: Schematische Darstellung der Messapparatur.



In Abbildung 3 zu sehen ist der Versuchsaufbau, der zur Messung verwendet wird. Die Durchbiegung D wird mit verschiebbaren Messuhren gemessen. Diese messen extrem genau, mit Hilfe eines federnden Taststiftes, Verschiebungen eines Objekts. Verschiebbar sind sie, um die Durchbiegung D an verschiedenen Orten x messen zu können. Die Messuhren befinden sich auf einer festen Achse. Sie besitzen zur Messung ausfahrbare Auflagepunkte zur Bestimmung des Abstandes von einem kalibrieten Nullpunkt in einem Wertebereich von $0,01$ bis $10\,\mathrm{mm}$. Der Stab kann sowohl an einer Seite, wie auch in der Abbildung 3 dargestellt, eingespannt sein, als auch an zwei Seiten. Dann wird der Stab etwa dort eingespannt, wo sich in der Abbildung "B" befindet. Nun werden zuerst die Versuchsparameter aufgenommen. Das sind der Durchmesser d, die effektive Länge L und das Gewicht der drei Stäbe, die untersucht werden. Das sind zum einen ein eckiger Aluminiumstab, außerdem ein runder Aluminiumtab und ein eckiger Messingstab. L und das Gewicht des jeweiligen Stabes werden einmal gemessen und der Durchmesser d wird für jeden Stab 5 mal gemessen.

3.1 Einseitige Einspannung

Als nächstes werden zwei verschiede Stäbe in einseitiger Einspannung untersucht, zum einen der eckige Messingstab und zum anderen der runde Aluminumstab. Dazu wird der jeweilige Stab an der rechten Seite in einen Klemmblock gespannt, in Abbildung 3 zu sehen. Nun wird die Messuhr von rechts an die Probe gesetzt und kalibriert. Dafür werden solange Veränderungen an verschiedenen Stellen der Messuhr vorgenommen, bis die mit am Ende der Probe angehängten Gewicht gemessene Durchbiegung bei minimaler Auslenkung auf der Längenskala gerade Null beträgt. Dann werden in $1,5cm$ Schritten Werte aufgenommen. Dafür wird die Masse angehängt und mit der Messuhr langsam der

Stab abgefahren.

3.2 Beidseitige Einspannung

Als letztes wird der beidseitig eingespannte eckige Aluminiumstab untersucht. Dafür wird nun der Stab auf der anderen Seite ebenfalls eingespannt. Dann wird zuerst, analog, wie bei der einseitigen Einspannung, ohne ein zusätzliches Massestück die Durchbiegung D abhägig vom Ort x gemessen. Danach wird eine Masse angehangen und die Messung wird erneut analog, wie bei der einseitigen Einspannung durchgeführt.

4 Fehlerrechnung

Die in der Auswertung verwendeten Mittelwerte mehrfach gemessener Größen sind gemäß der Gleichung

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{13}$$

bestimmt. Die Standardabweichung des Mittelwertes ergibt sich dabei zu

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}. \tag{14}$$

Resultiert eine Größe über eine Gleichung aus zwei anderen fehlerbehafteten Größen, so berechnet sich der Gesamtfehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_2}\Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_n}\Delta x_n\right)^2}. \tag{15}$$

Alle in der Auswertung angegebenen Größen sind stets auf die erste signifikante Stelle des Fehlers gerundet. Setzt sich eine Größe über mehrere Schritte aus anderen Größen zusammen, so wird erst am Ende gerundet, um Fehler zu vermeiden. Zur Auswertung wurde das Programm `python (Version 3.5.2)` verwendet.

5 Auswertung

5.1 Berechnung des Elastizitätsmoduls E eines Messingstabes mit quadratischem Querschnitt bei einseitiger Einspannung

In der Tabelle 1 zu sehen sind die Versuchsparameter des Messingstabes. Die Werte werden, wie in 3 beschrieben, bestimmt. Eine Fehlerrechnung für den Durchmesser des Messingstabes bleibt aus, da sich höchtens Abweichungen von wenigen Mikrometern bei den 5 Messungen ergeben.

Tabelle 1: Versuchsparameter für den Messingstab.

Durchmesser d	$10\,\mathrm{mm}$
effektive Länge L	$40{,}7\,\mathrm{cm}$
angehängte Masse M	$2{,}3606\,\mathrm{kg}$

Das Flächenträgheitsmoment des Messingstabes ergibt sich mit

$$I = \frac{d^4}{12} = 833\,\mathrm{mm}^4. \tag{16}$$

Tabelle 2 beinhaltet die gemessene effektive Auslenkung des Stabes in Abhängigkeit der Entfernung vom Einspannungspunkt.

Tabelle 2: Effektive Durchbiegung des einseitig eingespannten Messingstabes in Abhängigkeit des Ortes mit angehängter Masse.

Ort x[cm]	Auslenkung D[µm]
3,0	0
4,5	2
6,0	7
7,5	7,5
9,0	0
10,5	-2
12,0	-14
13,5	-24
15,0	-29
16,5	-40
18,0	-56
19,5	-73,5
21,0	-88
22,5	-116
24,0	-132
25,5	-153
27,0	-175
28,5	-195
30,0	-221
31,5	-242
33,0	-266

Zur Berechnung des Elastizitätsmoduls E muss nun die effektive Auslenkung des Stabes nach unten in Abhängigkeit des Hebelarms betrachtet werden wenn, mit der Masse M an das freie Ende des Stabes gehangen. In Tabelle 2 zu sehen sind die aufgenommenen Messwerte, wobei die Auslenkung D des Stabes bereits um die Auslenkung bereinigt wurde, die der Stab aufgrund seines Eigengewichtes selbst verursacht.

In einem weiteren Schritt wird nun gemäß Gleichung 6 eine lineare Regression der Messwerte vorgenommen. Abbildung **??** zeigt den resultierenden Plot.

Die lineare Ausgleichsrechnung, welche auf der Gleichung 6 basiert, liefert für die Steigung m und den y-Achsenabschnitt b die Werte:

$$m = (-0{,}0087 \pm 0{,}0002)\,\frac{1}{\mathrm{m}^2} \tag{17}$$

$$b = (0{,}000\,028 \pm 0{,}000\,004)\,\mathrm{m}. \tag{18}$$

In Abbildung **??** ist der zugehörige Plot zu sehen. Für den Elastizitätsmodul E folgt mit der Formel

$$E = \frac{F}{2mI} = \frac{Mg}{2mI} = (1589 \pm 44)\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^2}. \tag{19}$$

5.2 Berechnung des Elastizitätsmoduls E eines Aluminiumstabes mit kreisförmigem Querschnitt bei einseitiger Einspannung

In der Tabelle 3 zu sehen sind die Versuchsparameter des Messingstabes. Die Werte werden wie in 3 beschrieben bestimmt. Eine Fehlerrechnung für den Durchmesser des kreisförmigen Aluminiumstabes bleibt aus, da sich höchtens Abweichungen von wenigen Mikrometern bei den 5 Messungen ergeben.

Tabelle 3: Versuchsparameter für den runden Aluminiumstab.

Durchmesser d	10 mm
effektive Länge L	34,8 cm
angehängte Masse M	1,192 96 kg

Das Flächenträgheitsmoment des runden Aluminiumstabes ist mit Gleichung 5:

$$I = \frac{\pi}{64} d^4 = 491\,\mathrm{mm}^4 \tag{20}$$

Die lineare Ausgleichsrechnung liefert für die Ausgleichsgerade die Parameter

$$m = (-0{,}021\,01 \pm 0{,}000\,03)\,\frac{1}{\mathrm{m}^2} \tag{21}$$

$$b = (0{,}000\,20 \pm 0{,}000\,04)\,\mathrm{m}. \tag{22}$$

Tabelle 4: Effektive Durchbiegung des einseitig eingespannten runden Alustabes in Abhängigkeit des Ortes mit angehängtem Gewicht.

Ort x[cm]	Auslenkung D[µm]
2,5	-16
4,0	3
5,5	-8
7,0	-11
8,5	-32
10,0	-44
11,5	-64
13,0	-89
14,5	-102
16,0	-125,5
17,5	-157,5
19,0	-190
20,5	-216,5
22,0	-256
23,5	-284
25,0	-317,5
26,5	-350,8
28,0	-406,5
29,5	-445.5
31,0	-484
32,5	-529

Für den Elastiziätsmodul folgt dann mit der Formel 19

$$E = \frac{F}{2mI} = \frac{Mg}{2mI} = (566 \pm 8)\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^2}. \tag{23}$$

5.3 Berechnung des Elastizitätsmoduls E eines Aluminiumstabes mit quadratischem Querschnitt bie beidseitiger Einspannung

In der Tabelle 5 zu sehen sind die Versuchsparameter des Messingstabes. Die Werte werden wie in 3 beschrieben bestimmt. Eine Fehlerrechnung für den Durchmesser des eckigen Aluminiumstabes bleibt aus, da sich höchtens Abweichungen von wenigen Mikrometern bei den 5 Messungen ergeben.

Tabelle 5: Versuchsparameter für den eckigen Aluminiumstab.

Durchmesser d	10 mm
effektive Länge L	55,2 cm
angehängte Masse M	3,5312 kg

Tabelle 6: Effektive Durchbiegung des beidseitig eingespannten eckigen Alustabes in Abhängigkeit des Ortes.

Ort x[cm]	Auslenkung D[µm]
2,5	0
4,0	10,0
5,5	23,0
7,0	33,5
8,5	43,5
10,0	54,0
11,5	60,5
13,0	71,5
14,5	83,5
16,0	87,0
17,5	93,0
19,0	95,0
20,5	95,5
22,0	95,5
23,5	105
25,0	107
30,0	83,0
34,0	95,5
38,0	96,0
42,0	86,5
46,0	55,2
50,0	33,0
54,0	11,0

Da weiß ich nicht, was ich damit anfangen soll, das war das ohne Masse, daher ist dann logischerweise auch $E = 0$

Tabelle 7: Effektive Durchbiegung des beidseitig eingespannten eckigen Alustabes in Abhängigkeit des Ortes mit angehängter Masse.

Ort x[cm]	Auslenkung D[µm]
2,5	-3,0
4,0	2,5
5,5	13,5
7,0	18,0
8,5	22.0
10,0	23,0
11,5	26,0
13,0	27,0
14,5	36,0
16,0	36,0
17,5	34,5
19,0	28,0
20,5	30,5
22,0	24,0
23,5	28,0
25,0	29,5
30,0	-11,0
34,0	8,0
38,0	21,0
42,0	25,5
46,0	16,0
50,0	12,5
54,0	10,0

Das Flächenträgheitsmoment des beidseitig eingespannten eckigen Aluminiumstabes ist mit Gleichung 5:

$$I = \frac{\pi}{64} d^4 = 491\,\mathrm{mm}^4 \tag{24}$$

Für den Elastiziätsmodul folgt dann mit der Formel 19

$$E = \frac{F}{2mI} = \frac{Mg}{2mI} = (11\,962 \pm 19\,042)\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^2}. \tag{25}$$

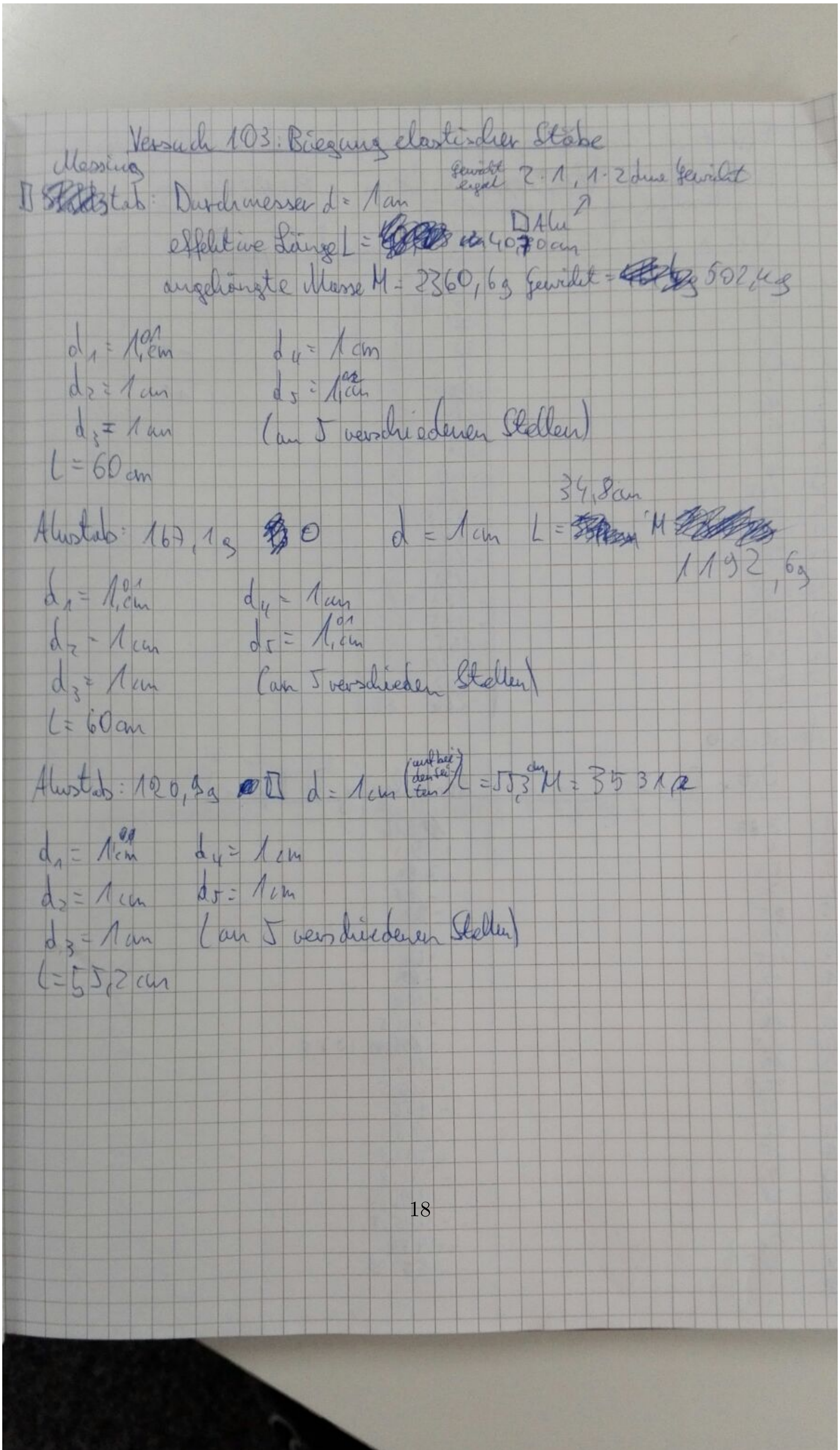
6 Diskussion

Nun werden die ermittelten Werte für den ermittelten Elastizitätsmodul der drei verschiedenen Proben mit Literaturwerten verglichen. In Tabelle **??** zu sehen ist der Vergleich der ermittelten Werte mit den Literaturwerten, inklusive der jeweiligen Abweichung.

Tabelle 8: Ergebnisse zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls verschiedener Proben.

	Experimenteller Wert in $\mathrm{kN/mm^2}$	Literaturwert in $\mathrm{kN/mm^2}$	Abweichung in %
Messing	1589 ± 44	70	2000
Alu rund	566 ± 8	78-123	400
Alu eckig	11962 ± 19042	78-123	0

7 Anhang


Versuch 103: Biegung elastischer Stäbe

Messing
I Stab: Durchmesser d = 1 cm   gewählt eingespannt 2 · 1, 1 · 2 dann Gewicht
□ Alu
effektive Länge L = 40,70 cm
angehängte Masse M = 2360,6 g Gewicht = 502,4 g

$d_1 = 1{,}01$ cm $d_4 = 1$ cm
$d_2 = 1$ cm $d_5 = 1{,}02$ cm
$d_3 = 1$ cm   (an 5 verschiedenen Stellen)
l = 60 cm

Alustab: 167,1 g ○   d = 1 cm   L = 34,8 cm   M = 1192,6 g

$d_1 = 1{,}01$ cm $d_4 = 1$ cm
$d_2 = 1$ cm $d_5 = 1{,}01$ cm
$d_3 = 1$ cm   (an 5 verschieden Stellen)
l = 60 cm

Alustab: 120,9 g □   d = 1 cm (auf beiden Seiten) L = 55,3 cm M = 3531 g

$d_1 = 1{,}01$ cm $d_4 = 1$ cm
$d_2 = 1$ cm $d_5 = 1$ cm
$d_3 = 1$ cm   (an 5 verschiedenen Stellen)
l = 55,2 cm

Effektive Durchbiegung des Stabes in Abhängigkeit des Ortes

□ Messing: L = 40,88 cm , M = 2360,6 g

	Ort x [cm] ±0,5 cm	Auslenkung D [µm]
1.	2,5	0
2.	4,0	2
3.	5,5	7
4.	7,0	7,5
5.	8,5	0
6	10	-~~12~~
7.	11,5	-14
8.	13	-24
9.	14,5	-29
10.	16	-40
11.	17,5	-56
12.	19	-73,5
13.	20,5	-88
14.	22	-116
15.	23,5	-132
16.	25	-153
17.	26,5	-175
18.	28	-195
19.	29,5	-221
20	31	-242
21.	32,5	-266

-↓

+↑

Alustab ○

	Ort x [cm]	Auslenkung D [µm]
1.	2,5	~~0~~ 16
2.	4	3
3.	5,5	-8
4.	7	-11
5.	8,5	-32
6.	10	-44
7.	11,5	-64
8.	13	-89
9.	14,5	-102
10.	16	-125,5
11.	17,5	-~~[illegible]~~ 157,5
12.	19	-190
13.	20,5	-216,5
14.	22	-256
15.	23,5	-284
16.	25	-317,5
17.	26,5	-350,8
18.	28	-406,5
19.	29,5	-445,5
20.	31	-484
21.	32,5	-5029
~~22.~~		

☐ Alustab ohne zusätz. Gewicht:

	Ort x [cm]	Auslenkung D [µm]
1.	2,5	0
2.	4	10
3.	5,5	23
4.	7	33,5
5.	8,5	43,5
6.	10	54
7.	11,5	60,5
8.	13	71,5
9.	14,5	83,5
10.	16	87
11.	17,5	93
12.	19	95
13.	20,5	95,5
14.	22	95,5
15.	~~22~~ 23,5	105
16.	25	107
17.	38	96
18.	42	86,5
19.	46	55,2
20.	50	33
21.	54	11
22.	34	95,5
23.	30	83

☐ Alustab mit Gewicht:

	Ort x [cm]	Auslenkung D [µm]
1.	2,5	-3
2.	4	2,5
3.	5,5	13,5
4.	7	18
5.	8,5	22
6.	10	23
7.	11,5	26
8.	13	27
9.	14,5	36
10.	16	36
11.	17,5	34,5
12.	19	28
13.	20,5	30,5
14.	22	24
15.	23,5	28
16.	25	23,5
17.	30	-11
18.	34	8
19.	38	21
20.	42	25,5
21.	46	16
22.	50	12,5
23.	54	10

✓ D...