Formelsammlung Klassische Theoretische Physik II

Tim Hellmuth

24. Februar 2016

Grundbegriffe der Magnetostatik
Gitterkomplex k (Zellen mit innerer Orientierung)
Dualer Komplex $\tilde{k}$ (Zellen mit äußerer Orientierung)
Tautologische Paarung

$$C_k(K) \otimes C^k \longrightarrow R \tag{1}$$

$$c \otimes \omega \longmapsto \int_c \omega \tag{2}$$

Schnittpaarung

$$C^{d-k} \otimes C^k \longrightarrow R \; (d = 3) \tag{3}$$

$$\gamma \otimes \omega \longmapsto \int \gamma \wedge \omega \tag{4}$$

Kanonischer Isomorphismus

$$I : C_k(k) \longrightarrow C^{d-k}(\tilde{k}) \tag{5}$$

$$\int_c \omega = \int I(c) \wedge \omega \tag{6}$$

Magnetostatische Grundgesetze

$$dB = 0 \tag{7}$$

Die 1-Kette $B \in C_1(\tilde{K})$ ist geschlossen (randlos); oder: magnetische Flusslinien haben keinen Anfang und kein Ende.

$$dH = j \tag{8}$$

Die 2-Kette $H \in C_2(k)$ der magnetischen Erregung wird berandet von der 1-Kette $j \in C_1(k)$ der elektrischen Stromdichte.

$$B = \mu_0 * H \tag{9}$$

Die (Fluss-)Linien von B stehen senkrecht auf dem (Erregungs-)Flächen von H.
Bemerkung: Die Geometrie des Raumes geht nur in die Materialgleichung ein.

Das innere Produkt

$$\iota(v) : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M) \tag{10}$$

$$\iota(v)(\alpha \wedge \beta) = (\iota(v)\alpha) \wedge \beta + (-1)^{deg(\alpha)}\alpha(\iota(v)\beta) \tag{11}$$

$$\iota(v)B = \frac{1}{2}\sum_{i,j} B_{ij}(v^i dx^j - dx^i v^j) = \sum_j (\sum_i v^i B_{ij})dx^j \tag{12}$$

Lorentz-Kraft

$$F = q(E_p - \iota(v)B_p) \tag{13}$$

In irgendwelchen Koordinaten

$$F_j = q(E_j(p) - \sum_i v^i B_{ij}(p)) \tag{14}$$

Messvorschrift für B
1.Teile die Randlinien von Σ in zwei Hälften γ_1, γ_2 (gleich lang) mit $\partial\Sigma = \gamma_1 - \gamma_2$.
2. Verlege stromführendes Kabel (flexibel) längs γ_1.
3. Bewege Kabel (bei festgehaltenen Teststrom $I \neq 0$ und festgehaltenen Positionen A, B) vom Anfangsverlauf γ_1 längs Σ zum Endumlauf γ_2 und messe die dabei verrichtete Arbeit W.
Daraus resultiert:

$$\frac{W}{I} = \int_\Sigma B \tag{15}$$

Anschlussbedingung an Grenzflächen
Grenzfläche Σ verlaufe zwischen Gebiet/Medium 1 und Gebiet/ Medium 2. Die Fläche Σ trage die Linienstromdichte $k \in \tilde{\Omega}^1(\Sigma)$. Dann haben wir:
(a) H_{tang} springt (durch Σ) um k.
(b) B_{tang} ist stetig durch Σ.

Magnetostatische Aufgaben mit euklidischer Symmetrie (unendlich lange, gerade Spule)

$$H = \frac{I}{a}\chi_{Zylinder}[dz; R] \tag{16}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{a}\chi_{Zylinder} dx \wedge dy \tag{17}$$

Messvorschrift für H
(Analog zur Messung von $\int_S D$ mittels Maxwellscher Doppelplatten)
1. Supraleitendes Rohr (dünn) der Kurve $\tilde{\gamma}$ nachbilden.
2. Das SLVR entmagnetisieren ("zero-field quench") und an den Messort $\tilde{\gamma}$ bringen.
3. Den um das SLVR zirkulierenden Gesamtstrom I_S messen.
Daraus resultiert:

$$-I_S = \int_{\tilde{\gamma}} H \tag{18}$$

Natur der elektromagnetischen Feldgrößen

$$E \in \Omega^1(E_3) \text{ gerade 1-Form} \tag{19}$$

$$D \in \tilde{\Omega}^2(E_3) \text{ ungerade 2-Form} \tag{20}$$

$$B \in \Omega^2(E_3) \text{ gerade 2-Form} \tag{21}$$

$$H \in \tilde{\Omega}^1(E_3) \text{ ungerade 1-Form} \tag{22}$$

Physikalische Dimensionen

$$[E] = \frac{Energie}{Ladung} \tag{23}$$

$$[D] = Ladung \tag{24}$$

$$[B] = \frac{Energie}{Strom} \tag{25}$$

$$[H] = Strom \tag{26}$$

Relative Dimensionen

$$E = \sum_{i=1}^{3} E_i dx^i \rightsquigarrow [E_i] = \frac{Energie}{Ladung \cdot Laenge} \tag{27}$$

$$D = \sum_{i<j} D_{ij}[dx^i \wedge dx^j; Or] \rightsquigarrow [D_{ij}] = \frac{Ladung}{Lnge^{(d-1)}} \tag{28}$$

$$B = \sum_{i<j} B_{ij} dx^i \wedge dx^j \rightsquigarrow [B_{ij}] = \frac{Energie}{Strom \cdot Flaeche} \tag{29}$$

$$H = \sum_{i=1}^{3} H_i[dx^i; Or] \rightsquigarrow [H_i] = \frac{Strom}{Laenge^{(d-2)}} \tag{30}$$

Einheiten

$$[\epsilon_0] = \frac{Ladung^2}{Energie \cdot Laenge} = \frac{Kapazitaet}{Laenge} \tag{31}$$

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Jm} \tag{32}$$

$$[\mu_0] = \frac{Energie}{Strom^2 \cdot Laenge} = \frac{Induktivitaet}{Laenge} \tag{33}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \tag{34}$$

Dualität zwischen Elektro- und Magnetostatik

$$-\frac{1}{\nu} D_{1_{Dipolschicht}} = \frac{1}{\mu_0 I}[B_{Stromschleife}; Or] \tag{35}$$

Wir berechnen das elektrische Skalarpotential Φ der Dipolschicht mit der aus der Elektrostatik bekannten Lösung für die Poisson-Gleichung (zu $\Phi(\infty) = 0$)

$$\Phi(p) = \frac{\nu}{\epsilon_0} \int_S \frac{\tau_p}{4\pi} \tag{36}$$

Laplace-Operator auf Formen

$$\delta = (-1)^{k-1} *^{-1} d * \text{auf k-Formen} \tag{37}$$

$$\Delta = \delta d + d\delta \tag{38}$$

Vektorpotential und Coulomb-Eichung
Löse

$$dB = 0 \tag{39}$$

durch folgenden Ansatz:

$$B = dA \text{ A als das Vektorpotential oder Eichpotential} \tag{40}$$

Coulomb-Eichung

$$\delta A = 0 (\Leftrightarrow d * A = 0) \tag{41}$$

Poisson-Gleichung für A

$$-\triangle A = \mu_0 * j \tag{42}$$

Lösung für kartesischen Koordinaten:

$$A_i(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{E_3} \frac{(*j)_i}{r_p} dvol \tag{43}$$

Multipolentwicklung

$$A_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_l \frac{x_l}{r^3} m_{lk} + ... \tag{44}$$

$$m_{lk} = \int_U j \wedge x_l dx_k = -m_{kl} \tag{45}$$

Induktionskoeffizienten

$$\xi_{magn} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} L_{kl} I_k I_l \tag{46}$$

$$L_{kl} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma_k} \int_{\gamma_l} \frac{\sum dx_i \wedge dx_i'}{\sqrt{\sum (x_i - x_i')^2}} \tag{47}$$

Biot-Savart-Gesetz
Darunter verstehen wir die Lösung des Ampere-Gesetzes $dH = j$ für die magnetische Erregung H unter der Bedingung $\delta H = 0$ ($\Leftrightarrow dB = 0$). Im Formenkalkül hat man Folgendes (für einen Punkt $p \in E_3$)

$$H_p = \int_{E_3} \frac{\iota(p - \cdot) j}{4\pi |p - \cdot|^3} dvol. \tag{48}$$

In Kontraktion mit einem (axialen) Vektor $v \in V \simeq \mathbb{R}^3$

$$H_p(v) = \int_{E_3} \frac{j.(p - \cdot, v)}{4\pi |p - \cdot|^3} dvol. \tag{49}$$

In kartesischen Koordinaten

$$H_k(r) = \int_{E_3} \frac{\sum_l (r - r')^l j_{lk}(r')}{4\pi |r - r'|^3} d^3 r' \tag{50}$$

Induktionsgesetz
Differentielle Form

$$dE = -\dot{B} \tag{51}$$

Integrierte Form

$$\oint_{\partial\Sigma} E = -\int\int_{\Sigma} \dot{B} \tag{52}$$

Ampere-Maxwell-Gesetz Differentielle Form

$$dH = j + \dot{D} \tag{53}$$

Integrierte Form

$$\oint_{\partial S} H = \int\int_S (j + \dot{D}) \tag{54}$$

Lie-Ableitung

$$\mathcal{L}_v\omega = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t * \omega \tag{55}$$

Cartan-Formel

$$\mathcal{L}_v = \iota(v) \cdot d + d \cdot (v) \tag{56}$$

Beispiel: Gerade Stromlinie

$$j = I\gamma \; (\gamma : z - Achse) \tag{57}$$

$$D_- = -\frac{Q}{2\pi a}[d\phi \wedge dz; R] = -D_+ \tag{58}$$

$$v = -|v|\partial_z \tag{59}$$

$$H = -\iota(v)D_- = \frac{I}{2\pi}[d\phi; R] \tag{60}$$

$$I = \frac{Q|v|}{a} \tag{61}$$

Beispiel: Lange gerade Spule (Symmetrieachse: z-Achse)

$$j = \sum_{i=1}^{N} I\partial\Sigma_i \tag{62}$$

$$D_- = \frac{Q}{2\pi a}\chi_{Zylinder}[d\phi \wedge dz; R] = -D_+ \tag{63}$$

$$v = -\omega\partial_\psi \tag{64}$$

$$H = -\iota(v)D_- = \frac{I}{a}[dz; R] \tag{65}$$

$$I = \frac{Q\omega}{2\pi} \tag{66}$$

Allgemeine Form des Induktionsgesetzes

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = -\oint_{\partial\Sigma_t}(E - \iota(v)B) \tag{67}$$

Beispiel: Rotierende Leiterschleife im konstanten Magnetfeld ($\dot{B} = 0$)

$$\varphi(t) = \varphi(0)cos(wt + \phi) \tag{68}$$

$$-\frac{d}{dt}\varphi(t) = -\oint \iota(v)B \tag{69}$$

Energiesatz
Energiedichte

$$u = \frac{1}{2}(E \wedge D + B \wedge H) \in \tilde{\Omega}^3(E_3) \tag{70}$$

Energiestromdichte

$$s = E \wedge H \in \tilde{\Omega}^2(E_3) \text{ Poynting-Form} \tag{71}$$

Integralform des Energiesatzes im Vakuum

$$\frac{d}{dt}\iiint_V = -\int\oint_{\partial V} s \tag{72}$$

Bilanz der Feldenergie in $V = -$ Leistung des Feldes an der Materie in V

$$\frac{d}{dt}\iiint_V + \oint\oint_{\partial V} s = -\iiint_V E \wedge j \tag{73}$$

Spule in Bewegung: Relativitätsprinzip

$$B = b\chi dx \wedge dy \tag{74}$$

$$E = \iota(v)B = |v|b\chi dy \tag{75}$$

$$\frac{1}{\mu_0} * B = \frac{b}{\mu_0}\chi[dz; R] \tag{76}$$

$$D = \epsilon_0 * E = \epsilon_0|v|b\chi[dz \wedge dx; R] \tag{77}$$

$$\rho = dD = \epsilon_0|v|b\frac{\partial\chi}{\partial y}dvol \tag{78}$$

$$j = dH - \dot{D} = \frac{b}{\mu_0}[d\chi \wedge dz; R] - \epsilon_0|v|^2 b\frac{\partial\chi}{\partial x}[dx \wedge dz; R] \tag{79}$$

Die charakteristische Funktion χ des Spulengebietes ist zeitabhängig. Im Galilei-Modell der Raum-Zeit erwartet man:

$$\chi = \Theta(L^2 - (x - |v|t)^2 - y^2) \tag{80}$$

Die Magnetfeldstärke muss konstant sein, weil man sonst Ladung und Ströme im Inneren des Spulengebiets hätte.
Die Beziehung

$$E = \iota(v)B \tag{81}$$

folgt aus dem Relativitätsprinzip. In der Tat wirkt auf eine in IS-0 ruhenden Testladen q die Nullkraft

$$q(E^{(0)} - \iota(0)B^{(0)}) = 0 \tag{82}$$

(wegen $E^{(0)} = 0$) , und dann muss die Testladung nach dem Relativitätsprinzip auch in IS-1 kräftefrei sein, also:

$$q(E - \iota(v)B) = 0 \tag{83}$$

Die Verschiebungsstromdichte berechnet sich wie folgt:

$$-\dot{D} = \mathcal{L}_v D = \epsilon_0 |v| b(\mathcal{L}_v \chi)[dz \wedge dx; R] \tag{84}$$

$$\mathcal{L}_v \chi = \iota(v) d\chi = |v| \frac{\partial \chi}{\partial x} \tag{85}$$

Übergang von Inertialsystemen mittels Koordinatentransformation

$$dx^{(0)} = dx^{(1)} - |v| dt^{(1)} \tag{86}$$

$$dt^{(0)} = dt^{(1)} \tag{87}$$

$$dy^{(0)} = dy^{(1)} \tag{88}$$

$$dz^{(0)} = dz^{(1)} \tag{89}$$

Diese Sichtweise ("passive Transformation") ist physikalisch natürlich.
"Aktive Transformation" als Abbildung zwischen Inertialsystemen.

$$\Psi^{-1*}(dx) = dx - |v| dt \tag{90}$$

$$\Psi^{-1*}(dt) = dt \tag{91}$$

$$\Psi^{-1*}(dy) = dy \tag{92}$$

$$\Psi^{-1*}(dz) = dz \tag{93}$$

Beide Sichtweisen sind mathematisch äquivalent, jedoch weist letztere Vorteile in Rechnung und Notation auf.

Äußere Ableitung in Raum und Zeit

$$\not{d} = d + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t} \tag{94}$$

Faraday-Form

$$F = B + e \wedge dt \in \Omega^2(M_4) \tag{95}$$

$$[F] = \frac{Energie}{Strom} = \frac{Wirkung}{Ladung} \tag{96}$$

$$\oint F = 0 \tag{97}$$

Viererstrom

$$J = \rho - j \wedge dt \in \tilde{\Omega}^3(M_4) \tag{98}$$

$$[J] = Ladung \tag{99}$$

$$\oint J = 0 \tag{100}$$

Minkowski-Modell
Übergang von einer ruhenden Spule (IS-0) zu einer bewegten Spule (IS-1).

$$\Psi^{-1*}(dx) = \alpha dx + \beta dt \tag{101}$$

$$\Psi^{-1*}(dt) = \alpha' dt + \beta' dx \tag{102}$$

$$\Psi^{-1*}(dy) = dy \tag{103}$$

$$\Psi^{-1*}(dz) = dz \tag{104}$$

Rechnung für den Viererstrom

$$\Psi^{-1*} J^{(0)} = -\frac{b^{(0)}}{\mu_0}[d\chi \wedge dz; R] \wedge \xi^{-1*}(dt) = \tag{105}$$

$$\tag{106}$$

$$-\frac{b^{(0)}}{\mu_0}[(d\chi + \cdot\chi dt) \wedge dz; R] \wedge (\alpha' dt + \beta' dx) = \tag{107}$$

$$\tag{108}$$

$$\frac{b^{(0)}}{\mu_0} d\chi \wedge dz; R] \wedge \alpha' dt - \frac{b^{(0)}}{\mu_0}[\frac{\partial \chi}{\partial y} dy \wedge dz; R] \wedge \beta' - \frac{b^{(0)}}{\mu_0}[\cdot\chi dt \wedge dz; R] \wedge \beta' dx \tag{109}$$

Durch die korrekte Wahl der Parameter α' und β' wird die gewünschte Formel erfüllt.

$$\Psi^{-1*}J^{(0)} = J \tag{110}$$

Daraus folgt

$$\Psi^{-1*}(dx) = \alpha(dx - |v|dt) \tag{111}$$

$$\Psi^{-1*} = \alpha(x - |v|t) + const \text{ (const=0)} \tag{112}$$

Abschließend

$$\iint B = b\iint \chi dx \wedge dy = b\iint \Theta(L^2 - \alpha(x - |v|t)^2 - y^2)dx \wedge dy \tag{113}$$

$$= \frac{b}{\alpha}\iint \Theta(L^2 - x^2 - y^2)dx \wedge dy = b^{(0)}\iint \chi^{(0)}dx \wedge dy = \iint B^{(0)} \tag{114}$$

Der magnetische Fluss durch den Spulenquerschnitt hat also in IS-0 und IS-1 den gleichen Wert.
Analog zu Obigem kann gezeigt werden, dass die Gesamtladung nicht nur zeitunabhängig, sondern auch für alle Beobachter gleich ist. (Hingegen ist die Ladungsdichte vor Integration zeitabhängig und beobachterabhängig).
(Jedoch ist der magnetische Fluss wieder zeit- und beobachterunabhängig)
Wirkungsfunktional des elektromagnetischen Feldes

$$D_{E.M.} = \int (E \wedge D - B \wedge H) \wedge dt \tag{115}$$

Lorentz-Transformation

$$\Psi^{-1*}(dx) = \frac{dx - \frac{|v|}{c}cdt}{\sqrt{1 - \frac{(|v|)^2}{c^2}}} = cosh(\Theta)dx - sinh(\Theta)cdt \tag{116}$$

$$\Psi^{-1*}(cdt) = \frac{cdt - \frac{|v|}{c}dx}{\sqrt{1 - \frac{(|v|)^2}{c^2}}} = -sin(\Theta)dx + cosh(\Theta)cdt \tag{117}$$

$$tanh(\Theta) = \frac{|v|}{c} \tag{118}$$

$$ch = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|v|^2}{c^2}}} \tag{119}$$

$$sh = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{|v|^2}{c^2}}} \tag{120}$$

Invarianz des Weltvolumens unter Lorentz-Transformation

$$\Psi^*(dx \wedge cdt) = dx \wedge cdt \tag{121}$$

Daraus folgt

$$\int_{M_4} \chi dvol_4 = \int_{M_4} (\Psi^{-1*}\chi^{(0)})dvol_4 = \int_{\Psi^{-1*}(M_4)} \chi^{(0)}\xi * dvol_4 = \int_{M_4} \chi^{(0)}dvol_4 \tag{122}$$

Längenkontraktion

$$D\Psi(e_1) = cosh(\Theta)e_1 + sinh(\Theta)e_0 \tag{123}$$

$$D\Psi(e_0) = sinh(\Theta)e_1 + cosh(\Theta)e_0 \tag{124}$$

$$le_1 = \frac{e_1}{cosh(\Theta)} \tag{125}$$

$$l = \frac{1}{cosh(\Theta)} \text{ (Längenkontraktion)} \tag{126}$$

Zeitdiletation

$$D\Psi(1 \cdot e_0) = sinh(\Theta)e_1 + cosh(\Theta)e_0 \tag{127}$$

Wellengleichung (für B) und Minkowski-Metrik
Wellengleichung für B

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle)B = \mu_0 d * j \tag{128}$$

Lösung im Vakuum ($J = 0$)

$$B = f(x - ct)dx \wedge dy \tag{129}$$

Anmerkung: Vektorfelder, partielle Ableitungen werden mit der Jacobi-Matrix transformiert.

$$dx'_j = \sum_i \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \leftrightarrow \sum_J \frac{\partial x'_J}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x'_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{130}$$

Sowohl der Wellenoperator als auch die Minkowski-Metrik ist invariant

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle = \square \tag{131}$$

$$g = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \tag{132}$$

Raum-Zeit-Formulierung der Elektrodynamik
Homogene Maxwell-Gleichung

$$dB = 0, dE = -\dot{B} \leftrightsquigarrow dF = 0 \tag{133}$$

$$\text{für} F = B + E \wedge dt \tag{134}$$

Inhomogene Maxwell-Gleichungen

$$dD = \rho, dH = j + \dot{D} \leftrightsquigarrow dG = J \tag{135}$$

$$\text{für } G = D - H \wedge dt, J = \rho = j \wedge dt \tag{136}$$

Materialgleichung

$$D = \epsilon_0 * E, B = \mu_0 * H \leftrightsquigarrow ? \tag{137}$$

Hodge-Sternoperator für M_4 (Minkowski-Raum)
Metrischer Tensor $(\cdot,\cdot)$

$$\Omega^k(M_4) \times \Omega^k(M_4) \longrightarrow \Omega^0(M_4) \tag{138}$$

$$(dx,dx) = (dy,dy) = (dz,dz) = 1 \tag{139}$$

$$(cdt,cdt) = -1 \tag{140}$$

$$dvol_4 = dvol_3 \wedge cdt \text{ } (dt \text{ orientiert durch Zukunftsrichtung}) \tag{141}$$

$$dx \wedge *dx = 1 \cdot dvol_4 \tag{142}$$

$$dy \wedge *dx = dz \wedge *dx = dt \wedge *dx = 0 \tag{143}$$

$$\Rightarrow *dx = [dy \wedge dz; R] \wedge cdt = \iota(\partial_x) dvol_4 \tag{144}$$

$$*(dx \wedge dy) = [dz; R] \wedge cdt \tag{145}$$

$$*(dz \wedge cdt) = -[dx \wedge dy; R] \tag{146}$$

Materialgesetz

$$G = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * F \tag{147}$$

Poincaré-Gruppe und Lorentz-Gruppe
Poincaré-Gruppe
Die Gruppe aller affinen Abbildungen $\Psi : M_4 \longrightarrow M_4$, deren linearer Teil $L = D_o\Psi$ die Minkowski-Metrik erhält:

$$g(Lu, Lv) = g(u,v) \; \forall u,v \in V \cong \mathbb{R}^4 \tag{148}$$

Die Poincaré-Gruppe ist 10-dimensional und geht im nicht relativistischen Limes ($|v| << c$) in die Galilei-Gruppe über.

Lorentz-Gruppe

Die Untergruppe von Ponicaré-Transformationen, die einen ausgewählten Weltpunkt ("Koordinatenursprung") festhalten, $\Psi(0) = 0$.
Die Lorentzgruppe ist 6-dimensional und geht im nicht relativistischen Limes in das semidirekte Produkt der Drehgruppe mit einer Gruppe spezieller Galilei-Transformation über. Bezeichnung:

$$O(V; g) = O(3,1) \tag{149}$$

Mitteilung:

$$G = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * F \tag{150}$$

Die Invarianzgruppe von G ist größer (konforme Gruppe)

Raum-Zeit-Dilatation mit Fixpunkt 0 :

$$S : M_4 \longrightarrow M_4 \tag{151}$$

$$p \longmapsto o + s(p - o) \tag{152}$$

Es gilt

$$g(DS(u), DS(v)) = s^2 g(u, v) \neq g(u, v) \tag{153}$$

$$(s \neq 1) \tag{154}$$

Also ist DS keine Lorentz-Transformation (und S keine Poincaré-Transformation). Dennoch gilt:

$$G = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * F \Leftrightarrow S * F = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * S^* F \tag{155}$$

Es folgt, dass S^* Vakuum-Lösungen ($J = 0$) auf Vakuum-Lösungen abbilden.

Elektrodynamik in Materie
Aufteilung der Ladungen und Ströme in zwei Anteile

$$\rho = \rho^{ext} + \rho^{mat} \tag{156}$$

$$j = j^{ext} + j^{mat} \tag{157}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}^{ext} + dj^{ext} = 0 \tag{158}$$

Mit

$$\dot{\rho} + dj = 0 \tag{159}$$

folgt auch die Kontinuitätsgleichung für Materieladungen und -ströme. Außerdem, verschwindet ρ^{mat} nach Integration über den gesamten von Materie erfüllten Raumbereich.

Elektrische Polarisation In einem polarisierbaren Medium bewirkt die Anwesenheit elektrische Felder eine Umorganisation der mikroskopischen Ladungen. Diese wird durch die elektrische Polarisation P , eine 2-Form, quantitativ erfasst.

$$P \in \tilde{\Omega}^2(E_3) \tag{160}$$

Ist V ein dreidimensionales Gebiet mit rand ∂V, so folgt:

$$\int_V \rho^{mat} = Q^{mat}(V) = -\int_{\partial V} P = -\int_V dP \tag{161}$$

Das Minuszeichen erklärt die Tatsache, dass das Hinausfließen positiver Ladung durch ∂V eine entsprechende negative Ladungen von V zurücklässt.

V ist zudem beliebig:

$$\rho^{mat} = -dP \tag{162}$$

Magnetisierung

Das magnetische Analogon zu einem elektrisch polarisierbaren Medium ist ein Material, das sich unter dem Einfluss einer magnetischen Feldstärke B magnetisch ordnet. Der orbitale Drehimpuls und der Spin von Elektronen in ungesättigten Atomhüllen ist Ursachen eines atomaren magnetischen Dipolmoment. Vereinfacht bewegen sich die Elektronen auf elliptischen Bahnen, was einem atomaren Kreisstrom und somit einem magnetischen Dipolmoment entspricht. Diese Kreisströme werden durch die Kraftwirkung der magnetischen Feldstärke polarisiert, d.h. sie richten sich partiell aus und addieren sich zu einem lokalen Gesamtstrom, dem sogenannten Magnetisierungsstrom. Die Magnetisierung, M, ist eine 1-Form.

$$M \in \tilde{\Omega}^1(E_3) \tag{163}$$

Sei S eine transversal orientierte Fläche und $I^{mat}(S)$ der gesamte Materiestrom durch S

$$\int_S J^{mat} = I^{mat}(S) = \frac{\partial}{\partial t}\int_s P + \int_{\partial S} M = \int_S (\dot{P} + dM) \tag{164}$$

$$\Rightarrow j^{mat} = \dot{P} + dM \tag{165}$$

Maxwellsche Theorie in Materie

Inhomogene Maxwell-Gleichung

$$dD = \rho^{ext} \tag{166}$$

$$dH = j^{ext} + \dot{D} \tag{167}$$

Materialgleichungen

$$D = \epsilon_0 * E + P[E] \tag{168}$$

$$H = \frac{1}{\mu_0} * B - M[B] \tag{169}$$

Homogene Maxwellgleichungen

$$dE = -\dot{B} \tag{170}$$

$$dB = 0 \tag{171}$$

homogenes Dielektrikum

$$D_{ij}(p,t) = \epsilon_0 \int_0^\infty (\int \sum_k \epsilon_{ij}^k (p - \cdot, t - s) E_k(\cdot, s) dvol) ds \tag{172}$$

Für ein isotropes Medium im statischen Limes reduziert sich ϵ_{ij}^k (dielektrischer Tensor) zu einer einzigen skalaren Größe ϵ:

$$D = \epsilon_0 \epsilon * E \tag{173}$$

Homogenes Magnetikum

$$B_{ij}(p,t) = \mu_0 \int_0^\infty (\int \sum_k \mu_{ij}^k (p - \cdot, t - s) H_k(\cdot, s) dvol) ds \tag{174}$$

Im selbigen Fall wie oben resultiert:

$$B = \mu_0 \mu * H \tag{175}$$

Ohmsches Gesetz

$$j = o * E \tag{176}$$

Materialkonstante o

$$[o] = \frac{Strom}{Spannung \times Laenge} \tag{177}$$

Skin-Effekt Ist ein metallischer Draht (der Dicke a und der elektrischen Leitfähigkeit o) einer Wechselspannung mit geringer Frequenz ausgesetzt, so fließt der resultierende Strom im gesamten Drahtquerschnitt (mit homogener Stromdichte).

Eindringtiefe an der Oberfläche des Leiters ($\lambda << a$)

$$\lambda = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 o}} \tag{178}$$

$$(\omega >> (a^2 \mu_0 o)) \tag{179}$$

Beispiel für die Eindringtiefe

Ebene elektromagnetische Welle trifft von Vakuum ($z < 0$) auf einen Metallkörper mit elektrischer Leitfähigkeit o.

Elektrisches Feld der Welle

$$E = |E_0| dy \; Re(e^{i(kz - \omega t)}) \tag{180}$$

$$dE = -\dot{B} = i\omega B = i\omega\mu_0 * H \rightsquigarrow *dE = i\omega\mu_0 H \tag{181}$$

$$dH = j + \dot{D} \cong j = o * E \tag{182}$$
$$(z > 0) \tag{183}$$

$$\Rightarrow *d * dE = i\omega\mu_0 o E \tag{184}$$

$$d * E = \frac{dD}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \tag{185}$$

$$\Rightarrow -\triangle E = 2i\lambda^{-2} E \tag{186}$$

Eine Lösung von folgender Form wird gesucht:

$$E \backsim e^{i(kz-\omega t)} \tag{187}$$
$$(z > 0) \tag{188}$$

$$\pm k = \sqrt{2i}\lambda^{-1} = \frac{1+i}{\lambda} \tag{189}$$

Lösung:

$$E = |E_1| dy e^{-\frac{z}{\lambda}} \; Re(e^{i(\frac{z}{\lambda}-\omega t)}) \tag{190}$$

Fourier-Transformation
Periodische Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \tag{191}$$
$$f(x + 2\pi) = f(x) \tag{192}$$

Hermitesches Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \bar{f}(x) g(x) dx \tag{193}$$

Orthonormalsystem

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n-m)x} dx = \delta_{m,n} \tag{194}$$

Jede stetige periodische Funktion lässt sich als Fourier-Reihe $f(x)$ mit Fourier-Koeffizienten f_n

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx} \tag{195}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-inx} dx \tag{196}$$

Definition

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. d.h. $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < \infty$.
Dann heißt $\tilde{f}$ die Fourier-Transformierte von f

$$\tilde{f} \equiv \mathcal{F}f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \tag{197}$$

$$k \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}dx \tag{198}$$

$\tilde{f}$ ist beschränkt und stetig.

Satz(PQ-Regel)
(i) Sei $f \in C^m(\mathbb{R})$ und $P^n f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt $\tilde{P}^n f = Q^n \tilde{f}$ für $m \geq n$ und $|\tilde{f}(k)| \geq \frac{const}{1+|k|^m}$

(ii) Sei $Q^n f \in L^1(\mathbb{R})$ für $m \geq n$. Dann gilt $\tilde{f} \in C^m(\mathbb{R})$ und $\tilde{Q}^n f = (-1)^n P^n \tilde{f}$

Eigenschaften

$$(i) f \in \xi(\mathbb{R}) \Rightarrow P^n f, Q^n f \in \xi(\mathbb{R}) \text{für alle} \tag{199}$$

$$n = 0, 1, 2, 3, ...(\infty) \tag{200}$$

$$(ii) f, g \in \xi(\mathbb{R}) \Rightarrow f * g \in \xi(\mathbb{R}) \tag{201}$$

Faltungsintegral:

$$(f * g)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy \tag{202}$$

Satz

Die Fourier-Transformation $\mathcal{F} : \xi(\mathbb{R}) \longrightarrow \xi(\mathbb{R})$ ist eine Bijektion. Es gilt folgende Umkehrformel:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k)e^{ikx}dk \tag{203}$$

Korollar

$$(\mathcal{F}^2 f)(x) = f(-x) \tag{204}$$

$$\mathcal{F}^4 = Id \tag{205}$$

Faltungssatz

Für $f, g \in \xi(\mathbb{R})$ gilt:

$$(i) f \tilde{*} g = \sqrt{2\pi} \tilde{f} \tilde{g} \tag{206}$$

$$(ii) \tilde{f} * \tilde{g} = \sqrt{2\pi} \tilde{f g} \tag{207}$$

Lösung der eindimensionalen Wellengleichungen

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2})f(x,t) = 0 \tag{208}$$

Anfangsbedingungen:

$$f(x,0) = u(x) \tag{209}$$

$$\dot{f}(x,0) = v(x) \tag{210}$$

Übergang zur fouriertransformierten Gleichung und Nutzung der PQ-Regel liefert:

$$\tilde{f}(k,t) = \tilde{u}(k)cos(kct) + \tilde{v}(k)\frac{sin(kct)}{kc} \tag{211}$$

Lösung der Ausgangsgleichung:

$$f(x,t) = \frac{1}{2}(u(x+ct) + u(x-ct)) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} v(x')dx' \tag{212}$$

Lösung der eindimensionalen inhomogenen Wellenfunktion

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2})f(x,t) = g(x,t) \tag{213}$$

Anfangsbedingungen:

$$lim_{t\longrightarrow -\infty} f(x,t) = lim_{t\longrightarrow -\infty} \cdot f(x,t) = 0 \tag{214}$$

Lösung:

$$f(x,t) = \frac{c}{2}\int_{-\infty}^{t} (\int_{x-c(t-t')}^{x+c(t-t')} g(x',t'))dx' \tag{215}$$

Raum-Zeit-Fouriertransformation

$$\tilde{f}(k,w) \equiv \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^{\not\simeq}} f(x,t)e^{-i(kx-\omega t)}dxdt \tag{216}$$

Lösung der dreidimensionalen Wellengleichungen
Homogene Wellengleichung:

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle)f = 0 \tag{217}$$

Anfangsbedingung:

$$f(p, t=0) = u(p) \tag{218}$$

$$\dot{f}(p, t=0) = v(p) \tag{219}$$

Wie oben zunächst die Fouriertransformation

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+|k|^2)\tilde{f}(k,t)=0 \tag{220}$$

$$|k|^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2 \tag{221}$$

Lösung:

$$\tilde{f}(k,t)=\tilde{u}(k)cos(|k|ct)+\tilde{v}k\frac{sin(|k|ct)}{|k|c} \tag{222}$$

Lösung der Ausgangsgleichung:

$$f(p,t)=\frac{t}{4\pi}\int_{S_{ct}(p)}v\tau_p \tag{223}$$

Lösung der dreidimensionalen inhomogenen Wellengleichung

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\triangle)f(\cdot,t)=g(\cdot,t) \tag{224}$$

Spezielle Lösung (mit $f\equiv 0$ für $g\equiv 0$):

$$f(p,t)=\int_{E_3}\frac{g(\cdot,t-\frac{1}{c}r_p(\cdot))}{4\pi r_p(\cdot)}dvol_3 \tag{225}$$

Bemerkung: Dieser dreidimensionaler Ausdruck ist im gewissen Sinne "einfacher" als der entsprechende eindimensionaler Ausdruck, denn der Träger des dreidimensionalen Integralkerns liegt im Rand des Lichtkegels (nicht im Lichtkegel insgesamt)

Lagrange-Mechanik
Übergang zu krummlinigen Koordinaten zum Zwecke der Berücksichtigung von Zwangsbedingungen. Die Lagrange-Funktion als zentrale Größe lässt eine wesentlich größere Auswahl bezüglich der Koordinatenfreiheit. Erlaubt einen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen. Außerdem ist die Lagrange-Funktion die fundamentale Größe in der relativistisch kovarianten Formulierung der Quantenfeldtheorie.

Variationsrechnung

Wirkungsfunktional

$$S[\gamma]=\int_{t_0}^{t_1}L(\gamma(t),\dot{\gamma}(t),t)dt \tag{226}$$

Satz:

Das Funktional $S[\gamma]$ ist differenzierbar und hat folgende Variation

$$F[\gamma,h]=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i})h_i dt+(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}h_i)\mid_{t_0}^{t_1} \tag{227}$$

Extremalität

Ein differenzierbares Funktional φ heißt extremal in γ , wenn $F[\gamma, h]$ für alle h gleich Null ist.

Satz:

Auf jeder eingeschränkten Menge von differenzierbaren Kurven, die durch zwei fest gewählte Punkte $\gamma(t_0) = a_0 \in A$ und $\gamma(t_1) = a_1 \in A$ laufen, ist das Funktional $S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}, t)dt$ genau dann extremal in γ, wenn längs γ gilt

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \tag{228}$$

$$(i = 1, ..., m) \tag{229}$$

Fundamentallemma der Variationsrechnung

Verschwindet für eine Funktion $f \in C^0(I, V^*)$ das Integral $\int_{t_0}^{t_1} \sum_i f_i(t)h_i(t)dt$ für alle $h \in C^\infty(I, V)$, so gilt $f \equiv 0$ (Nullfunktion)

Lagrange-Systeme

Hamiltonsches Prinzip der kleinsten (extremalen) Wirkung:

Lösungen des mechanischen Systems zu den Randwerten $\gamma_i(t_0) = a_0^{(i)}$ und $\gamma_i(t_1) = a_1^{(i)}(i = 1, ...N)$ sind Extrema des Funktionals $S = \int_{t_0}^{t_1} Ldt$ (mit demselben Randwerten für die zulässigen Kurven), wobei $L = T - U$ die Differenz zwischen kinetischer und potentieller Energie ist.

Lagrange-Systeme

Nicht für alle mechanischen Systeme lässt sich eine Lagrange-Funktionen finden. Diejenigen, für welche sich dennoch eine finden lässt, heißen Lagrange-Systeme.

Satz:

Die Euler-Ableitung zweier Lagrange-Funktionen $L_1, L_2 : U \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit einfach zusammenhängendem Definitionsgebiet $U \subset \mathbb{R}^f$ sind genau dann identisch, wenn die Differenz $L_1 - L_2$ die totale Zeitableitung einer Funktion $M : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist.

Eichtransformation

Hier am Beispiel eines Teilchen im elektromagnetischen Feld

$$A \longrightarrow A + d\xi \tag{230}$$

$$\phi \longmapsto \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{231}$$

$$L \longmapsto L + e(\frac{\partial \chi}{\partial t} + \sum \frac{\partial \chi}{\partial x_j}\dot{\gamma}_j) = L + e\frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{232}$$

Die Lagrangefunktion ändert sich hier um eine totale Zeitableitung, weshalb die die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichungen unter Eichtransformation invariant sind.

Invarianz unter Punkttransformation
Die koordinatenfreie Bedeutung der Lagrange-Funktion S überträgt sich auf das Wirkungsfunktional $S = \int Ldt$. Die Euler-Lagrange-Gleichungen folgen aus $S = \int Ldt$ per Variation unter Nebenbedingungen. Da auch die letzte Operation koordinatenfrei erklärt ist, haben die Euler-Lagrange-Gleichungen immer dieselbe Form, unabhängig von der Wahl der Koordinaten.

Punkttransformation

Eine Abbildung $U \times \mathbb{R} \longrightarrow U \times \mathbb{R}$ der Form $(q,t) \longmapsto (\phi(q,t),t)$ heißt Punkttransformation. Die Euler-Lagrange-Gleichungen behalten unter Punkttransformation ihre Form.

Beispiel: Teilchen im Zentralkraftfeld

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r) \tag{233}$$

Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + U'(r) \tag{234}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) \tag{235}$$

Die zweite Gleichung besagt, dass der Drehimpuls $l = mr^2\dot{\phi}$ erhalten ist. Wenn wir $\dot{\phi} = \frac{l}{mr^2}$ in die erste Gleichung einsetzen, dann entsteht

$$m\ddot{r} + V'(r) = 0 \tag{236}$$

$$V(r) = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2} \tag{237}$$

Dies ist die Bewegungsgleichung für die Radialkoordinate r

Zwangsbedingungen

Eine zeitunabhängige Zwangsbedingung heißt holonom, wenn sie sich als Gleichung mit einer Funktion $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ausdrücken lässt:

$$f = 0 \tag{238}$$

Es wird verlangt, dass f differenzierbar ist und das Differential $(df)_a$ für kein $a \in f^{-1}(0)$ verschwindet.

Beispiel: Ebenes Pendel

Holonome Zwangsbedingung:

$$f = x_1^2 + x_2^2 - l^2 = 0 \tag{239}$$

Das folgende Differential ist überall auf der Kreislinie $f = 0$ ungleich null:

$$df = 2(x_1 dx_1 + x_2 dx_2) \tag{240}$$

Rangbedingung

$$f_1 = ... = f_r = 0 \tag{241}$$

Die Funktionen $f_k : a \longrightarrow \mathbb{R}$ seien genügend oft stetig differenzierbar.

$$(df_1)_a, ..., (df_r)_r \tag{242}$$

Die Zwangsbedingungen sind linear unabhängig für alle Stellen $a \in A$ im Lösungsraum von (238).

Zwangskräfte

Kräfte, welche dafür sorgen, dass die Bewegungsgleichung des mechanischen Systems auf der durch (238) festgelegten Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ verläuft. Sie "stehen senkrecht" auf der durch (238) ausgezeichneten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, auf der Bewegung verläuft. Mit ausgezeichneter Zwangskraft Z haben die Newtonschen Bewegungsgleichungen folgende Form:

$$m_k \ddot{x}_k = F_k + Z_k \tag{243}$$

$$(k = 1, ..., n) \tag{244}$$

Anleitung zum Übergang zu $f = n - r$ Bewegungsgleichungen für f verallgemeinerte Koordinaten, wo die Zwangskräfte nicht mehr in Erscheinung treten:

Gegeben sei ein System mit Lagrange-Funktion $L : A \times V \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. M als die Lösungsmenge der holonomen Zwangsbedingungen:

$$M := a \in A | f : k(a) = 0; \;\; (k = 1, ..., r) \tag{245}$$

(A)

Parametrisiere M durch die differenzierbare Abbildung $\phi : U \longrightarrow M$ mit $U \subset \mathbb{R}^f, f = n - r$ d.h. $(f_k \circ \phi)(q) = 0$ für alle $q \in U$ und $k = 1, ..., r$.

(B)

Eine Kurve $\gamma : I \longrightarrow U$ wird durch ϕ in eine Kurve $\phi \circ \gamma$ in M abgebildet. Definiere die Lagrange-Funktion des Systems mit Zwangsbedingung , $\bar{L} : U \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, durch

$$\bar{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)), t := L((\phi \circ \gamma)(t), \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)(t), t) \tag{246}$$

(3)

Wähle einen Satz von Koordinatenfunktionen $q_1, ..., q_f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ und stelle die Lagrange-Gleichung zu $\bar{L}$ auf:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_k}) \tag{247}$$

$$(k = 1, ..., f) \tag{248}$$

Begründung obiger Gebrauchsanweisung
Autonomes System mit Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}|\dot{x}|^2 - U(x) \tag{249}$$

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k^2 \tag{250}$$

Newtonsche Bewegungsgleichung für eine Bahnkurve $t \longmapsto \Gamma(t)$

$$\langle m\ddot{\Gamma}(t), \cdot\rangle + (dU)_{\Gamma(t)} = Z_{\Gamma(t)} \tag{251}$$

Tangentialraum

$$T_a M := \xi \in \mathbb{R}^n |(df_k)_a(\xi) = 0; k = 1, ..., r \tag{252}$$

D'Alembertsches Prinzip:

Zwangskräfte leisten keine virtuelle Arbeit

$$Z_a(\xi) = 0 \tag{253}$$

$$(\xi \in T_a M) \tag{254}$$

Im Visualisierungsbild für Linearformen kann angenommen werden, dass die (Hyper-)Ebenenschar der Zwangskraft Z in jedem Punkt $a \in M$ tangential zu M liegt.

Umschreiben von (250) zu:

$$\langle m\ddot{\Gamma}(t), \xi\rangle + (dU)_{\Gamma(t)}(\xi) = 0 \tag{255}$$

$$\xi \in T_{\Gamma(t)} M \tag{256}$$

Tangentialraum

$$T\varphi : U \times \mathbb{R}^f \longrightarrow TM \tag{257}$$

$$(q, \dot{q}) \longmapsto (\varphi(q), D_q\varphi(\dot{q})) \tag{258}$$

Nach (B) folgt:

$$\bar{L} := L \circ T\varphi \tag{259}$$

Satz:

Sei $\gamma : I \longrightarrow U$ eine differenzierbare Kurve und $\Gamma = \varphi \circ \gamma : I \longrightarrow M$ ihr Bild unter φ. Für $I = [t_0, t_1]$ schreiben wir $(\gamma(t_j)) = q^{(j)} \in U$ und $\Gamma(t_j) = a^{(j)} \in M(j = 0, 1)$. Dann sind folgende Aussagen zueinander äquivalent:

(i) Das Wirkungsfunktional $\bar{S}[\gamma] := \int_{t_0}^{t_1} \bar{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt$ ist extremal in γ auf der durch $\gamma(t_0) = q^{(0)}$ und $\gamma(t_1) = q^{(1)}$ eingeschränkte Kurvenmenge.

(ii) Das D'Alembertsche Prinzip ist erfüllt.

Es wird also die Äquivalenz des D'Alembertschen Prinzips zum Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung (für Bewegungen auf TM) behauptet.

Parametrische Resonanz
Wenn die Parameter eines Systems periodisch von der Zeit abhängen, kann eine Gleichgewichtslage instabil sein, selbst wenn sie für jeden festen Wert der Parameter stabil ist.

Eindimensionaler,harmonischer Oszillator mit periodisch variierender Frequenz

$$\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0 \tag{260}$$
$$\omega(t + T) = \omega(t) \tag{261}$$

Das dazu äquivalente Hamiltonsche System (mit Masse $m = 1$)

$$\dot{q} = p \tag{262}$$
$$\dot{p} = -\omega^2(t)q \tag{263}$$
$$\omega(t + T) = \omega(t) \tag{264}$$

Die obigen Gleichungen veranschaulichen ein Modell für ein Pendel mit periodisch variierender Länge $l(t)$ und zugehöriger Frequenz $\omega(t) = \sqrt{\frac{g}{l(t)}}$

Sei $\xi_t \equiv \phi_{t,0}$ der Fluss des Hamiltonschen Systems.

Eigenschaften:

-Das System ist nicht autonom $\Rightarrow \phi_t \circ \phi_s \neq \phi_{t+s}$ (keine Gruppeneigenschaft)

-$\phi_T \circ \phi_t = \phi_{T+t}$

-$\phi_{nT} = (\phi_T)^n$

-ϕ_t ist linear: $\phi_t^*(q,p) = (a_t q + b_t p, c : tq + d_t p)$

-$J_t := \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{pmatrix}$

Liouvillescher Satz:

Der Fluss ϕ_t ist flächentreu, d.h.

$$\int_{\phi_t(A)} dp \wedge dq = \int_A dp \wedge dq \tag{265}$$

Stabilität

Eine lineare Transformation $J : V \longrightarrow V$ eines normierten Vektorraumes V heißt stabil, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $v \in \mathbb{V}$ mit Länge $|v| < \delta$ gilt:

$$|J^n v| < \epsilon \tag{266}$$

Satz:

Sei J eine lineare, flächentreue Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Dann ist die Abbildung stabil, falls folgendes gilt:

$$|Tr(J)| < 2 \tag{267}$$

Im Umkehrschluss ist sie instabil, wenn gilt:

$$|Tr(J)| > 2 \tag{268}$$

Eigenwerte:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(Tr(J) \pm \sqrt{(Tr(J))^2 - 4}) \tag{269}$$

Schwache Störung

Grenzfall einer schwachen Störung:

$$\omega(t) = (1, \epsilon f(t))\omega \tag{270}$$

$$f(t) = f(t+T) \tag{271}$$

$$\epsilon \text{ klein} \tag{272}$$

$$J_T = \begin{pmatrix} cos(\omega T) & (\frac{1}{\omega} sin(\omega T) \\ -\omega sin(\omega T) & cos(\omega T) \end{pmatrix} \tag{273}$$

Hamiltonsche Formulierung der Mechanik

Die Bewegungsgleichungen für ein mechanisches System mit f Freiheitsgraden schreiben wir als ein System von $2f$ Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit. Hamiltonsche Systeme sind unter kanonischen Transformationen forminvariant. Der Übergang von Lagrange-Funktionen zu Hamilton-Funktionen werden mittels Legendre-Transformationen vollzogen.

Legendre-Transformationen
Beobachtung:
Lagrange- und Hamiltonfunktionen hängen auf folgende Art und Weise zusammen:

$$H = \sum_i p_i(\dot{r}_i) - L \tag{274}$$

Definition

Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \supset I \longrightarrow \mathbb{R}$, sowie g, definiert durch $g(x) := f'(x)$.

$$(\mathcal{L}f)(y) := yh(y) - f(h(y)) \tag{275}$$

Satz:

Die Legendre-Transformation hat die folgenden Eigenschaften:

1. $(\mathcal{L}f)' = h$

2. $(\mathcal{L}f)'' = (f'' \circ h)^{-1}$

3. Mit f ist auch $\mathcal{L}f$ konvex.

4. Die Legendre-Transformation in involutiv, d.h. $\mathcal{L}^2 f = \mathcal{L}(\mathcal{L}f) = f$ für $f \in C^2(I)$, f konvex.

Bemerkung:

Die Legendre-Transformation mit folgender Abbildung auf beliebig stetige konvexe Funktionen $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ausdehnen:

$$(\mathcal{L}f)(y) := sup_{x \in I}(yx - f(x)) \tag{276}$$

Verallgemeinerung auf Funktionen mehrerer Veränderlicher

Sie $V \equiv \mathbb{R}^n$ und $V^* := L(V, \mathbb{R})$ der Raum der linearen Abbildungen $V \longrightarrow \mathbb{R}$. Sei weiter $f : V \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x)$ von der Klasse C^2 und konvex, d.h. die Hessesche Form $D_x^2 f$ ist positiv definit für alle $x \in V$. Definiere $g : V \longrightarrow V^*$ durch $g(x) = D_x f$und die Umkehrabbildung $h : V^* \longrightarrow V$ durch $h \circ g = Id$. Dann ist die Legendre-Transformierte $\mathcal{L}f : V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ erklärt durch

$$(\mathcal{L}f)(y) := y(h(y)) - f(h(y)) \tag{277}$$

Satz:

Die Voraussetzung seien wie in der obigen Definition. Dann gelten folgende Gleichungen

$$D_y(\mathcal{L}f) = h(y) \tag{278}$$

$$D_y^2(\mathcal{L}f) = (D_{h(y)}^2 f)^{-1} \tag{279}$$

$$\mathcal{L}^2 f = f \tag{280}$$

Die kanonischen Gleichungen
Satz:

Die Euler-Lagrange-Gleichungen $\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$ mit dem kanonischen Impuls $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(k = 1, ..., f)$ sind äquivalent zu dem folgenden System von Gleichungen:

$$\dot{q_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \tag{281}$$

$$\dot{p_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \tag{282}$$

$$(k = 1, ..., f) \tag{283}$$

Hier ist H die Legendre-Transformierte von L als Funktion der Geschwindigkeit $\dot{q}$.

Definition:

Die Gleichungen (286) und (287) heißen Hamiltonsche oder Kanonische Gleichungen; die Funktion H heißt Hamilton-Funktion.

Die Symplektische Gruppe $Sp(2f)$
Symplektischer Vektorraum:

Sei W ein reeller Vektorraum gerader Dimension, $dim(W) = 3f$, und $\omega : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \omega(x, y) = -\omega(y, x)$ eine schiefsymmetrische Biliniearform. Ist ω nicht entartet, so heißt das Paar (W, ω) ein symplektischer Vektorraum.

Symplektische Gruppe:

Sei (W, ω) ein sympletkischer Vektorraum der Dimension $2f$. Die Gruppe aller linearen Abbildung $S : W \longrightarrow W$, die ω invariant lassen, also für alle $x, y \in W$ die Relation

$$\omega(Sx, Sy) = \omega(x, y) \tag{284}$$

erfüllt, heißt die symplektische Gruppe in $2f$ Dimensionen und wird mit $Sp(W, \omega) \equiv Sp82f, \mathbb{R}) \equiv Sp(2f)$ bezeichnet. Die Elemente von $Sp(2f)$ heißen symplektische Abbildungen.

Matrixdarstellung

$$Se_i = \sum_j e_j S_{ji} \tag{285}$$

$$\omega_{ij} = \sum_{kl} S_{ki}\omega_{kl}S_{lj} \tag{286}$$

$$\tilde{S}^t \tilde{\omega} \tilde{S} = \tilde{\omega} \tag{287}$$

Volumenerhaltung

$$Det(S) = 1 \tag{288}$$

Da $Det(S)$ als Volumenänderung angenommen werden kann, sind alle symplektische Abbildungen volumenerhaltend.

Reziprozität

Das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = Det(\lambda - S)$ einer symplektischen Abbildung $S \in Sp(2f)$ hat folgende Eigenschaft

$$\chi(\lambda) = \lambda^{2f}\chi(\lambda^{-1}) \tag{289}$$

Quadrupel

Wegen $\chi(0) = Det(-S) = Det(S) = 1$ folgt aus $\chi(\lambda) = \lambda^{2f}\chi(\lambda^{-1})$, dass mit λ auch λ^{-1} Nullstellen von χ und somit Eigenwerte von S ist. Eigenwerte von symplektischen Abbildungen treten i.A. als Quadrupel auf:

$$(\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1}) \tag{290}$$

Hamiltonsche Systeme
Definition:

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $2f$ und ω eine 2-Form auf M. Ist ω geschlossen und nicht entartet, so heißt ω eine symplektische Struktur auf M, und das Paar (M, ω) heißt eine symplektische Mannigfaltigkeit.

Vorbereitung

$$\omega(\cdot, X_H) = \sum_{k=1}^{f}(\frac{\partial H}{\partial p_k}dp_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}dq_k) = dH \tag{291}$$

Die Beziehung zwischen H und X_H lässt sich auf folgende Art und Weise koordinatenfrei formulieren

$$\omega(\cdot, X_H) = dH \tag{292}$$

Definition:

Ein Hamiltonsches System ist ein Tripel (M, ω, H). Hierbei ist (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit - nämlich der mit einer geschlossenen nicht entarteten 2-Form ω versehene Phasenraum M - und $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die Hamilton-Funktion. Die Bewegungsgleichung eines solchen Systems sind die Hamiltonschen Gleichungen:

$$\dot{x} = X_H(x) \tag{293}$$

$$X_H = \sum_{k=1}^{f}(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k}) \tag{294}$$

Der klassische Spin

Der Drehimpuls als schiefsymmetrische Abbildung des euklidischen Vektorraumes $V \simeq \mathbb{R}^3$:

$$l = -l^T : V \longrightarrow V \tag{295}$$

Der Spin o muss die Eigenschaft eines Generators besitzen:

$$\sigma^2 = -\prod \tag{296}$$

Bewegungsgleichung des Spins im Magnetfeld:

$$\dot{\sigma} = \mu[\sigma, B] \tag{297}$$

Larmor-Präzession

Bewegungsgleichungen in Komponenten:

$$\dot{\sigma}_1 = \omega_L \sigma_2 \tag{298}$$

$$\dot{\sigma}_2 = -\omega_L \sigma_1 \tag{299}$$

$$\dot{\sigma}_3 = 0 \tag{300}$$

$$\omega_L \equiv \mu |B| \tag{301}$$

Im Folgenden soll der klassische Spin Magnetfeld als Hamiltonsches System beschrieben werden.

Phasenraum:

$$M := 0 \in so(3) | \sigma^2 = -\prod \tag{302}$$

$$so(3) = X \in End(\mathbb{R}^3 | X = -X^T) \tag{303}$$

Tangentialraum zu einem Punkt $\sigma \in M$:

$$T_\sigma M = X \in so(3) | Tr(\sigma X) = 0 \tag{304}$$

Nun hat man folgende schiefsymmetrische Bilinearform:

$$\omega_\sigma : T_\sigma M \times T_\sigma M \longrightarrow \mathbb{R} \tag{305}$$

$$(X, Y) \longrightarrow Tr(\sigma[X, Y]) \tag{306}$$

Hamiltonsches System:

$$H : M \longrightarrow \mathbb{R} \tag{307}$$

$$\sigma \longmapsto \mu Tr(\sigma B) \tag{308}$$

Bewegungsgleichung:

$$(dH) : \sigma(X) = \frac{d}{dt} H(\gamma(t))|_{t=0} = \mu \frac{d}{dt} Tr(e^{tY} \sigma e^{tY} B)|_{t=0} = \mu Tr(XB) \tag{309}$$

$$\Rightarrow \mu Tr([\sigma, B][\sigma, X]) = Tr(\dot{\sigma}[\sigma, X]) \tag{310}$$

$$\Rightarrow \dot{\sigma} = \mu[\sigma, B] \tag{311}$$

Satz von Darboux
Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit der Dimension $2f$. Dann existiert zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung $N_x \subset M$ und Funktionen $q_1, ..., q_f, p_1, ..., p_f : N_x \longrightarrow \mathbb{R}$, sodass die symplektische Struktur ω auf N die kanonische Form $\omega = \sum_{k=1}^{f} dp_k \wedge dq_k$ annimmt.

Kanonische Transformation
Normalgestalt:

$$\omega = \sum_{k=1}^{f} f p_k \wedge dq_k \tag{312}$$

Koordinatenwechsel

Ist nun ein Diffeomorphismus $\psi : M \longrightarrow M$ gegeben, so können wir durch die Verkettung mit ψ neue Koordinatenfunktionen $Q_1, ..., Q_f; P_1, ..., P_f$ bilden:

$$Q_k = q_k \cdot \psi \tag{313}$$

$$P_k = p_k \cdot \psi \ (k = 1, ..., f) \tag{314}$$

Kanonische Gleichungen in neue Gestalt

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k} \tag{315}$$

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial Q_k} \ (k = 1, ..., f) \tag{316}$$

Daraus resultiert die folgende Bedingung an die Abbildung ψ:

$$\omega = \sum_{k=1}^{f} dP_k \wedge dQ_k = \sum_{k=1}^{f} d(p_k \cdot \psi) \wedge d(q_k \cdot \psi) = \psi^*(\sum_{k=1}^{f} dp_k \wedge dq_k) = \psi^* \omega \tag{317}$$

Definition:

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Eine differenzierbare Abbildung $\psi : M \longrightarrow M$ heißt kanonische Transformation, wenn sie ω invariant lässt :$\psi^* \omega = \omega$
Damit lässt sich folgendes Fazit ziehen:

(i) Die kanonischen Gleichungen sind forminvariant unter kanonischen Transformation.

(ii) Die kanonischen Transformationen bilden eine Gruppe.

(iii) Punkttransformationen, d.h. die Abbildung des Ortsraumes auf sich, sind kanonisch (genauer: lassen sich zu kanonischen Transformationen erweitern).

Kriterium für $M = \mathbb{R}^{2f}$

Wir spezialisieren jetzt zu $M = \mathbb{R}^{2f}$ in der einfachen Situation, dass ω global in der Form $\omega = \sum_{k=1}^{f} dp_k \wedge dq_k$ dargestellt werden kann. In diesem Fall ist eine differenzierbare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^{2f} \longrightarrow \mathbb{R}^{2f}$ genau dann eine kanonische Transformation, wenn $D_x\psi : \mathbb{R}^{2f} \longrightarrow \mathbb{R}^{2f}$ für alle $x \in \mathbb{R}^{2f}$ symplektisch ist.

Hamiltonsche Flüsse

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und X eine differenzierbares Vektorfeld, dessen Fluss auf ganz $M \times \mathbb{R}$ definiert ist. Dann heißt X lokal Hamiltonsch(global Hamiltonsch), falls die 1-Form $\omega(\cdot, X)$ geschlossen (bzw. exakt) ist. Entsprechend heißt der Fluss eines lokalen (globalen) Hamiltonschen Vektorfeldes lokal(bzw. global) Hamiltonsch. Nach einem Standardresultat (Poincaré-Lemma) existiert zu einem lokalen Hamiltonschen Vektorfeld X lokal eine Funktion H, so das gilt: $\omega(\cdot, X) = dH$

Symplektischer Gradient

$$X = I(df) \tag{318}$$

$$X = I\alpha \text{ falls} \omega(\cdot, X) = \alpha \tag{319}$$

Definition:

Sei $(g^s)_{s\in\mathbb{R}}$ eine Schar von Diffeomorphismen : $m \longrightarrow M$. Wir nennen diese Schar eine Einparametergruppe von kanonischen Transformationen von (M, ω), wenn gilt

$$(i)\ g^0 = Id \tag{320}$$

$$(ii)\ g^{s+t} = g^s \circ g^t = g^t \circ g^s\ (s, t \in \mathbb{R}) \tag{321}$$

$$(iii)\ g^s \text{ kannonisch für alle } s \in \mathbb{R} \tag{322}$$

Die Hamiltonschen Flüsse lassen die symplektische Struktur des Phasenraums invariant.

Symmetrien und Erhaltungssätze

Erste Integrale

Wir nenne eine Funktion $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ ein erstes Integral des Hamiltonschen Systems, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $f \circ \phi_t^H = f$. Da es sich bei $(\phi_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ um eine Einparametergruppe von Diffeomorphismen handelt, ist diese Bedingung äquivalent zu:

$$\frac{d}{dt} f \circ \phi_t^H|_{t=0} = \mathcal{L}_{X_H} f = (df)(X_H) = \omega(X_H, H_f) \tag{323}$$

Als folge dessen wird klar, dass die Energie eines autonomen Hamiltonschen Systems erhalten ist:

$$\frac{d}{dt} H \circ \phi_t^H|_{t=0} = \omega(X_H, X_H) = 0 \tag{324}$$

Zweimal Hamiltonsch

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Darauf seien zwei Funktionen $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben - wir haben jetzt also zwei "Hamiltonsche" Systeme (M, ω, f) und (M, ω, g) und zwei globale Hamiltonsche Flüsse ϕ^f, ϕ^g zu den global Hamiltonschen Vektorfeldern $X_f := I(df)$ und $X_g := I(dg)$. Dann gilt folgende Gleichheit:

$$\frac{d}{ds} g \circ \phi_s^f|_{s=0} = -\frac{d}{dt} f \circ \phi_t^g|_{t=0} \tag{325}$$

Definition:

Sei $\phi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M, (x, s) \longmapsto \phi_s(x)$, der Fluss eines global Hamiltonschen Vektorfeldes auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω). Dann heißt $(\phi_s)_{s \in \mathbb{R}}$ eine Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen des Hamiltonschen Systems mit Hamilton-Funktion $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$, wenn H unter $(\phi_s)_{s \in \mathbb{R}}$ invariant ist:

$$H \circ \phi_s \text{ für alle } s \in \mathbb{R} \tag{326}$$

Noether-Theorem

zu jeder Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen eines autonomen Hamiltonschen Systems gehört ein Erhaltungssatz, und umgekehrt.

Beispiel: Impulserhaltung

Auf der symplektischen Mannigfaltigkeit $(M, \omega) = (\mathbb{R}, dp \wedge dq)$ hat das Hamiltonsche Vektorfeld $I(dp) = \partial_q$ den durch $(q, p) \circ g^s = (q + s, p)$ bestimmter Fluss g^s. Die von $I(dp)$ erzeugten kanonischen Transformationen bilden also die Gruppe der Translationen in q. Daher bedeutet die Aussage des Noether-Theorems hier folgendes: sind die Raumtranslationen $q \longmapsto q + s$ eine Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen des Hamiltonschen Systems mit Hamilton-Funktion H, d.h. gilt:

$$\frac{d}{ds} H \circ g^s|_{s=0} = \frac{\partial H}{\partial q} = 0 \tag{327}$$

so ist der Impuls: $p = const$. Umgekehrt bedingt die Impulserhaltung die Translationsinvarianz der Hamilton-Funktion.