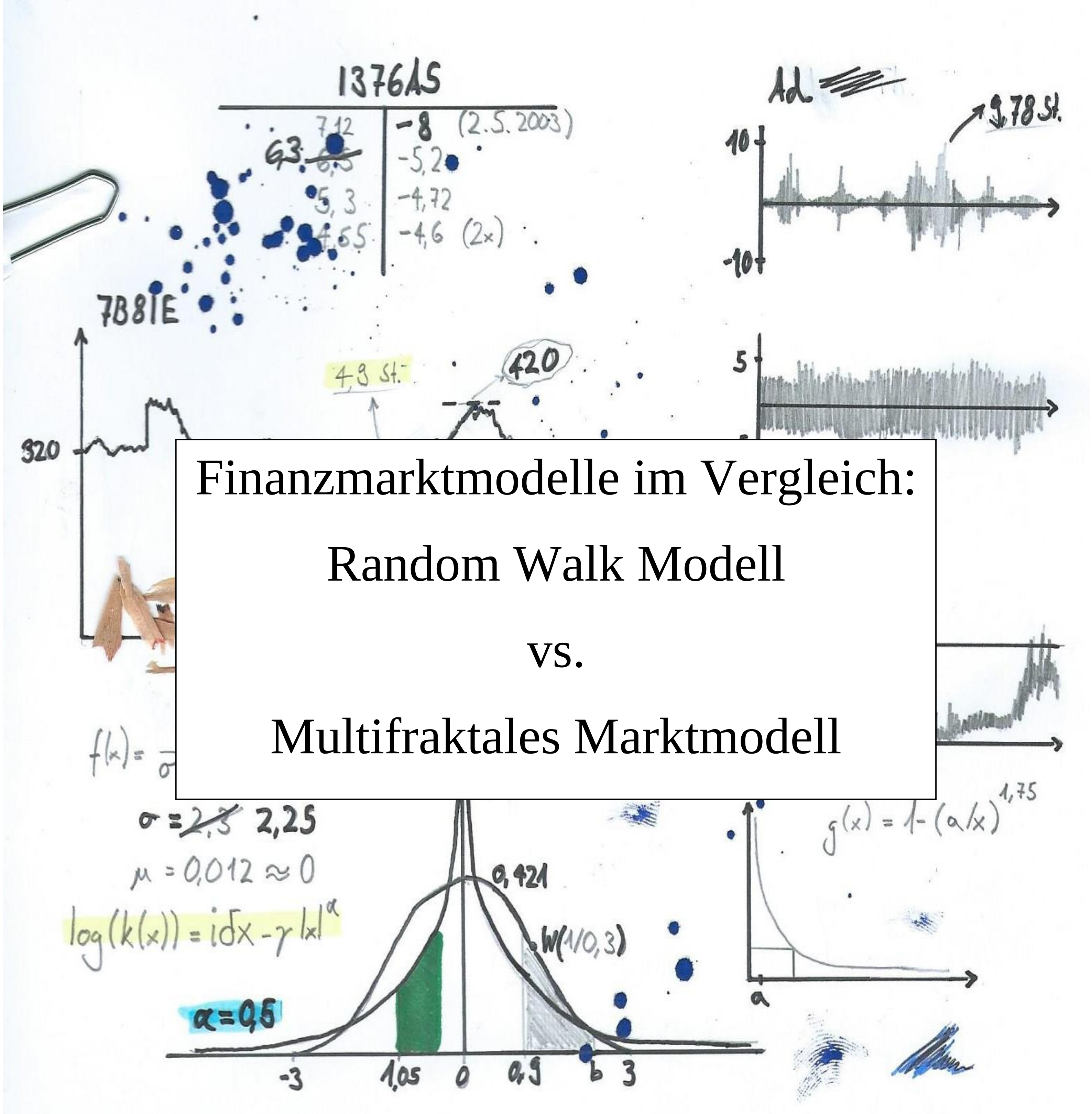


Finanzmarktmodelle im Vergleich:

Random Walk Modell

vs.

Multifraktales Marktmodell

Verfasser

Tim Gyger

W11s

Maturaarbeit 2015/2016

Kantonsschule Solothurn

Betreuende Person

Caroline Ryser

Inhaltsverzeichnis

Abstract

Finanzmärkte sind schwer durchschaubare, aber faszinierende Systeme, die einen komplexen Forschungsbereich darstellen. Diese Arbeit setzt sich mit der Untersuchung der Finanzmärkte aus einer mathematischen Perspektive auseinander. Zuerst wird das Random Walk Modell, das die mathematische Grundlage der modernen Finanzmarkttheorie bildet, erläutert. Der Vergleich zwischen einem mit Hilfe von Excel selbsterstellten Random Walk Kursmodell und realen Kursverläufen zeigt dann die problematischen Annahmen der modernen Finanzmarkttheorie auf. Als Alternative werden anschliessend die revolutionäre Ansicht des Mathematikers Benoît Mandelbrot und sein multifraktales Marktmodell vorgestellt. Die Annahmen Mandelbrots zu den Finanzmärkten werden in einem wiederum mit Excel erstellten Kursmodell veranschaulicht und in einer empirischen Untersuchung realer Kursreihen überprüft. Die Analyse realer Indizes, Aktien und Rohstoffpreise lässt statistische und strukturelle Übereinstimmungen zu Mandelbrots Annahmen vermuten. Jedoch zeigen die Ergebnisse auch eine gewisse periodenabhängige Übereinstimmung mit den Annahmen der modernen Finanzmarkttheorie auf.

1. Einleitung

Die Entwicklung von Theorien und Modellen ist eine geläufige Problemstellung im Bereich der Finanzmärkte. Das Gebiet ist wegen den unzähligen Einflussfaktoren so unübersichtlich und vielschichtig, dass es entsprechend viele Ansätze gibt, um das Marktgeschehen zu beschreiben. Unzählige Marktteilnehmer, die durch individuelle Erwartungen, Erfahrungen und Strategien, im Sekundentakt auftauchende Nachrichten aus aller Welt und viele weitere Faktoren beeinflusst werden, machen das System der Märkte unabsehbar. Ihre sich ständig verändernden, unterschiedlichen Meinungen bilden das variable Gleichgewicht aus Angebot und Nachfrage und führen zu dem zickzackförmigen Auf und Ab der Börsencharts. Für das komplizierte System der Märkte interessieren sich schon lange nicht nur Ökonomen, sondern auch Psychologen, Physiker, Sozialwissenschaftler und Mathematiker. Viele verschiedene Interessierte versuchten bereits, das Mysterium hinter den Kursbewegungen durch Marktmodelle und Theorien zu erklären, um Risiken und künftige Preise einschätzen zu können. Dabei hat vor allem die Mathematik nützliche Modelle hervorgebracht. Sie basieren hauptsächlich auf der Theorie, dass Chancen und Risiken am Finanzmarkt mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschrieben werden können.

Auf den Studien des Mathematikers Louis Bachelier wurde im Lauf der Zeit die moderne Finanzmarkttheorie aufgebaut. Diese wird heute grundlegend zur Risiko- und Vermögenseinschätzung, zur Optionsbewertung und zur Portfoliozusammenstellung von unterschiedlichen Institutionen, wie zum Beispiel Banken, Versicherungen und Fonds, benutzt. Doch wegen des turbulenten Marktverhaltens der letzten Jahre sind die modernen Modelle und Theorien in die Kritik geraten. Empirische Befunde[1] weisen darauf hin, dass die moderne Finanzmarkttheorie besonders extreme Marktsituationen oftmals unterschätzt. Deshalb versucht man die vorhandenen Modelle zu verbessern und abzuändern. Es gibt jedoch auch Stimmen, die ein völlig neues Modell mit neuen Annahmen über die Finanzwelt fordern.

Einer der stärksten Förderer für eine Umwälzung der Finanzmarkttheorie war der Mathematiker Benoît Mandelbrot. Er ist vor allem in Verbindung mit dem mathematischen Begriff „Fraktale“ bekannt. Im Buch „The Misbehavior of Markets: A Fractal View of Financial Turbulence“[2], das grundlegend für diese Arbeit ist, stellt Mandelbrot seine Ansichten über das Verhalten der Finanzmärkte dar und erklärt sein multifraktales Marktmodell, das auf der fraktalen Geometrie aufbaut. Doch sind Mandelbrots Theorien und sein multifraktales Modell besser geeignet als die Grundlage der modernen Finanzmarktmodelle, um Kursverläufe am Finanzmarkt darzustellen?

Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, einerseits die problematischen Annahmen der modernen Finanzmarkttheorie kritisch zu beleuchten und andererseits die alternativen Theorien Mandelbrots darzustellen und in realen Kursreihen wiederzufinden. Somit wird schlussendlich die Hypothese überprüft, ob Mandelbrots Theorien reales Kursverhalten widerspiegeln und ob das multifraktale Marktmodell geeignet ist, um das Kursverhalten realitätsgetreue zu beschreiben und darzustellen.

2. Grundlage der modernen Finanzmarkttheorie

Vom Analysieren der Zusammenhänge zwischen Ursache und Wirkung bis zur Mustererkennung in den Charts werden die verschiedensten Methoden verwendet, um am Finanzmarkt Geld zu verdienen und das Risiko für Verluste gering zu halten. Doch die meisten Strategien erwiesen sich als zu wenig verlässlich, um als Grundlage für ein besseres Verständnis der Finanzmärkte zu dienen. Die heutzutage an den Universitäten gelehrten Theorien zum Risikomanagement beruhen daher auf langjährig weiterentwickelten mathematischen und volkswirtschaftlichen Annahmen.

[1] Beispiel eines empirischen Befundes:
Kull Andreas und Müller Ulrich A. (12.05.2005): Physikalische Gesellschaft Zürich, ETH Zürich, Internet, http://www.pgz.ch/events/ss05/event.20050512/brown_finanz.pdf, Stand: 30.12.2015

[2] Deutsche Übersetzung: Mandelbrot Benoît B. und Hudson Richard L. (2014[4]): „Fraktale und Finanzen: Märkte zwischen Risiko, Rendite und Ruin“, Piper Verlag GmbH München

2.1. Random Walk Modell[3]

Das mathematische Fundament der modernen Finanzmarkttheorie wurde durch den französischen Mathematiker Louis Bachelier im Jahr 1900 in seiner Doktorarbeit *„Théorie de la Spéculation“* gelegt. Bachelier versuchte Kursveränderungen nicht auf ihre Ursachen zu untersuchen, sondern nach mathematischen Gesetzen der Wahrscheinlichkeitstheorie zu beschreiben. Seine Idee war, dass es unmöglich sei, alle marktverändernden Faktoren zu kennen und richtig zu deuten und man deshalb die Kursbewegungen als zufällig annehmen könne. Bachelier stellte also das Kursverhalten in einem mathematischen Modell dar, das später als Random Walk Modell (Zufallspfad) bezeichnet wurde. Sein Ziel dabei war, verschiedene Kursveränderungen als mehr oder weniger wahrscheinlich einschätzen und das Risiko für verschiedene Marktsituationen quantifizieren zu können.

Dazu untersuchte Bachelier die Kurse der französischen Staatsanleihen. Er verglich ihre Bewegungen mit einer Abfolge von Münzwürfen. Hierzu stellt man sich ein Münzwurfspiel vor, bei dem für jeden Kopf-Wurf ein Franken gewonnen und für jeden Zahl-Wurf ein Franken verloren wird. Kopf oder Zahl erscheint bei jedem Wurf bekanntlich mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von 50% und das aktuelle Ergebnis wird von vorherigen Würfen nicht beeinflusst. Spielt man eine genügend hohe Anzahl Würfe, wird klar, dass langfristig kein Gewinn und auch kein Verlust zu erwarten sind. Laut Bachelier verhält sich der französische Anleihenmarkt ähnlich. Der Kurs springt, wie beim Münzwurf, mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% nach oben oder nach unten unabhängig von vorherigen Kursveränderungen. Somit verändert sich der Kurs durchschnittlich nicht und die Marktteilnehmer haben wie beim Münzwurfspiel langfristig weder Gewinn noch Verlust zu erwarten. Ausserdem werden von den Marktteilnehmern wegen der Unabhängigkeit zwischen den Kursveränderungen alle relevanten Informationen sofort in den Kurswert einbezogen und arbeiten sich nicht allmählich in den Kurs ein. Der Kurs pendelt also, solange keine neuen marktbewegenden Informationen bekannt sind, um einen bestimmten Wert. Folglich ist laut Bachelier die beste Prognose für den künftigen Kursstand der aktuelle Kurswert.

Als Bachelier die Kursveränderungen der Staatsanleihen von verschiedenen Perioden in einer Häufigkeitsverteilung graphisch darstellte, entdeckte er, dass alle Graphen die Form der Gauss’schen Glockenkurve annahmen. Daraus folgerte Bachelier, dass Kursveränderungen der Normalverteilung folgen.

Die Normalverteilung oder auch Gaussverteilung gehört zu den Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Diese zeigen mit welcher relativen Häufigkeit ein bestimmter Wert in einer Werte-

[3] Mandelbrot Benoît B. und Hudson Richard L. (2014[4]): „Fraktale und Finanzen: Märkte zwischen Risiko, Rendite und Ruin“, Piper Verlag GmbH München, Seiten 77-91

reihe vorkommt. Der Graph der Gaussverteilung ist glockenförmig und wird auch als Gauss'sche Glockenkurve bezeichnet. Die Kurve wird durch folgende Funktion bestimmt:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{((x-\mu)/\sigma)^2}{2}}$$

Eine Wertereihe ist normalverteilt, wenn ihre Dichtefunktion[4] dieser Gauss'schen Glockenfunktion entspricht. Die Formel wird durch die zwei Parameter μ und σ charakterisiert. Der Parameter μ ist der Mittelwert oder auch Erwartungswert der Wertemenge und entspricht dem Wert, der durchschnittlich am häufigsten auftritt. Er bildet die Spitze oder das Maximum der Kurve. Der Parameter σ ist die Standardabweichung der Wertereihe und beeinflusst die Breite der Glockenkurve. Sie gibt die Streuung der Werte um ihren Erwartungswert an, also wie weit die Daten im Durchschnitt vom Mittelwert entfernt sind. Bei der Gauss'schen Verteilung liegen 68,3% aller Messwerte innerhalb einer Standardabweichung vom Mittelwert, 95,5% innerhalb von zwei Standardabweichungen vom Mittelwert und 99,7% innerhalb von drei Standardabweichungen.[5] Im Anhang I ist eine selbsterstellte Gauss-Verteilung dargestellt.[6]

Die Kursveränderungen auf ihre Häufigkeitsverteilung zu analysieren, ermöglicht es, die relative Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Kursverlauf besser abzuwägen. Dies ist sehr hilfreich bei der Risikoeinschätzung. Bacheliers Annahme, dass die Kursveränderungen normalverteilt sind, bedeutet konkret, dass grosse Kurssprünge ausserordentlich selten vorkommen und sich die Kurse eher kontinuierlich, also in kleinen Schritten nach oben oder unten, bewegen.

2.2. Nachbildung von Kursverläufen mittels Random Walk

Im Folgenden wird das Random Walk Modell anhand eines selbst erstellten, vereinfachten Kursmodells, das auf den Annahmen Bacheliers aufgebaut ist, veranschaulicht. Das Modell habe ich mit dem Tabellenkalkulationsprogramm Excel erarbeitet.[7] Excel eignet sich sehr gut für die Darstellung von Kursen, da relativ grosse Datenmengen mit Hilfe verschiedener mathematischer Funktionen weiterverarbeitet und in Graphiken dargestellt werden können. Ausserdem entstehen durch die Zufallsfunktionen immer wieder neue Werte, die aber dieselben statistischen Eigenschaften aufweisen.

---

[4] Eine Dichtefunktion zeigt, in welchen Teilen des Definitionsbereiches der Zufallsvariablen sich die Werte am dichtesten häufen.

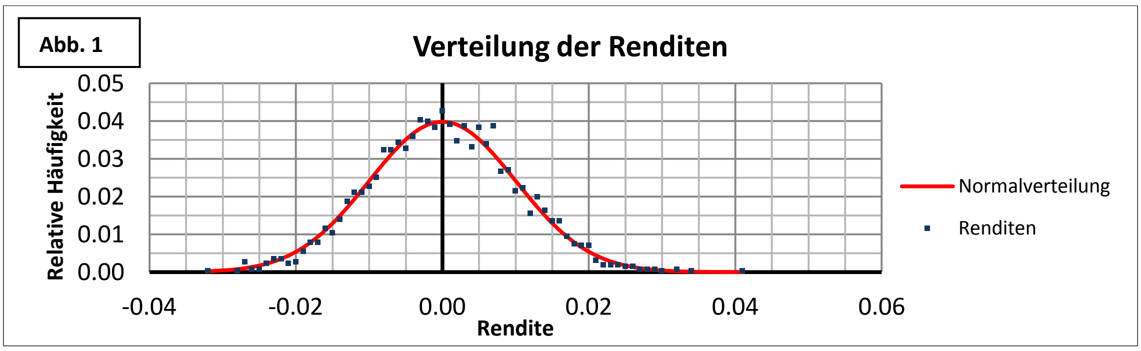
[5] W.A. Hemmerich: MatheGuru.com, Normalverteilung, Internet, http://matheguru.com/stochastik/31-normalverteilung.html, Stand: 30.12.2015

[6] Das dazugehörige Excel-File ist in der beigelegten CD zu finden: Abbildungen\Gauss-Verteilung.xlsx

[7] Das dazugehörige Excel-File ist in der beigelegten CD zu finden: Eigenständige Arbeit\Random Walk Kursmodell.xlsx

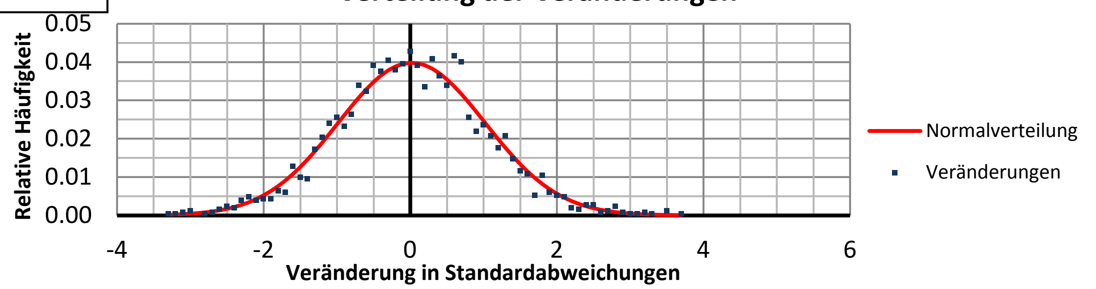
Als erstes habe ich die täglichen Renditen[8] für 2500 fiktive Handelstage, also für ungefähr 10 Jahre, durch die Excel-Funktion NORMINV bestimmt. Diese Funktion gibt einen durch seine relative Wahrscheinlichkeit bestimmten Wert einer Normalverteilung an. Dazu muss man die relative Wahrscheinlichkeit des gewünschten Wertes sowie den Mittelwert und die Standardabweichung der entsprechenden Normalverteilung angeben. Die Wahrscheinlichkeit jeder einzelnen Rendite habe ich durch die Funktion ZUFALLSZAHL bestimmt, die eine gleichmässig verteilte Zufallszahl gleich oder grösser Null und kleiner Eins generiert. Somit ergibt sich für jede Rendite ein neuer zufälliger und unabhängiger Wert. Den Mittelwert aller Renditen habe ich als null angenommen, da laut Bachelier ein Marktteilnehmer langfristig weder einen Gewinn noch einen Verlust zu erwarten hat. Die Standardabweichung der Renditen habe ich auf 0,01 also 1% festgelegt, damit nur selten grosse Kursveränderungen vorkommen. Auf Grund der Renditen konnte ich die einzelnen Kurse von einem Startkurs mit dem Wert 100 ausgehend berechnen und anschliessend die täglichen absoluten Kursveränderungen bestimmen. Um bessere Vergleiche zu realen Kursen zu machen, habe ich die Kursveränderungen noch in Standardabweichungen umgerechnet. Dann habe ich den Kursverlauf, die Häufigkeitsverteilungen der Kursveränderungen und der Renditen sowie das Kursschwankungsverhalten in Diagrammen graphisch dargestellt.

Die Abbildungen 1 und 2 zeigen Histogramme[9] zu möglichen Verteilungen der Renditen und der Kursveränderungen meines Modells. Die rote Hilfslinie zeigt, dass die Häufigkeitsverteilung der als blaue Punkte dargestellten Renditen der Gauss'schen Glockenkurve folgt und somit normalverteilt ist. Das gleiche lässt sich bei den in Standardabweichungen gemessenen Kursveränderungen beobachten. Wenn man die Randbereiche beider Graphiken betrachtet, erkennt man, dass die höchsten positiven und negativen Werte der Renditen und der Kursveränderungen in Standardabweichungen nicht extrem vom Erwartungswert (y-Achse) abweichen.



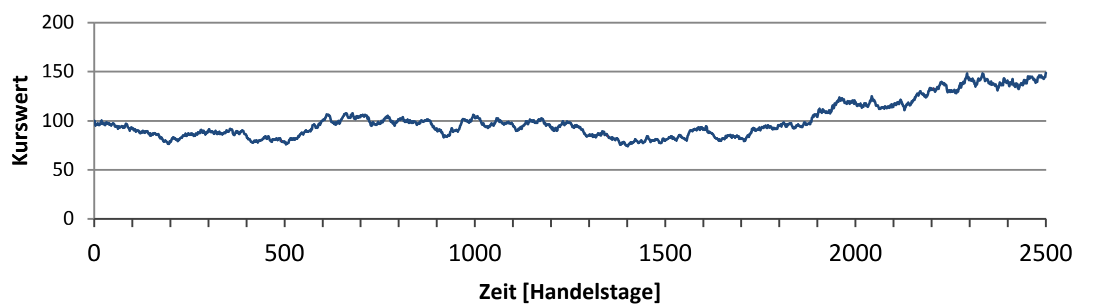
[8] Als Rendite gilt in diesem Zusammenhang die prozentuale Veränderung des Kurses zwischen zwei bestimmten Zeitpunkten.
[9] Histogramm nennt man die Graphik zu einer Häufigkeitsverteilung.

Abb. 2



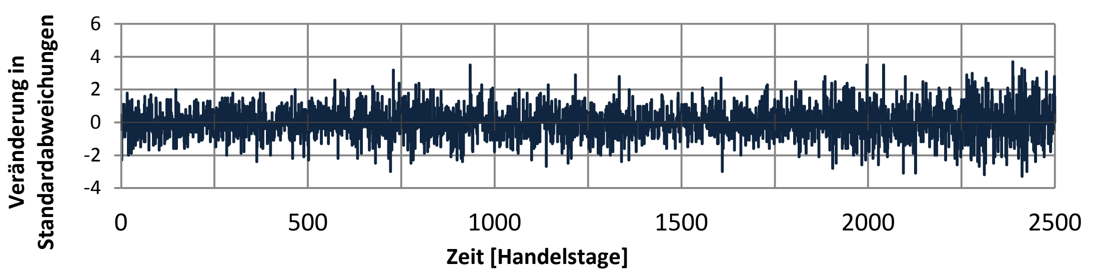
In der Abbildung 3 ist ein klassischer Random Walk Chart zu sehen. Es lässt sich erkennen, dass sich der Kurs kontinuierlich in kleinen Schritten verändert. Ausserdem weicht der Kurs während den 2500 Handelstagen nie äusserst stark vom Startkurs ab.

Abb. 3



Die Abbildung 4 zeigt die Volatilität meines Random Walk Kursmodells. Die Volatilität beschreibt das Schwankungsverhalten eines Kurses und ist im Säulendiagramm unten durch die täglichen Kursveränderungen in Standardabweichungen dargestellt. Es lässt sich kein Muster oder Gesetz erkennen, an das sich die Volatilität hält. Dies ist auf die Annahme Bacheliers über die Unabhängigkeit der Kursveränderungen zurückzuführen. Ausserdem fällt auf, dass die Kursveränderungen nie grösser als vier Standardabweichungen sind.

Abb. 4



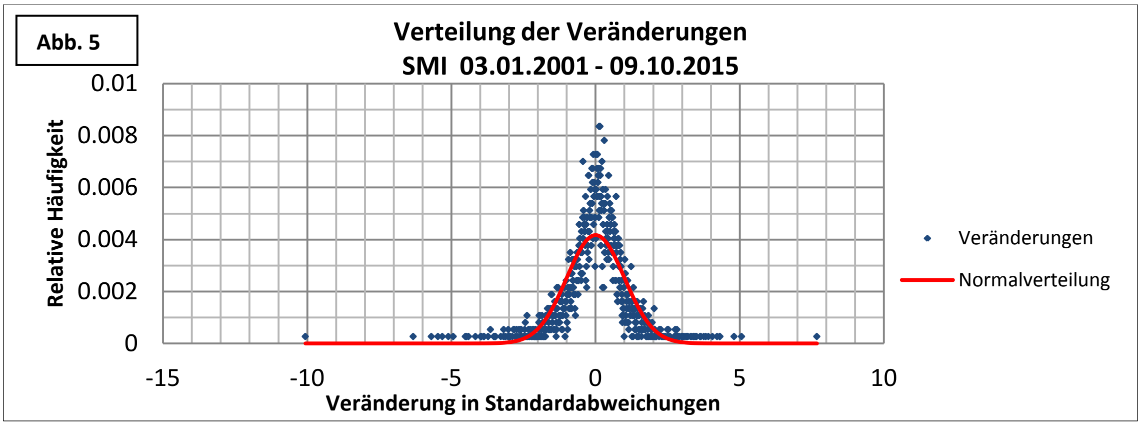
Die Abbildungen 1 – 4 zeigen auf, dass Bachelier die Finanzmärkte als ein relativ ruhiges System mit nur wenigen grösseren Kursveränderungen, mit einem kontinuierlichen Kursverlauf und mit unabhängigem Schwankungsverhalten ansah.

2.3. Untersuchung der Annahmen des Random Walk Modells

Das Ziel der folgenden Untersuchung ist, anhand von realen Kursreihen zu überprüfen, ob die zentralen Annahmen Bacheliers stimmen. Dazu habe ich die Verteilung der Kursveränderungen des Swiss Market Index (SMI), den Kursverlauf der Swisscom-Aktie und die Volatilität der UBS-Aktie analysiert. Die diesbezüglichen Daten habe ich von der Internetseite www.finanzen.net in Excel-Files kopiert und in den entsprechenden Diagrammen dargestellt.

2.3.1. Normalverteilung und Extremwerte

Laut dem Random Walk Modell sind die Kursveränderungen normalverteilt. Diese Annahme scheint beim Vergleich mit realen Daten jedoch unzutreffend. Wenn man das Histogramm des SMI von 2001 bis 2015 in der Abbildung 5 betrachtet, erkennt man offensichtliche Abweichungen zur rot gekennzeichneten Gauss'schen Glockenkurve.



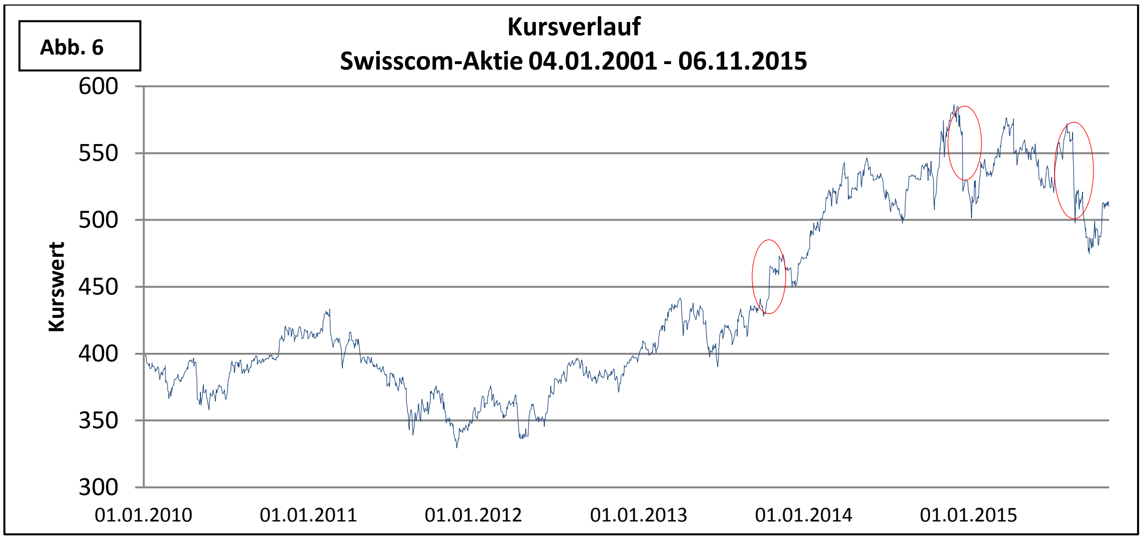
Die Differenzen sind vor allem bei den kleinen Kursveränderungen zu sehen, wo die relative Häufigkeit unterschätzt wird. Viel wichtiger für die Risikoeinschätzung sind aber die Abweichungen bei den grossen Kursveränderungen. Diese werden von der Normalverteilung verharmlost. Erst bei genauer Betrachtung der Werte ist das Ausmass des Problems zu erkennen. Die Wahrscheinlichkeit einer Kursveränderung des SMI von viereinhalb Standardabweichungen ist laut der Normalverteilung so klein, dass sie nur alle 170 Jahre einmal vorkommen sollte.[10]

[10] $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{((x-\mu)/\sigma)^2}{2}}$ (σ=1;μ=0;x=4,5) => $\frac{1}{f(x)*365} = 1/(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(4,5)^2}{2}})/365 = 171,4 \approx 170$

Die realen Werte zeigen jedoch, dass es in den letzten 15 Jahren bereits elf mindestens so grosse Veränderungen gab. Eine davon war sogar über zehn Standardabweichungen gross.[11]

2.3.2. Kontinuierliche Kursverläufe

Eine weitere Annahme des Random Walk Modells ist die kontinuierliche Bewegung der Kurse. Sie schliesst grosse Kurssprünge aus. Doch bei der Betrachtung realer Charts lassen sich auffällige Kurssprünge beobachten. In Abbildung 6 ist der Chart der Swisscom Aktie von 2010 bis 2015 dargestellt.[12] Drei grössere Kurssprünge sind rot markiert.



2.3.3. Unabhängigkeit der Kursveränderungen

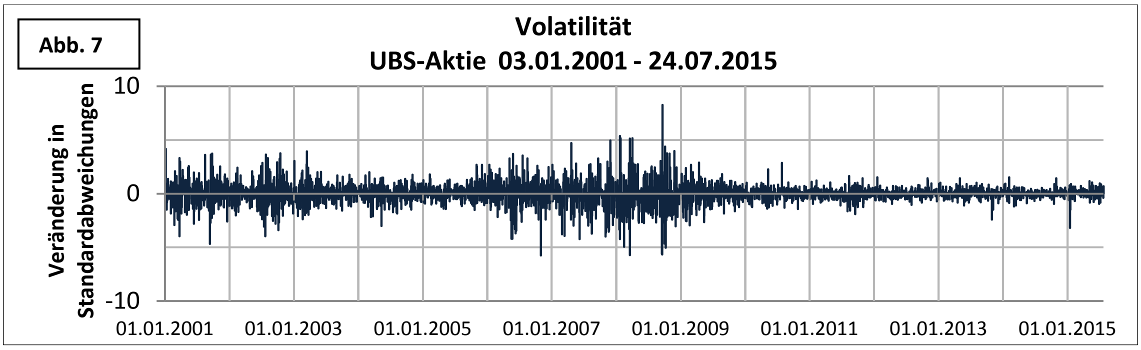
Laut Bachelier hat keine Kursveränderung Einfluss auf zukünftige Veränderungen. Alle massgebenden Informationen sind also bereits im Kurswert enthalten. Das heisst, jede Kursveränderung ist zufällig und von der vorherigen unabhängig.

Bei der Untersuchung der Volatilität erkennt man jedoch gewisse Muster, die gegen eine Unabhängigkeit sprechen. In der Abbildung 7 ist die Volatilität der UBS Aktie von 2001 bis 2015 in Standardabweichungen dargestellt.[13] Die Graphik zeigt eine viel turbulentere Volatilität als diejenige des Random Walk Modells in Abbildung 4. Zudem lassen sich längere Phasen mit auffällig hohen beziehungsweise tiefen Kursschwankungen feststellen. Einige Veränderungen sind so gross, dass sie von der Normalverteilung abweichen.

[11] Siehe Auswertungstabelle in Anhang IV und das dazugehörige Excel-File in der beigelegten CD: Eigenständige Arbeit\Indizes\Swiss Market Index.xlsx

[12] Das Excel-File ist in der beigelegten CD zu finden: Abbildungen\Kursverlauf der Swisscom-Aktie.xlsx

[13] Das Excel-File ist in der beigelegten CD zu finden: Eigenständige Arbeit\Aktien\UBS.xlsx



3. Mandelbrots alternative Theorie

Benoît Mandelbrot war einer der wichtigsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts. Er arbeitete erfolgreich an mehreren mathematischen Problemen und erbrachte neue Erkenntnisse in Physik, Chaosforschung und Finanzmathematik. Bekannt wurde er vor allem durch seine Erforschung komplizierter geometrischer Gebilde, die er Fraktale nannte, und seiner daraus abgeleiteten fraktalen Geometrie.

Fraktale sind raue, zerklüftete Strukturen, die man in der Natur wiederfindet, beispielsweise bei Blitzen und Küstenlinien. Sie weisen zwei Haupteigenschaften auf, die Selbstähnlichkeit und die gebrochene Dimension. Bei selbstähnlichen Objekten ähnelt jeder kleine Ausschnitt dem Gesamtbild. Das heisst bei jeder Massstabsvergrösserung sind dieselben Strukturen erkennbar. Die gebrochene oder auch fraktale Dimension beruht auf der Idee Mandelbrots, dass raue und chaotische Gebilde nicht einer der drei geläufigen Dimensionen, sondern einer dazwischenliegenden Dimension zugeteilt werden sollten, um so ihre Rauheit zu messen.

Mandelbrot war davon überzeugt, dass keine konventionelle Geometrie fähig sei Fraktale zu messen und zu beschreiben. Deshalb entwickelte er die fraktale Geometrie, die mit verschiedenen Instrumenten, wie beispielsweise der fraktalen Dimension, versucht Fraktale durch bestimmte Werte zu quantifizieren. Fraktale können künstlich durch das unendliche Wiederholen einer mathematischen Operation erzeugt werden.

Mandelbrots Interesse für wilde und chaotische Formen weckte seine Neugierde für die Finanzmärkte. Er kam zum ersten Mal im Jahr 1961 intensiv mit den Finanzmärkten in Berührung. Damals arbeitete er am IBM-Forschungsinstitut in New York. Dort untersuchte er das Kursverhalten von Baumwollpreisen und kritisierte schon damals die Grundannahmen der modernen Finanzmarkttheorie, die sich dazumal noch im Entwicklungsstadium befand. Mandelbrot entwickelte alternative Annahmen über die Finanzmärkte. Seine Grundidee war dieselbe, wie diejenige Bacheliers. Mit Hilfe eines Modells sollen mögliche Kursveränderungen mit der Wahrscheinlichkeitstheorie eingeschätzt und Marktrisiken quantifiziert werden. Mandelbrot sah die Märkte jedoch als ein viel wilderes System an als Bachelier. Er verglich das Geschehen an den Finanzmärkten mit einem turbulenten Wind und unterstellte vor allem Parallelen zwischen dem Wechselspiel von heftigen und ruhigen Marktaktivitäten und der sich ständig verändernden Windgeschwindigkeiten.[14] Mandelbrot formulierte dies wie folgt: „Fraktale Geometrie bietet Ihnen eine Möglichkeit, das Verhalten von Preisen, ihre Ausschläge zu messen über das, was ich Rauheit nenne. Sie können mit diesem Konzept eine große Menge komplizierter, uneinheitlicher Daten in wenigen Zahlen ausdrücken. […] Rauheit ist ein Maß für Turbulenzen, und Turbulenzen sind ein Hinweis auf die Höhe des Risikos eines Systems. […] Zunächst ist alles ruhig und läuft in geordneten Bahnen, und dann kommt es plötzlich und unvermittelt zu einem Ausbruch der Kurse und zu Zeiten hoher Volatilität."[15]

Mandelbrot erkannte ausserdem die fraktalen Eigenschaften, Rauheit und Selbstähnlichkeit, in den Kurscharts wieder. Je intensiver der Handel, desto mehr Zacken sind zu erkennen und desto zerklüfteter und rauer ist der Chart. Die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit erkennt man bereits beim Durchblättern des Finanzteils einer Zeitung. So ähneln sich alle verschiedenen Charts in ihrer zackigen Grundstruktur, egal ob sie sich auf Tage, Wochen, Monate oder Jahre beziehen. Es ist praktisch unmöglich einen Chart ohne Zeitskala der korrekten Periode zuzuordnen. Ausserdem argumentierte Mandelbrot, dass alle statistischen Eigenschaften unabhängig von der Zeitskala identisch bleiben, was ebenfalls ein Kennzeichen für Selbstähnlichkeit ist. Eine solche Unabhängigkeit der Skala nennt man Skaleninvarianz. Ein vergrösserter Teil eines Charts ist zwar nicht eine exakte Abbildung des Gesamtobjektes. Aber man erreicht eine Annäherung durch Dehnung und Stauchung der einzelnen Zacken. Diese Eigenschaft nennt man selbstaffin. Seine Schlussfolgerung war, dass seine fraktale Geometrie geeignet sei, um Marktturbulenzen nachzubilden.

Die undurchsichtige Entwicklung der Märkte versuchte Mandelbrot durch sogenannte Multifraktale zu simulieren. Multifraktale entwickeln sich nicht wie die einfachen Fraktale durch das Wiederholen genau derselben mathematischen Operation, sondern durch das ständige Verändern dieser Operation. Multifraktale sind somit in der Lage, sich sowohl langsam und gemächlich als auch rasch und ausbruchsartig zu entwickeln. Deshalb war Mandelbrot der Meinung, dass Multifraktale am geeignetsten sind, um die heftigen Turbulenzen am Markt nachzuahmen. Schliesslich erschuf er multifraktale Modelle auf Grund seiner eigenen Annahmen über die Finanzmärkte.

[14] Mandelbrot Benoît B. und Hudson Richard L. (20144):„Fraktale und Finanzen: Märkte zwischen Risiko, Rendite und Ruin", Piper Verlag GmbH München, Seiten 164-166
15 Beck Hanno (2005): Frankfurter Allgemeine, Interview, Internet: http://www.faz.net/aktuell/finanzen/fonds-mehr/interview-finanzmarkt-risiken-sind-groesser-als-wir-annehmen-1234053.html?printPagedArticle=true#pageIndex_2, Stand: 31.12.2015

3.1. Multifraktales Marktmodell

Mandelbrot veröffentlichte 1963 die Arbeit *„The Variation of Certain Speculative Prices"*, in der er seine Ansichten über das Verhalten von Finanzmärkten auf Grund der statistischen Analyse von historischen Baumwollpreisen erklärte. Als Mandelbrot die Renditen von unterschiedlichen Perioden untersuchte, entdeckte er, dass die Verteilung der Renditen Parallelen zur Pareto-Verteilung[16] aufweist. Die Pareto-Verteilung wurde um 1900 von Vilfredo Pareto entwickelt und gehört zu den Exponentialverteilungen. Auf Grund graphischer Darstellungen erkannte Mandelbrot in den Renditenverteilungen exponentielle Charakterzüge. Die grossen Renditen bilden die eher dicken und weiten Randzonen des Verteilungsgraphen, die man auch Fat Tails nennt. Die kleinen Renditen führen der y-Achse entlang in die Höhe. Mandelbrot versuchte das Renditen-Histogramm mit einer Lévy-stabilen-Verteilung[17] nachzubilden. Diese Verteilung kann durch wenige Parameter in eine Menge von glockenähnlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen verformt werden. Die dazugehörige Funktion lautet:

$$\log(f(t)) \;=\; i\delta t - \gamma|t|^{\alpha}\left[1 + i\beta\left(\frac{t}{|t|}\right)\tan(\alpha\pi/2)\right]$$

Sie wird durch die Variablen δ, γ, β und α charakterisiert. Der Parameter δ bestimmt, ob die Lage der Kurve nach links oder nach rechts verschoben ist. Die Grössenordnung der Wahrscheinlichkeiten wird durch den Parameter γ bestimmt. Die Variable β gibt die Schiefe der Kurve an. Wenn β gleich null ist, ist die Kurve symmetrisch. Der wichtigste Parameter für diese Arbeit ist jedoch α. Dieser beschreibt sowohl die Randdicke des Graphen als auch die Spitze des Zentrums. Die Variable i steht für die imaginäre Einheit. Unter der imaginären Einheit versteht man eine Grösse, deren Quadrat eine negative Zahl ist und die somit nur in unserer Vorstellung existiert. Diese Einheit hat für diese Arbeit jedoch keine Bedeutung. Wenn α gleich zwei und β gleich null ist, beschreibt die Lévy-stabile-Funktion die Gauss'sche Glockenkurve. Je kleiner α ist, desto schmaler wird die Kurve und desto weiter und dicker werden die Randbereiche. Somit erhalten wir mit α nahe null und β gleich null einen Graphen mit exponentieller Charakteristik. Mandelbrot unterstellte für die Rendite- und Kursveränderungs-Verteilung der Baumwollpreise schlussendlich eine exponentielle Funktion mit einem α von 0,5, was einer Pareto-Verteilung ähnelt. Laut Mandelbrot kommen also grössere Kursveränderungen häufiger vor, als die Normalverteilung vorgibt. Somit bewegt sich der Kurs nicht kontinuierlich nach oben oder nach unten, sondern neigt manchmal zu sprunghaften Bewegungen.

[16] Eine Abbildung der Pareto-Verteilung ist im Anhang II zu finden.
[17] Eine Abbildung der Lévy-stabilen-Verteilung ist im Anhang III zu finden.

Eine weitere Erkenntnis Mandelbrots aus seinen Untersuchungen von Baumwollpreisen ist das Langzeitgedächtnis von Kursreihen. Laut Mandelbrot werden nicht alle marktbeeinflussenden Informationen direkt in den Kurswert verarbeitet. Eine stark einflussnehmende Nachricht hätte also für mehrere Monate starke Wirkung auf das Handeln der Marktteilnehmer und würde zu einem trendartigen Kursverlauf führen. Jedoch war Mandelbrot der Meinung, dass Trends wiederum durch Phasen mit hin und her springenden Kursen ohne eindeutige Tendenz abgelöst werden können.

Bei der Untersuchung des Schwankungsverhaltens entdeckte Mandelbrot, dass die Volatilität der Renditen zeitabhängig ist. Das heisst, dass sich grosse Schwankungen eher auf gewisse Perioden konzentrieren und sich die Kurse somit in kurzer Zeit sehr schnell verändern. Dies begründet er mit der Theorie, dass sich Erwartungen von Marktteilnehmern sehr schnell ändern können, da preisrelevante Nachrichten meist nicht eindeutig einzuschätzen sind und unterschiedlich bewertet werden. Es ist also laut Mandelbrot wahrscheinlicher, dass nach einer grossen Kursveränderung wiederum eine grosse folgt. Somit würden sich sogenannte Cluster bilden, in denen sich die hohe Volatilität ballt.

Mandelbrots Annahmen zum exponentiellen Charakter der Verteilungen, zum Langzeitgedächtnis der Kursreihen und zur Clusterbildung im Schwankungsverhalten weichen klar von denjenigen Bacheliers ab und widersprechen der Grundlage der modernen Finanzmarkttheorie. Mandelbrot brachte dies wie folgt auf den Punkt: „Die Konsequenz aus dieser Überlegung ist, dass die Risiken, wie wir sie derzeit mit Hilfe der Standardtheorie messen, unterschätzt werden, weil die Theorie nicht die Gefahr schneller und großer Preissprünge berücksichtigt. Die tatsächlichen Risiken - sowohl nach oben als auch nach unten - sind wesentlich größer, als wir annehmen.“[18]

3.2. Nachbildung von Kursverläufen nach Mandelbrots Annahmen

Um Mandelbrots Annahmen bildlich darzustellen, habe ich mittels Excel ein weiteres Kursmodell erstellt, das vereinfacht auf den Theorien Mandelbrots aufgebaut ist.[19] Wegen der grossen Komplexität der multifraktalen Prozesse konzentriert sich meine Arbeit in erster Linie auf die Annahmen Mandelbrots zur Nachahmung von Kursverläufen. Die im Folgenden verwendeten Modelle, die auf Mandelbrots Theorien aufgebaut aber nicht multifraktal im engeren Sinn sind, werden in dieser Arbeit dennoch repräsentativ als multifraktale Marktmodelle bezeichnet.

---

[18] Beck Hanno (2005): Frankfurter Allgemeine, Interview, Internet: http://www.faz.net/aktuell/finanzen/fonds-mehr/interview-finanzmarkt-risiken-sind-groesser-als-wir-annehmen-1234053.html?printPagedArticle=true#pageIndex_2, Stand: 31.12.2015

[19] Das dazugehörige Excel-File ist in der beigelegten CD zu finden: Eigenständige Arbeit\Multifraktales Kursmodell.xlsx

Als erstes habe ich die Renditen für 2500 fiktive Handelstage mit Hilfe der Pareto-Verteilung als absolute Werte bestimmt. Diese Verteilung wird durch folgende Funktion definiert:

$$y = 1 - (a/x)^c$$

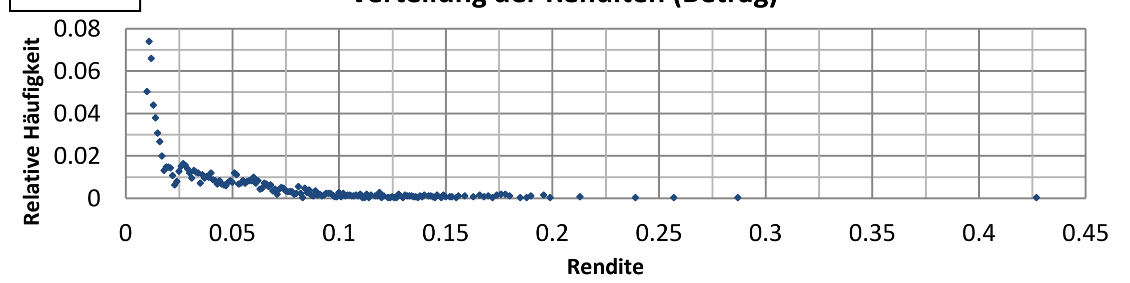
Wenn man diese Funktion nach x auflöst, kann eine Rendite mit einer bestimmten relativen Wahrscheinlichkeit wiedergegeben werden:

$$x = a/(1-y)^{(1/c)}$$

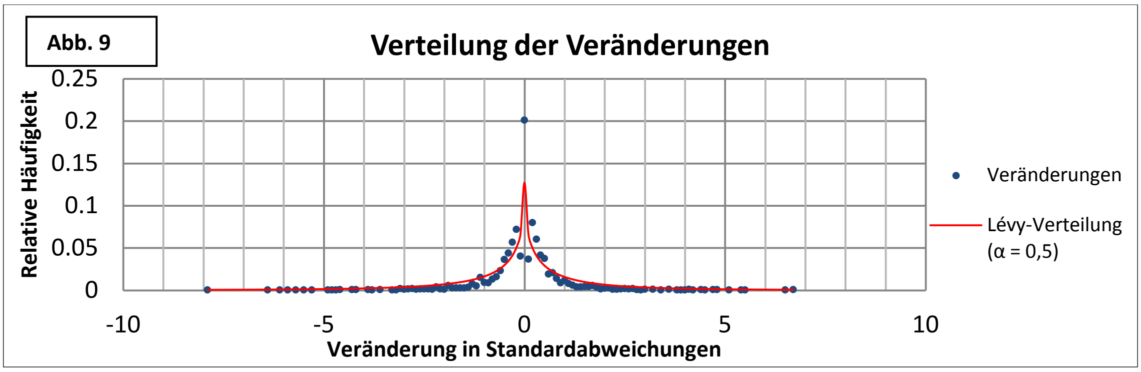
Der Parameter a bestimmt den kleinstmöglichen Wert der Wertemenge. Diesen habe ich auf 0,01 oder 1% angesetzt. Der Wert y ist die relative Wahrscheinlichkeit, mit der eine bestimmte Rendite x vorkommt. Diesen habe ich mit Hilfe der Funktion ZUFALLSBEREICH bestimmt, die eine zufällige Zahl aus einem ausgewählten Bereich wiedergibt. Um die Abhängigkeit zwischen den Renditen zu simulieren, habe ich Bedingungen für diesen Bereich aufgestellt, sodass die Wahrscheinlichkeit für eine hohe Rendite grösser ist, wenn die vorherigen Renditen auch bereits hoch waren. Der Parameter c bestimmt, wie steil die exponentielle Kurve ist. Ich habe c auf 1,7 festgelegt. Denselben Wert hat Mandelbrot der Verteilung der Baumwollpreisveränderungen unterstellt. Anschliessend habe ich die Renditebeträge in positive und negative Renditen umgewandelt. Dabei beeinflusst der sogenannte Trend-Parameter das Vorzeichen einer Rendite auf Grund der vorherigen Renditen. Ist der Wert des Parameters grösser als 1, entstehen mit höherer Wahrscheinlichkeit Trends. Ist er gleich 1, entsteht ein zufällig verlaufender Kurs. Wenn der Parameter kleiner als 1 ist, springt der Kurs mit höherer Wahrscheinlichkeit hin und her. Basierend auf den so berechneten Renditen konnte ich die Kurswerte ausgehend von einem Anfangskurs von 100 ausrechnen, anschliessend die täglichen Kursveränderungen bestimmen und diese in Standardabweichungen umrechnen. Dann habe ich wiederum den Kursverlauf, die Häufigkeitsverteilungen der Kursveränderungen und der Renditen sowie das Kursschwankungsverhalten in Diagrammen graphisch dargestellt.

Die Abbildung 8 zeigt eine mögliche Verteilung der Renditebeträge meines Kursmodells. Man erkennt die exponentiellen Charakterzüge, wie den Fat Tail und das Auftreten von sehr hohen Renditen.

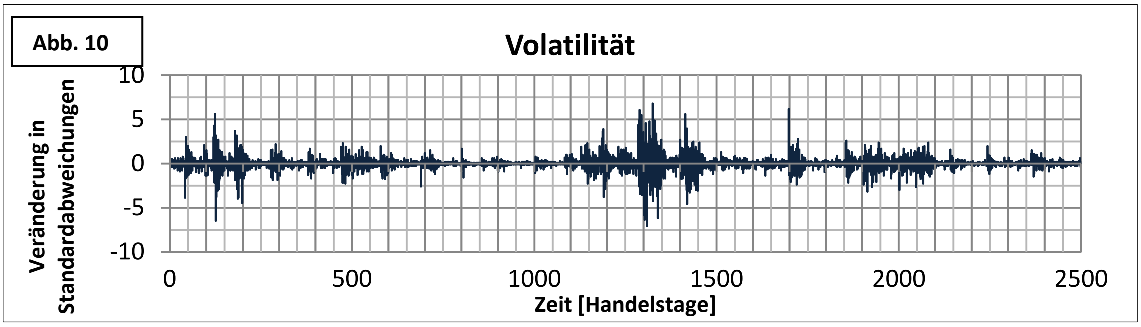
Abb. 8



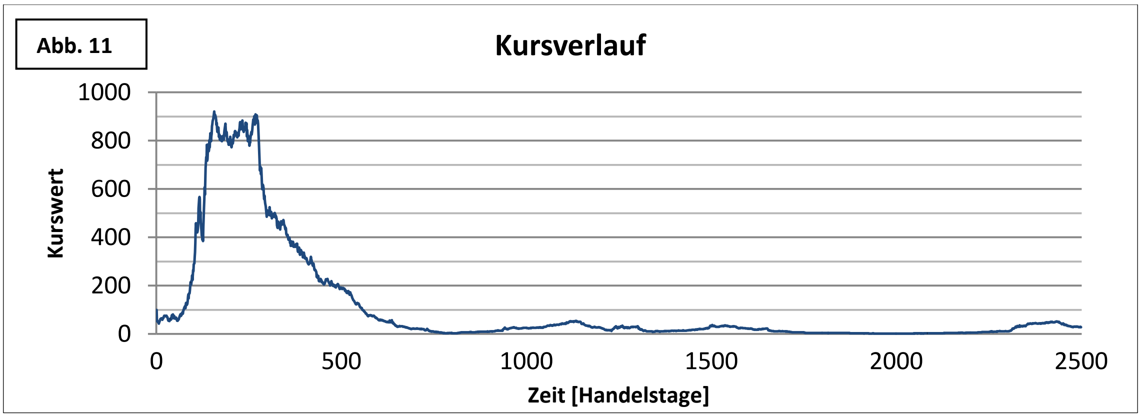
In Abbildung 9 ist die Verteilung der Veränderungen in Standardabweichungen dargestellt. Die rote Linie ist eine Lévy-stabile-Verteilung mit einem α von 0,5. Bemerkenswert ist, dass viel höhere Veränderungen vorkommen als im Random Walk Modell (Abb. 2).



Ein typisches Schwankungsverhalten des Kursmodells ist in Abbildung 10 zu erkennen. Das Wechselspiel von Phasen hoher und tiefer Volatilität bildet ein Muster mit mehreren offensichtlichen Clustern.



Die nächste Abbildung zeigt einen in meinem Kursmodell möglichen Chart über 2500 fiktive Handelstage. Der Kurs zeigt nach einer kurzen Seitwärtsbewegung einen stark ansteigenden Trend und nach einer weiteren Seitwärtsbewegung einen stark abfallenden Trend bis knapp über den Nullwert. Dies würde beispielsweise bei einer Aktie auf einen bevorstehenden Konkurs des Unternehmens hinweisen. Unter Mandelbrots Annahmen wird also auch dieses durchaus realistische Szenario berücksichtigt.



Die Nachbildung von Kursverläufen basierend auf den Annahmen von Mandelbrot deckt ein weites Spektrum von möglichen Kursentwicklungen ab, wie beispielsweise hohe Renditen, grosse Kurssprünge, Cluster mit stark beziehungsweise schwach volatilen Phasen und Trendbildungen.

3.3. Untersuchung der Annahmen Mandelbrots

Um Mandelbrots Annahmen empirisch zu prüfen, untersuchte ich reale Kursreihen von Finanzinstrumenten auf ihre statistischen und strukturellen Eigenschaften. Dabei beschränkte ich mich auf die Kurse von drei Indizes, drei Aktien und zwei Rohstoffen. Bei den Indizes handelt es sich um den SMI, den Deutschen Aktienindex (DAX) und den Dow Jones, bei den Aktien um Syngenta, UBS und Volkswagen und bei den Rohstoffen um Gold und Öl. Die dazugehörigen historischen Daten über die maximal vorhandene Zeitspanne bezog ich von den Internetseiten www.finanzen.net und www.onvista.de und kopierte sie in Excel-Files.[20] Ausgehend von den Schlusskursen beziehungsweise von Intraday-Kursen[21] berechnete ich dann die Renditen und Kursveränderungen und stellte sie in Histogrammen und Volatilitätsgraphen dar. Die Graphen überprüfte ich dann auf Mandelbrots Annahmen hin. Auf Grund fehlender Daten bei den Indizes und Rohstoffen beschränkte ich die Untersuchung der Intraday-Kurse auf die drei Aktien.

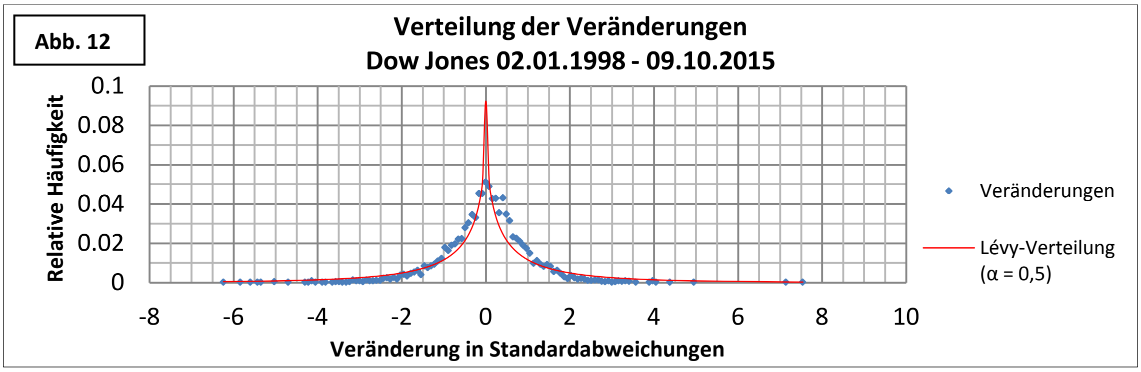
3.3.1. Untersuchung der Häufigkeitsverteilungen

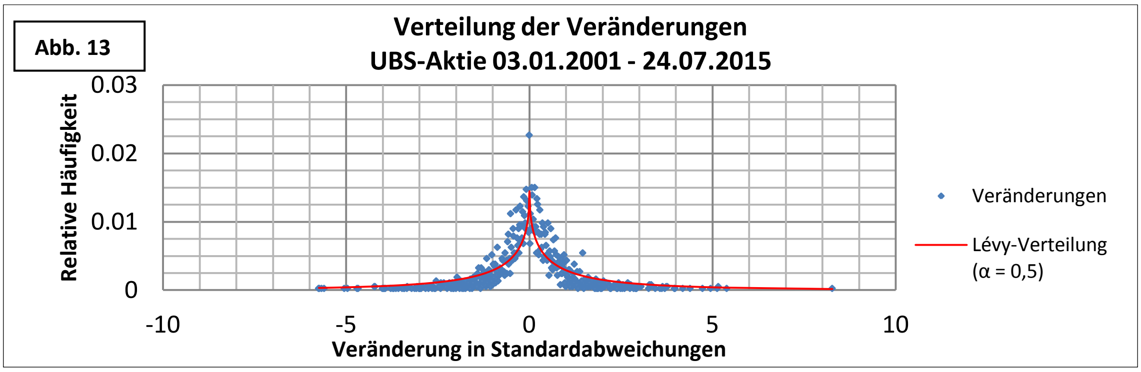
Um den Charakter der Verteilungskurven der acht untersuchten Finanzinstrumente zu bestimmen, benutzte ich die Funktion der Lévy-stabilen-Verteilung. Durch Justieren der Parameter α und γ versuchte ich, die jeweiligen Dichten möglichst genau nachzubilden. In dieser Arbeit wird nur auf den Parameter α eingegangen. Ich analysierte die Daten dahingehend, ob sie einer Lévy-stabilen-Verteilung mit einem niedrigen α folgen.

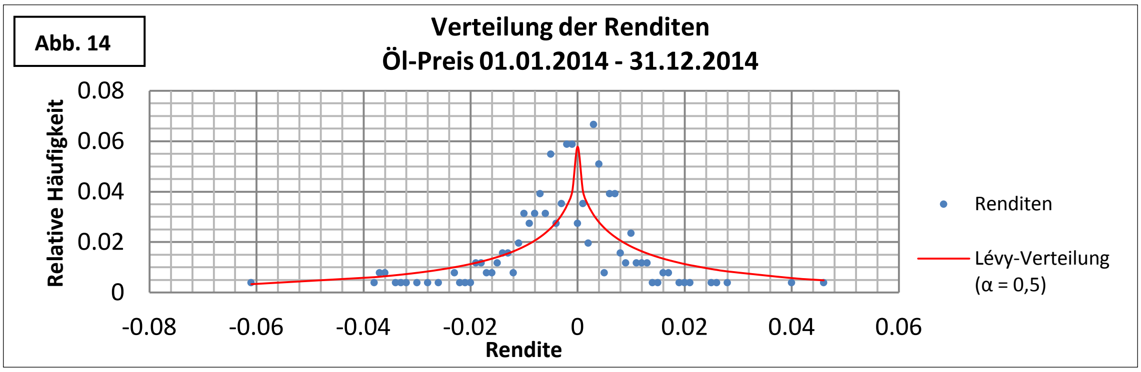
Die folgenden drei Abbildungen zeigen Beispiele von Verteilungen, die Mandelbrots Vorstellungen einer Pareto-artigen Verteilung sehr nahe kommen und den Verteilungen meines multifraktalen Kursmodells in Abbildung 9 entsprechen. Die roten Linien sind Lévy-stabile-Verteilungskurven mit einem α von 0,5, was einer exponentiellen Verteilung entspricht und somit die sehr grossen Kurssprünge beziehungsweise Renditen, die man in den Randbereichen erkennt, berücksichtigt.

[20] Die dazugehörigen Excel-Files sind in der beigelegten CD zu finden: Eigenständige Arbeit\Aktien\Syngenta.xlsx, Eigenständige Arbeit\Aktien\UBS.xlsx, Eigenständige Arbeit\Aktien\Volkswagen.xlsx, Eigenständige Arbeit\Indizes\Deutscher Aktienindex.xlsx, Eigenständige Arbeit\Indizes\Dow Jones.xlsx, Eigenständige Arbeit\Indizes\Swiss Market Index.xlsx, Eigenständige Arbeit\Rohstoffe\Gold.xlsx, Eigenständige Arbeit\Rohstoffe\Öl.xlsx

[21] Intraday-Kurse sind die Werte, die der Kurs im Verlauf eines Tages annimmt vom Zeitpunkt der Öffnung der Börse bis zum Börsenschluss.



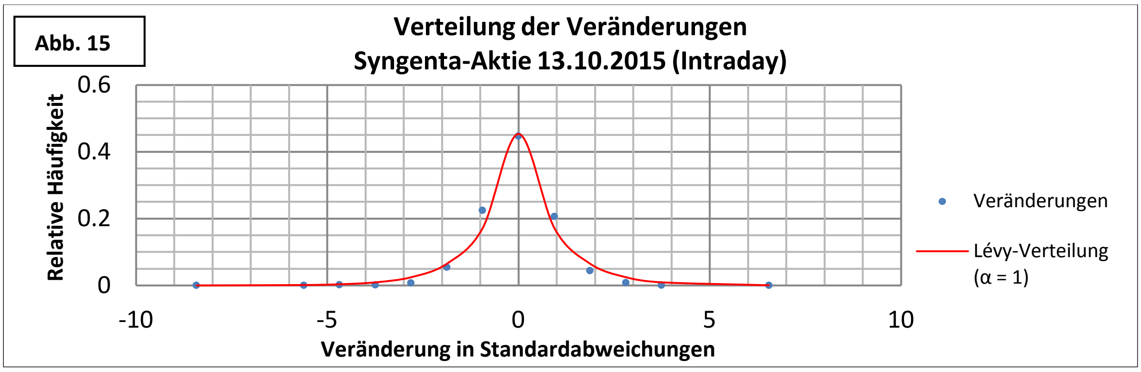


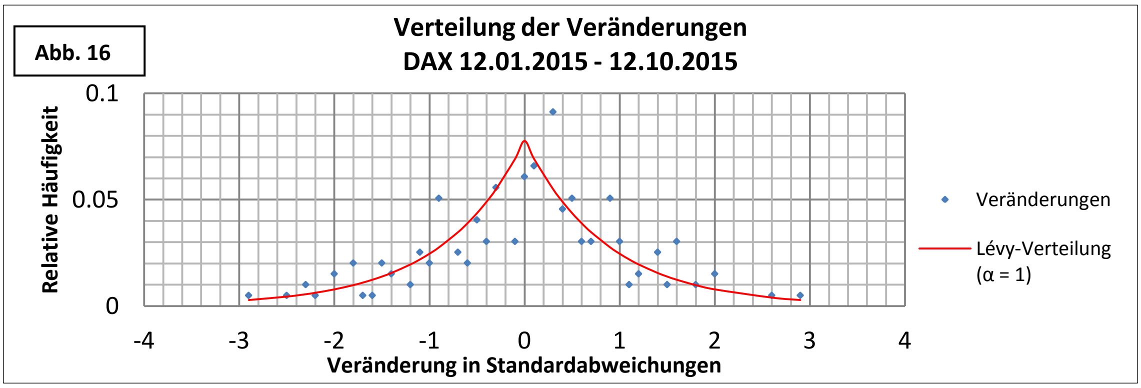


Solche exponentielle Eigenschaften stellte ich bei allen drei Indizes über die Zeitspanne von 15 Jahren fest. Ebenfalls zeigten sich diese Eigenschaften bei den beiden Rohstoffpreisen und zwar sowohl über zehn Jahre als auch über ein Jahr. Bei den drei untersuchten Aktien liessen sich über unterschiedliche Perioden (15 Jahre, ein Jahr und zwei Monate) exponentielle Eigenschaften feststellen. Dabei fiel einzig die Syngenta-Aktie über einen Zeitraum von zwei Monaten aus dem Rahmen. Darauf wird später noch eingegangen.

Die Untersuchung zeigte sogar einige Häufigkeitsverteilungen, die einer Lévy-stabilen-Verteilung mit einem α kleiner als 0,5 folgen und somit noch exponentieller sind. Die Verteilungen der Veränderungen der Gold-Preise über die Perioden von zwei Monaten und zehn Jahren wiesen ein α von rund 0,3 auf. Die Verteilung der Renditen der Syngenta-Aktie und die Verteilungen der VW-Daten über 15 Jahre und ein Jahr wiesen ein α zwischen 0,2 und 0,3 auf und berücksichtigten somit noch extremere Kurssprünge.

In den folgenden zwei Abbildungen sieht man, dass gewisse Verteilungen nicht ausschliesslich exponentielle Eigenschaften aufzeigten. Zu den Verteilungen der Veränderungen des DAX und der Renditen der Syngenta-Aktie über zwei Monate passt eine Lévy-stabile-Verteilung mit einem α von 1. Dies entspricht einer Mischform zwischen exponentieller und glockenförmiger Kurve, einer sogenannten Cauchy-Kurve[22]. Die Cauchy-Verteilung wurde von Augustin Louis Cauchy entwickelt und verbindet exponentielle Charakterzüge mit Eigenschaften der Normalverteilung.



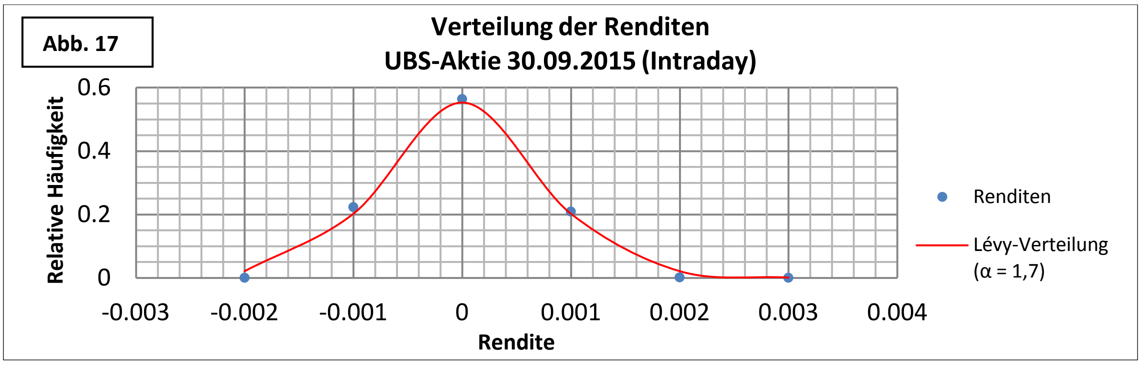


Eine Cauchy-Verteilung stellte ich zudem bei den Gold- und Öl-Preisen über zwei Monate fest. Auch die Verteilungen der Intraday-Daten der drei Aktien folgten eher einer Cauchy- als einer eindeutig exponentiellen Verteilung.

Die nächste Graphik illustriert die Rendite-Verteilung der Intraday-UBS-Kurse. Diese Dichteverteilung ähnelt sogar der Gauss'schen Glockenkurve. Die dargestellte Lévy-stabile-Verteilung weist ein α von 1,7 auf und ist somit beinahe normalverteilt.

[22] Eine Abbildung der Cauchy-Kurve ist in der Graphik im Anhang III grün dargestellt.

Abb. 17



Die Untersuchung zeigt, dass die meisten Verteilungen ganz im Sinne von Mandelbrot exponentielle Charakterzüge aufweisen. Allerdings lässt sich bei einigen Verteilungen feststellen, dass je kürzer der Zeitabschnitt ist, desto weniger exponentielle Eigenschaften bestehen. Diese Besonderheit lässt sich bei allen drei Aktien anhand der Intraday-Daten, bei der einjährigen Periode der DAX- und SMI-Werte sowie der zwei monatigen Zeitspanne bei beiden Rohstoffen und der Syngenta-Aktie beobachten.

3.3.2. Untersuchung der Volatilität

Die nächsten zwei Abbildungen stellen die Kursschwankungen des Goldpreises und der Volkswagen-Aktie dar. Die Clusterbildung ist bei beiden Säulendiagrammen relativ gut ersichtlich. Ausserdem erkennt man, dass sich sowohl in einem Tagesverlauf als auch über zehn Jahre hinweg Cluster bilden, was für die Annahmen Mandelbrots der Selbstähnlichkeit und der Abhängigkeit zwischen Kursveränderungen spricht.

Abb. 18

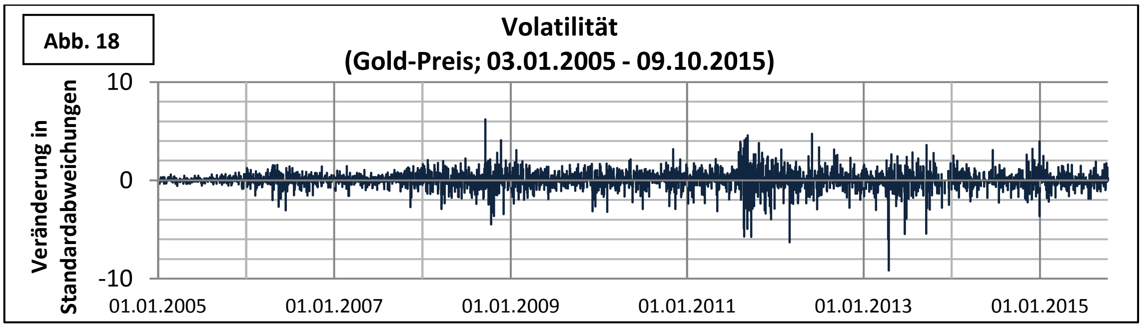
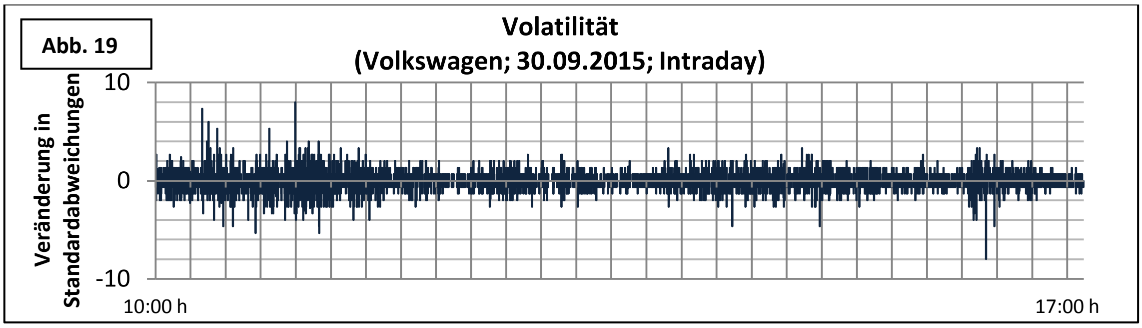


Abb. 19



Die Untersuchung zeigt, dass alle überprüften Finanzinstrumente über sämtliche Zeitspannen in ihrem Schwankungsverhalten Cluster von stark volatilen Phasen aufweisen, was den Ansichten Mandelbrots entspricht und auch in Abbildung 10 meines multifraktalen Kursmodells ersichtlich ist.

4. Diskussion

Modelle sollen die Realität vereinfacht darstellen. Ein optimales Modell ist zuverlässig und muss seinen Zweck ohne gravierende Abweichungen zur Realität erfüllen. Die Untersuchung des Random Walk Modells anhand ausgewählter realer Kursverläufe hat Mängel aufgezeigt. Die festgestellten Defizite liegen in der Unterschätzung grosser Kursschwankungen durch die Unterstellung von normalverteilten Veränderungen sowie in der Annahme eines kontinuierlichen und von vorherigen Kursbewegungen unabhängigen Kursverlaufs. Das Modell unterschätzt Risiken folglich systematisch. Diese Erkenntnis erbrachten bereits Mandelbrots Untersuchungen der Baumwollpreise, des Dow Jones, des Nasdaq und der französischen CAC-40 sowie eine Studie der Citigroup von 2002 über die Verteilungen der Kursumschwünge mehrerer Währungen.[23] Trotz solchen empirischen Untersuchungen sind heutige Modelle und Theorien wie das Black-Scholes-Modell zur Optionsbewertung, die Capital Asset Pricing Method zur Schätzung von Vermögenswerten, das Value at Risk Risikomass und die moderne Portfoliotheorie auf der Grundlage von Bacheliers Random Walk Modell erbaut. Man ist zwar bestrebt, die modernen Modelle weiter zu verbessern. So wird mittlerweile versucht die Diskontinuität der Preise zu berücksichtigen. Ein Beispiel dafür ist das GARCH-Modell, das relativ gut an reale Kursreihen angepasst ist. Jedoch ist dieses Modell sehr kompliziert und komplex und sieht extreme Marktsituationen eher als Ausnahmen.

Mandelbrot versuchte hingegen mit einem multifraktalen Marktmodell eine Alternative zu entwickeln, die mit wenigen Angaben die Realität abbilden kann. Seine grundlegenden Annahmen über das Marktverhalten sind die Verteilungen der Renditen und Kursveränderungen mit exponentiellen Charakterzügen, die grosse Kurssprünge und diskontinuierliche Bewegungen berücksichtigen, die Clusterbildungen der Kursschwankungen, die durch die Abhängigkeit der aufeinanderfolgenden Kursänderungen entstehen, und das Auftreten von trendartigen bis zu hin und her springenden Kursbewegungen. Meine empirischen Untersuchungen ausgewählter Indizes, Aktien und Rohstoffpreise zeigten statistische und strukturelle Übereinstimmungen mit den Annahmen Mandelbrots im clusterartigen Schwankungsverhalten und in den Verteilungen, die grosse Kurssprünge berücksichtigen. Jedoch zeigte meine Analyse, dass bestimmte Verteilungen eher einer Cauchy- oder sogar einer Gauss-Verteilung folgen. Dies war in erster Linie bei den Intraday-Daten der drei Aktien der Fall. Doch auch bei den Verteilungen der Renditen der beiden Rohstoffe und

[23] Mandelbrot Benoît B. und Hudson Richard L. (20144):„Fraktale und Finanzen: Märkte zwischen Risiko, Rendite und Ruin“, Piper Verlag GmbH München, Seiten 143-146

der Syngenta-Aktie über eine zweimonatige Periode und bei den Verteilungen des DAX und des SMI über eine Zeitspanne von einem Jahr war dies zu beobachten.

Mehrere Studien und Untersuchungen weisen auf ähnliche Resultate hin. Die Zeitschrift Risiko Manager veröffentlichte 2014 einen Artikel zu Lévy-Prozessen mit einer Untersuchung des DAX. [24] Diese Analyse bestätigt ebenfalls die Annahmen der Clusterbildung im Schwankungsverhalten und der Verteilung mit exponentieller Charakteristik. Es wird sogar Bezug auf Intraday-Daten genommen. Laut des Artikels sind die Veränderungen im Tagesverlauf viel zu gross, um von der Normalverteilung berücksichtigt zu werden. Eine mögliche Erklärung für meine gegenläufigen Resultate könnte sein, dass in den untersuchten kürzeren Perioden zufälligerweise keine grossen Veränderungen aufgetaucht sind.

Weitere Annahmen Mandelbrots, wie die Cluster von Phasen hoher Volatilität und die daraus resultierende Abhängigkeit zwischen den Kursveränderungen, wurden durch meine Analyse des Schwankungsverhalten ausgewählter Finanzinstrumente und durch die Untersuchungen zum Artikel der Zeitschrift Risiko Manager bestätigt. Diese Clusterbildung kann durch die Einflussnahme wichtiger Nachrichten auf die Marktteilnehmer und durch die uneinheitliche Meinung am Markt erklärt werden. Die Nachricht des VW-Abgas-Skandals vom 18. September 2015 führte beispielsweise zu einer Periode hoher Volatilität. Anfänglich verhielten sich die Marktteilnehmer pessimistisch und der Aktienwert sank stark. Doch plötzlich sahen einige Marktteilnehmer eine Gewinnchance auf Grund des tiefen Preises und begannen wieder zu kaufen, worauf die Aktie wieder stieg.

Durch die Ergebnisse meiner Untersuchung, die auch durch publizierte Studien unterstützt werden, sehe ich meine Hypothese bestätigt, dass die Theorien von Benoît Mandelbrot und sein multifraktales Modell das Kursverhalten realitätsnah abbilden.

Das multifraktale Marktmodell ist ein geeignetes Mittel, um das wilde System der Märkte und dessen chaotische Prozesse zu beschreiben und zu analysieren, um mögliche Risiken zu quantifizieren. Mandelbrots Theorien und Modelle blieben von der Finanzwelt nicht unentdeckt. Sie werden weiterentwickelt und verbessert, so dass sie künftig in der Praxis angewandt werden könnten. In der Versicherungsbranche werden derzeitig Mandelbrots Ansichten zu der Wahrscheinlichkeit extremer Werte bereits teilweise genutzt. Abschliessend bleibt festzuhalten, dass Mandelbrots Theorien und multifraktale Modelle ein grosses Potenzial haben und sich durch Weiterentwicklungen und Untersuchungen vermutlich als ein praktisches Instrument für Finanzinstitute und Investoren etablieren werden.

---

[24] Dr. Asma Khedher und Prof. Dr. Matthias Scherer (2014), Risiko Manager, Internet: https://mediatum.ub.tum.de/doc/1230865/1230865.pdf, Stand: 05.01.2016

5. Quellen- und Literaturverzeichnis

1. Mandelbrot Benoît B. und Hudson Richard L. (2014[4]):
   „Fraktale und Finanzen: Märkte zwischen Risiko, Rendite und Ruin“, Piper Verlag GmbH München

2. Jungmann Martin (2011):
   „Zur Bedeutung Benoît Mandelbrots auf die moderne Finanzmarktanalyse“, GRIN Verlag GmbH Norderstedt

3. DMK, DPK und DCK (Hg.) (2013[4]):
   „Formeln, Tabellen, Begriffe“, Orell Füssli Verlag AG Zürich

4. Kull Andreas und Müller Ulrich A. (12.05.2005): PGZ, ETH Zürich, Internet
   http://www.pgz.ch/events/ss05/event.20050512/brown_finanz.pdf, Stand: 30.12.2015

5. W.A. Hemmerich: MatheGuru.com, Normalverteilung, Internet,
   http://matheguru.com/stochastik/31-normalverteilung.html, Stand: 30.12.2015

6. Beck Hanno (2005): Frankfurter Allgemeine, Internet,
   http://www.faz.net/aktuell/finanzen/fonds-mehr/interview-finanzmarkt-risiken-sind-groesser-als-wir-annehmen-1234053.html?printPagedArticle=true#pageIndex_2, Stand: 31.12.2015

7. Ohr Jens: Karlsruhe, Internet, www.finanzen.net, Stand: 31.12.2015

8. Wolf Daniel: Köln, Internet, www.onvista.de, Stand: 31.12.2015

9. Mandelbrot Benoît B. (1999): Spektrum.de, Internet,
   http://www.spektrum.de/magazin/boersenturbulenzen-neu-erklaert/825379, Stand: 31.12.2015

10. Dr. Asma Khedher und Prof. Dr. Matthias Scherer (2014), Risiko Manager, Internet:
    https://mediatum.ub.tum.de/doc/1230865/1230865.pdf, Stand: 05.01.2016

6. Verzeichnis der Abbildungen

7. Anhang

I. Gauss-Verteilung

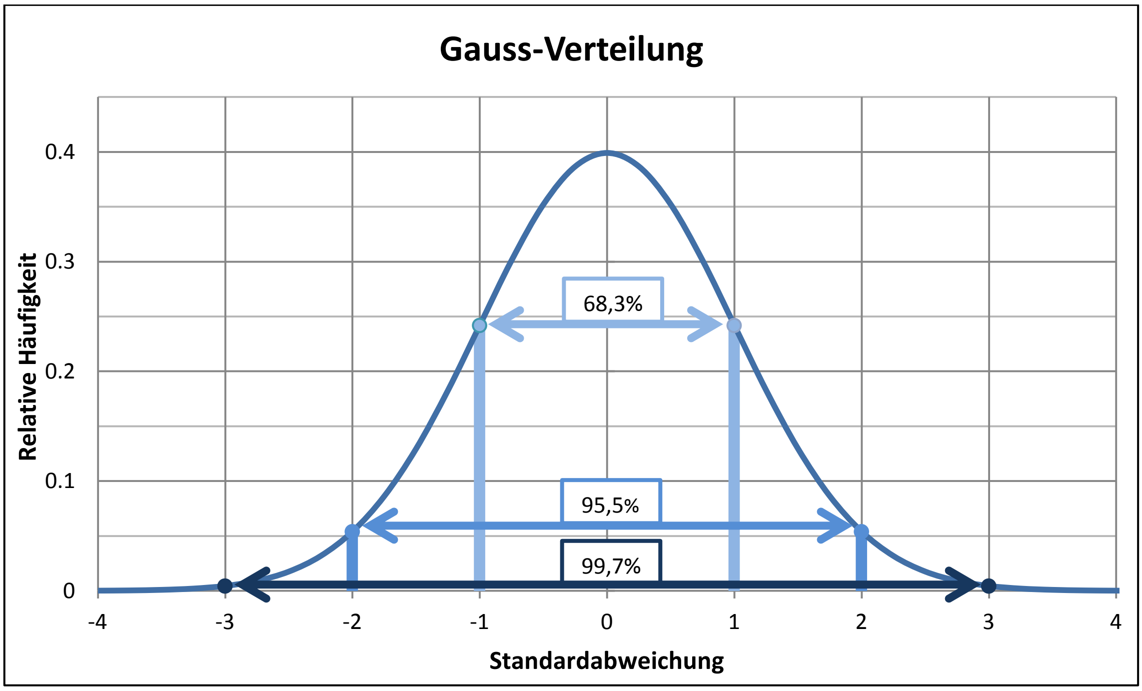


Abb. 20: Selbsterstellt; Excel; Beigelegte CD: [Abbildungen\Gauss-Verteilung.xlsx]

II. Pareto-Verteilung

In der folgenden Abbildung ist der Parameter c als k benannt und a hat den Wert 1.

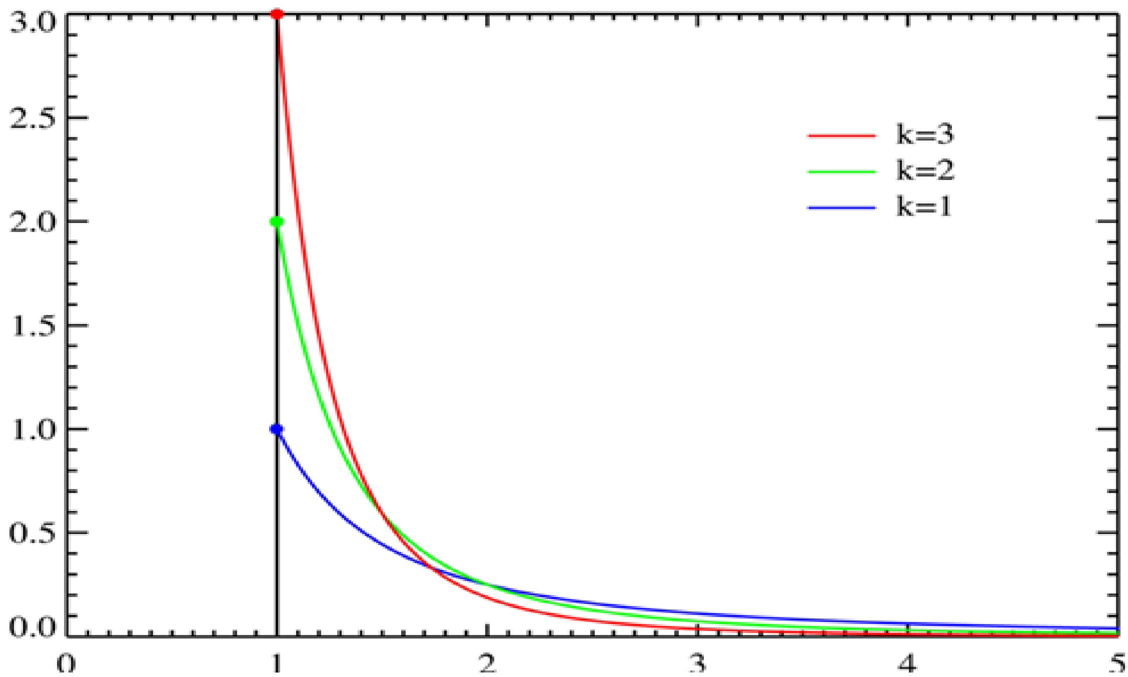


Abb. 21: Stephan List (2013), ToolBlog, Internet:
http://toolblog.de/blog/2013/01/28/pareto-und-die-selbstorganisation/, Stand: 05.01.2016

III. Lévy-stabile Verteilung

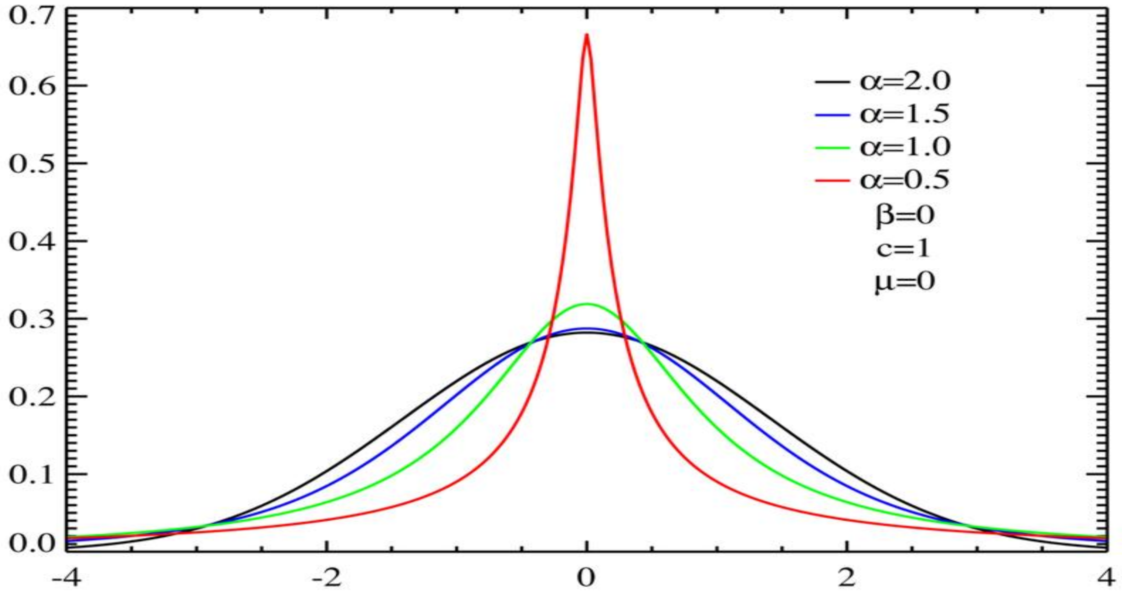


Abb. 22: Wikipedia, Internet:
https://de.wikipedia.org/wiki/Alpha-stabile_Verteilungen#/media/File:Levy_distributionPDF.png,
Stand: 05.01.2016

IV. Auswertungstabelle

In der folgenden Tabelle sind alle Kursveränderungen des SMI von 2001 bis 2015, die grösser als 4,5 Standardabweichungen sind, aufgelistet.

positiv	negativ
7.68	-10.06
5.07	-6.32
4.81	-5.69
	-5.46
	-5.31
	-5.1
	-4.93
	-4.51
Anzahl:	11

Tabelle 1: Selbsterstellt, Excel, Beigelegte CD: Eigenständige Arbeit\Indizes\Swiss Market Index.xlsx

Kantonsschule Solothurn
Schulleitung

KANTON solothurn

Erklärung zur Maturaarbeit

Name Gygax Vorname Tim Klasse W4s

A Selbstständigkeitserklärung

Ich bestätige hiermit, dass ich meine Maturaarbeit:

Titel Finanzmarktmodelle im Vergleich: Random Walk Modell vs. Multifraktales Marktmodell

Betreuer/in Caroline Ryser

selbstständig und ohne unerlaubte Mithilfe verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäss aus Quellen entnommen wurden, habe ich als solche gekennzeichnet.

Ich bestätige auch, dass ich den Betreuer / die Betreuerin über jegliche Art von Vereinbarungen mit Drittpersonen oder Institutionen informiert habe.

B Weiterverwendung der Maturaarbeit

Die Arbeiten werden grundsätzlich während drei Jahren in der Mediothek der Kantonsschule archiviert. Sie können dann abgeholt werden oder werden vernichtet.

Ich bin damit einverstanden, dass meine Maturaarbeit Dritten zugänglich gemacht wird.

☒ JA O NEIN

Ort / Datum Bellach 08.01.2016

Unterschrift T. Gyger