

V408: Geometrische Optik

Simon Schulte
simon.schulte@udo.edu

Tim Sedlaczek
tim.sedlaczek@udo.edu

Durchführung: 02.05.2017

Abgabe: 09.05.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	1
2	Theorie	1
3	Durchführung	2
3.1	Versuchsaufbau	2
3.2	Versuchsablauf	3
4	Auswertung	4
4.1	Bestimmung der Brennweite von einer Linse durch Messung der Gegenstandsweite und der Bildweite	4
4.2	Bestimmung der Brennweite einer Linse nach der Methode von Bessel . .	7
4.3	Untersuchung eines Linsensystems nach der Methode von Abbe	9
5	Diskussion	11

1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen die Brennweiten von Linsen und Linsensystemen bestimmt werden.

2 Theorie

Die Meisten Linsen bestehen aus Glas. In diesem Versuch wird auch eine mit Wasser gefüllte Linse verwendet. Entscheidend ist, dass diese Linsen aus einem Material sind, welches optisch dichter ist als die Umgebung. So wird das Licht an ihren Oberflächen gebrochen. Dabei ist zwischen zwei Arten von Linsen zu unterscheiden. Den Sammellinsen, welche wegen ihrer Form das Licht bündeln und eine positive Brennweite besitzen, und den Streuungslinsen, welche Gegenteiliges bewirken und eine negative Brennweite besitzen. Bei Sammellinsen entsteht dabei ein reelles Bild, während bei Streuungslinsen ein virtuelles Bild entsteht (d.h., dass die Bildweite negativ ist).

Wie in Abbildung 1 zu sehen ist werden zur Bildkonstruktion drei Strahlen verwendet, welche sich dadurch auszeichnen, dass sie durch einen der Brennpunkte oder durch den Mittelpunkt der Linse verlaufen. Mithilfe der Strahlensätze ergibt sich das so genannte Abbildungsgesetz

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}. \quad (1)$$

Dabei wird V als Abbildungsmaßstab bezeichnet. B ist die Bildgröße, G die Gegenstandsgröße, b die Bildweite und g die Gegenstandsweite. Zusätzlich ergibt sich daraus die Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}. \quad (2)$$

Für dünne Linsen wird vereinfachend angenommen, dass das Licht an der Mittelebene gebrochen wird. Für dickere Linsen und Linsensysteme gilt dies nicht mehr. Als Vereinfachung ergeben sich dann zwei Hauptebenen H und H' , für die Bild- und für die Gegenstandsweite, für die die Linsengleichung dann erfüllt ist.

Bei Linsen und Linsensystemen entstehen im Allgemeinen zwei Abbildungsfehler. Aufgrund der sphärischen Form besitzen Linsen für achsenferne Strahlen unterschiedliche Brennpunkte, die von der eigentlichen Brennweite abweichen. Dem kann durch einen speziellen Schliff oder durch eine Irisblende entgegengewirkt werden.

Zudem zeigt sich für verschiedene Wellenlängen im Licht ein unterschiedliches Brechungsverhalten, weshalb die Brennweite der Linse für verschiedene Farben variiert.

3 Durchführung

3.1 Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau besteht aus einer Halogenlampe, einem Gegenstand G (eine Blende aus L-förmig angeordneten Kreisblenden), verschiedenen Linsen, zwei Farbfiltern und einem Schirm, auf den das Bild B projiziert wird.

In den Abbildungen 1 bis 3 sind die schematischen Aufbauten bzw. die Bildkonstruktionen für die verschiedenen Messungen dargestellt.

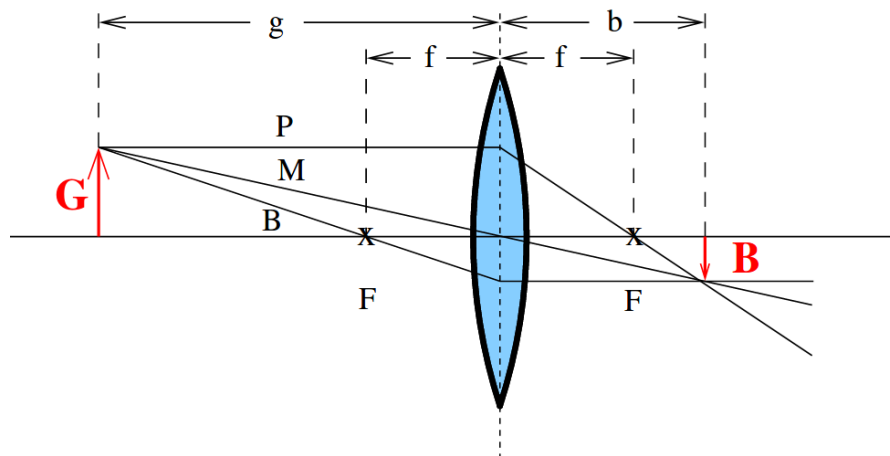


Abbildung 1: Aufbau für den ersten Versuchsteil [anleitung].

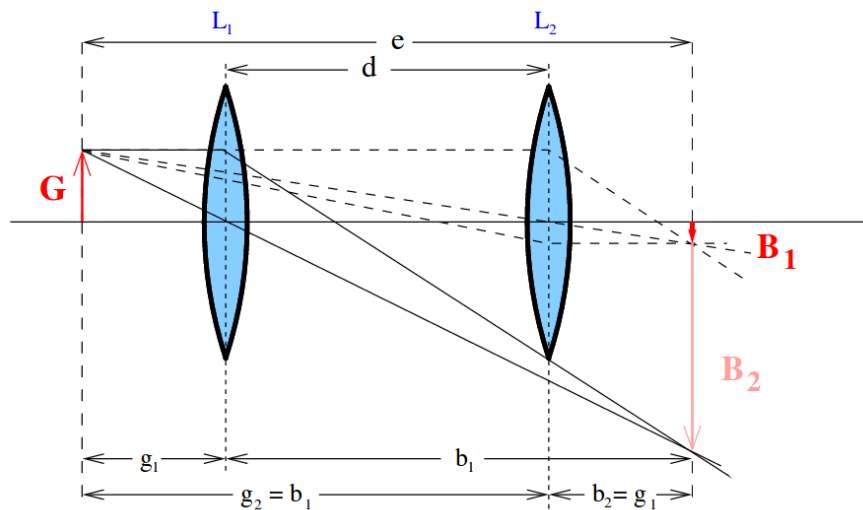


Abbildung 2: Aufbau für die Methode von Bessel [anleitung].

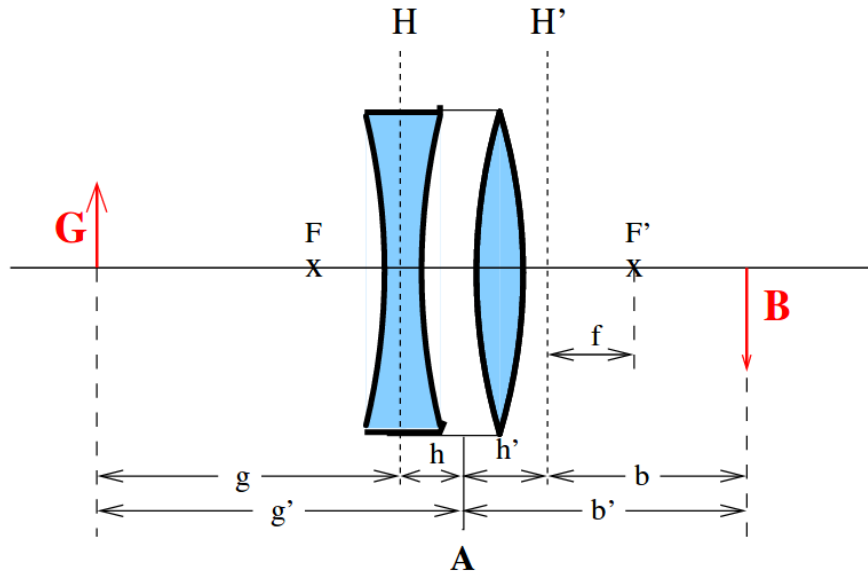


Abbildung 3: Aufbau für die Methode von Abbe [anleitung].

3.2 Versuchsablauf

Der Versuch besteht aus drei Abschnitten.

Zuerst sollen das Abbildungsgesetz und die Linsengleichung überprüft werden. Hierzu wird eine Linse mit bekannter Brennweite (in unserem Fall 100 mm) verwendet. Diese wird dann in zehn verschiedenen Abständen zum Gegenstand platziert und entsprechend der Abstand des Schirms für eine scharfe Abbildung angepasst. Dabei werden die Gegenstandsweite, die Bildweite und bei fünf Messungen zusätzlich die Bildgröße notiert. Danach wird die Messung für eine unbekannte Linse wiederholt. Jedoch ohne dabei die Bildgröße zu notieren.

Im zweiten Abschnitt soll die Brennweite einer Linse mit der Methode von Bessel bestimmt werden. Hierzu wird der Schirm in einem festen Abstand zum Gegenstand platziert. Aufgrund des festen Abstands gibt es dann zwei Symmetriepunkte, in denen Bild- und Gegenstandsweite, bei scharfer Abbildung, die jeweils zum anderen Symmetriepunkt vertauschten Werte annehmen (wie in Abbildung 2 zu sehen). Die Gegenstands- und Bildweite beider Punkte werden dann für zehn verschiedene Abstände zwischen Gegenstand und Schirm bestimmt. Anschließend wird die gleiche Messung jeweils fünf mal mit einem roten und einem blauen Filter vor dem Gegenstand durchgeführt.

Im letzten Abschnitt soll die Brennweite eines Linsensystems mit der Methode von Abbe bestimmt werden. Hierzu werden zwei Linsen verwendet. Eine Linse mit einer Brennweite von -100 mm und eine Linse mit einer Brennweite von 100 mm. Diese werden möglichst

dicht beisammen, in der Reihenfolge wie sie in Abbildung 3 zu sehen ist, zwischen Gegenstand und Schirm platziert. Nun wird ein Referenzpunkt A gewählt, von welchem aus im Folgenden immer der Abstand zu Schirm und Gegenstand bestimmt wird. Die Linsen werden nun in zehn verschiedene Positionen gebracht und der Schirm für eine scharfe Abbildung verschoben. Für jede Position der Linsen wird dann der Abstand zum Schirm, der Abstand zum Gegenstand und der Abbildungsmaßstab (Bildgröße messen und nach (1) ausrechnen) bestimmt.

4 Auswertung

Die in der Auswertung verwendeten Mittelwerte mehrfach gemessener Größen sind gemäß der Gleichung

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3)$$

bestimmt. Die Standardabweichung des Mittelwertes ergibt sich dabei zu

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (4)$$

Resultiert eine Größe über eine Gleichung aus zwei oder mehr anderen fehlerbehafteten Größen, so berechnet sich der Gesamtfehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2}. \quad (5)$$

Alle in der Auswertung angegebenen Größen sind stets auf die erste signifikante Stelle des Fehlers gerundet. Setzt sich eine Größe über mehrere Schritte aus anderen Größen zusammen, so wird erst am Ende gerundet, um Fehler zu vermeiden. Zur Auswertung wird das Programm Python verwendet.

4.1 Bestimmung der Brennweite von einer Linse durch Messung der Gegenstandsweite und der Bildweite

Zunächst wird die Brennweite von einer Sammellinse durch Messung der Gegenstands- und Bildweite unter Zuhilfenahme der in Abschnitt 2 beschriebenen Linsengleichung (2) bestimmt. Tabelle 2 beinhaltet die dazu aufgenommenen Werte (g, b) , sowie die berechneten Brennweiten f . Als Mittelwert ergibt sich daraus für die Linse bekannter Brennweite

$$f_{\text{Linse 1}} = (75,3 \pm 0,2) \text{ mm} \quad (6)$$

Tabelle 1: Messwerte zur Bestimmung der Gegenstandsweiten der Wasserlinse mit unbekannter Brennweite.

$g[\text{mm}]$	$b[\text{mm}]$	$f[\text{mm}]$
330	98	75.56
320	99	75.60
310	100	75.61
300	100	75.00
290	101	74.91
280	102	74.76
270	105	75.60
260	106	75.30
250	107	74.93
240	110	75.43

Nun wird das gleiche für eine Linse mit unbekannter Brennweite durchgeführt. Tabelle 1 beinhaltet die dazu aufgenommenen Werte (g, b), sowie die berechneten Brennweiten f . Als Mittelwert ergibt sich daraus für die Linse bekannter Brennweite

$$f_{\text{Linse 2}} = (96,5 \pm 0,3) \text{ mm} \quad (7)$$

Tabelle 2: Messwerte zur Bestimmung der Gegenstandsweiten der Linse mit bekannter Brennweite.

$g[\text{mm}]$	$b[\text{mm}]$	$f[\text{mm}]$
330	136	96.31
320	139	96.91
310	140	96.44
300	143	96.84
290	144	96.22
280	146	95.96
270	150	96.43
260	154	96.71
250	157	96.44
240	161	96.36

Die angegebenen Fehler sind hierbei die statistischen Fehler der Mittelwerte. Um neben dem statistischen Fehler ein weiteres Maß für die Messgenauigkeit zu erhalten, werden

die gemessenen Gegenstandsweiten auf der x-Achse eines Koordinatensystems notiert und mit ihren entsprechenden Bildweiten, die auf der y-Achse notiert sind, verbunden. Der Schnittpunkt der Geraden markiert die Brennweite der Linse. Je genauer sich die Geraden in einem Punkt treffen, desto präziser wurde gemessen. Abbildung 4 zeigt dieses Koordinatensystem für die Bestimmung der Brennweite der bekannten Linse, Abbildung 5 zeigt dies für die Wasserlinse unbekannter Brennweite.

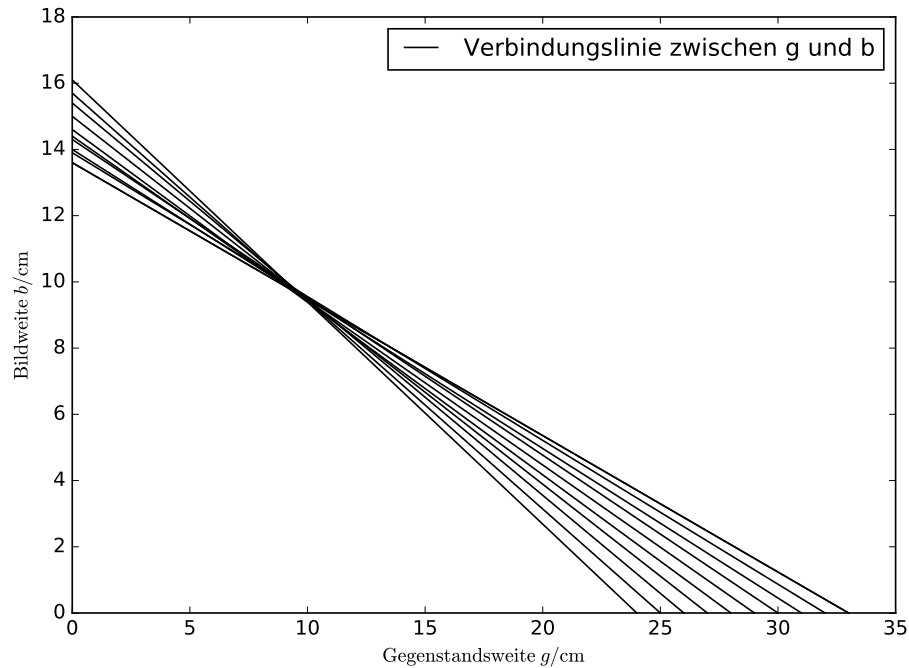


Abbildung 4: Graphische Veranschaulichung der Messgenauigkeit für die Untersuchung der Linse mit bekannter Brennweite.

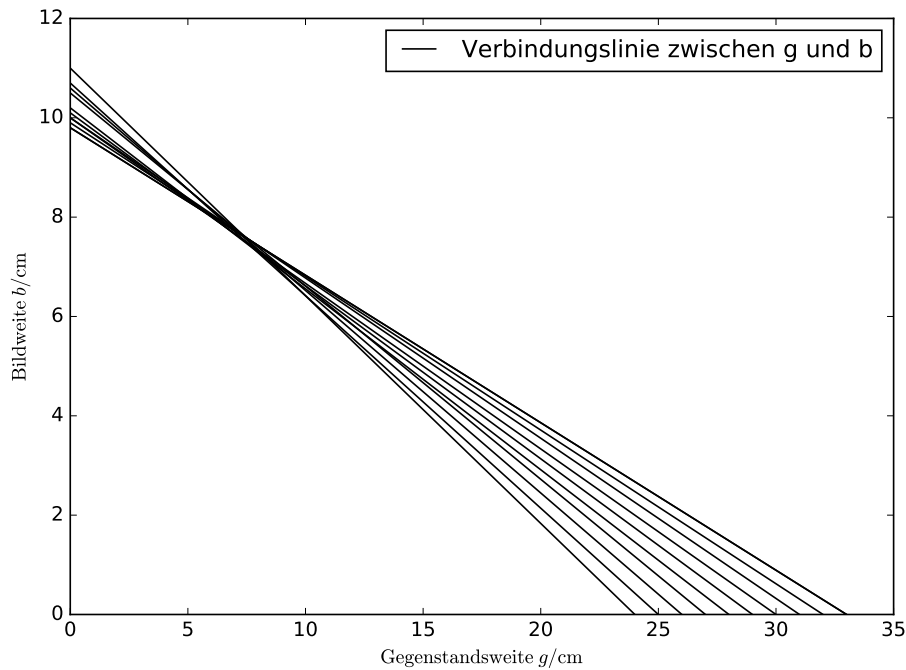


Abbildung 5: Graphische Veranschaulichung der Messgenauigkeit für die Untersuchung der Wasserlinse mit unbekannter Brennweite.

4.2 Bestimmung der Brennweite einer Linse nach der Methode von Bessel

Für die Bestimmung der Brennweite einer Linse mit der Methode von Bessel werden bei festem Abstand zwischen Gegenstand und Bild zwei Positionen für die zu untersuchende Linse im Strahlengang gesucht, bei denen das Bild eine maximale Schärfe erreicht. Abbildung 2 veranschaulicht die geometrischen Beziehungen der im Folgenden benutzten Größen. Dabei bezeichnet e den gemessenen Gesamtabstand zwischen Gegenstand und Bild, g_1 und b_1 Gegenstands- bzw. Bildweite, wenn die Linse näher am Gegenstand als am Bild positioniert ist und g_2 und b_2 Gegenstands- bzw. Bildweite, wenn sich die Linse näher am Bild befindet.

Aufgrund der Symmetrien $e = g_1 + b_1 = g_2 + b_2$ und $d = g_1 - b_1 = g_2 - b_2$ folgt durch Umformen der Linsengleichung für die Brennweite f die Beziehung

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4e}. \quad (8)$$

Die Untersuchung ergibt bei der Verwendung von weißem Licht die in Tabelle 3 aufgeführten Werte. Es ergeben sich somit stets zwei Brennweiten pro eingestelltem Gesamt-

abstand e . Wie im Abschnitt zuvor folgt aus den errechneten Brennweiten die Brennweite der Linse im Mittel, sowie der Fehler des Mittelwerts. Es ist

$$f_{\text{weiß}} = (96,41 \pm 0,09) \text{ mm.} \quad (9)$$

In einem weiteren Schritt wird die Brennweite der Linse für rotes und blaues Licht bestimmt. Die Vorgehensweise ist analog zur Untersuchung mit weißem Licht. Die Tabellen 4 und 5 zeigen die aufgenommenen Messdaten für rotes und blaues Licht. Es ergibt sich für die Brennweiten

$$f_{\text{rot}} = (96,6 \pm 0,3) \text{ mm} \quad (10)$$

$$f_{\text{rot}} = (96,4 \pm 0,3) \text{ mm.} \quad (11)$$

Tabelle 3: Messwerte zur Bestimmung der Brennweite einer Linsen mit der Methode von Bessel. Es wurde weisses Licht verwendet.

Linse 1, $f = 100$ mm, weisses Licht						
$e[\text{mm}]$	$g_1[\text{mm}]$	$b_1[\text{mm}]$	$g_2[\text{mm}]$	$b_2[\text{mm}]$	$f[\text{mm}]$	
390	220	170	170	220	95.90	95.90
400	240	160	163	237	96.00	96.58
410	253	157	154	256	96.88	96.16
420	270	150	152	268	96.42	96.99
430	285	145	146	284	96.10	96.43
440	298	142	143	297	96.17	96.53
450	310	140	140	310	96.44	96.44
460	322	138	139	321	96.60	97.00
470	335	135	136	334	96.22	96.65
480	347	133	134	346	96.15	96.59

Tabelle 4: Messwerte zur Bestimmung der Brennweite einer Linsen mit der Methode von Bessel. Es wurde rotes Licht verwendet.

Linse 1, $f = 100$ mm, rotes Licht						
$e[\text{mm}]$	$g_1[\text{mm}]$	$b_1[\text{mm}]$	$g_2[\text{mm}]$	$b_2[\text{mm}]$	$f[\text{mm}]$	
440	299	141	142	298	95.82	96.17
450	310	140	140	310	96.44	96.44
460	322	138	138	322	96.60	96.60
470	333	137	136	334	97.07	96.65
480	345	135	135	345	97.03	97.03

Tabelle 5: Messwerte zur Bestimmung der Brennweite einer Linse mit der Methode von Bessel. Es wurde blaues Licht verwendet.

Linse 1, $f = 100$ mm, blaues Licht						
e [mm]	g_1 [mm]	b_1 [mm]	g_2 [mm]	b_2 [mm]	f [mm]	
440	298	142	144	296	96.17	96.87
450	310	140	141	309	96.44	96.82
460	323	137	138	322	96.20	96.60
470	334	136	136	334	96.65	96.65
480	347	133	132	348	96.15	95.70

4.3 Untersuchung eines Linsensystems nach der Methode von Abbe

Die Untersuchung der Brennweite eines Linsensystems, bestehend aus einer Zerstreuungslinse mit $f = -100$ mm und einer Sammellinse mit $f = 100$ mm, erfolgt mit der Methode von Abbe. Da die Lage der Hauptebenen des Linsensystems zunächst unbekannt ist, wird ein Referenzpunkt A gewählt, hinsichtlich dem Gegenstandsweite g' und Bildweite b' bestimmt werden. Die im Folgenden verwendeten Größen können der Abbildung 3 entnommen werden. Aus der Anordnung und durch Umformung der Gleichungen (1) und (2) folgen die Beziehungen

$$g' = g + h = f \cdot \left(1 + \frac{1}{V}\right) + h \quad (12)$$

$$b' = b + h' = f \cdot (1 + V) + h' \quad (13)$$

aus denen sich durch lineare Ausgleichsrechnung die Brennweite f ermitteln lässt. Die zugehörigen Messdaten sind in Tabelle 6 gelistet. Neben den Gegenstandsweiten g' , den Bildweiten b' sind auch stets die Abbildungsmaßstäbe V angegeben, die sich gemäß der Beziehung $V = B/G$ bei immer gleicher Gegenstandsgröße $G = 30,0$ mm bestimmen lassen.

Die Ausgleichsrechnung der Messwerte liefert die in Abbildung 6 bzw. 7 durch die Messpunkte gelegten Ausgleichsgeraden. Steigung und y-Achsenabschnitt liefern direkt die in Abbildung 3 unbekannten Größen. Die angegebenen Fehler resultieren aus den Ungenauigkeiten der Ausgleichsrechnung. Es ist

$$\begin{aligned} f &= (121 \pm 3) \text{ mm} \\ f' &= (264 \pm 5) \text{ mm} \\ h &= (14,8 \pm 0,4) \text{ mm} \\ h' &= (16,8 \pm 0,3) \text{ mm.} \end{aligned}$$

Tabelle 6: Messwerte zur Bestimmung der Brennweite eines Linsensystems mit der Methode von Abbe.

V	g' [mm]	b' [mm]
2.2	190	633
3.2	166	792
1.6	215	526
1.4	225	495
1.3	235	470
1.2	245	449
1.1	255	446
1.0	265	428
1.0	275	416
0.9	285	415

Aus der Richtung des Gegenstandes gesehen liegt die erste Hauptebene somit um h vor dem frei gewählten Referenzpunkt, die zweite Hauptebene um h' dahinter. f bzw. f' ist der Abstand des jeweiligen vor oder hinter der Hauptebene liegenden Brennpunktes.

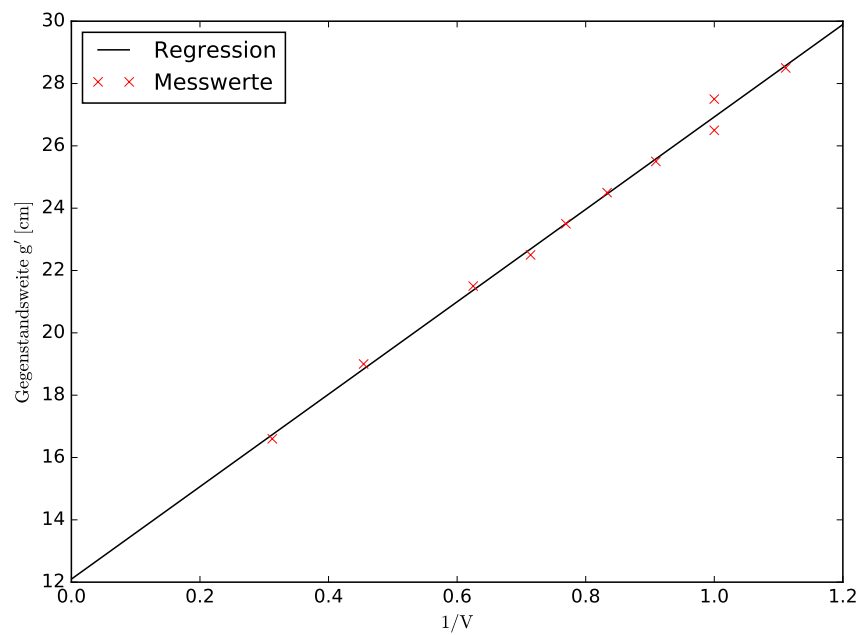


Abbildung 6: Lineare Regression der Messwerte zur Bestimmung von f und h aus den Gegenstandsweiten g' und den Abbildungsverhältnissen V .

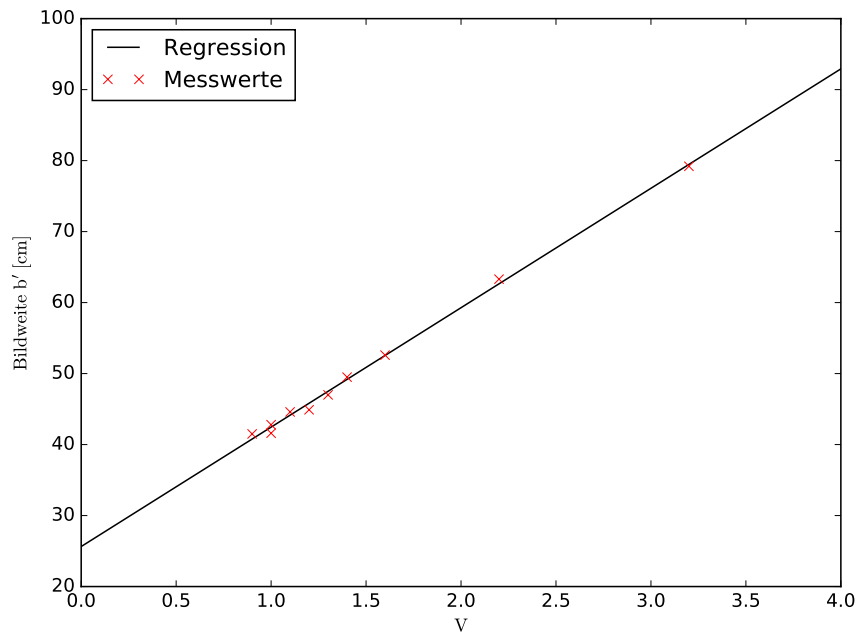


Abbildung 7: Lineare Regression der Messwerte zur Bestimmung von f' und h' aus den Bildweiten b' und den Abbildungsverhältnissen V .

5 Diskussion

Im Folgenden sollen die Ergebnisse aus Abschnitt 4 soweit möglich anhand der Gerätedaten diskutiert werden. Sowohl bei der Bestimmung der Brennweite durch einfache Messung der Gegenstands- und Bildweite, als auch bei der Bestimmung der Brennweite nach Bessel wird eine bekannte Linse mit Brennweite $f = 100$ mm verwendet. Die Untersuchung ergibt den gemittelten Wert $(75,3 \pm 0,2)$ mm. Es ist zu erkennen, dass das Ergebnis relativ nah an dem angegeben Wert liegt. Der Wert ist kleiner, was entweder auf einen systematischen Fehler beim Experimentieren, oder auf eine tatsächliche Abweichung der Brennweite im Rahmen der vom Hersteller angegebenen Toleranz hindeutet. Die bekannte Genauigkeit der Messung für die Linse mit $f = 100$ mm ermöglicht auch eine qualitative Aussage über die Messgenauigkeit bei der Untersuchung der Wasserlinse. Es ist davon auszugehen, dass hier die ermittelte Brennweite von $f_{\text{Wasserlinse}} = (96,5 \pm 0,3)$ mm nah am tatsächlichen Wert liegt.

Bei der Untersuchung der chromatischen Aberration im zweiten Versuchsteil ergeben sich nahezu identische Brennweiten für rotes und blaues Licht. Die Abweichung zum weißen Licht ist ebenfalls minimal. Es scheint, dass der Effekt zu klein oder die Linse zu gut geschliffen ist, als dass er im Experiment ausschlaggebend beobachtet werden kann.

Die Untersuchung des Linsensystems nach der Methode von Abbe liefert für die Brennweite im Mittel den Wert $f = 193 \text{ mm}$. Insgesamt scheint auch diese Messung im Rahmen normaler statistischer Schwankungen gute Ergebnisse zu liefern. Es zeigt sich, dass die Brennweite von Linsen oder Linsensystemen mit verschiedenen Methoden und mit wenig Aufwand genau bestimmt werden können.