

V351: Fourier-Analyse und Synthese

Simon Schulte
simon.schulte@udo.edu

Tim Sedlaczek
tim.sedlaczek@udo.edu

Durchführung: 17.1.2017
Abgabe: 24.01.2016

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| 1 Zielsetzung | 3 |
| 2 Theorie | 3 |
| 2.1 Fourier-Transformation | 3 |
| 2.2 Die Rechteck-, Dreieck- und Sägezahnspannung | 4 |
| 3 Durchführung | 5 |
| 3.1 Die Fourier-Analyse | 5 |
| 3.2 Die Fourier-Synthese | 5 |
| 4 Auswertung | 6 |
| 4.1 Messwerte | 6 |
| 4.2 Fourier-Transformation(Analyse) | 7 |
| 4.3 Fourier-Synthese | 10 |
| 5 Diskussion | 12 |
| Literatur | 12 |

1 Zielsetzung

Ziel des Versuchs ist es, mit Hilfe der Fourier-Analyse eine zeitlich periodische Spannungsschwingung in ihre einzelnen Fourier-Komponenten zu zerlegen, sowie eine solche Schwingung aus ihren Komponenten zu synthetisieren.

2 Theorie

Schwingungen sind räumlich oder zeitlich wiederkehrende periodische Veränderungen. Sie treten also entweder nach einer bestimmten Periodendauer oder einer bestimmten Entfernung wieder auf. Schwingungen lassen sich theoretisch immer als sinus- oder cosinusfunktion beschreiben.

Das Fouriersche Theorem versucht jede Schwingung aus einer Kombination von sinus- und cosinusfunktionen zu charakterisieren. So lässt sich eine periodische Funktion $f(t)$ mit der Periodendauer T darstellen als:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) + b_n \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) \right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

a_n und b_n sind die Fourier-Koeffizienten. Diese lassen sich mit diesen Gleichungen bestimmen:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) dt \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) dt \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Gleichung (1) gilt nur, falls $f(t)$ stetig ist und die unendliche Potenzreihe gleichmäßig konvergiert. Wenn f an einer Stelle nicht stetig ist, treten Abweichungen in der Approximation durch die Fourier-Reihe auf, sofern diese nur bis zu einer endlich hohen Oberwelle betrachtet wird. Dieser Effekt wird Gibbsches Phänomen genannt.

2.1 Fourier-Transformation

Neben der Darstellung als Fourier-Reihe und einer Zerlegung in n Schwingungen, ist es auch möglich aus einer Funktion $f(t)$ das Frequenzspektrum zu bestimmen. Dies wird dann als Fourier-Transformation bezeichnet. Es ist bei der Fourier-Transformation nicht von Bedeutung, ob $f(t)$ eine periodische Funktion ist. Außerdem ist die Fourier-Transformation umkehrbar. Es gilt:

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\nu t} dt. \quad (4)$$

Dabei ist $g(\nu)$ das Frequenzspektrum der Funktion $f(t)$. Sollte es sich bei $f(t)$ um eine periodische Funktion handeln, besteht das Frequenzspektrum aus Delta-Funktionen.

Damit ist es dann ein diskretes Spektrum. Wenn $f(t)$ nicht periodisch ist handelt es sich um ein kontinuierliches Spektrum. Das im Versuch verwendete Oszilloskop ist in der Lage eine Fouriertransformation mit diskreten Daten automatisch durchzuführen. Dabei muss das Abtasttheorem beachtet werden, welches besagt, dass die Abtastfrequenz eines Messgerätes mindestens zweimal so groß, wie die größte zu untersuchende Frequenz einer Oberwelle sein sollte. Wird also bis zur n -ten Oberwelle untersucht, so gilt

$$\nu_A > 2n\nu_1, \quad (5)$$

wobei ν_A die Abtastfrequenz und ν_1 die Frequenz der Grundschiwingung ist.

2.2 Die Rechteck-, Dreieck- und Sägezahnspannung

Es werden in dem Versuch drei verschiedene Spannungsverläufe untersucht. Die erste untersuchte Spannung, die Rechteckspannung, wird zur Vereinfachung als ungerade Funktion definiert. Daher gilt:

$$a_n = 0 \quad (6)$$

Es ergibt sich desweiteren:

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (7)$$

Auch die zweite untersuchte Spannung, die Sägezahnspannung, wird als ungerade Funktion definiert. Folglich gilt auch hier:

$$a_n = 0 \quad (8)$$

Desweiteren ergibt die Rechnung für den Koeffizienten der zweiten Summe:

$$b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \quad (9)$$

Die dritte untersuchte Spannung, die Dreieckspannung, wird zur Vereinfachung als gerade Funktion definiert. Es folgt:

$$b_n = 0 \quad (10)$$

Für a_n gilt:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ -\frac{4}{n^2\pi}, & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (11)$$

3 Durchführung

3.1 Die Fourier-Analyse

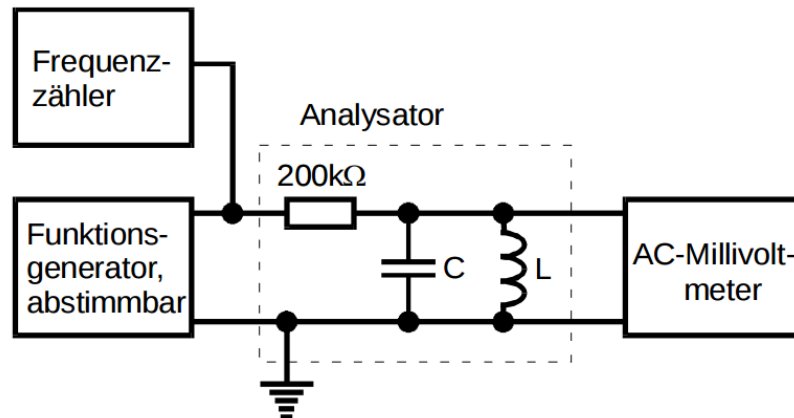


Abbildung 1: Schematische Darstellung der Fourier-Analyse mit einem Speicheroszilloskop [TUD17].

In Abbildung 1 ist ein regelbarer Funktionsgenerator, der mit einem digitalen Speicheroszilloskop verbunden ist, zu sehen. Es werden zunächst drei verschiedene periodische Spannungsverläufe in ihre Oberwellen zerlegt. Durch das Einstellen des Math-Modus im Oszilloskop werden die Spannungsverläufe in ihre einzelnen Frequenzen zerlegt. Dadurch können die Amplituden der einzelnen Bestandteile abgelesen werden. Es wird am Frequenzgenerator eine Rechteck-, eine Dreieck- und eine Sägezahnspannung erzeugt. Das Frequenzspektrum der jeweiligen Spannung wird mit Hilfe des Oszilloskops gebildet. Am Oszilloskop können dann die einzelnen Peaks abgelesen werden und so für die verschiedenen Oberwellen die Amplituden aufgenommen werden. Diese Werte sollten dann, abhängig von der Höhe der Grundschwingung, mit den berechneten Werten übereinstimmen.

3.2 Die Fourier-Synthese

Zur Synthese einer zeitlich periodischen Stromschwingung werden zu den Frequenzen der Oberwellen jeweils die einzelnen Amplituden benötigt. Dafür werden die Formeln aus 2.2 genutzt. Mit den Koeffizienten lässt sich das Verhältniss der n -ten zur $n-1$ -ten Oberwelle bestimmen und so, in Abhängigkeit der Amplitude der ersten Oberwelle, die Amplitude der einzelnen Oberwellen bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass sowohl bei der Rechteck- als auch bei der Dreiecksspannung die geraden Koeffizienten keine Amplitude besitzen sollen, weshalb das Verhältniss, der ungeraden Koeffizienten zueinander zu bestimmen ist. Sind Frequenz und Amplitude der benötigten Oberwelle bekannt, lässt sich die Schwingung mit Hilfe eines Oberwellengenerators synthetisieren. Dabei werden die ersten 10 Oberwellen am Generator eingestellt und so in Phase gebracht, dass das Ergebnis der zu erzeugenden Spannung möglichst nahe kommt.

4 Auswertung

4.1 Messwerte

Mit dem Oszilloskop wurden die in den Tabellen 1 und 2 stehenden Werte für die Amplituden und Frequenzdifferenzen, der Oberschwingungen, gemessen.

Tabelle 1: Messwerte zur Sägezahnspannung.

| n | $\Delta f / \text{kHz}$ | U / V | $\frac{U}{U_0}$ |
|---|-------------------------|----------------|-----------------|
| 1 | 10,5 | 4,44 | 1,000 |
| 2 | 20,5 | 2,24 | 0,505 |
| 3 | 30,5 | 1,5 | 0,338 |
| 4 | 40,5 | 1,12 | 0,252 |
| 5 | 50,5 | 0,88 | 0,198 |
| 6 | 60,5 | 0,74 | 0,167 |
| 7 | 70,5 | 0,64 | 0,144 |
| 8 | 80,5 | 0,56 | 0,126 |
| 9 | 90,5 | 0,5 | 0,113 |

Tabelle 2: Messwerte zur Rechteck- und Dreieckspannung.

| n | $\Delta f / \text{kHz}$ | Rechteck | | Dreieck | |
|----|-------------------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|
| | | U / V | $\frac{U}{U_0}$ | U / V | $\frac{U}{U_0}$ |
| 1 | 10,5 | 8,88 | 1,000 | 5,6 | 1,000 |
| 3 | 20,5 | 2,88 | 0,324 | 0,62 | 0,111 |
| 5 | 30,5 | 1,68 | 0,189 | 0,214 | 0,038 |
| 7 | 40,5 | 1,14 | 0,128 | 0,0888 | 0,016 |
| 9 | 50,5 | 0,82 | 0,092 | 0,048 | 0,009 |
| 11 | 60,5 | 0,62 | 0,070 | 0,034 | 0,006 |

4.2 Fourier-Transformation(Analyse)

Zur bestimmung der n -Abhängigkeiten wird zunächst der Logarithmus von $\frac{U}{U_0}$ gegen den Logarithmus von n aufgetragen und mit einer linearen Funktion

$$y = m \cdot x + b \quad (12)$$

gefittet. Hierzu wird Python verwendet. Die Steigung der Geraden gibt dann die exponentielle Abhängigkeit, der Koeffizienten, von n an.

Mit den in Tabelle 1 stehenden Werten ergibt sich, für die Sägezahnspannung eine Steigung von $m = -0,998 \pm 0,004$. Somit nehmen die Koeffizienten mit $\frac{1}{n}$ ab. Der Verlauf der Messwerte und der Funktion sind in Abbildung 2 zu sehen.

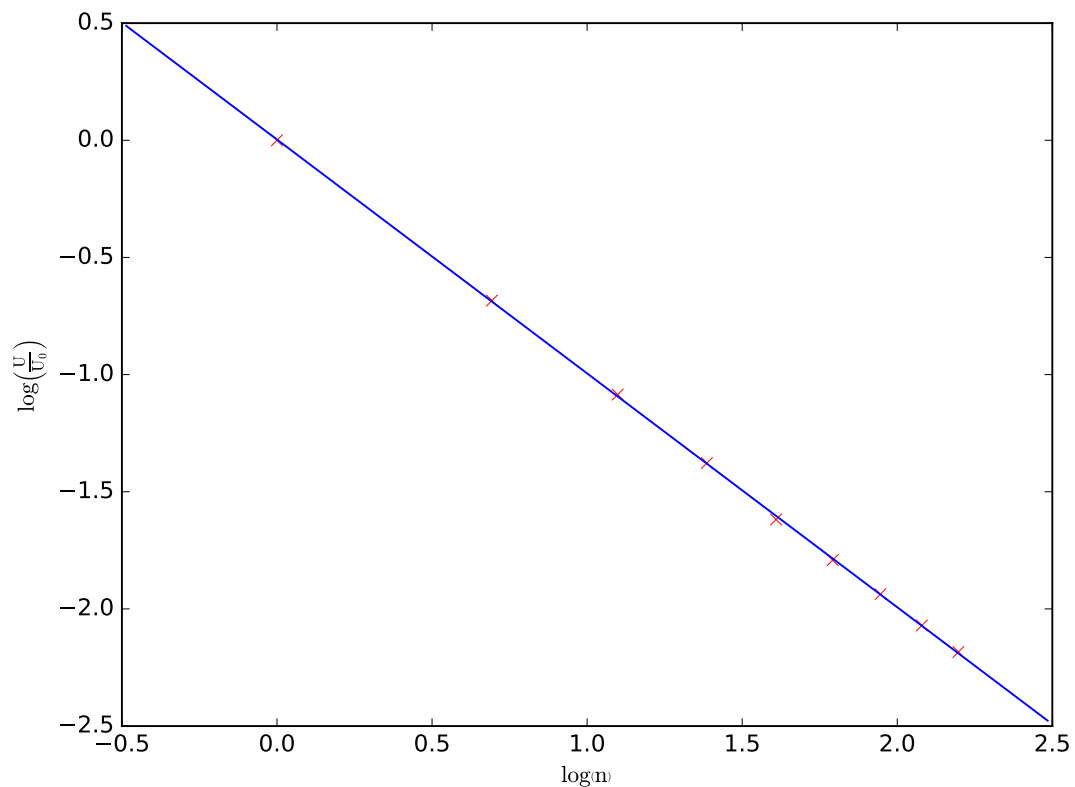


Abbildung 2: Logarithmus der Spannungsamplitude in Abhängigkeit von dem Logarithmus von n (Sägezahn).

Als Steigung der Ausgleichsgeraden, der Rechteckspannung, ergibt sich, mit den Werten aus Tabelle 2, $m = -1,10 \pm 0,03$. Die Koeffizienten nehmen demnach mit $\frac{1}{n^{1.1}}$ ab. Im Idealfall wäre es eine $\frac{1}{n}$ Abhängigkeit, wie an dem in 2.2 bestimmten Koeffizienten zu sehen ist. Die entsprechende Kurve ist in Abbildung 3 zu sehen.

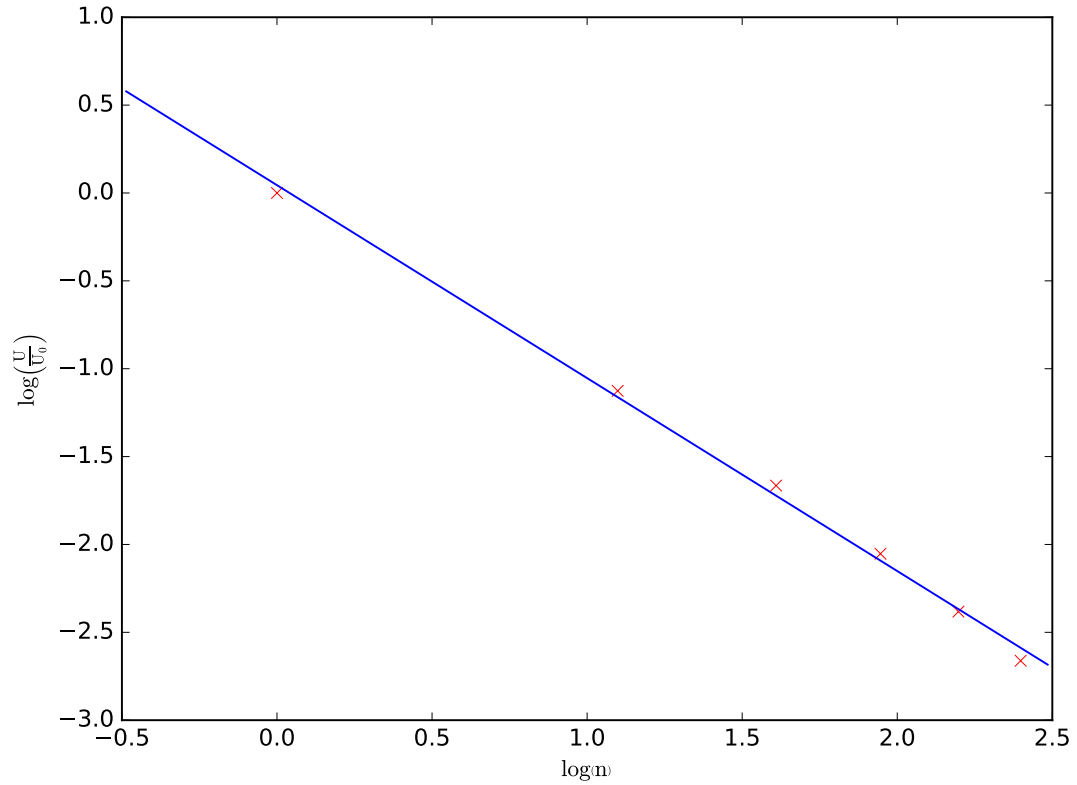


Abbildung 3: Logarithmus der Spannungsamplitude in Abhängigkeit von dem Logarithmus von n (Rechteck).

Für die Dreiecksspannung ergibt sich eine Steigung von $m = -2,16 \pm 0,05$. Daraus folgt eine $\frac{1}{n^{2,16}}$ Abhängigkeit. Der Optimalfall wäre eine Abnahme nach $\frac{1}{n^2}$ gewesen. Der Graph ist in Abbildung 4 zu sehen.

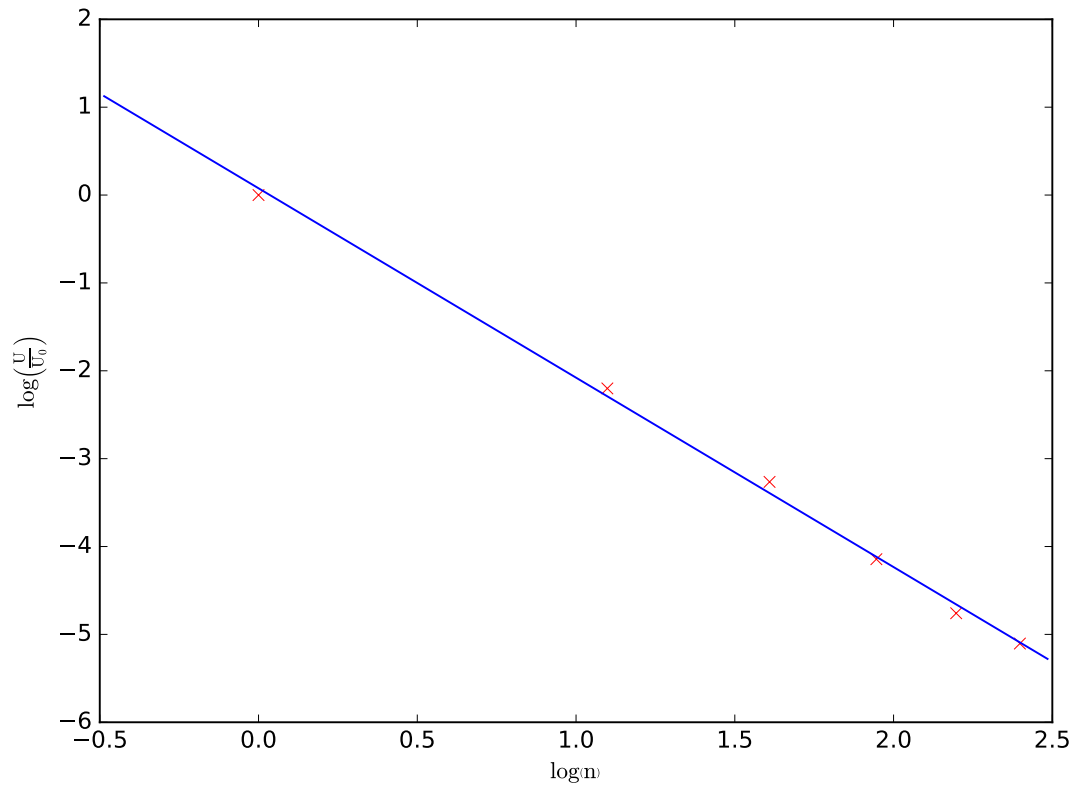


Abbildung 4: Logarithmus der Spannungsamplitude in Abhängigkeit von dem Logarithmus von n (Dreieck).

4.3 Fourier-Synthese

Für die Synthese werden zunächst die Verhältnisse der Amplituden bestimmt und danach die Amplituden der Oberwellen entsprechend eingestellt. Die Ausgangsamplitude betrug, in diesem Fall, dabei immer 1,9 V. Durch entsprechendes anpassen der Phasen entstehen die Spannungsverläufe, die in den Abbildungen 5, 6 und 7 zu sehen sind. An den Unstetigkeitsstellen, der Sägezahn- und Rechteckspannung sind eindeutig stärkere Auslenkungen im Spannungsverlauf zu sehen. Diese zeigen das Gibbsche Phänomen. Lediglich bei der Dreieckspannung bleibt dieser Effekt aus, da sie keine Unstetigkeitsstelle besitzt.

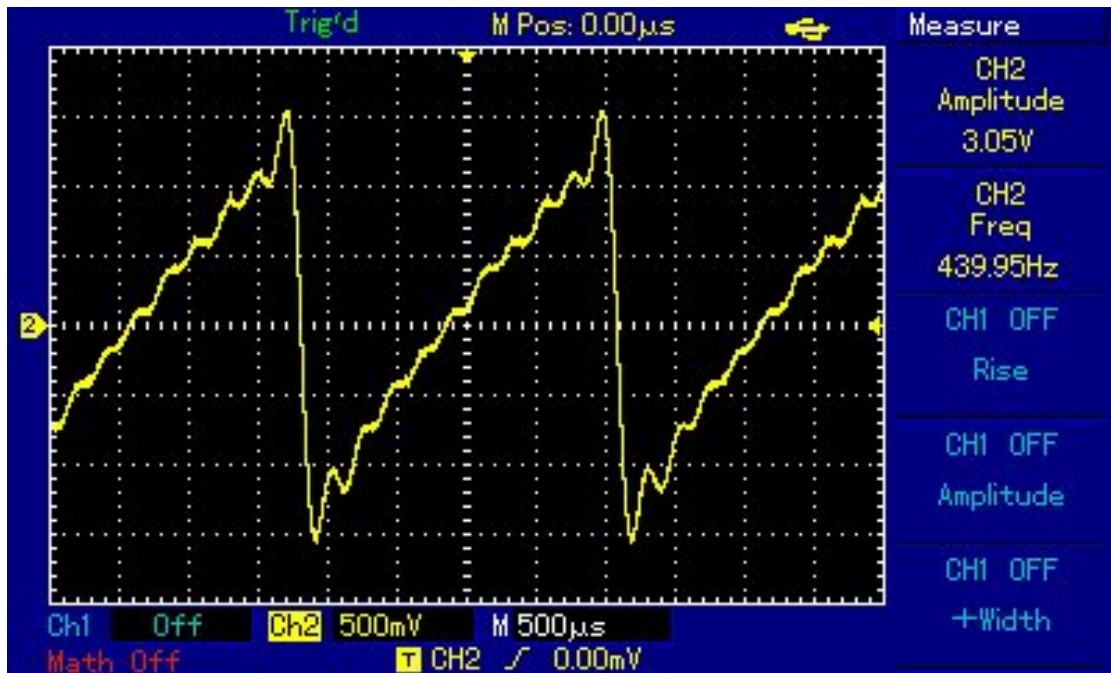


Abbildung 5: Sägezahnspannung, bei Synthese bis zur zehnten Oberwelle.

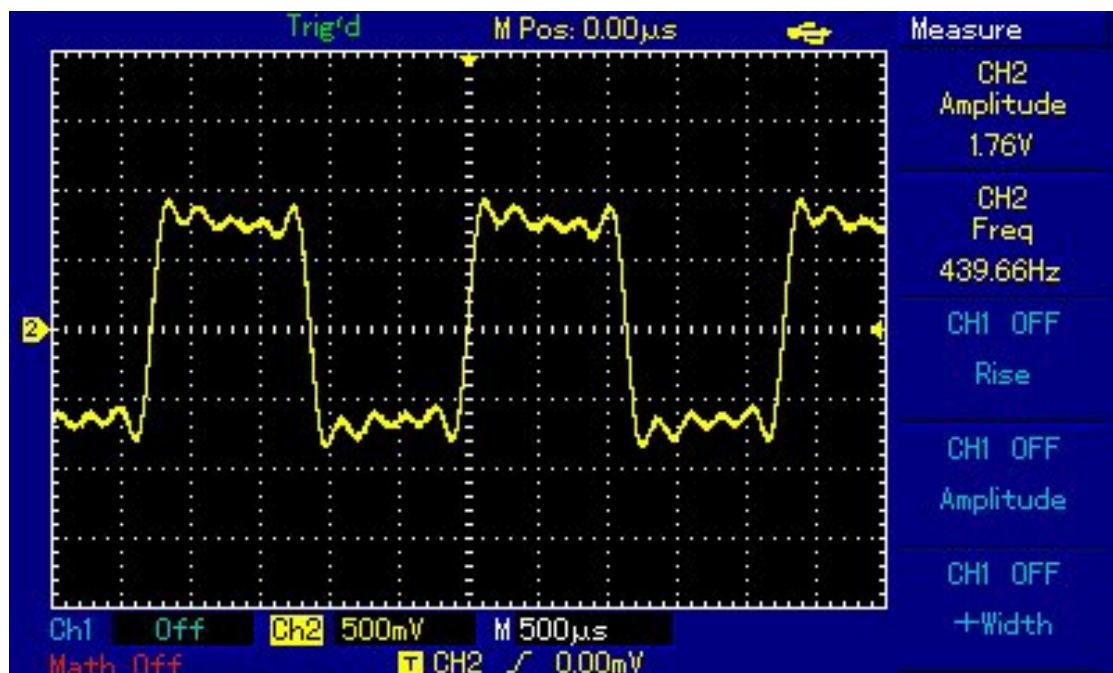


Abbildung 6: Rechteckspannung, bei Synthese bis zur zehnten Oberwelle.

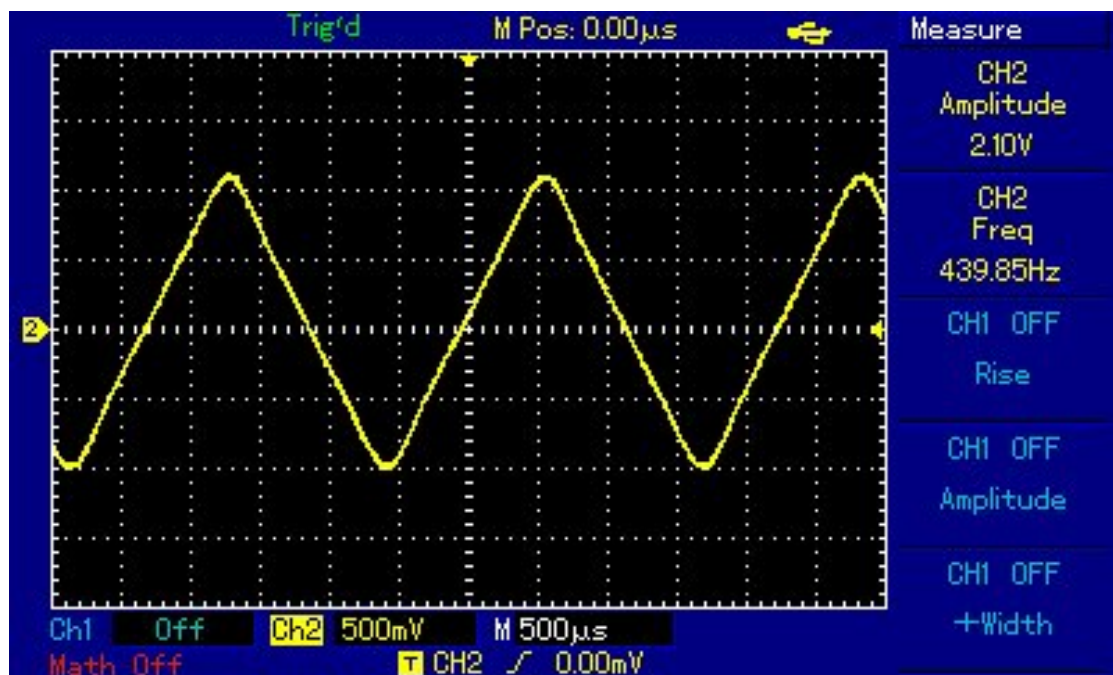


Abbildung 7: Dreieckspannung, bei Synthese bis zur zehnten Oberwelle.

5 Diskussion

Insgesamt sind die Ergebnisse relativ gut. Die bei der Trafo bestimmten Koeffizienten, der Sägezahnspannung, nehmen genau, wie zuvor berechnet, mit $\frac{1}{n}$ ab. Die Faktoren, der anderen beiden Spannungsverläufe, zeigen stärkere Abweichungen, welche auf Schwankungen bei den Amplituden, die am Oszilloskop vermessen wurden, zurückzuführen sind. Dennoch liegen die Ergebnisse recht nah am Soll.

Bei der Synthese gab es keine größeren Problem die Oberwellen passend einzustellen. Die Ergebnisse zeigen bereits erkennbar die gewollten Spannungsverläufe. Für einen genaueren Verlauf würden weitere Oberwellen benötigt.

Literatur

- [TUD17] TU-Dortmund. *Versuch 351: Fourier-Analyse und Synthese*. 23. Jan. 2017.
URL: <http://129.217.224.2/HOME/PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V351.pdf>.