



BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL  
FACHBEREICH C  
*Mathematik und Naturwissenschaften*  
FACHGRUPPE PHYSIK

FORTGESCHRITTENEN PRAKTIKUM

## Musterprotokoll FP 1 Stern-Gerlach Experiment

Klaus Hamacher

### Abstract

Die Messung des Landé g-Faktors des Elektrons mit dem Kalium-Atomstrahl der Stern-Gerlach Apparatur des Fortgeschrittenen Praktikums der BUW wird beschrieben. Ein Fit der Ablenkungsverteilung ergibt:

$$g = 1,998 \pm 0,099 \quad .$$

Die Messung der Verdampfungsenthalpie von Kalium über die Temperaturabhängigkeit des Dampfdrucks ist kurz beschrieben.

Dieses Protokoll ist ein Muster für die im Fortgeschrittenen Praktikum anzufertigenden Protokolle am Beispiel des Stern Gerlach Experiments. Neben dem eigentlichen Protokoll sind in den Kästen Kommentare eingefügt, die nicht Teil des eigentlichen Protokolls sind.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Experiment und Strategie der Messung</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Durchführung und Kalibration</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Auswertung und Ergebnisse</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>14</b>

## Abbildungsverzeichnis

1	Prinzip des Stern-Gerlach Experiments . . . . .	3
2	Ealing-Daybell Stern-Gerlach Experiment . . . . .	6
3	Rabi-Zweidrahtmagnetfeld . . . . .	7
4	Schaltbild des Stern-Gerlach Experiments . . . . .	7
5	Kalibrationsmessungen . . . . .	8
6	Detektorstrom als Funktion von $\beta = 1/kT$ . . . . .	10
7	Detektorstrom als Funktion der Ablenkung . . . . .	12
8	Resultate der Anpassung an die Messdaten . . . . .	13

## Tabellenverzeichnis

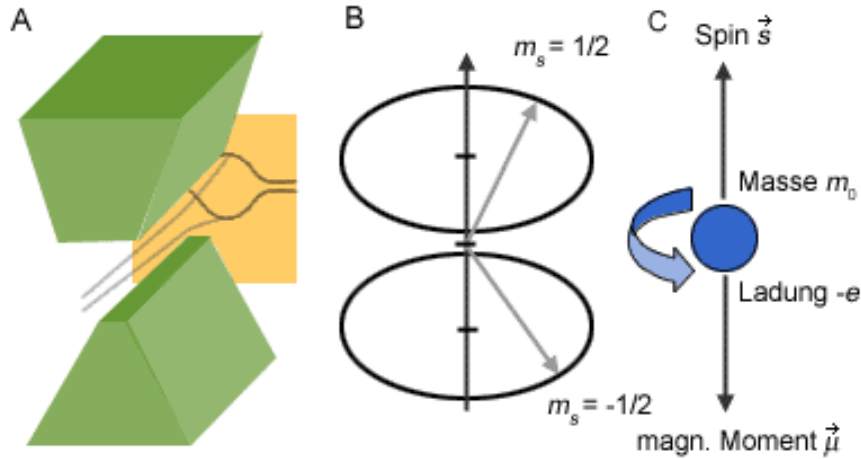
1	Messdaten . . . . .	9
---	---------------------	---

Dieses Protokoll dient als Muster für die im Fortgeschrittenen Praktikum anzufertigenden Protokolle am Beispiel des Stern Gerlach Experiments. Aus den hier angegebenen Daten können die erzielten Resultate nicht abgeleitet werden. In der Analyse sind zusätzliche Faktoren eingebaut um das tatsächliche Resultat zu verbergen!

Der Stil des Protokolls orientiert sich an typischen experimentellen Veröffentlichungen. Dies soll die Studierenden frühzeitig an die übliche Darstellung in Publikationen heranzuführen. Insbesondere betrifft das eine knappe Darstellung der Grundlagen. Hingegen sind die experimentellen Punkte und insbesondere die Auswertung und die Ergebnisse viel stärker betont. In vielen „typischen“ Protokollen ist das eher umgekehrt!

Eine Diskussion der Fehler (die in diesem Fall einfach ist) ist immer ein zentraler Punkt. Eine explizit angegebene Fehlerfortpflanzungsformel ist dabei im Protokoll nicht wichtig, sie wird sozusagen vorausgesetzt, da sie zur Planung und Durchführung des Versuchs grundlegend ist. Eher sollte darauf eingegangen werden, unter welchen Prämissen die angegebenen Fehler gelten. Viel Wert wird auf Zitate und Referenzen gelegt. Dies ist einfach durchführbar, wenn man mit  $\LaTeX$  arbeitet. Mit anderen Systemen kann das zum Alptraum werden.

Für das Praktikum sollte die Auswertung immer so dargestellt sein, dass sie vom Assistenten evtl. nachvollzogen werden kann. Das sollte hier z.B. durch die Angabe von  $z_0$  in [Tabelle 1](#) möglich sein. Ebenso sind Inhalts-, Abbildungs-, und Tabellenverzeichnis als Vereinfachung für die Praktikumsassistenten gedacht. In Veröffentlichungen sind sie unüblich.



**Abbildung 1:** Prinzip des Stern-Gerlach Experiments. A Aufspaltung des Atomstrahls im inhomogenen B-Feld, B Quantisierung des Spins in bzw. entgegen B-Feld Richtung, C Zusammenhang zwischen Spin und magnetischem Moment.

## 1 Einleitung

Im Jahr 1920 konnten Stern und Gerlach [1] die Richtungsquantelung des Drehimpulses experimentell nachweisen. Dazu zeigten sie die Aufspaltung eines Silber-Atomstrahls in einem inhomogenen Magnetfeld in genau zwei Anteile. Neben der Quantisierung zeigte dieses Experiment, dass das Elektron einen Eigendrehimpuls (Spin)  $S = 1/2\hbar$  hat.

In diesem Protokoll wird eine entsprechende Messung mit Kalium beschrieben. Der Drehimpuls von Kalium ist durch den Spin des Valenzelektrons, das im S-Zustand ist und damit keinen Bahndrehimpuls hat, gegeben. Kernspins sind wegen der hohen Masse des Kerns unerheblich. Damit wird in sehr guter Näherung der gyromagnetische  $g$ - oder Landé-Faktor des Elektrons gemessen.

Das Prinzip der Messung verdeutlicht Bild 1 [2]. Ein Kalium Atomstrahl aus einem Ofen wird durch ein inhomogenes Magnetfeld geführt. Das B-Feld definiert die Quantisierungsachse. Das mit dem Spin verbundene magnetische Moment verursacht im inhomogenen  $\vec{B}$ -Feld eine Kraft:

$$\vec{F} = \vec{\mu} \cdot \nabla \vec{B} = g \cdot \frac{e}{2m} \vec{s} \cdot \nabla \vec{B} = \pm g \cdot \frac{1}{2} \cdot \mu_B \cdot \partial_z B_z \vec{e}_z \quad (1)$$

auf das Kalium Atom. Wegen der beiden möglichen Ausrichtungen des Spins spaltet der Strahl in  $2s + 1 = 2$  Komponenten auf. Die Größe der Aufspaltung ist proportional zum magnetischen Moment  $\mu$  und zum Feldgradienten. Sie ist umgekehrt proportional zur thermischen Energie der Atome im Strahl. Eine Messung der Verteilung der Kalium Atome an einer Detektorebene hinter dem Magneten bzw. der Maxima der Aufspaltungsverteilung erlaubt neben dem Nachweis der Richtungsquantelung und dem halbzahligen Spin eine Bestimmung des  $g$ -Faktors des Elektrons. Die genaue Form der Verteilung ermöglicht eine Überprüfung der Geschwindigkeitsverteilung im Atomstrahl. Abschließend lässt sich aus der Temperaturabhängigkeit des Detektorstroms ohne Magnetfeld die Verdampfungsenthalpie von Kalium und damit eine Basis-Annahme über das thermische Gleichgewicht der Atomstrahlquelle überprüfen.

In Kapitel 2 werden die physikalischen Grundlagen der Messung, Drehimpuls und magnetisches Moment, die Geschwindigkeitsverteilung im Atomstrahl und die Ablenkung im inhomogenen Feld zusammengefasst. Kapitel 3 diskutiert knapp den Versuchsaufbau, insbesondere das inhomogene, sogenannte Zweidraht-Magnetfeld und die verwendeten Messgeräte. Ebenfalls wird hier die Strategie der Messung dargestellt. Im Kapitel 4 wird der Ablauf der Messung und Ergebnisse vorbereitender Messungen besprochen. Auswertung und Resultate sind detailliert in Kapitel 5 beginnend mit der Überprüfung des thermischen Gleichgewichts über die Messung der Verdampfungswärme von Kalium dargestellt. Kapitel 6 enthält eine kurze Zusammenfassung.

Die Einleitung ist eher zu lang, jedoch sind die Idee der Messung und erste Teile der Grundlagen bereits hier angesprochen. Der letzte Absatz ist in Publikationen Standard. Er dient zur Orientierung, damit evtl. nicht die gesamte Publikation gelesen werden muss.

## 2 Grundlagen

Mit einem kreisenden Elektron ist ein Drehimpuls  $\vec{L}$  und ein Kreisstrom und damit ein magnetisches Moment  $\vec{\mu}$  verknüpft:

$$L = mr^2 \cdot \omega = mr^2 \cdot \frac{2\pi}{T_U} \quad \mu = I \cdot A = \frac{e}{T_U} \cdot \pi r^2$$

Hier sind  $e$  und  $m$  Ladung und Masse des Elektrons,  $r$  der Bahnradius und  $T_U$  die Umlaufzeit. Damit besteht der Zusammenhang:

$$|\vec{\mu}| = \frac{e}{2m} \cdot |\vec{L}| = \frac{e\hbar}{2m} \cdot m_L = \mu_B \cdot m_L \quad (2)$$

$m_L$  ist die magnetische Quantenzahl ( $-L \leq m_L \leq L$ ) und  $\mu_B = 927.400968(20) \cdot 10^{-26} \text{J/T} = 5,7883818066(36) \cdot 10^{-5} \text{eV/T}$  das Bohrsche Magneton. Im Gegensatz zum grundsätzlich ganzzahligen Bahndrehimpuls  $|\vec{L}| = L \cdot \hbar$  ist der Eigendrehimpuls (Spin) elementarer Fermionen, z.B. des Elektrons, halbzahlig. Der Zusammenhang zwischen Spin und zugehörigem magnetischen Moment ist in diesem Fall:

$$|\vec{\mu}| = \frac{e}{2m_e} \cdot |\vec{S}| = g \cdot \frac{e\hbar}{2m} \cdot m_S = g \cdot \mu_B \cdot m_S = \pm \frac{1}{2} g \cdot \mu_B \quad (3)$$

Der Proportionalitätsfaktor ist der gyromagnetische  $g$ - oder Landé-Faktor<sup>1</sup>. Aus der Dirac-Theorie (vgl. z.B. [3]) folgt  $g = 2$ . Der zur Zeit beste Messwert für das Elektron  $g = 2,00231930436153(53)$  [4] ist deutlich genauer als der aus der Quantenfeldtheorie berechnete Wert und die wahrscheinlich am genauesten gemessenen Naturkonstante überhaupt.

Durchfliegt ein Kalium-Atom das Gradientenfeld, so erfährt es eine konstante Beschleunigung und bekommt einen Impuls senkrecht zur ursprünglichen Flugrichtung. Dieser Impuls ist um so größer, je länger es sich im Feld aufhält, d.h. je kleiner seine Ausgangsgeschwindigkeit  $v$  ist. Für den Betrag der Ablenkung am Ort des Detektors ergibt sich:

$$z(v) = \frac{C}{v^2} \quad \text{mit} \quad C = \mu \cdot \partial_z B_z \cdot \frac{d_1}{M} \left[ \frac{d_1}{2} + d_2 \right] \quad (4)$$

<sup>1</sup> Benannt nach Alfred Landé, \*13.12.1888 in Elberfeld.

Geometrische Größen sind im Schema des Experiments [Abbildung 2](#) definiert.

Die Geschwindigkeitsverteilung der Kalium-Atome im Ofen ist durch die Maxwell-Boltzmann Verteilung gegeben:

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{M}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2kT}} \quad , \quad (5)$$

dabei ist  $M$  die Masse des Kalium-Atoms,  $k$  die Boltzmann-Konstante und  $T$  die absolute Temperatur. Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit  $v_0$  ergibt sich für  $M/2 \cdot v_0^2 = kT$ . Da die Austrittswahrscheinlichkeit eines Atoms aus dem Ofen proportional zu seiner Geschwindigkeit ist, ist die Geschwindigkeitsverteilung im Atomstrahl:

$$g(v) \propto v \cdot f(v) \quad .$$

Mit der Abkürzung  $\nu = v/v_0$  und der Normierungsbedingung  $\int_0^\infty g(\nu) d\nu = 1$  ergibt sich dann:

$$g(\nu) = 2 \cdot \nu^3 e^{-\nu^2} \quad (6)$$

Gemessen wird die Intensität als Funktion der Ablenkung  $z$ . Mit der normierten Ablenkung

$$\zeta = z/z(v_0) = z/z_0 \quad \text{mit} \quad z_0 = \pm \frac{1}{2} \cdot m_S \mu_B \partial_z B_z \frac{d_1(d_2 + d_1/2)}{kT} \cdot g \quad (7)$$

gilt wegen Gln. 4  $\zeta = \nu^{-2}$ . Da die Intensität erhalten ist ( $g(\nu)d\nu = h(\zeta)d\zeta$ ) folgt für die Intensitätsverteilung als Funktion der normierten Ablenkung:

$$h(\zeta) = \frac{1}{\zeta^3} e^{-\frac{1}{\zeta}} \quad . \quad (8)$$

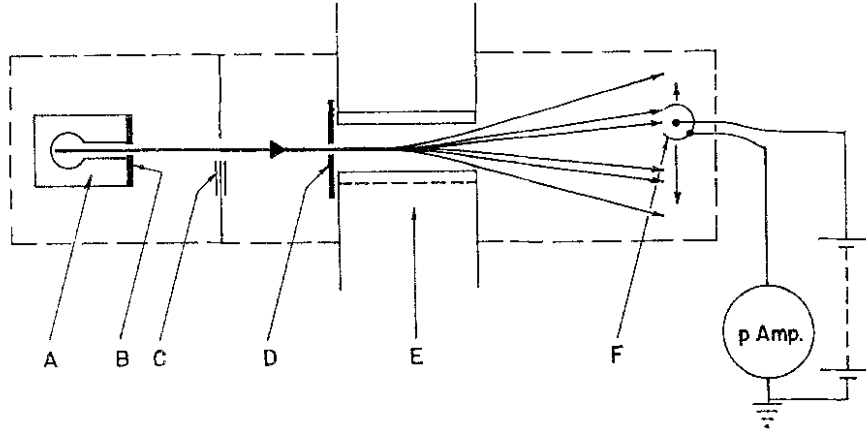
Das Maximum dieser Verteilung befindet sich bei  $\zeta = 1/3$ .

Es wäre wahrscheinlich ausreichend, mit [Gleichung 3](#) zu beginnen. Es reicht die Herleitung der restlichen Formeln nur zu skizzieren. Die wichtigen Endformeln sollten jedoch angegeben werden!

### 3 Experiment und Strategie der Messung

Der experimentelle Aufbau basiert auf einer Ealing-Daybell Stern-Gerlach Apparatur. Eine detaillierte Beschreibung findet sich in [5], deshalb wird hier nur ein kurzer Überblick gegeben und die erfolgten Modifikationen diskutiert. Ein Schema des Aufbaus zeigt [Abbildung 2](#). Hier sind auch wichtige Maße und Parameter angegeben. Der Atomstrahl befindet sich im Vakuum, das durch eine Turbopumpe mit Membranvorpumpe (Pfeiffer) erzeugt wird. In einem durch einen Widerstand geheizten Ofen befindet sich metallisches Kalium. Der Atomstrahl tritt durch einen Spalt im Ofen aus und kann durch einen Shutter, der mit einer mit flüssigem Stickstoff gefüllten Kühlfalle verbunden ist, unterbrochen werden. Vor dem Gradientenfeld wird der Atomstrahl durch einen weiteren Spalt definiert. Das Feld wird durch eine sog. Zweidrahtanordnung mit zylindrischen Polschuhen (vgl. [Abbildung 3](#)) erzeugt, das einen stabilen Gradienten hat. Für die Größe des Gradienten bei  $y = 0$  gilt:

$$\partial_z B_z = C \cdot B_z \quad \text{mit} \quad C = -2 \frac{r_1 + h_1}{r_1^2 + (r_1 + h_1)^2} \simeq 174,42 \text{m}^{-1} \quad (9)$$



**Abbildung 2:** Prinzipbild des Ealing-Daybell Stern-Gerlach Experiments. [5]

A	Atomstrahlofen	
B	Ofenblende	0,2 mm
C	Kühlfalle mit Shutter	
D	Strahlblende	0,11 mm
E	Polschuh ( $d_1$ )	101,6 mm
F	Langmuir-Taylor Detektor	
$B \rightarrow D$		26.34 cm
$D \rightarrow F$	$d_1 + d_2$	60.66 cm

Geometrische Größen sind in [Abbildung 3](#) definiert. Der Feldgradient nimmt mit wachsendem  $|y|$  ab. Hierfür kann man eine Korrektur  $\epsilon$  berechnen [6]:

$$C' = (1 - \epsilon) \cdot C \quad \text{mit} \quad \epsilon = \frac{3r_1^2 - (r_1 + h_1)^2}{(r_1^2 + (r_1 + h_1)^2)^2} \cdot y^2 \quad (10)$$

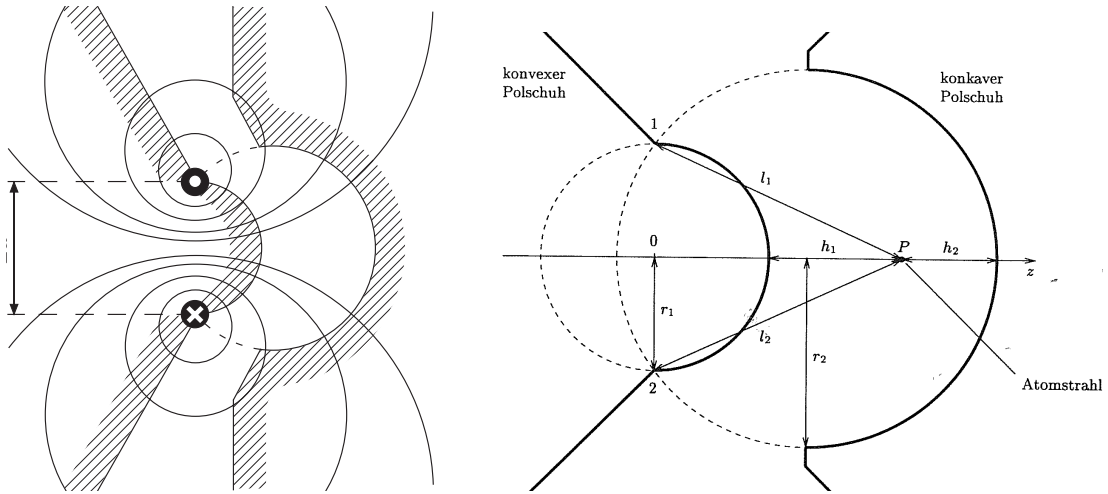
Die Ausdehnung des Atomstrahls von  $y = 0$  wird zu  $\Delta y \simeq 0.5\text{cm}$  und eine gleichförmige Flächendichte des Atomstrahls angenommen. Damit ergibt sich eine Korrektur  $\epsilon \sim 0,012 \pm 0,006$ .

Das Magnetfeld lässt sich mit einer Gleichstromquelle bis zu ca 1,2 T einstellen. Der Zusammenhang von B-Feld und Erregerstrom ergibt sich aus einer alten Messung (Tabelle in [7]) zu:

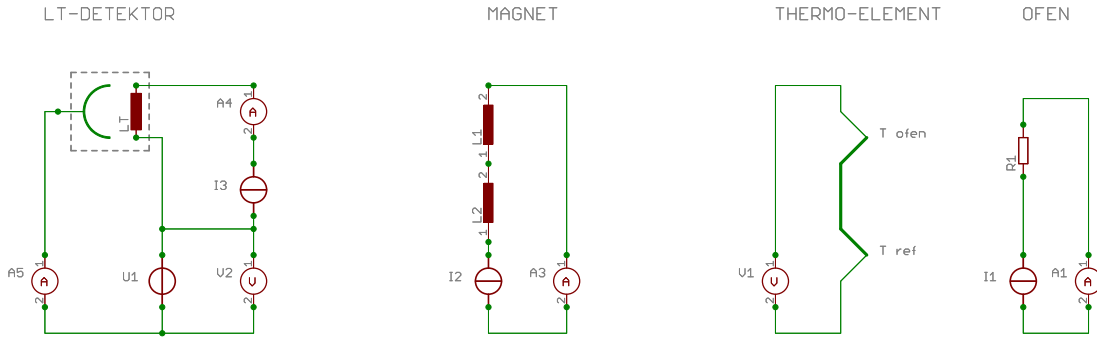
$$B(I) = 0,62941 \frac{\text{T}}{\text{A}} \cdot I + 0,14196 \frac{\text{T}}{\text{A}^2} \cdot I^2 - 0,10654 \frac{\text{T}}{\text{A}^3} \cdot I^3 \quad , \quad (11)$$

Das Magnetfeld wurde nach einer Grundreinigung des Experiments, bei der auch der Magnet zerlegt wurde, nicht präzise neu vermessen. Die grobe Überprüfung ergab ein um ca. 5% kleineres Feld.

Hinter dem Magneten befindet sich eine Flugstrecke, in der sich die Strahlen trennen können, bevor sie mit einem Langmuir-Taylor (LT) Detektor nachgewiesen werden. Dies ist ein auf dunkel Rotglut geheizter Wolframdraht, auf dem sich die Kaliumatome zunächst niederschlagen. Dort werden sie thermisch ionisiert und durch eine Zugspannung zu einer Elektrode gezogen. Der mit einem Keithley Picoamperemeter gemessene Elektroden-Strom ist proportional zur lokalen Strahlintensität. Zur vereinfachten Ablesung wurde der Verstärkerausgang des Picoamperemeters mit einem Digitalvoltmeter



**Abbildung 3:** Polschuhanordnung des Rabi-Zweidrahtmagnetfelds (links) und Koordinatensystem der Feldanordnung (rechts).  $r_1 = 0,218''$ ,  $r_2 = 0,25''$ ,  $h_1 = 0,055''$ .



**Abbildung 4:** Schaltbild des Stern-Gerlach Experiments. Das gestrichelte Rechteck symbolisiert einen Langmuir Taylor Detektor mit Heizdraht (volles Rechteck) und Elektrode (Halbkreis).

ausgelesen. Ein Gesamtschaltbild zeigt Bild 4. Der LT-Detektor hat eine gewisse, im Messprinzip begründete, Totzeit.

Die Breite der Spalte und des Sensordrahts sowie Streuung der Kaliumatome am Restgas der Apparatur begrenzen die Auflösung. Aus der Apparaturgeometrie erwartet man bereits ohne Magnetfeld eine Strahlbreite von  $\sim 0,2\text{mm}$ , die in der Größenordnung der erwarteten Aufspaltung ist. Die experimentelle Auflösung muss also bei der Auswertung berücksichtigt werden.

Dazu wird die theoretische Vorhersage mit Hilfe der Auflösungsfunktion  $R(z)$ , die bei sorgfältig entmagnetisiertem Magneten gemessen werden kann, auf die Messdaten gefaltet. Die experimentelle Auflösungsfunktion  $R(z - \tilde{z})$  sollte unabhängig von der erwarteten Abenkung  $\tilde{z}$  sein. Der Signalverlauf ergibt sich dann als Faltung der theoretisch erwarteten Verteilung mit der experimentellen Auflösung [8, 9]:

$$h_{\text{gemessen}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} R(z - \tilde{z})h(\tilde{z})d\tilde{z} \quad (12)$$

Die Faltung muss numerisch direkt im Fit des Landéfaktors an die Daten berücksichtigt werden. So lässt sich auch die um die Austrittsgeschwindigkeit modifizierte Maxwell-

Verteilung der K-Atome verifizieren.

Die Versuchsbeschreibung ist vollständig. Evt. sollten konkrete Bezeichnungen für Geräte gegeben werden. Ein Schaltbild sollte vorhanden sein und besprochen werden.

## 4 Durchführung und Kalibration

Am Vortag der Messung wurde der Ofen neu mit Kalium gefüllt, dann die Apparatur sofort evakuiert, der Strahlshutter geschlossen. Der Ofen wurde so justiert, dass er sich in gleiche Höhe wie der Spalt vor dem Magnetfeld und dem LT Detektor befand. Am Morgen der Messung war ein Druck von  $8 \cdot 10^{-8}$  bar erreicht, nach Füllen der Kühlfalle  $\lesssim 10^{-9}$  bar. Das Referenzthermoelement wurde mit Eis gekühlt, und die Drift des Messgeräts für die Thermospannung korrigiert. Der Ofen wurde dann mit einem Heizstrom von 4 A bis auf ca. 190°C aufgeheizt und ca. 15 min. gehalten, dann auf 3,8 A reduziert und gewartet bis sich eine Temperatur um 170°C eingestellt hat. Der Magnet wurde entmagnetisiert.

Das Picoamperemeter für den Detektorstrom wurde in Betrieb genommen, der Nullpunkt justiert und die Ziehspannung zunächst auf 15 V eingestellt. Dann wurde der Rauschstrom abhängig vom Heizstrom des Detektordrahts bei geschlossenem Shutter gemessen. Hier ergab sich ein etwa exponentieller Anstieg. Dann wurde der Shutter geöffnet und die Position des Strahlmaximums bei 1 A Detektor-Heizstrom durch Verschieben des Detektors mit der Mikrometerschraube grob ermittelt. Anschließend wurde der Heizstrom beginnend bei 0,8 A schrittweise erhöht und der Detektorstrom gemessen. Bei ca. 0,97 A kommt es zu einem sprunghaften Anstieg des Detektorstroms, der anzeigt das hier der LT Detektor effizient wird (vgl. [Abbildung 5](#)). Das Signal-zu-Rauschverhältnis wird bei einem Heizstrom von 1 A optimal. Bei einer höheren Temperatur wird eine kleinere Totzeit, jedoch ein deutlich größeres Rauschen des Detektors erwartet. Bei festem Heizstrom wurde die Ziehspannung variiert. Bei einer kleinen Spannung von  $\sim 2,5$  V ergibt sich die beste Sensitivität, jedoch stellt sich erst bei etwas höherer Spannung und leicht reduzierter Sensitivität ein Plateau ein (vgl. [Abbildung 5](#)). Der Arbeitspunkt wurde zu 15 V gewählt.

hier fehlen Bilder der Kalibrationsmessungen

**Abbildung 5:** a) Detektorsignal als Funktion des Heizstroms mit und ohne Atomstrahl. b) Detektorsignal als Funktion der Zugspannung.

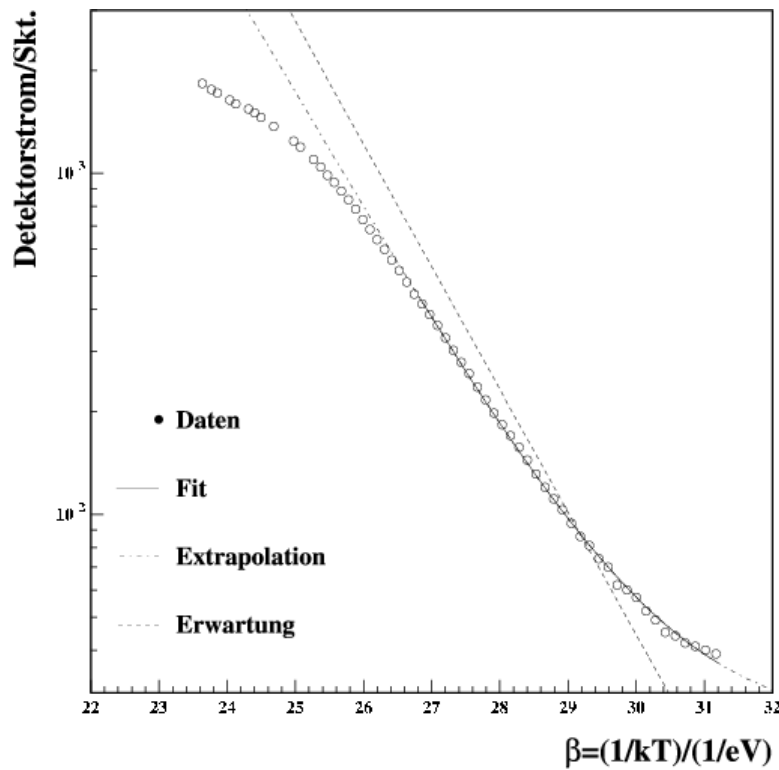
Für die weiteren Messungen wurde Ofentemperatur bzw. die Thermoelementspannung konstant gehalten und gemessen. Für die einzelnen Messschritte war die Temperatur auf besser als 1°C konstant. Außerhalb der Messungen blieb der Shutter geschlossen.

Zur Messung der Auflösungsfunktion wurde der LT-Detektor soweit möglich mit der Mikrometerschraube aus dem Strahl gedrückt. Dann wurde der Detektor schrittweise verfahren und der Detektorstrom gemessen. Dabei wurde jeweils abgewartet, bis sich der Detektorstrom etwa stabilisiert hat. Bei starker Variation des Detektorstroms waren die benötigten Wartezeiten etwas länger. Da es eine Drift des Detektorstroms gibt, war die mögliche Wartezeit begrenzt. Die Messdaten sind in [Tabelle 1](#) und in [Abbildung 7](#) (gemeinsam mit einem Fit) zusammengefasst.



**Tabelle 1:** Daten der Messreihen. Magnetstrom  $I_B$  und Thermospannung  $U_{Th}$  wurden mit Digitalinstrumenten gemessen. Die Angaben entsprechen der Ablesung. Der Detektorstrom  $I_{Det}$  schwankt. Die Angaben sind auf eine halbe Stelle geschätzt.

Messung	1	2	3	4	5	6
$I_B/\text{A}$	0,	0,192	0,370	0,590	0,818	1,133
$\partial_z B_z \text{ T/m}$	0,	22,16	43,64	70,26	96,69	128,07
$U_{Th}/\text{mV}$	8,910	8,872	8,861	8,845	8,910	8,910
$T/\text{K}$	439,5	438,8	438,6	438,3	439,5	439,5
$z_0/0,1'' \text{ (g=2)}$	0,	0,1698	0,3351	0,5398	0,7409	0,9814
Position/0,1''	$I_{Det}/\text{pA}$	$I_{Det}/\text{pA}$	$I_{Det}/\text{pA}$	$I_{Det}/\text{pA}$	$I_{Det}/\text{pA}$	$I_{Det}/\text{pA}$
0,9	31,5	35,5	46,0	66,5	82,0	99,0
1,0	34,0	38,5	52,5	69,5	92,5	109,0
1,1	36,5	43,0	59,5	80,5	105,5	119,0
1,2	40,5	49,0	68,0	92,5	119,5	129,0
1,3	45,0	57,0	80,5	108,5	135,0	139,0
1,4	52,0	70,0	99,0	125,5	152,0	147,0
1,5	60,5	83,0	120,5	152,0	166,0	149,5
1,6	70,5	104,0	151,5	175,5	180,0	147,0
1,7	83,5	134,0	182,0	193,0	181,0	135,0
1,8	102,0	181,0	223,0	197,0	167,0	113,0
1,9	132,5	269,0	250,5	178,5	133,0	82,0
2,0	245,0	347,0	232,5	135,0	94,0	58,0
2,1	594,0	348,0	180,5	96,5	66,5	45,0
2,2	825,0	322,0	147,0	79,5	56,5	40,0
2,3	578,0	349,0	171,5	91,5	60,5	40,5
2,4	243,0	345,5	232,0	129,5	80,5	47,5
2,5	133,0	272,0	252,0	171,5	113,0	64,5
2,6	103,5	187,0	230,0	196,0	156,0	92,0
2,7	88,0	139,0	190,0	192,5	178,5	121,0
2,8	76,0	106,0	154,0	174,5	183,5	140,0
2,9	66,0	85,0	123,0	153,5	174,0	148,0
3,0	58,0	70,0	101,0	132,0	160,0	148,0
3,1	52,0	61,0	83,0	112,5	143,0	143,0
3,2	47,0	53,0	71,0	96,0	126,0	132,5
3,3	43,0	47,0	61,0	85,0	112,0	122,5
3,4	39,0	42,5	52,0	74,0	99,0	111,5
3,5	36,0	37,5	46,0	65,0	87,0	100,5
3,6	34,0	36,0	43,5	60,0	82,0	95,0



**Abbildung 6:** Detektorstrom des LT-Detektors als Funktion der inversen Ofentemperatur  $\beta = 1/kT$ . Die Linie durch die Daten ist ein Fit (vgl. Gleichung 13). Die zweite Linie verdeutlicht die erwartete Steigung.

Zur Messung der Strahlaufspaltung wurde wie bei der Auflösungsfunktion verfahren. Allerdings wurde das Magnetfeld hier monoton schrittweise erhöht. Da die Intensität des Atomstrahls fest ist, die Verteilung aber mit steigendem Feld aufspaltet und sich deutlich verbreitert, führt dies zu einer starken Abnahme der Signalamplitude (vgl. Abbildung 7).

Nach Erreichen der maximalen Feldstärke wurde der Magnet wieder entmagnetisiert und der Detektor ins Strahlmaximum gestellt. Dann wurde die Ofenheizung abgeschaltet und der mit der Temperatur abnehmende Detektorstrom über einen weiten Bereich gemessen.

Nach Abschluss der Messungen wurden Ofen und Detektor abgeschaltet. Die kalte Apparatur wurde später nach Abschalten der Pumpen mit Schutzgas ( $N_2$ ) geflutet.

Achten Sie auf eine vollständige Besprechung der Durchführung. Die zentralen Resultate sollten als Tabellen und Grafiken gegeben angegeben werden. Für Nebensächliches reicht eins von beiden. Ich bevorzuge dann in der Regel Grafiken.

## 5 Auswertung und Ergebnisse

Abbildung 6 zeigt die Temperaturabhängigkeit des LT-Stroms als Funktion von  $\beta = 1/kT$ . Die Daten wurden mit nach Ausschalten der Ofenheizung fallender Temperatur gemessen. Der Verlauf der Daten ist nicht exakt exponentiell. Insbesondere zeigt sich bei kleiner Temperatur (hohem  $\beta$ ) ein kleiner, etwa konstanter Rauschanteil. Bei hoher

Temperatur zeigt sich ebenfalls eine Abweichung der Daten von der Erwartung der Clausius-Clapeyron Gleichung. Hier ist kein thermisches Gleichgewicht mehr gegeben. Um diese Temperatur festzulegen wurde der Ausdruck

$$I(T) = I_0 \cdot e^{\frac{\Delta H_K}{kT}} \quad (13)$$

an die Daten gefittet. Der Fitbereich wurde zu kleinem  $\beta > 26,8 \text{eV}^{-1}$ , bei dem sich eine offensichtliche Abweichung von den Daten zeigte, beschränkt. Für die Verdampfungsenthalpie  $\Delta H_K$  von Kalium ergibt sich aus dem Fit:

$$\Delta H_K = 0,73 \pm 0,01 \text{eV} \quad (14)$$

Dieser Wert stimmt angesichts der groben Messung befriedigend mit dem Literaturwert  $0,797 \text{eV}$  ( $76,9 \text{kJ/mol}$ ) überein. Auf eine weitere Fehlerbetrachtung wird hier verzichtet; diese Messung wird nur als Überprüfung insbesondere der Funktion des LT-Detektors und des K-Atomstrahls angesehen.

Aus dem Verlauf der Dampfdruckkurve kann geschlossen werden, dass im Atomstrahl bis zu einer Temperatur von ca.  $440 \text{K}$  ( $\beta \sim 26,8 \text{eV}^{-1}$ ) die erwartete Geschwindigkeitsverteilung vorliegt. Dies begründet nachträglich die Wahl der Ofentemperatur von  $170^\circ \text{C}$ .

Die Dampfdruckmessung ist nur eine Überprüfung und folglich auch so dargestellt. Diese Messung ist hier und nicht am Ende besprochen, weil sie eine Vorausbedingung der Hauptmessung darstellt. Warum auf eine detaillierte Fehlerbetrachtung verzichtet wird, ist begründet.

Abbildung 7 zeigt die Zusammenfassung der Messdaten für die einzelnen Magnetfelder und die Auflösungsfunktion. Für grössere Magnetfelder wird die Aufspaltung des Atomstrahls in zwei Komponenten sichtbar. Diese Beobachtung entspricht der Erwartung für ein Spin  $1/2$  Teilchen.

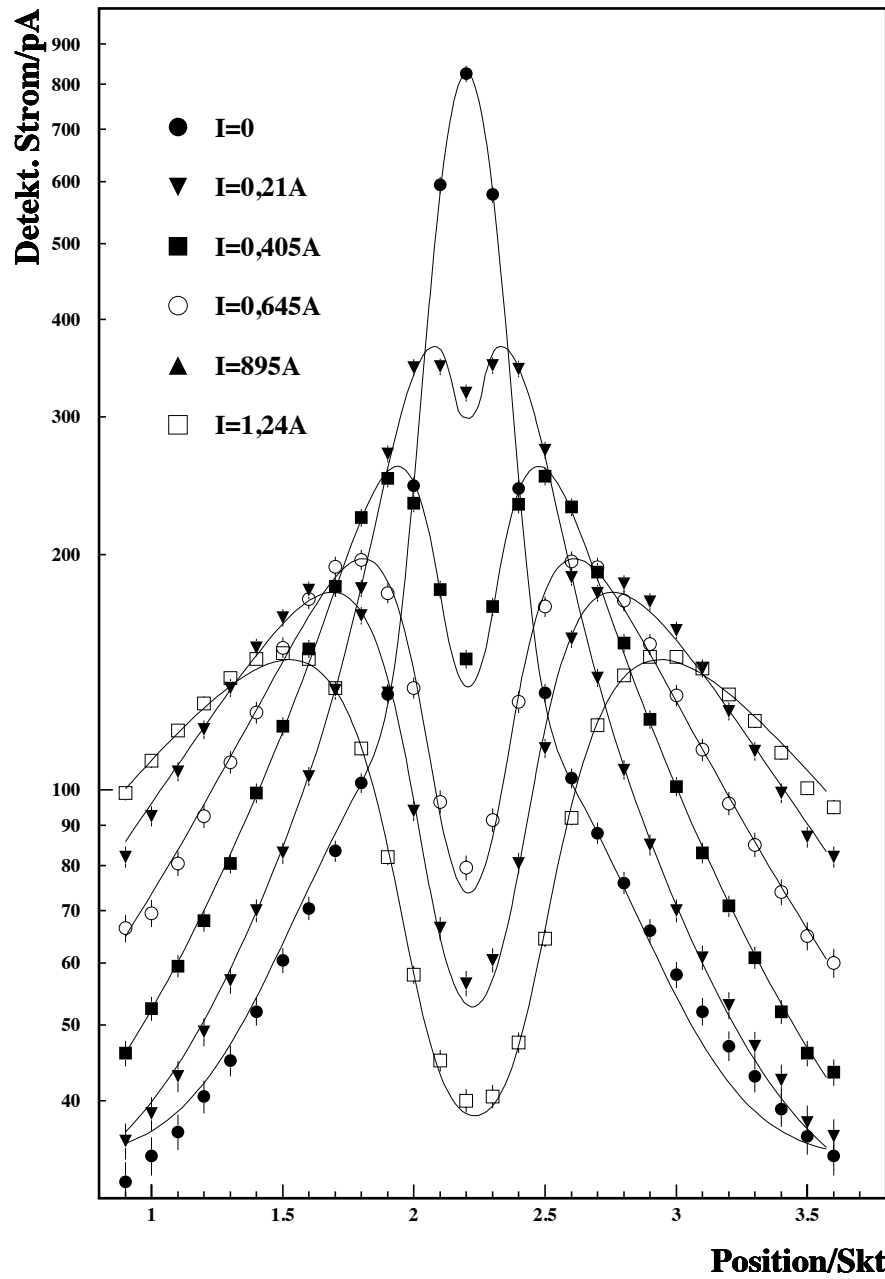
Als Detektorauflösungsfunktion wird eine Summe von zwei Normalverteilungen mit gleichem Zentrum  $z_0$ , jedoch unterschiedlicher Amplitude  $A_i$  und Breite  $\sigma_i$  an die Messdaten ohne B-Feld angepasst<sup>2</sup>. Zur Berücksichtigung von Rauschen wurde ein konstanter Offset  $O$  zugelassen (vgl. Abbildung 7  $I = 0$ ). Die Parameter dieses Fits sind:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2,2006 \pm 0,0015 & O &= 33,8 \pm 1.1 \\ A_1 &= 1735 \pm 138 & \sigma_1 &= 0,1076 \pm 0,0018 \\ A_2 &= 252 \pm 11 & \sigma_2 &= 0,449 \pm 0,015 \end{aligned}$$

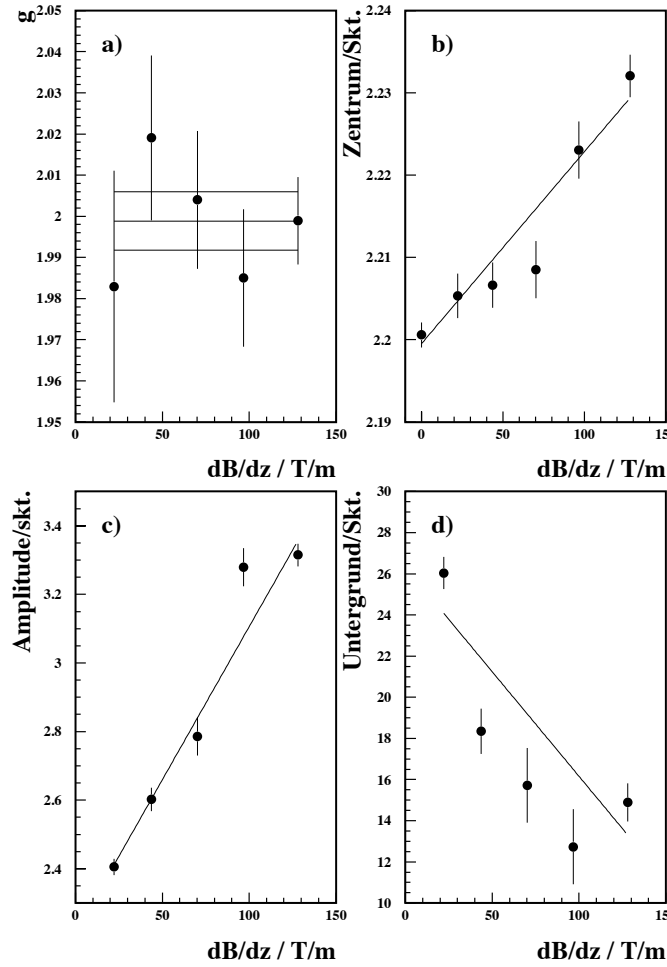
Die Position des LT-Detektors wurde dabei als fehlerfrei angenommen, die Fehler der Detektorströme wurden so gewählt, dass sich ein  $\chi^2/Ndf \sim 1$  ergab. Dazu wurde zunächst ein relativer Fehler von 1% und ein unabhängiger konstanter Fehler von 0,5 für jeden Messwert angenommen. Der so erhaltene Fehler wurde dann skaliert, bis die oben genannte Bedingung erfüllt ist. Wegen dieses Vorgehens erfolgt die Beurteilung der Qualität der Fits nur qualitativ.

Der Fit beschreibt den Verlauf der Daten recht gut, jedoch liegen die Ströme mit steigender Ablenkung vor dem Maximum tendenziell unter, jenseits des Maximums

<sup>2</sup>Eine gute Alternative zu zwei Gauß-Verteilungen ist eine Breit-Wigner-Verteilung. Da diese jedoch sehr lange Schwänze hat, muss man sie bei großen Abweichungen vom Zentrum abschneiden. Für den „abgeschnittenen“ Teil muss die Auflösungsfunktion (auf 1) renormiert werden.



**Abbildung 7:** Verteilung des Detektorstroms als Funktion der Ablenkung für sechs verschiedene Magnetströme bzw. Magnetfelder. Die Fits (durchgezogene Linien) sind im Text beschrieben.



**Abbildung 8:** Parameter der Anpassung als Funktion von  $\partial_z B_z$ . a) Landé Faktor  $g$ , b) Zentrum  $z_0$ , c) Amplitude  $A_i$ , d) Offset  $O_i$ . Die Linien sind Geradenfits an die Parameter. In a) ist der Mittelwert für  $g$  und sein statistische Fehler dargestellt.

über dem Fit. Dieses Verhalten läßt sich durch die Totzeit des LT-Detektors und des Pikoamperemeters erklärt. Die Ablenkung war während der Messung immer von kleinen zu großen Werten variiert worden. Dieser Einfluss wird durch die gewählte, symmetrische Form der Auflösungsfunktion ausgeglichen. Die eigentliche Auflösungsfunktion ergibt sich aus dem auf 1 normierten Fit für  $z_0 = 0$  bei weggelassenem Offset.

Die Messdaten mit B-Feld wurden entsprechend [Gleichung 12](#) und [Gleichung 8](#) gefittet. Der Fit wurde im Detektor-Koordinatensystem vorgenommen. Das führt zu einer entsprechenden Jacobi-Ableitung im Fit. Parameter des Fits waren das Zentrum  $z_{0i}$ , die Amplitude  $A_i$ , ein Offset  $O_i$  und der Landé Faktor  $g_i$ . Die Resultate der Fits sind in [Abbildung 7](#) gezeigt. Die Faltung ist analytisch nicht durchführbar. Deshalb wurde die Integration durch eine Summe ersetzt. Die Auflösungsfunktion wurde dazu im Bereich  $z = \pm 2$  in 181 äquidistanten Schritten berechnet. Für fehlende Anteile der Auflösungsfunktion wurde mit einem globalen Faktor renormiert.

Die Fits beschreiben die Daten gut. Dies bestätigt die Voraussetzung über die Geschwindigkeitsverteilung der K-Atome im Atomstrahl, insbesondere die Ausgangsannahme einer Maxwell-Verteilung. Im Bereich kleiner Ablenkungen, wo der Einfluß der

Detektorauflösung besonders groß ist, liegt der Fit außer für das größte Feld unter den Daten. Evtl. ist das eine Folge der einfachen Approximation der Faltung durch eine Summe. Auf mehr Stützstellen wurde jedoch wegen der längeren Rechenzeit verzichtet. Wegen dieser Abweichung werden die Fehler der Messwerte bei kleinem Feld erhöht. Ebenso ergeben sich leicht größere Fehler für  $g$  (vgl. [Abbildung 8](#)). Die Resultate für  $g$  sind innerhalb der Fehler unabhängig vom B-Feld. Dies gilt nicht für die anderen Parameter. Das Zentrum  $z_0$  steigt mit der Feldvariation um ca. 0,003 Zoll. Wahrscheinlich ist das eine Folge der Totzeit der Messelektronik und des LT-Detektors. Gleichzeitig steigt die (als konstant angenommene) Amplitude um 15%, während der Offset 30% fällt. Diese Einflüsse kompensieren sich in der Funktion teilweise. Es wurde nicht versucht alle Parameter gemeinsam anzupassen bzw. einzelne Parameter zu fixieren. Die unbefriedigende Stabilität der als konstant erwarteten Fitparameter, insbesondere der Amplitude, deutet auf nicht verstandene systematische Fehler hin. Aus Zeitgründen konnte dem nicht nachgegangen werden.

Da die Messungen bei den einzelnen B-Feldern unkorreliert sind, können sie für das Gesamtergebnis von  $g$  fehlergewichtet gemittelt werden. Für die Gewichtung wurde nur der statistische Fehler benutzt. Der wesentliche Parameter des Fits ist  $z_0/2$  (vgl. [Gleichung 7](#)). Der relative Fehler von  $z_0$  wird offensichtlich von allen variablen Messgrößen gleich beeinflusst, deren relative Fehler können quadratisch addiert werden.

Die Länge  $d_1$  beinhaltet Unsicherheiten durch die Vakuumdichtungen der Apparatur. Sie kann nur außerhalb der Vakuumröhre gemessen werden. Deshalb wird hier ein relativer Fehler von 1% (= 0.5mm) angenommen. Die Polschuhlänge  $d_1$  sollte auf 1/20mm genau sein. Die Temperaturmessung sollte auf 1/2° oder 1‰ genau sein. Da das B-Feld nach der Reinigung der Apparatur nicht nachvermessen wurde, und bereits ein kleiner zusätzlicher Luftspalt ( $\mathcal{O}(0.1)$ mm) im Vergleich zum vorhandenen Spalt  $h_1 + h_2 = 3,9$ mm den magnetischen Widerstand stark beeinflusst, wird hier ein relativer Fehler von 5% angenommen. Dieser Fehler dominiert bei weitem und wird deshalb als relativer Gesamtfehler von  $\Delta z_0/z_0$  angenommen. Die Variation von  $z_0$  im Fit um  $\pm 5\%$  führt zu einer Variation von  $g$  um  $\mp_{5,3}^{4,7}\%$ .

Damit ergibt sich als bestes Messresultat für den Landé-Faktor des Elektrons:

$$g = 1,9988 \pm 0,0071(stat.) \pm_{0,0931}^{0,1051}(syst.) = 1,999 \pm 0.099(gesamt) \quad . \quad (15)$$

Der Fehler wird durch die systematische Unsicherheit des B-Feldes dominiert. Eine Vermessung des Feldes mit Fehler bis zu  $\gtrsim 0,5\%$  Genauigkeit würde zu einer deutlichen Reduktion des Gesamtfehlers führen.

Die Auswertung muss ebenfalls vollständig sein. Die zentralen Resultate sind numerisch und ggf. als Grafiken anzugeben. Die Diskussion der Fehler muss ebenfalls vollständig sein. Wobei man durchaus Nebensächliches auch so spezifizieren kann. Man braucht nicht in jedem Fall (wie z.B. hier) eine Fehlerrechnung, wenn die Sache sowieso klar ist. Wohl sollten aber die Fehler gegeben sein. In der Praxis lassen sich mit der Apparatur keine so guten Resultate wie hier dargestellt erreichen!

## 6 Zusammenfassung

Mit dem K-Atomstrahl der Stern-Gerlach Apparatur des Fortgeschrittenen Praktikums wurde eine Messung des g-Faktors des Elektrons durchgeführt. Die beobachtete Aufspal-

tung des Atomstrahls in zwei Komponenten zeigt die Richtungsquantelung des Spins mit der Spinmultiplizität  $2s + 1 = 2$  d.h. dass das Elektron ein Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen ist.

Die Aufspaltungsverteilung lässt sich analytisch unter Annahme der Maxwell-Boltzmann Geschwindigkeits-Verteilung und einem Geschwindigkeits-proportionalen Atomstrahlstrom beschreiben, wenn außerdem die gemessene experimentelle Auflösung berücksichtigt wird. Der Fit liefert für den Landé g-Faktor:

$$1,999 \pm 0,099(\text{gesamt}) \quad . \quad (16)$$

Der Fehler wird durch das nur ungeau bekannte Magnetfeld der Apparatur dominiert. Eine bessere Vermessung des Feldes sollte es erlauben, den Gesamtfehler deutlich zu reduzieren.

Verzichten Sie nie auf eine Zusammenfassung, auch wenn Sie sie als Wiederholung ansehen! Beschränken Sie sich jedoch auf das wirklich Wesentliche.

## Danksagung

Dieses Protokoll fußt neben eigenen Messungen auf den Protokollen von Jana Günther/Lukas Varnhorst und Michael Schuh. Außerdem habe ich Bilder dem Protokoll von Julia Becker et al. entnommen. Diesen Personen möchte ich herzlich danken.

## Literatur

- [1] Walther Gerlach und Otto Stern, Zeit. für Physik A, Vol9, Nr. 1, Dezember 1922. <http://www.springerlink.com/content/p72218361287275g/>
- [2] [http://www.chemgapedia.de/vsengine/media/vsc/de/ch/13/pc/analytik/aas/images/aas4\\_fs2.gif](http://www.chemgapedia.de/vsengine/media/vsc/de/ch/13/pc/analytik/aas/images/aas4_fs2.gif)
- [3] <http://de.wikipedia.org/wiki/Dirac-Gleichung>
- [4] <http://physics.nist.gov>
- [5] M.D. Daybell, Am.J.Phys. V35, p637 und Description of the Earing Daybell Stern Gerlach Experiment. Enthalten in [http://www.atlas.uni-wuppertal.de/FP/anleitungen/interna/STG\\_paket.tgz](http://www.atlas.uni-wuppertal.de/FP/anleitungen/interna/STG_paket.tgz).
- [6] [www.physik.uzh.ch/data/peter/PhysikIII/Anleitungen/SternGerlach.pdf](http://www.physik.uzh.ch/data/peter/PhysikIII/Anleitungen/SternGerlach.pdf)
- [7] Versuchsbeschreibung des Stern-Gerlach Experiments [www.delphi.uni-wuppertal.de/FP/anleitungen/fpI-01/SternGerlachVersuchsbeschreibung.pdf](http://www.delphi.uni-wuppertal.de/FP/anleitungen/fpI-01/SternGerlachVersuchsbeschreibung.pdf) ).
- [8] Vgl. z.B. Kapitel 11 in G. Cowan, Statistical Data Analysis, Oxford Univ. Press. (in der UB vorhanden).
- [9] Klaus Hamacher, Datenanalyse – ein Primer für das physikalische Praktikum (in Moodle).
- [10] F-Praktikumsprotokoll Michael Schuh, BUW FBC, 11.7.2011.