

V206: Die Wärmepumpe

Simon Schulte
simon.schulte@udo.edu

Tim Sedlaczek
tim.sedlaczek@udo.edu

Durchführung: 02.02.2017

Abgabe: 09.02.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
3 Durchführung	4
3.1 Versuchsablauf	5
4 Auswertung	6
4.1 Fehlerrechnung	6
4.2 Bestimmung der Gütezahl	6
4.3 Berechnung des Massendurchsatzes	9
4.4 Bestimmung der mechanischen Leistung	11
5 Diskussion	12
Literatur	13

1 Zielsetzung

Ziel des Versuchs ist die Untersuchung einer mechanischen Wärmepumpe.

2 Theorie

Wärmepumpen werden genutzt, um Objekte möglichst effizient zu erwärmen. Es ist mit Wärmepumpen möglich kalten Objekten Wärme zu entziehen und diese entzogene Wärme wiederum warmen Objekten hinzuzufügen. In der Natur ist zu beobachten, dass Wärmeenergie immer danach strebt von einem wärmeren in ein kälteres Raumgebiet zu gelangen. Um aber Wärmeenergie von einem kälteren Gebiet in ein wärmeres zu bringen muss zusätzlich Energie zugeführt werden. In diesem Versuch wird das durch mechanische Arbeit gewährleistet. Diese wird von einer Wärmepumpe erbracht.

Wird von einem Wärmereservoir die Wärmeenergie Q_2 entnommen und einem anderen Reservoir zugefügt, so geht nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik auch zusätzlich die dazu benötigte Arbeit A mit in die Energiebilanz ein. Daraus folgt die an das wärmere Reservoir abgegebene Wärmemenge Q_1 mit

$$Q_1 = Q_2 + A. \quad (1)$$

Eine charakteristische Größe einer Wärmepumpe ist die Gütezahl ν , welche der Quotient aus transportierter Wärmemenge Q_1 und dazu aufgewendeter Arbeit A ist.

$$\nu = \frac{Q_1}{A} \quad (2)$$

Für den Fall einer vollständig reversiblen Wärmeübertragung folgt aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik mit den Temperaturen T_1 und T_2 :

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \quad (3)$$

Für diesen Idealfall ergibt sich aus den Gleichungen (1) – (3) für die Gütezahl der Zusammenhang

$$\nu_{\text{ideal}} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (4)$$

Eine ideale Maschine ist jedoch nicht realisierbar, da beim Übertragungsprozess immer ein Teil der Energie das System irreversibel verlässt. Damit gilt

$$\frac{Q_1}{T_1} > \frac{Q_2}{T_2} \quad \text{und somit} \quad \nu_{\text{real}} < \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (5)$$

Um die reale Gütezahl der Wärmepumpe zu bestimmen werden die gemessenen Messwerte genutzt und es gilt

$$\nu_{\text{real}} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t N} = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_1}{\Delta t N}. \quad (6)$$

N bezeichnet die zeitlich gemittelte Leistung des verwendeten Kompressors. $m_1 c_w$ und $m_k c_k$ bezeichnen die Wärmekapazität des Wasser bzw. der Kupferschlange und $\Delta T_1 / \Delta t$ bezeichnet den zeitlichen Temperaturverlauf im ersten Reservoir.

Eine weitere charakteristische Größe der Wärmepumpe ist ihr Massendurchsatz $\Delta m / \Delta t$, welcher aus einer Betrachtung der Wärmeänderung im kalten Reservoir folgt:

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = (m_2 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_2}{\Delta t}. \quad (7)$$

Der Zusammenhang zum Massendurchsatz erfolgt unter Zuhilfenahme der Verdampfungswärme des Transportmediums. Ist diese bekannt, ermittelt sich der Massendurchsatz zu:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_2}{L \cdot \Delta t}. \quad (8)$$

Die dritte interessante charakteristische Größe ist die mechanische Leistung N_{mech} des Kompressors. Diese ergibt sich bei angenommener adiabatischer Kompression aus der Poissonschen Gleichung zu:

$$N_{\text{mech}} = \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_b \sqrt{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{1}{\rho} \frac{\Delta m}{\Delta t}. \quad (9)$$

κ bezeichnet hierbei das Verhältnis der Molwärmen C_p und C_v , p_a und p_b die aufgenommenen Drücke und ρ die Dichte des zirkulierenden Mediums in der Gasphase. Diese errechnet sich aufgrund der adiabatischen Kompression mit Hilfe der idealen Gasgleichung aus der Dichte ρ_0 unter Normalbedingungen. Dabei wird

$$\frac{p_0}{\rho_0 T_0} = \frac{p_a}{\rho T_2} \quad (10)$$

umgeformt zu:

$$\rho = \frac{p_a T_0}{p_0 T_2} \rho_0. \quad (11)$$

3 Durchführung

In Abbildung 1 zu sehen ist der schematische Aufbau der verwendeten Wärmepumpe. Als Transportmedium zirkuliert angetrieben von einem Kompressor das Gas Dichloridfluormethan (Cl_2F_2C). Durch das Drosselventil wird ein Druckunterschied innerhalb der Apparatur erzeugt, sodass in der Kupferspirale vom zweiten Reservoir das Medium verdampft und dem Wasser dabei die erforderliche Verdampfungswärme Q_2 entzieht. Das Medium wird daraufhin adiabatisch komprimiert und in die Kupferspirale von Reservoir 1 geleitet. Dort wird es infolge des höheren Drucks kondensiert und die aufgenommene Wärmemenge $Q_2 + A$ wird abgegeben. Neben zwei Thermometern, die Temperatur messen und 2 Manometern, die den Druck auf beiden Seiten des Kompressors bzw. des Drosselventils angeben, ist an dem Kompressor noch zusätzlich ein Wattmeter angeschlossen.

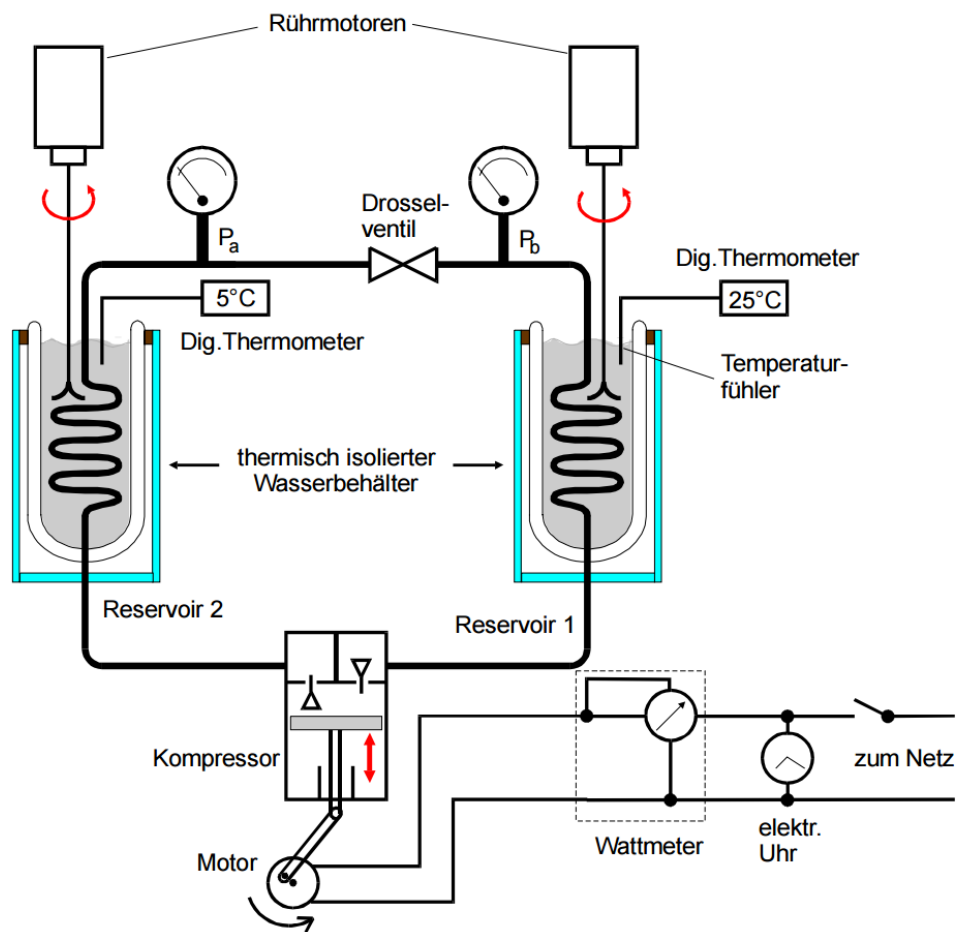


Abbildung 1: Der Versuchsaufbau der Messapparatur [TuD17].

Dieses zeigt die elektrische Leistung als Maß für die verrichtete mechanische Arbeit an. Um eine gleichmäßige Wärmeverteilung innerhalb der Wasserreservoirs zu gewährleisten werden zwei Rührmotoren verwendet.

3.1 Versuchsablauf

Die beiden Reservoirs werden beide mit je 3 Liter Leitungswasser gleicher Temperatur befüllt. Nachdem man die Wärmepumpe eingeschaltet hat, werden die Parameter p_a , p_b , T_1 , T_2 und N pro Minute aufgenommen. Der Versuch endet, wenn das erste Reservoir eine Temperatur von 50°C erreicht.

4 Auswertung

4.1 Fehlerrechnung

Die Fehler werden im Folgenden mit Python berechnet. Dabei wird das Paket "uncertainties" verwendet. Dieses berechnet die Fehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung.

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\left(\frac{df}{dx_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{df}{dx_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{df}{dx_n} \Delta x_n\right)^2}. \quad (12)$$

4.2 Bestimmung der Gütezahl

Tabelle 1: Gemessene Temperaturen und Leistung zur jeweiligen Zeit.

T_1 / K	T_2 / K	N / W	t / s
294,35	294,25	0,0	0
295,35	294,25	165,0	60
296,15	294,15	175,0	120
297,45	293,05	185,0	180
299,05	291,65	192,5	240
300,95	289,95	200,0	300
302,95	288,05	202,5	360
304,95	286,15	205,0	420
306,85	284,35	207,5	480
308,75	282,45	207,5	540
310,25	280,85	210,0	600
312,35	279,15	210,0	660
314,15	277,55	212,5	720
315,75	276,05	212,5	780
317,35	274,75	215,0	840
318,95	273,85	212,5	900
320,35	273,15	212,5	960
321,75	272,65	210,0	1020
323,15	272,15	207,5	1080

Zu Beginn werden die gemessenen Temperaturen aus Tabelle 1 in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen und durch geeignete Funktionen genähert. Die Näherungen werden dabei mit Python durchgeführt. Für die Temperaturen T_1 des warmen Behälters wird ein Polynom der Gestalt

$$T_1(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D \quad (13)$$

verwendet, während für die Temperatur am kalten Behälter (T_2) eine Funktion der Form

$$T_2(t) = \frac{Et^2}{1 + Ft^2} + G \quad (14)$$

verwendet wird.

Damit ergeben sich die Parameter der Funktionen zu:

$$A = (-1,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-8} \text{ K} \cdot \text{s}^{-3} \quad B = (-2,9 \pm 0,3) \cdot 10^{-5} \text{ K} \cdot \text{s}^{-2} \quad (15)$$

$$C = (1,6 \pm 0,2) \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{s}^{-1} \quad D = (294,1 \pm 0,2) \text{ K} \quad (16)$$

$$E = (-6,8 \pm 0,3) \cdot 10^{-5} \text{ K} \cdot \text{s}^{-2} \quad F = (2,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2} \quad (17)$$

$$G = (294,9 \pm 0,2) \text{ K} \quad (18)$$

Der entsprechende Graph ist in Abbildung 2 zu sehen.

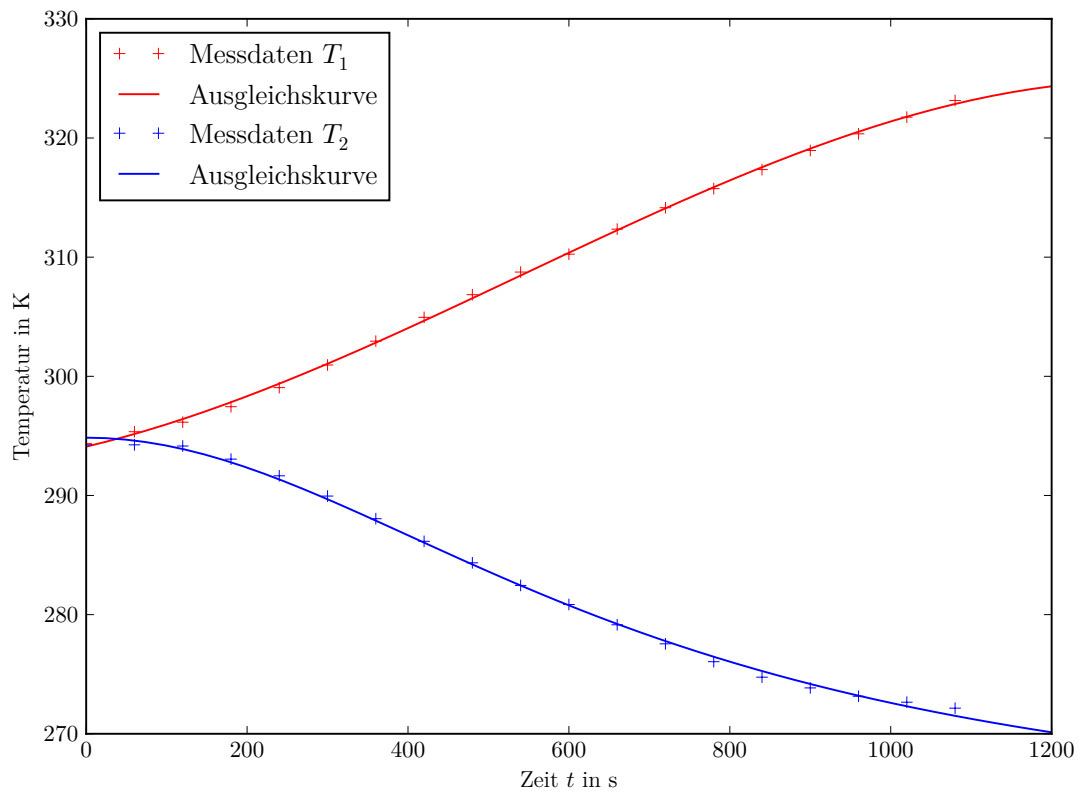


Abbildung 2: Temperaturen des Wassers in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit.

Nun werden die Ableitungen der Funktionen für je vier verschiedene Temperaturen bestimmt.

Die Ableitungen haben dabei die Formen

$$\frac{dT_1(t)}{dt} = 3At^2 + 2Bt + C \quad (19)$$

und

$$\frac{dT_2(t)}{dt} = \frac{2Dt}{(1 + Et^2)^2}. \quad (20)$$

Für die Zeiten $t = 120 \text{ s}$, $t = 420 \text{ s}$, $t = 720 \text{ s}$ und $t = 960 \text{ s}$ werden diese konkret berechnet. Die Ergebnisse stehen in Tabelle 2.

Tabelle 2: Werte der Ableitungen von T_1 und T_2 .

$\frac{dT_1(t)}{dt} / \text{K/s}$	$\frac{dT_2(t)}{dt} / \text{K/s}$	t / s
$(2,2 \pm 0,2) \cdot 10^{-2}$	$(-1,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$	120
$(3,1 \pm 0,3) \cdot 10^{-2}$	$(-3,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-2}$	420
$(3,0 \pm 0,6) \cdot 10^{-2}$	$(-2,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-2}$	720
$(2,2 \pm 0,9) \cdot 10^{-2}$	$(-1,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$	960

Aufgrund der Füllmenge von 3 L ergibt sich

$$m_1 = 3 \text{ kg}. \quad (21)$$

Die Wärmekapazität von Wasser wird mit

$$c_w = 4180 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \quad (22)$$

angenommen [TuD16a]. Außerdem wurde die Wärmekapazität der Apparatur zu

$$m_k c_k = 660 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (23)$$

angegeben. Mit diesen Werten und denen aus den Tabellen 1 und 2 ergeben sich nach Formel (6) dann folgende Werte für die reale Güte:

$$\nu_{296,15 \text{ K}} = 1,7 \pm 0,1 \quad \nu_{304,95 \text{ K}} = 2,0 \pm 0,2 \quad (24)$$

$$\nu_{314,15 \text{ K}} = 1,9 \pm 0,4 \quad \nu_{320,35 \text{ K}} = 1,4 \pm 0,6 \quad (25)$$

Die Fehler wurden mit Hilfe von Python bestimmt. Dabei lautet die Ableitung, die in Formel (12) verwendet wird:

$$\frac{\partial \nu_{\text{ideal}}}{\partial \frac{dT_1(t)}{dt}} = \frac{(m_1 c_w + m_k c_k)}{N}. \quad (26)$$

Die Werte der idealen Güte berechnen sich nach Formel (4) zu

$$\nu_{\text{id } 296,15 \text{ K}} = 148,1 \quad \nu_{\text{id } 304,95 \text{ K}} = 16,2 \quad (27)$$

$$\nu_{\text{id } 314,15 \text{ K}} = 8,6 \quad \nu_{\text{id } 320,35 \text{ K}} = 6,8 \quad (28)$$

Auf diese Werte wird im Abschnitt 5 näher eingegangen.

4.3 Berechnung des Massendurchsatzes

Tabelle 3: Gemessene Drücke bei den jeweiligen Temperaturen.

T_1 / K	T_2 / K	p_b / bar	p_a / bar
294,35	294,25	5,25	5,1
295,35	294,25	6,75	2,4
296,15	294,15	7,00	2,6
297,45	293,05	7,25	2,9
299,05	291,65	7,75	3,0
300,95	289,95	8,00	3,2
302,95	288,05	8,50	3,2
304,95	286,15	9,00	3,2
306,85	284,35	9,25	3,2
308,75	282,45	9,75	3,2
310,25	280,85	10,00	3,2
312,35	279,15	10,50	3,2
314,15	277,55	11,00	3,2
315,75	276,05	11,25	3,2
317,35	274,75	11,75	3,2
318,95	273,85	12,00	3,3
320,35	273,15	12,50	3,2
321,75	272,65	12,75	3,2
323,15	272,15	13,00	3,2

In Tabelle 3 stehen die gemessenen Drücke zu den jeweiligen Temperaturen. Da bei der Abnahme der ersten Gruppe an Messwerten, bei $t = 0 \text{ s}$, der Kompressor noch nicht aktiv war und somit die Drücke dort stark von dem Soll abweichen, entfallen diese Werte für die folgende Rechnung.

Für die Bestimmung des Massendurchsatzes wird zunächst die Verdampfungswärme L des Transportmediums benötigt. Diese ergibt sich, wie in Versuch 203, durch das Auftragen von $\ln\left(\frac{p_b}{p_0}\right)$ gegen die reziproke Temperatur $\frac{1}{T_1}$. Dabei wird p_0 als Normaldruck von 1,013 bar angenommen. Zu den Werten wird dann eine Ausgleichsgerade bestimmt. Die Verdampfungswärme ergibt sich als Produkt der Steigung und der allg. Gaskonstante R .

$$L = -m \cdot R \quad \text{mit} \quad R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} [\text{Che16}] \quad (29)$$

Aus dem Fit nach

$$f(x) = m \cdot x + b \quad (30)$$

ergibt sich eine Steigung von

$$m = (-2217 \pm 34) \text{ K} \quad (31)$$

und damit eine Verdampfungswärme von

$$L = (1,84 \pm 0,03) \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{mol}}. \quad (32)$$

In Abbildung 3 ist der entsprechende Graph zu sehen. Der Fit, der Graph und der Fehler von L wurden mit Python erstellt und berechnet.

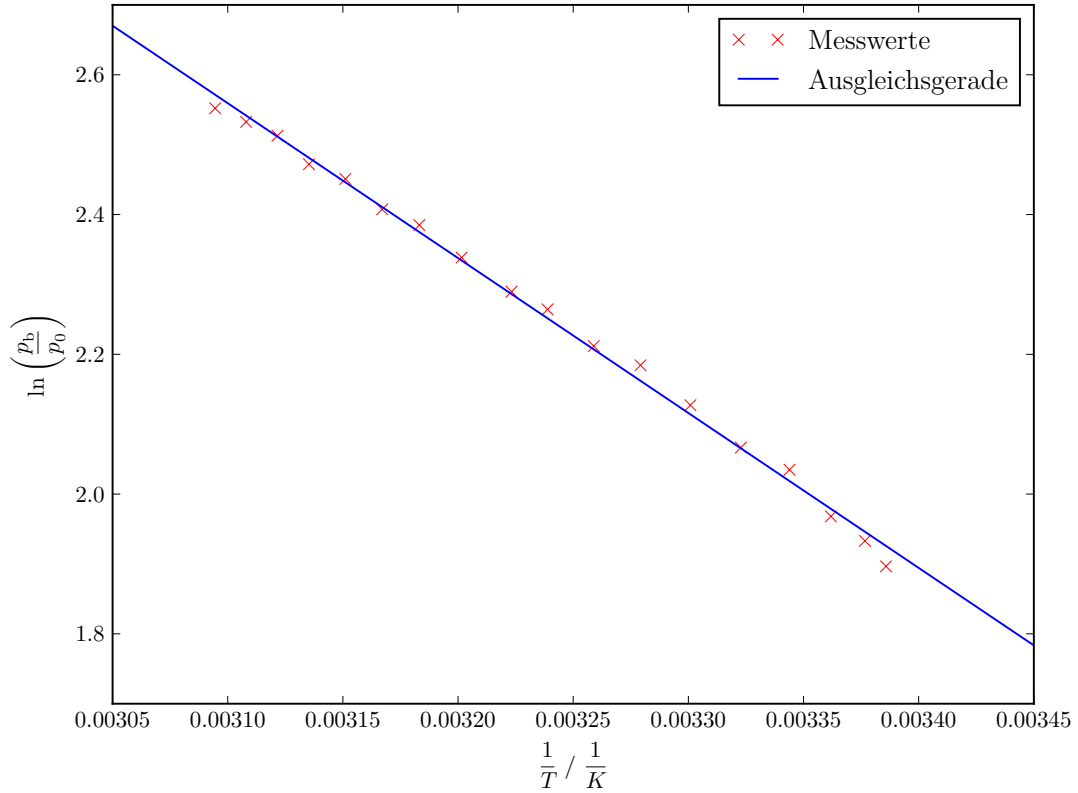


Abbildung 3: Druck des Transportmediums in Abhängigkeit von der Temperatur des Wassers.

Mit den Werten für $\frac{dT_2(t)}{dt}$ aus Tabelle 2 und den Formeln (7) und (8) wird dann der Massendurchsatz von Cl_2F_2C berechnet. Die Ergebnisse dazu stehen in Tabelle 4. Die Fehler wurden ebenfalls mit Python bestimmt und die entsprechende Ableitung für Formel (12) lautet:

$$\frac{\partial \frac{dm}{dt}}{\partial \frac{dT_2(t)}{dt}} = \frac{(m_2 c_w + m_k c_k)}{L}. \quad (33)$$

Tabelle 4: Massendurchsatz des Transportmediums in mol/s und in g/s.

$\frac{dm}{dt} / \text{mol} \cdot \text{s}^{-1}$	$\frac{dm}{dt} / \text{g} \cdot \text{s}^{-1}$	T_2 / K
$(-1,10 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$	$(-1,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$	294,15
$(-2,2 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$	$(-2,7 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$	286,15
$(-1,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$	$(-2,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$	277,55
$(-1,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$	$(-1,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$	273,15

4.4 Bestimmung der mechanischen Leistung

Zuletzt wird die mechanische Leistung berechnet, die der Kompressor aufwenden muss. Dazu werden die Formeln (9) – (11), die Werte für p_a und p_b aus Tabelle 3 sowie der Massendurchsätzen verwendet. Folgende Werte waren hierzu mit der Anleitung gegeben:

$$\kappa = 1.14 \qquad \rho_0(0^\circ\text{C}) = 5,51 \frac{\text{g}}{\text{L}} = 5510 \frac{\text{g}}{\text{m}^3} \qquad (34)$$

$$T_0 = 273,15 \text{ K} \qquad p(0^\circ\text{C}) = 1 \text{ bar} \qquad (35)$$

Als Zwischenergebnis stehen in Tabelle 5 die nach Formel (11) bestimmten Dichten des Mediums zur entsprechenden Temperatur T_2 .

Tabelle 5: Dichte des Transportmediums mit der jeweiligen Temperatur T_2 .

$\rho / \text{g m}^{-3}$	T_2 / K
$(-1,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$	294,15
$(-2,7 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$	286,15
$(-2,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$	277,55
$(-1,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$	273,15

Mit diesen ergeben sich schließlich nach Formel (9) die in Tabelle 6 stehenden Werte für die mechanische Leistung und den Wirkungsgrad der Apparatur.

Tabelle 6: Mechanische Leistung des Kompressors und Wirkungsgrad bei den jeweiligen Temperaturen T_2 .

$ N_{\text{mech}} / \text{W}$	$\frac{ N_{\text{mech}} }{N} / \%$	T_2 / K
24 ± 1	14 ± 1	294,15
49 ± 3	24 ± 1	286,15
43 ± 3	20 ± 1	277,55
32 ± 3	15 ± 1	273,15

Die Fehler wurden erneut mit Python bestimmt und die Ableitung für Formel (12) lautet:

$$\frac{\partial N_{\text{mech}}}{\partial \frac{dm}{dt}} = \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_b \sqrt[\kappa]{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{1}{\rho}. \quad (36)$$

5 Diskussion

Tabelle 7: Ergebnisse des Versuchs.

$ N_{\text{mech}} / \text{W}$	$\frac{ N_{\text{mech}} }{N} / \%$	ν	ν_{id}	T_2 / K	T_1 / K
24 ± 1	14 ± 1	$1,7 \pm 0,1$	148,1	294,15	296,15
49 ± 3	24 ± 1	$2,0 \pm 0,2$	16,2	286,15	304,95
43 ± 3	20 ± 1	$1,9 \pm 0,4$	8,6	277,55	314,15
32 ± 3	15 ± 1	$1,4 \pm 0,6$	6,8	273,15	320,35

In Tabelle 7 sind noch einmal die Ergebnisse des Versuchs angegeben. Grundsätzlich ist der Versuch sehr anschaulich. Z.B. wird an ihm die Funktionsweise von entsprechenden technischen Geräten, wie Kühlschränken, sehr verständlich dargestellt. Die berechneten Werte der realen Güte weichen um 79,4 % ($T_1 = 320,35 \text{ K}$) bis 98,9 % ($T_1 = 296,15 \text{ K}$) von den idealen Werten ab, was unter anderem daran liegt, dass die Apparatur nicht optimal isoliert ist und es so zu einigen Energieverlusten kommt. Genauso wurde angenommen, dass der Kompressor die Luft adiabatisch komprimiert, also ohne Wärmeabgabe an die Umgebung, was nur bedingt der Fall ist. Der Verlust über die Isolierung scheint allerdings größer zu sein, da bei den "Deckeln" der Behälter, über eine größere Lücke, ein fast direkter Wärmeaustausch mit der Umgebung möglich war und die Kompression laut [TuD17] nahezu adiabatisch verläuft.

Bei der Recherche haben wir festgestellt, dass es unüblich ist bei Wärmepumpen einen Wirkungsgrad anzugeben. Stattdessen wird in der Regel eine Leistungszahl verwendet, die der in diesem Versuch bestimmten Güteziffer entspricht. Diese liegt bei elektronischen Wärmepumpen im Normalfall zwischen 3 und 6 [Hau17]. Die von uns berechneten Güten erreichen maximal einen Wert von $2,0 \pm 0,2$.

Literatur

- [Che16] Chemgapedia.de. *Ideales Gas-Chemgapedia, Die allgemeine Gaskonstante*. 5. Dez. 2016. URL: http://www.chemgapedia.de/vsengine/vlu/vsc/de/ch/13/vlu/thermodyn/einfuehrung/ideales_gas.vlu/Page/vsc/de/ch/13/pc/thermodyn/einfuehrung/allg_gaskonst.vscml.html.
- [Hau17] IBS Ingenieurbüro für Haustechnik Schreiner. *Wärmepumpen-Grundlagen. Kennzahlen: Wirkungsgrad, Leistungszahl und Jahresarbeitszahl; Physikalische Grundlagen, Aufbau und Funktion; Kältemittel; Klassifikation; Wärmequellen*. 7. Feb. 2017. URL: <http://energieberatung.ibs-hlk.de/planwp.htm>.
- [TuD16a] Tu-Dortmund. *Versuch 201: Das Dulong-Petitsche Gesetz*. 28. Nov. 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V201.pdf>.
- [TuD16b] Tu-Dortmund. *Versuch 203: Verdampfungswärme und Dampfdruck-Kurve*. 2. Dez. 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V203.pdf>.
- [TuD17] Tu-Dortmund. *Versuch 206: Die Wärmepumpe*. 5. Feb. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V206.pdf>.