VERKEHRSMODELL

Dynamik

Die Interaktionsdynamik, die diesem Projekt zu Grunde liegt, ist gegeben durch

$$\frac{d}{dt}x_N = v_{\mathsf{max}}, \quad \frac{d}{dt}x_i = f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{L}\right), \quad x(0) = x_0$$

mit Parametern v_{max} für die maximale Geschwindigkeit und L für die durchschnittliche Autolänge.

Wählen Sie eine Version der Kraftfunktion für das gesamte Projekt:

$$f_{\mathsf{lin}}(d) = v_{\mathsf{max}}(1 - 1/d), \quad \text{oder} \quad f_{\mathsf{log}} = v_{\mathsf{max}} \log(d), \qquad d = |x_{i+1} - x_i|/L.$$

Aufgabe 1 (Bearbeitung ab jetzt möglich)

- Implementieren Sie die Dynamik in einer Progammiersprache Ihrer Wahl beispielsweise mit dem expliziten Euler Verfahren aus der Vorlesung.
- Testen Sie verschiedene Parameter und Anfangsbedingungen und beobachten Sie das Verhalten der Lösung, um ein Gefühl für die Dynamik zu entwickeln. Was sind sinnvolle Bereiche für die Parameter? Wann gibt es numerische Probleme?
- Visualisieren Sie die Dynamik der Autos mit Hilfe von Bildern, die Sie später zu einem Video zusammenfügen können.

Aufgabe 2 (Bearbeitung ab jetzt möglich)

- Lesen Sie das Datenset ein und machen Sie sich mit dem Format vertraut. Das Datenset besteht aus mehreren Sequenzen, die immer eine feste Anzahl von Autos enthät. Dies ist so gewählt, damit es besser zur gewöhnlichen Differentialgleichung in unserem Modell passt.
- Passen Sie den Code aus Aufgabe 1 so an, dass die Anzahl der Autos und Anfangspositionen zu den jeweils eingelesenen Daten passt.
- Da wir mit den Sequenzen arbeiten, passen wir das Kostenfunktional entsprechend an. Statt der klassischen Variante

$$J(x) = \int_0^T \|x(t) - x_{\mathsf{data}}(t)\|^2 dt \approx \sum_{k=1}^{K} \tau \|x(k) - x_{\mathsf{data}}(k)\|^2,$$

  mit τ Zeitschritt des Eulerverfahrens und Positionsdaten x_{data}, mitteln wir die Kosten über die verschiedenen Sequenzen $s = 1, \ldots, S$ und erhalten

$$J(x) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} \int_0^T \|x_s(t) - x_{\mathsf{data},s}(t)\|^2 dt \approx \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\sum_{k=1}^{K} \tau \|x_s(k) - x_{\mathsf{data},s}(k)\|^2.$$

Gegebenenfalls müssen die Positionsdaten interpoliert werden, damit die Auswertung am Zeitpunkt k möglich ist. Hierfür können Sie auf eine Interpolation von matlab zurückgreifen.

Aufgabe 3 (Bearbeitung nach VL Abschnitt 3.2)

- Leiten Sie die Optimalitätsbedingungen erster Ordnung für das Inverse problem

$$\begin{aligned} &\min J(x, v_{\text{max}}, L) = \int_0^T \|x(t) - x_{\text{data}}(t)\|^2 dt \\ &\text{u.d.N. } \frac{d}{dt}x_N = v_{\text{max}}, \quad \frac{d}{dt}x_i = f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{L}\right), \quad x(0) = x_0 \end{aligned}$$

  her und identifizieren Sie den Gradienten. Definieren Sie die zulässige Menge für v_{max} und L auf Basis Ihrer Beobachtungen in Aufgabe 1.

Aufgabe 4 (Bearbeitung ab VL Abschnitt 4.1.1)

- Implementieren Sie ein Gradientenverfahren (mit konstanter oder Armijo-Schrittweite) basierend auf den Optimalitätsbedingungen erster Ordnung für das Inverse problem aus Aufgabe 3. Wählen Sie pro Gradientenschritt eine zufällige Teilmenge der Sequenzen, um das Kostenfunktional und die adjungierte Gleichung auszuwerten, und mitteln Sie die Werte, um das Update der Parameter für den nächsten Gradientenschritt zu erhalten.
- Welche Parameterwerte erhalten Sie für v_{max} und L? Stellen Sie den Verlauf des Kostenfunktions über die Iterationen des Gradientenverfahrens graphisch dar.

Abschlusspräsentation (Bearbeitung parallel zu den Aufgaben)

- Erstellen Sie eine Präsentation über das Projekt. Erläutern Sie ihre Ergebnisse, gegebenfalls die Schwierigkeiten auf dem Weg zur finalen Implementierung sowie die gewonnen Erkenntnisse.