

2. Grundlagen der Signaltheorie

Prof. Dr.-Ing. Thomas Schultz

URL: <http://cg.cs.uni-bonn.de/schultz/>

E-Mail: schultz@cs.uni-bonn.de

Büro: Friedrich-Hirzebruch-Allee 6, Raum 2.117

21./28. Oktober und 4. November 2024

Begriffsklärung

- **Signale** dienen dem Austausch von Informationen über das Verhalten oder die Natur physikalischer Phänomene wie z.B. Temperatur oder Druck. Mathematisch dargestellt werden sie als Funktion einer oder mehrerer unabhängigen Variablen.
D. Sundararajan: „Digital Signal Processing. An Introduction“
- Der Begriff „**Signal**“ umfasst unter anderem Audio-, Video-, Sprach-, Bild-, Kommunikations-, geophysikalische, Sonar-, Radar-, medizinische und musikalische Signale.
“Aims and Scope” von IEEE Transactions on Signal Processing

2.1 Diskrete Fourier-Transformation

Anschaung: Klänge als Mischung reiner Töne

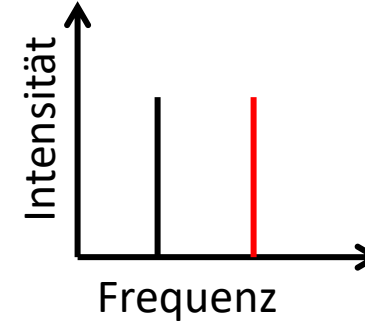
Frequenz entspricht Tonhöhe:



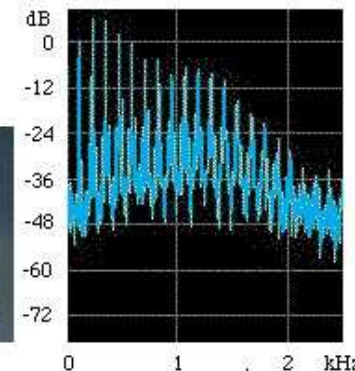
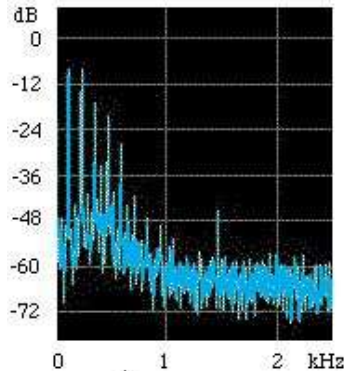
600 Hz



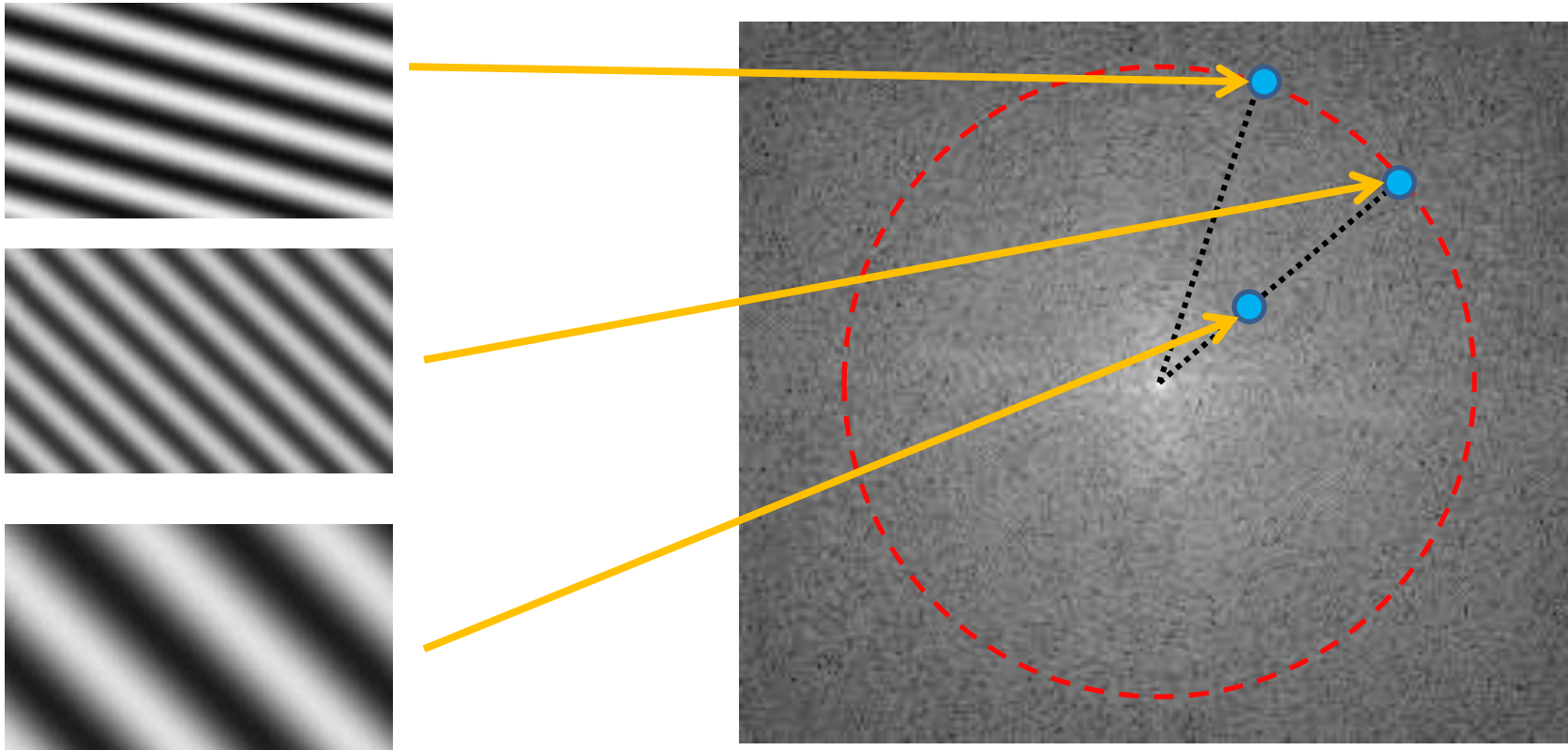
1200 Hz



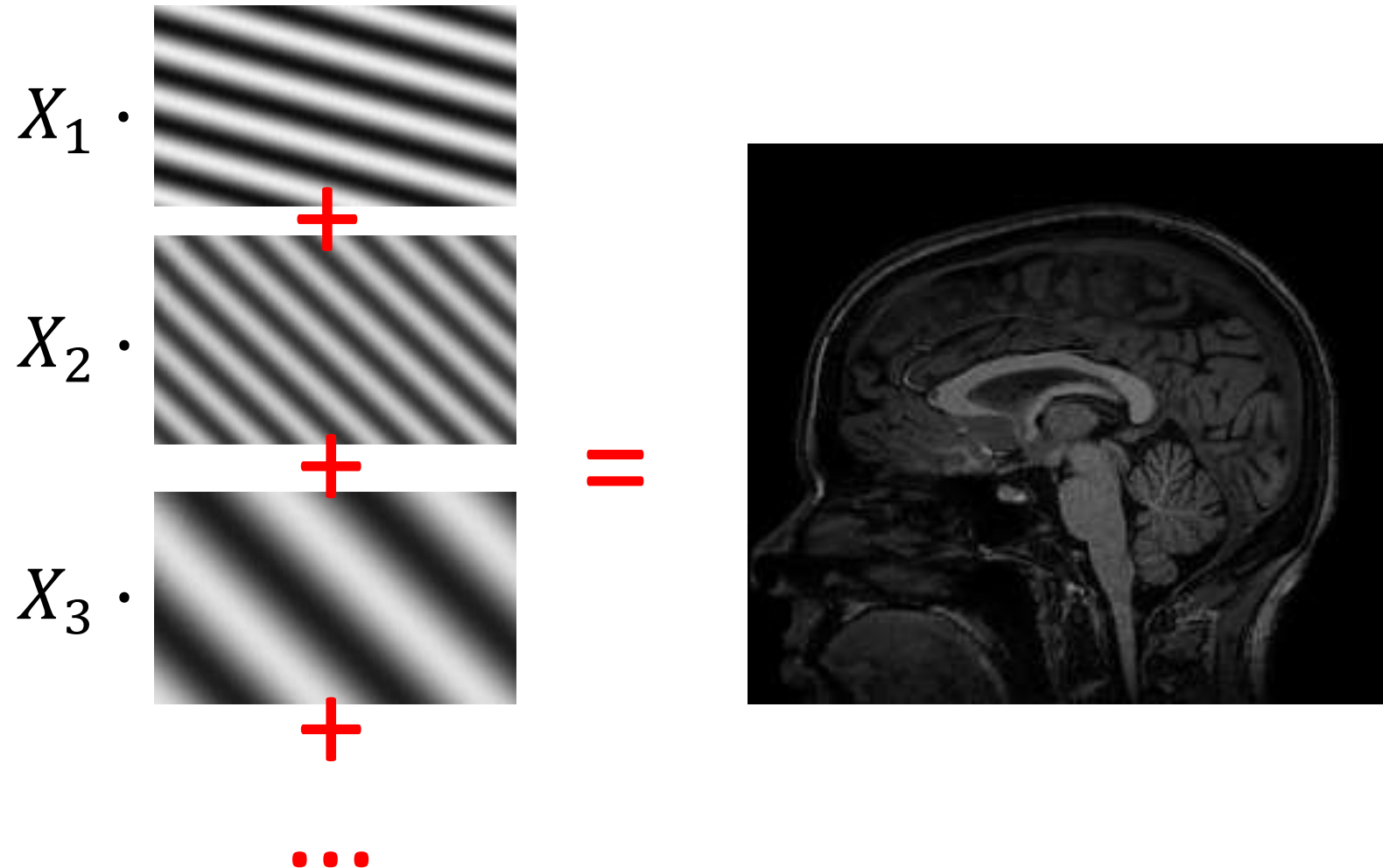
Mischung von Obertönen ergibt verschiedene Klangfarben beim selben Grundton:



Anschaung: Orts-/Raumfrequenzen



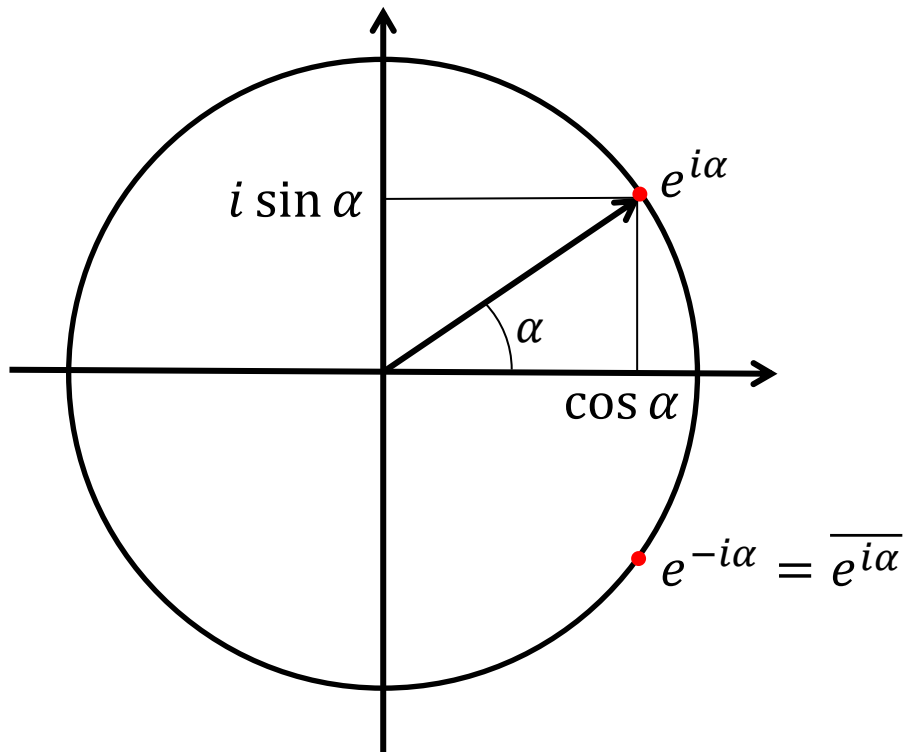
Anschaung: Bilder als Mischung reiner Ortsfrequenzen



Komplexe Notation: Euler'sche Formel

Die **Euler'sche Formel** verknüpft Sinus und Kosinus mit der komplexen Exponentialfunktion ($i = \sqrt{-1}$):

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$



$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad \sin \alpha = -i \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2}$$

Polarform komplexer Zahlen mit Absolutbetrag r und Winkel ϕ :

$$z = r e^{i\phi} = r(\cos \phi + i \sin \phi)$$

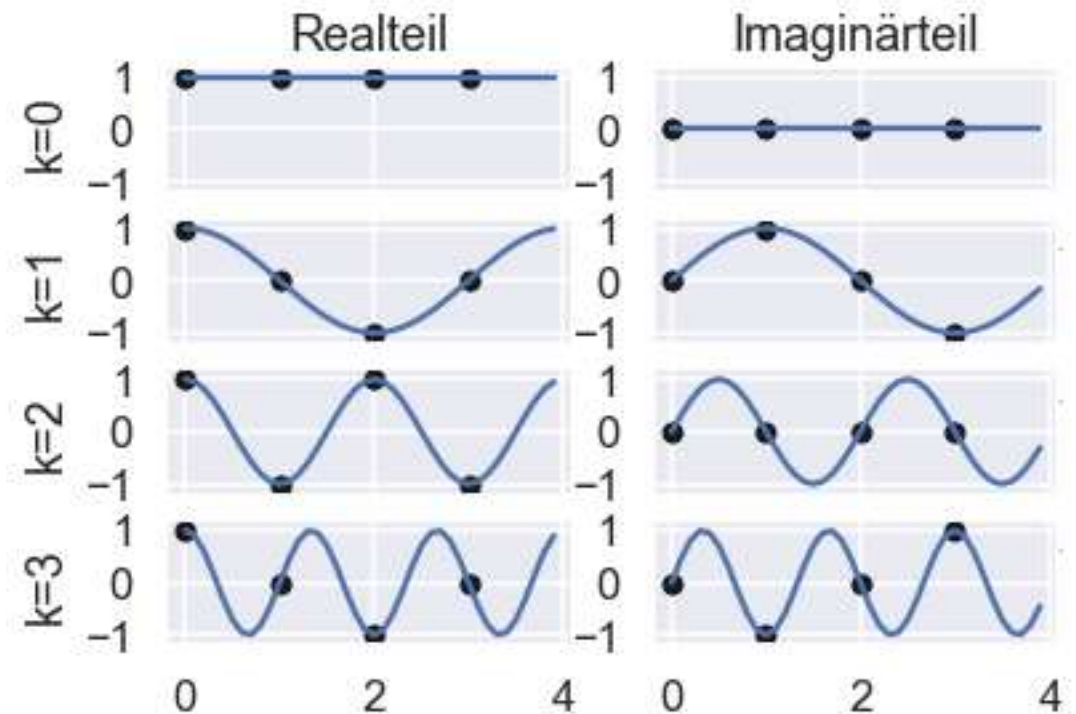
Grundidee: Diskrete Fourier-Transformation

- Die **diskrete Fourier-Transformation** (DFT) stellt ein diskretes Signal mit N Messwerten $x_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, \dots, N - 1$, durch N Fourierkoeffizienten $X_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, N - 1$, dar.

- Als Basis nutzt sie die Funktionen

$$e^{2\pi i k \frac{n}{N}}$$

- Beispiel für $N = 4$:



Definition: Diskrete Fourier-Transformation

- Gegeben sei eine Folge von N diskreten Messwerten $x_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, \dots, N - 1$
- Die **diskrete Fourier-Transformation** (DFT) bildet diese wie folgt auf N Fourierkoeffizienten $X_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, N - 1$ ab:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i k \frac{n}{N}} x_n$$

- Die entsprechende **Inverse DFT** ermöglicht es, aus den X_k wieder die x_n zu rekonstruieren:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k \frac{n}{N}} X_k$$

DFT Reeller Signale

- Komplexe Konjugation der DFT-Koeffizienten zeigt uns eine Symmetrie der DFT reeller Signale:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i k \frac{n}{N}} x_n \Rightarrow \bar{X}_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k \frac{n}{N}} \bar{x}_n$$

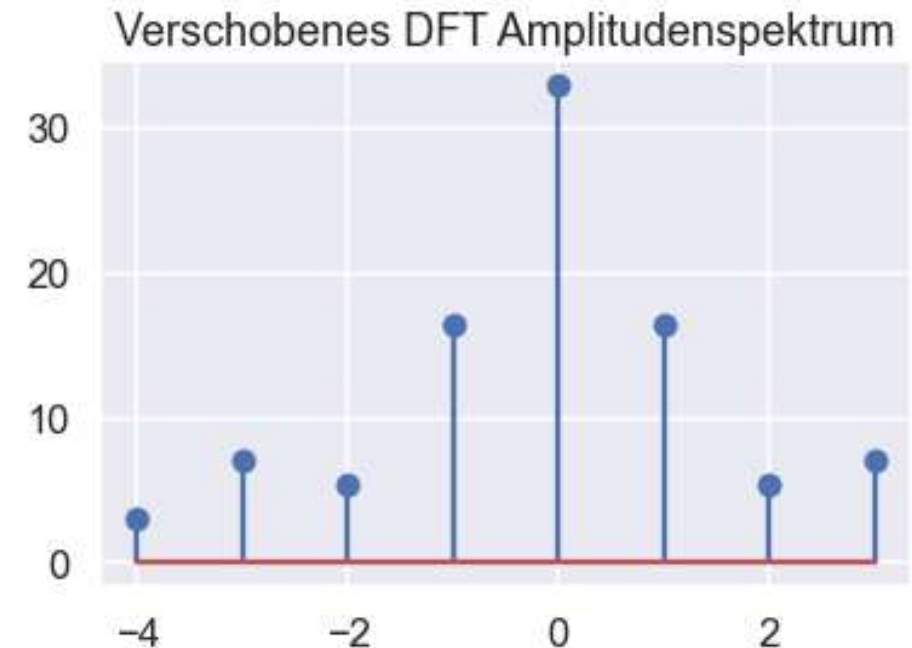
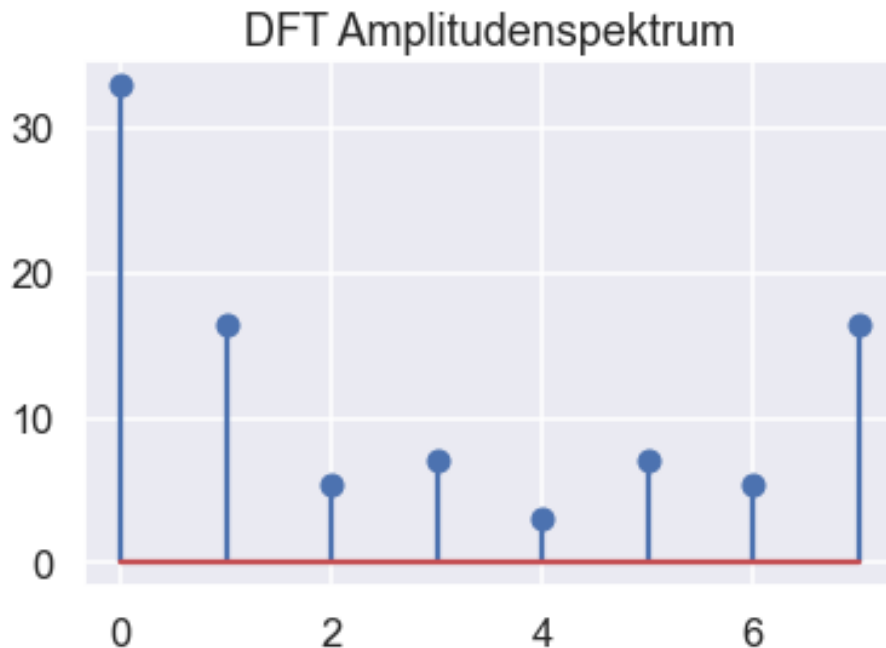
- Für reelle Signale ist $x_n = \bar{x}_n$. Somit ist:

$$\bar{X}_{N-k} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i (N-k) \frac{n}{N}} x_n = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{e^{2\pi i n}}_{=1} e^{-2\pi i k \frac{n}{N}} x_n = X_k$$

- *Schlussfolgerung*: Für reelle Signale benötigen wir nur eine Hälfte der komplexen DFT-Koeffizienten, die andere Hälfte ist redundant.

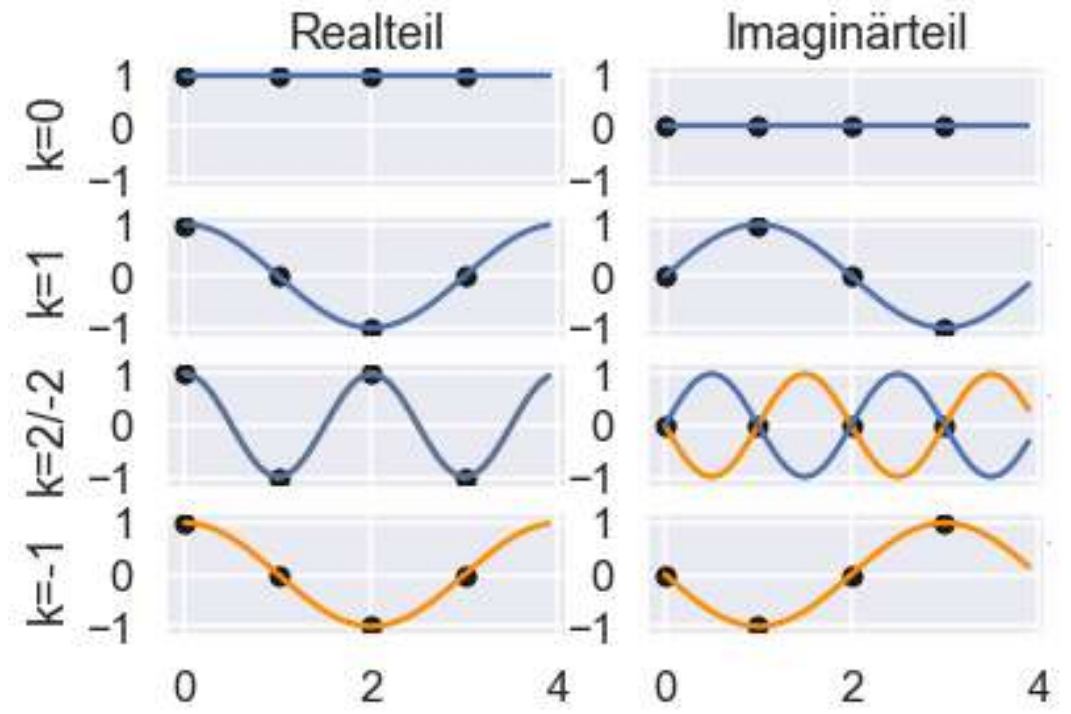
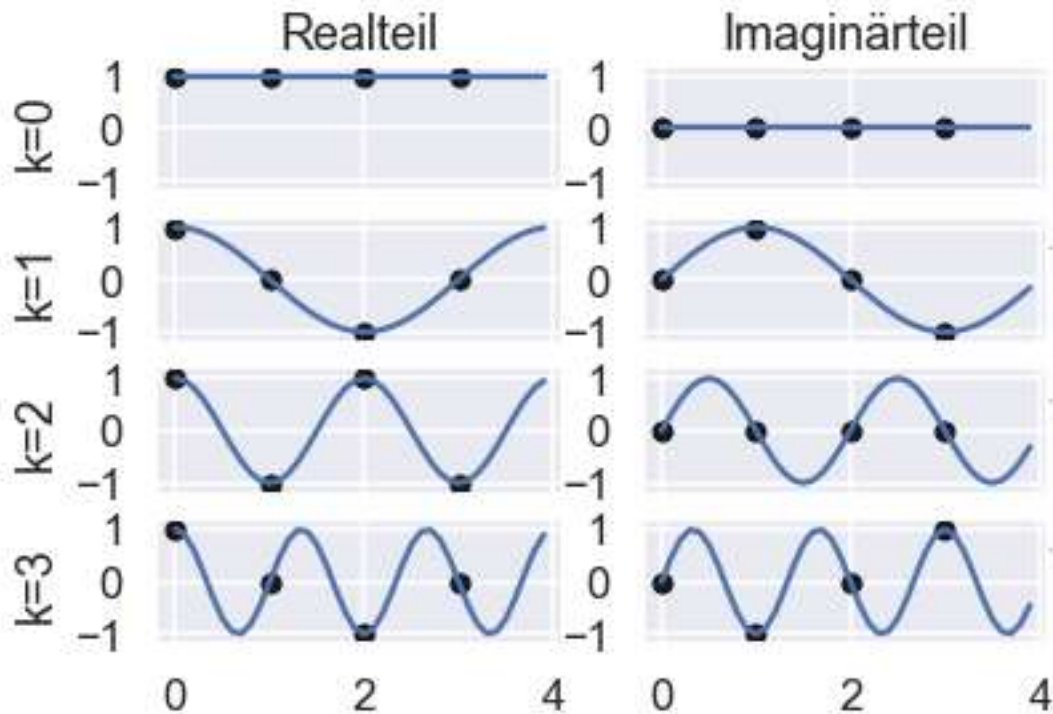
Grafische Darstellung des Spektrums

- Zur grafischen Darstellung verschiebt man Spektren häufig so, dass sie bei Null zentriert sind
 - Für gerade N wird die höchste Frequenz ganz links dargestellt
 - In Bibliotheken häufig als `fftshift` bezeichnet. Vor der Rücktransformation ggf. durch `ifftshift` rückgängig machen!



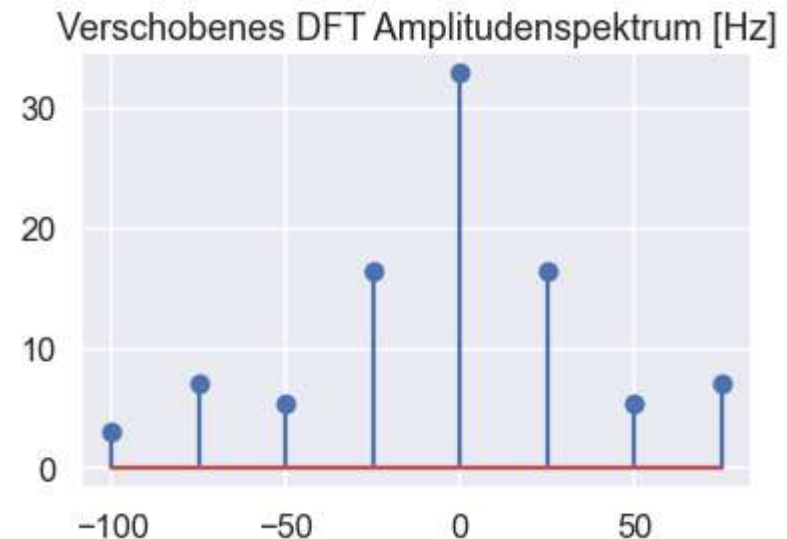
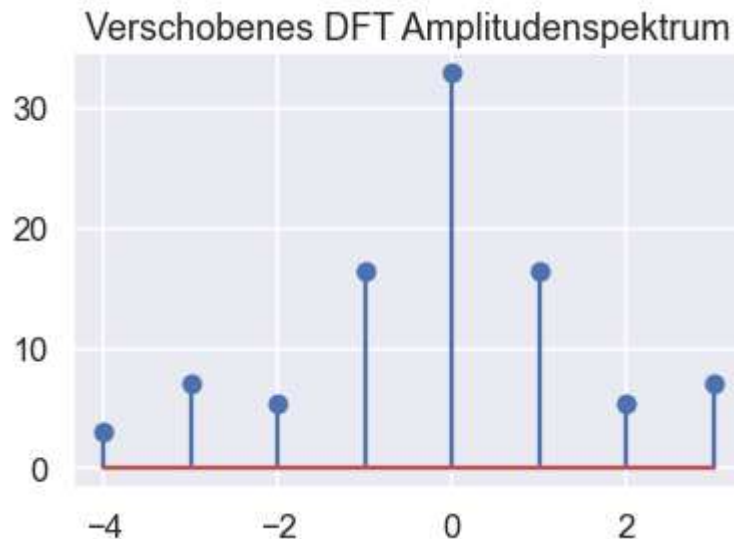
Anschaung: Negative Frequenzen

- Die Äquivalenz von $e^{2\pi i(N-k)\frac{n}{N}}$ und $e^{-2\pi i k \frac{n}{N}}$ können wir auch grafisch veranschaulichen:



Frequenzraster der DFT

- Decken die N Messpunkte einen Zeitraum von T Sekunden ab, entspricht der DFT-Koeffizient X_k der Frequenz $\frac{k}{T}$ Hz
 - Bei einer Abtastfrequenz von $\frac{N}{T}$ Hz ergibt sich als höchste „verwertbare“ Frequenz $\frac{N}{2T}$ Hz
 - In der Bildverarbeitung analog mit Ortsfrequenzen
 - *Beispiel:* Abtastfrequenz von 200 Hz:



Interpretation der DFT-Koeffizienten reeller Signale

- *Erinnerung: Polarform* mit Absolutbetrag r und Winkel ϕ :

$$z = r e^{i\phi} = r(\cos \phi + i \sin \phi)$$

- Einsetzen von $X_k = \frac{N}{2} r e^{i\phi}$, $X_{N-k} = \frac{N}{2} r e^{-i\phi}$,
 $X_{k'} = 0$ für $k' \notin \{k, N-k\}$ in die inverse DFT:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{N} \left(\frac{N}{2} r e^{i\phi} e^{2\pi i k \frac{n}{N}} + \frac{N}{2} r e^{-i\phi} e^{2\pi i (N-k) \frac{n}{N}} \right) \\ &= \frac{1}{2} r \left(e^{i(2\pi k \frac{n}{N} + \phi)} + e^{-i(2\pi k \frac{n}{N} + \phi)} \right) = r \cos \left(2\pi k \frac{n}{N} + \phi \right) \end{aligned}$$

- *Schlussfolgerung*: Der Betrag des DFT-Koeffizienten X_k eines reellen Signals gibt (bis auf den Normierungsfaktor) die *Amplitude* einer Kosinus-Schwingung ($k \times$ Grundfrequenz) an, der Winkel seine *Phase*

Zusammenfassung

- Die **Diskrete Fourier-Transformation** (DFT) zerlegt diskrete Signale in ihre spektralen Anteile
 - Komplexe Notation: Interpretation als Amplitude und Phase
 - Redundanz bei der Transformation reeller Signale: Die zweite Hälfte der Koeffizienten ergibt sich durch Konjugation aus der ersten
- Die **inverse DFT** ermöglicht eine Synthese aus den spektralen Komponenten
 - Hierzu müssen wir Amplituden *und Phasen* kennen!
- *Hinweis:* **FFT** (Fast Fourier Transform) bezeichnet einen schnellen Algorithmus zur Berechnung der DFT.
 - Details in der Übung

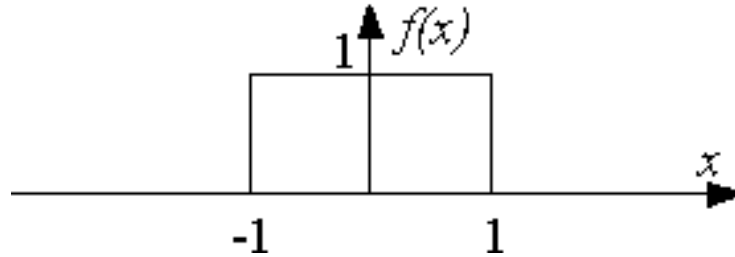
2.2 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Kontinuierliche Fourier-Transformation

Analog zur DFT für endliche Folgen von Messwerten lässt sich eine kontinuierliche Fourier-Transformation für stückweise stetige, absolut integrierbare Funktionen $f(x)$ herleiten:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Vorwärts-Transformation } \mathcal{F}\{.\} & \\ X_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i k \left(\frac{n}{N}\right)} x_n & \left| \right. & F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i u x} dx \\ x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k \left(\frac{n}{N}\right)} X_k & \left| \right. & f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2\pi i u x} du \\ & \text{Inverse Transformation } \mathcal{F}^{-1}\{.\} & \end{array}$$

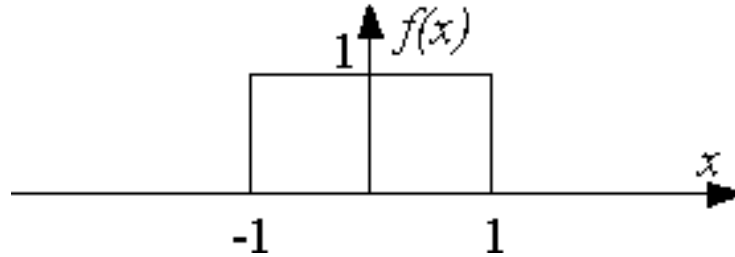
Beispiel: Fourier-Transformation einer Rechteckfunktion



$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i u t} dt = \int_{-1}^1 e^{-2\pi i u t} dt = -\frac{1}{2\pi i u} \left[e^{-2\pi i u t} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{i}{2\pi u} (e^{-2\pi i u} - e^{2\pi i u}) = \frac{1}{\pi u} (-i) \frac{e^{2\pi i u} - e^{-2\pi i u}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Erinnerung: } \sin \alpha = -i \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2}$$

Beispiel: Fourier-Transformation einer Rechteckfunktion



$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i u t} dt = \int_{-1}^1 e^{-2\pi i u t} dt = -\frac{1}{2\pi i u} \left[e^{-2\pi i u t} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{i}{2\pi u} (e^{-2\pi i u} - e^{2\pi i u}) = \frac{1}{\pi u} (-i) \frac{e^{2\pi i u} - e^{-2\pi i u}}{2} = 2 \frac{\sin(2\pi u)}{2\pi u} \end{aligned}$$

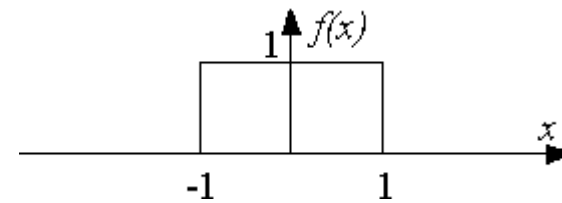
Erinnerung: $\sin \alpha = -i \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2}$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Rechteckfunktion im Orts- und Frequenzraum

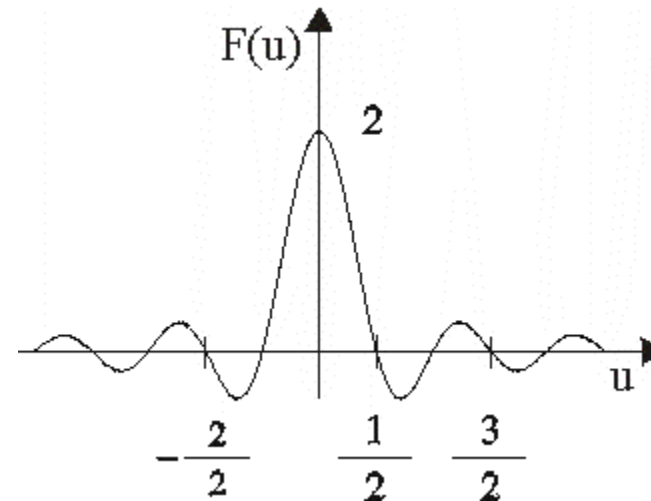
- Ortsraum

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



- Frequenzraum

$$F(u) = 2 \frac{\sin(2\pi u)}{2\pi u}$$



Dualität zwischen Orts- und Frequenzraum

- **Satz:** Wenn $F(u)$ die Fourier-Transformation von $f(x)$ ist, dann ist $f(-x)$ die Fourier-Transformation von $F(u)$.
- **Beweis:** Ergibt sich direkt aus der Ähnlichkeit der Definitionen von Fourier-Transformation und ihrer Inversen:

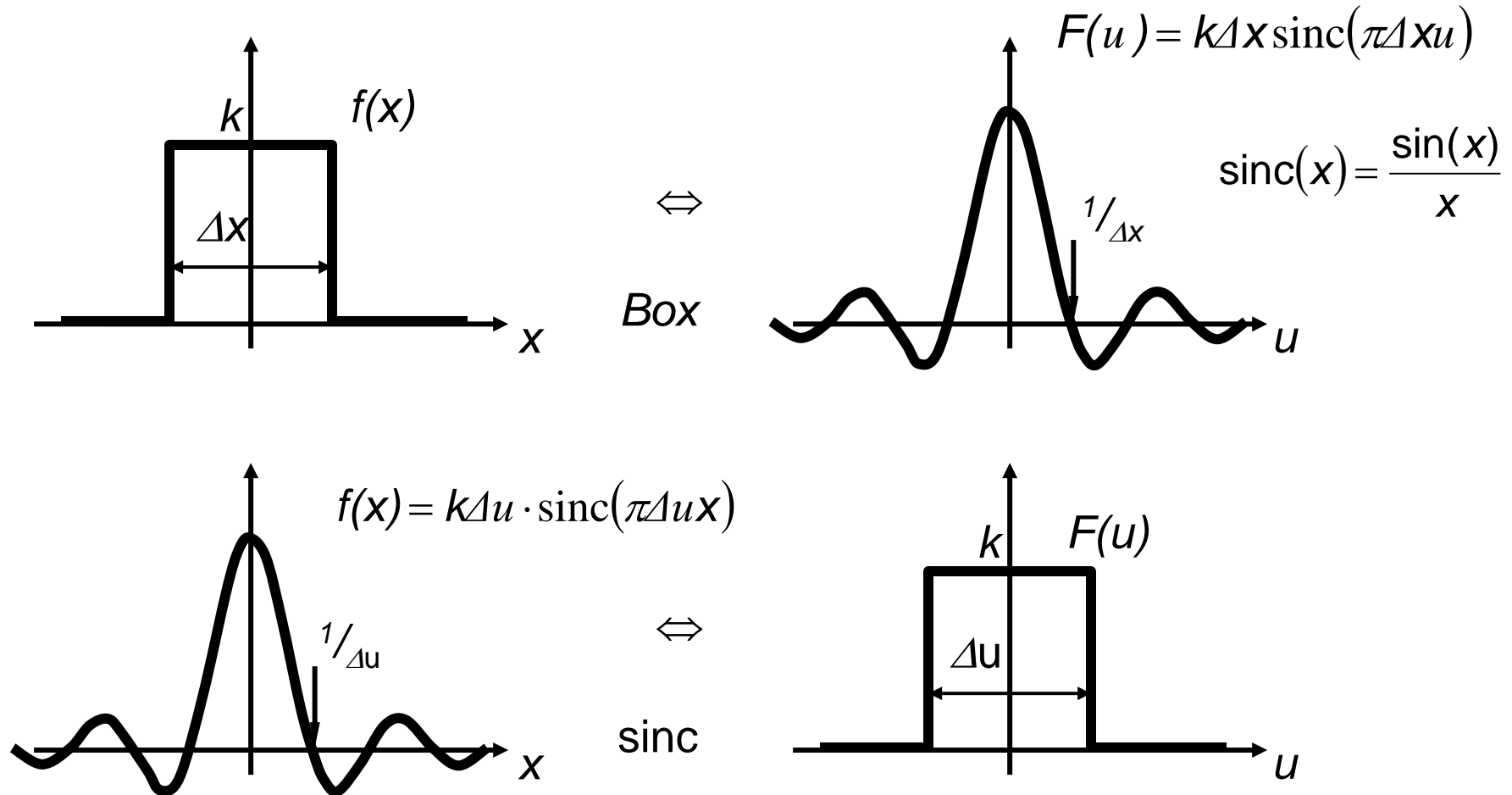
$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i u x} dx \quad \text{Vorwärts-Transformation von } f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2\pi i u x} du \quad \text{Inverse Transformation von } F(u)$$

Daher:

$$f(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-2\pi i u x} du \quad \nwarrow = \text{Vorwärts-Transformation von } F(u)$$

Fourier-Paar: Rechteck und Sinus cardinalis (sinc)

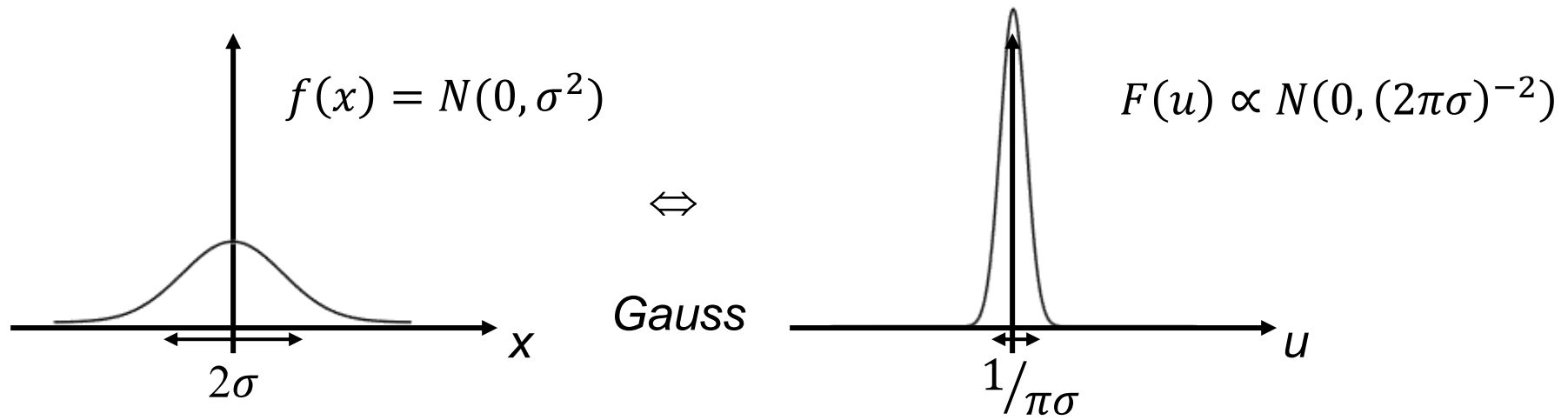


Bemerkung: Für gerade Funktionen $f(-x)=f(x)$ spielt der Vorzeichenwechsel in der Fourier-Dualität keine Rolle.

Fourier-Transformation der Normalverteilung

Die Fourier-Transformation einer Gauss-Verteilung $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ist

$$\mathcal{F}\{\mathcal{N}(0, \sigma^2)\} = e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{\sigma_u^2}} \text{ mit } \sigma_u = \frac{1}{2\pi\sigma}$$



Faltungssatz

- **Satz:** $f(x)=h(x)*g(x)$ entspricht $F(u)=H(u)\cdot G(u)$
- **Beweis:**
$$F(u) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} h(\xi)g(x-\xi)d\xi e^{-2\pi i u x} dx$$
$$= \int_{\xi=-\infty}^{\infty} h(\xi) \int_{x=-\infty}^{\infty} g(x-\xi) e^{-2\pi i u x} dx d\xi$$

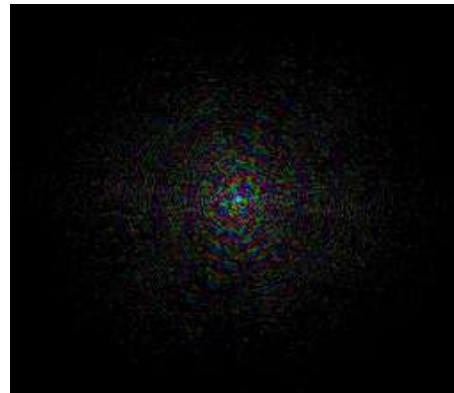
mit $y := x - \xi$ ($dy=dx$):

$$= \int_{\xi=-\infty}^{\infty} h(\xi) \int_{y=-\infty}^{\infty} g(y) e^{-2\pi i u (y+\xi)} dy d\xi$$
$$= \underbrace{\int_{\xi=-\infty}^{\infty} h(\xi) e^{-2\pi i u \xi} d\xi}_{=:H(u)} \underbrace{\int_{y=-\infty}^{\infty} g(y) e^{-2\pi i u y} dy}_{=:G(u)}$$

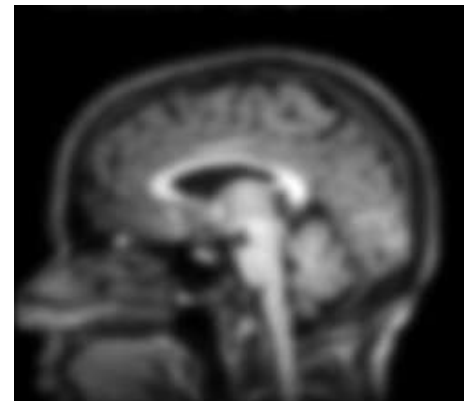
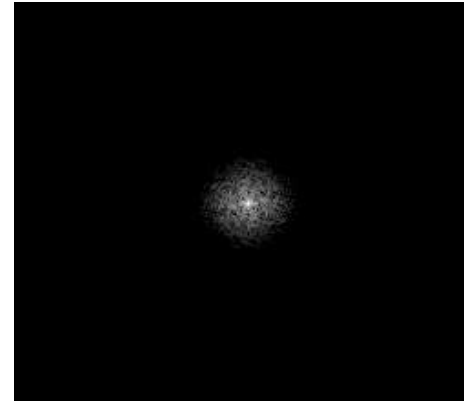
Hinweis: Ebenso gilt: $f(x) = h(x) \cdot g(x)$ entspricht $F(u) = H(u) * G(u)$

Erste Anwendung des Faltungssatzes

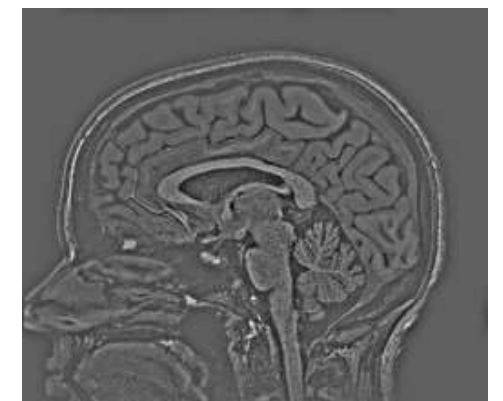
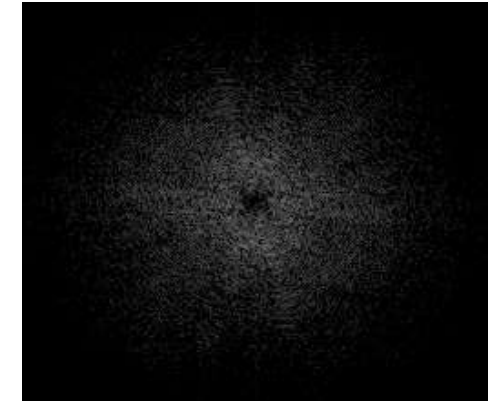
- **Bildfilterung** durch Faltung mit einem Gauss-Kern entspricht einer gaussförmigen Abschwächung höherer Frequenzen
 - Multiplikation mit $1 - e^{-\frac{\|s\|^2}{2\sigma_u^2}}$ im Frequenzraum ermöglicht Hochpass-Filter
 - Filterung im Frequenzraum impliziert periodische Randbedingung



Eingabe



Tiefpass



Hochpass

Fourier-Transformation in mehreren Dimensionen

- In **Vektor-Notation** generalisiert die Fourier-Transformation wie folgt auf mehrere Dimensionen (z.B. Bilder):

- Vorwärts (Beispiel: 3D):

$$F(\mathbf{s}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) e^{-2\pi i(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})} d\mathbf{r}$$

- Invers:

$$f(\mathbf{r}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{s}) e^{2\pi i(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})} d\mathbf{s}$$

- In **Koordinaten-Notation** ist die Separierbarkeit leicht zu erkennen:

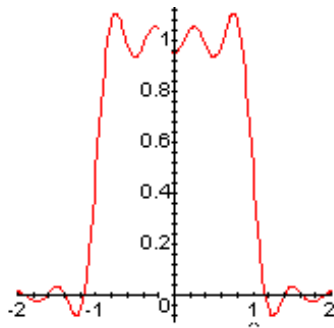
- Beispiel: Vorwärts-Transformation in 2D

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(ux+vy)} dx dy$$

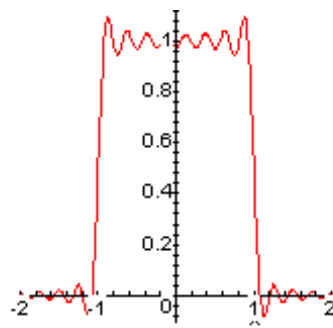
Beispiel: Unvollständige Rekonstruktion der Rechteckfunktion

- *Frage:* Wie verhält sich die inverse Fourier-Transformation, wenn wir die Integrationsgrenzen einschränken?

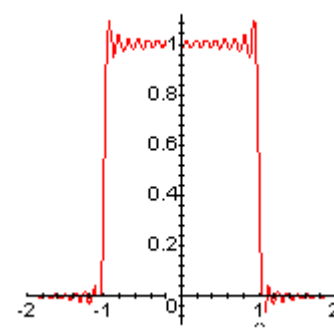
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{\sin(2\pi u)}{2\pi u} e^{2\pi i u x} du$$



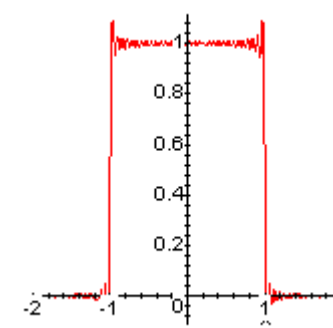
$$\int_{-1}^1 \dots du$$



$$\int_{-2}^2 \dots du$$



$$\int_{-4}^4 \dots du$$

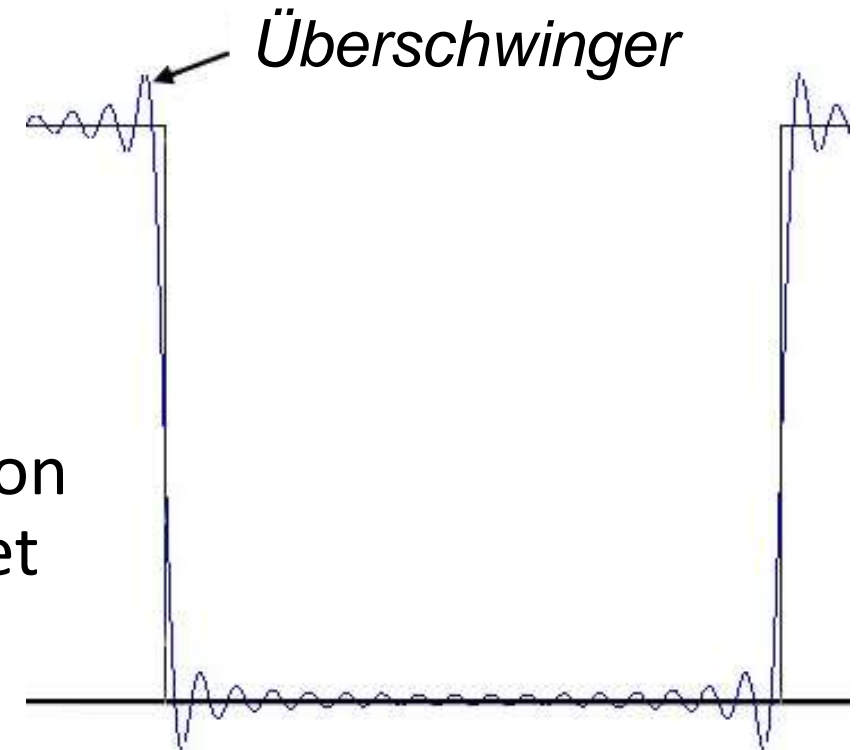


$$\int_{-8}^8 \dots du$$

Das Gibbs'sche Phänomen

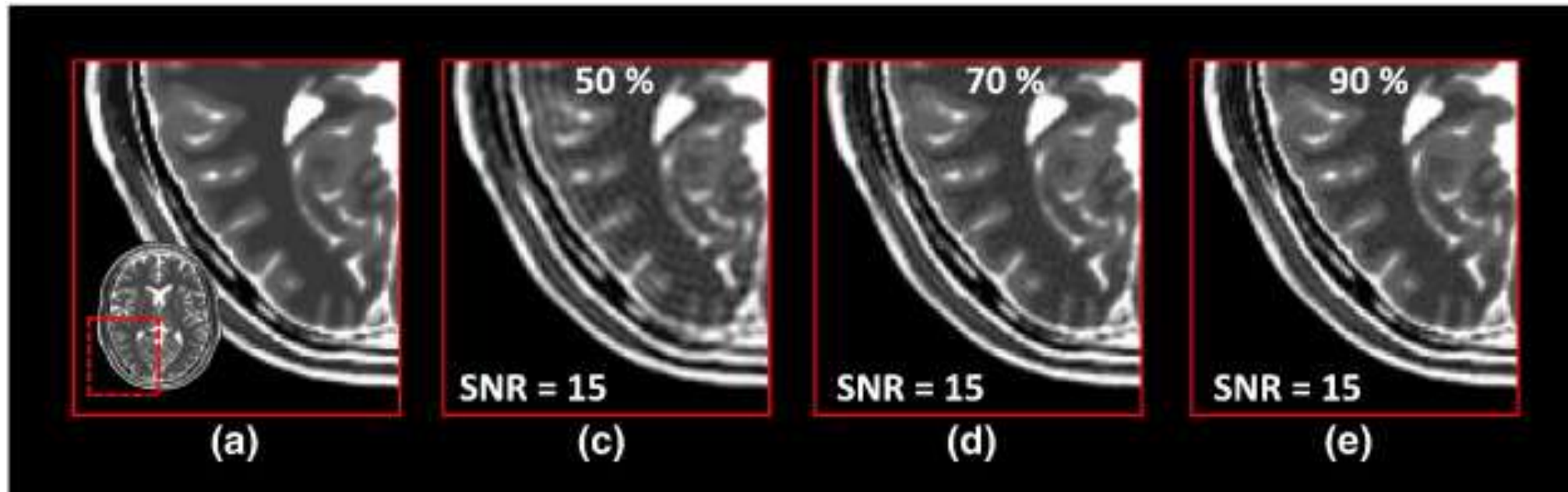
Beobachtung von **Josiah Willard Gibbs**:

- Berücksichtigt man bei der inversen Fourier-Transformation nur Frequenzen bis zu einer beliebig hohen, aber endlichen Grenze, treten in der Umgebung von Sprungstellen **Überschwinger** auf
- Der prozentuale Fehler beträgt stets ca. 18% der Sprunghöhe
- Konvergenz im Hinblick auf die Breite, nicht aber die Höhe der Überschwinger
- *Erklärung*: Abschneiden hoher Frequenzen entspricht Multiplikation mit Rechteckfunktion im Frequenzraum. Laut Faltungssatz bedeutet das Faltung mit sinc im Ortsraum.



Beispiel: Das Gibbs'sche Phänomen

- In manchen bildgebenden Verfahren (insbesondere Magnetresonanztomographie) kann das Gibbs'sche Phänomen Überschwinger in der Nähe scharfer Kanten erzeugen
 - Warum genau sehen wir in Kapitel 3



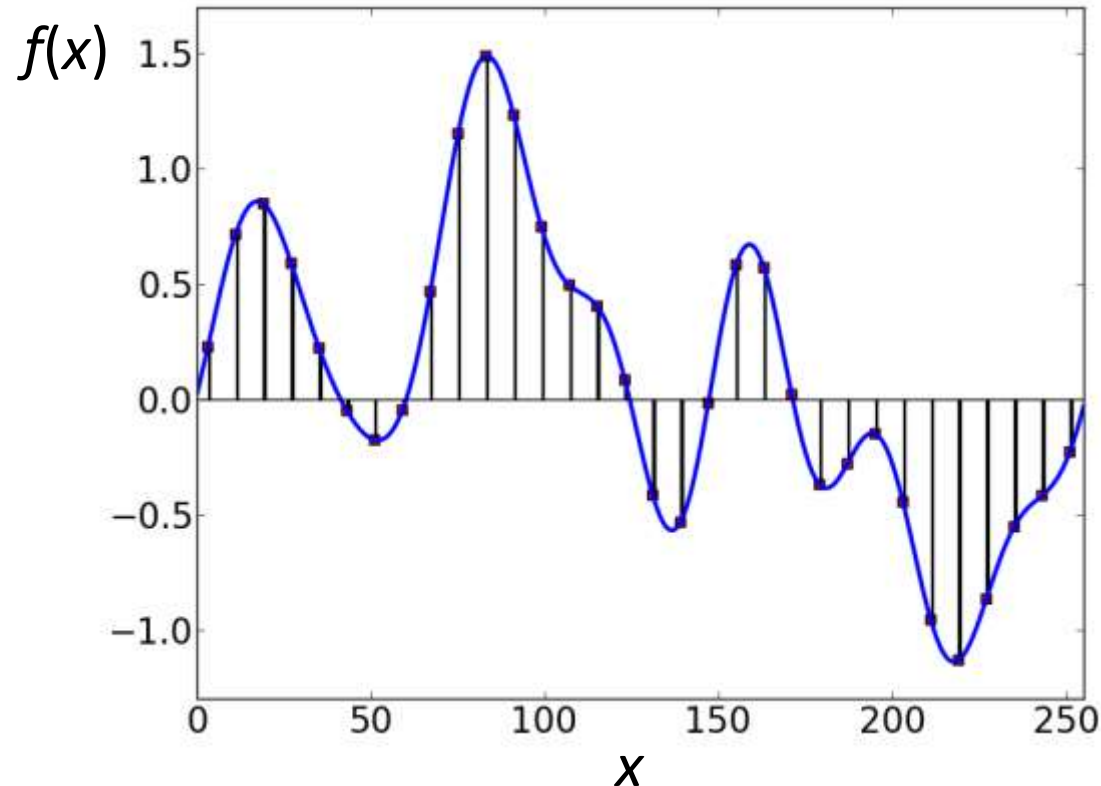
Zusammenfassung

- Die **kontinuierliche Fourier-Transformation** ermöglicht eine Frequenzanalyse und –synthese auch für integrierbare Funktionen
- Für uns wichtige **Eigenschaften** sind
 - Dualität von Orts- und Frequenzraum und bestimmte **Fourier-Paare**
 - Rechteckfunktion vs. Sinc
 - Gauss und (nicht normierter) Gauss
 - Der **Faltungssatz**. Er ermöglicht
 - Verständnis und Implementierung von **Bildfiltern**
 - Verständnis des **Gibbs'schen Phänomens**

2.3 Das Abtasttheorem

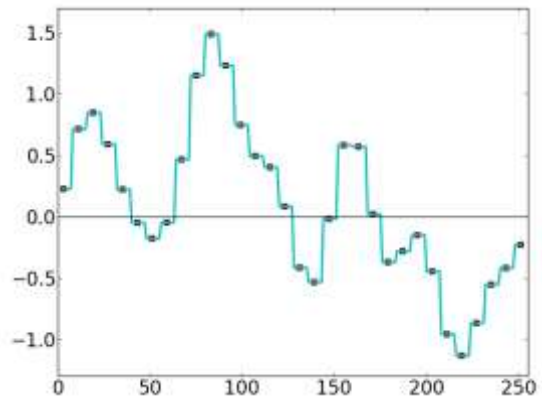
Abtastung kontinuierlicher Signale

- Um ein durch eine kontinuierliche Funktion $f(x)$ beschriebenes Signal zu diskretisieren, tasten wir in gleichmäßigen Abständen eine Folge von Messwerten ab

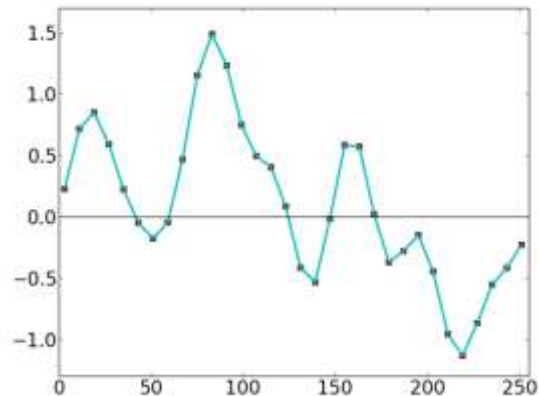


Rekonstruktion diskreter Signale

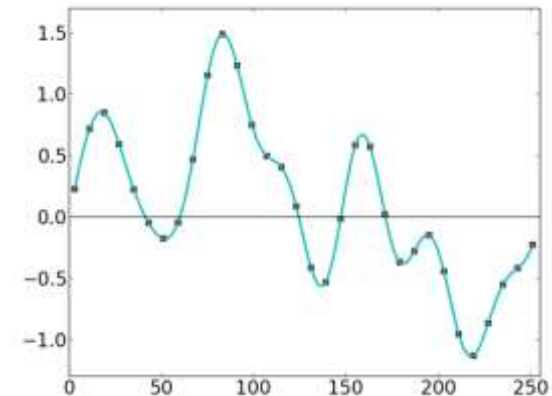
- **Interpolation** ermöglicht die Rekonstruktion einer kontinuierlichen Funktion $f(x)$ aus Abtastwerten
- *Beispiel:* Verschiedene Interpolationen derselben Werte



Nächster Nachbar



Linear



Spline

Grundlegende Fragen digitaler Signalverarbeitung

- **Wie dicht** müssen wir das Signal abtasten?
 - Welche Fehler haben wir zu erwarten, wenn wir nicht eng genug abtasten?
- **Wie** sollten wir **interpolieren**?
 - Können wir insbesondere das **ursprüngliche Signal exakt rekonstruieren**? Unter welchen Bedingungen?
- Das **Abtasttheorem** wird uns diese Fragen beantworten
 - Auch wenn man in der Praxis z.T. davon abweicht ist es wichtig, sich über die Konsequenzen im Klaren zu sein!

Notation: Delta-Distribution

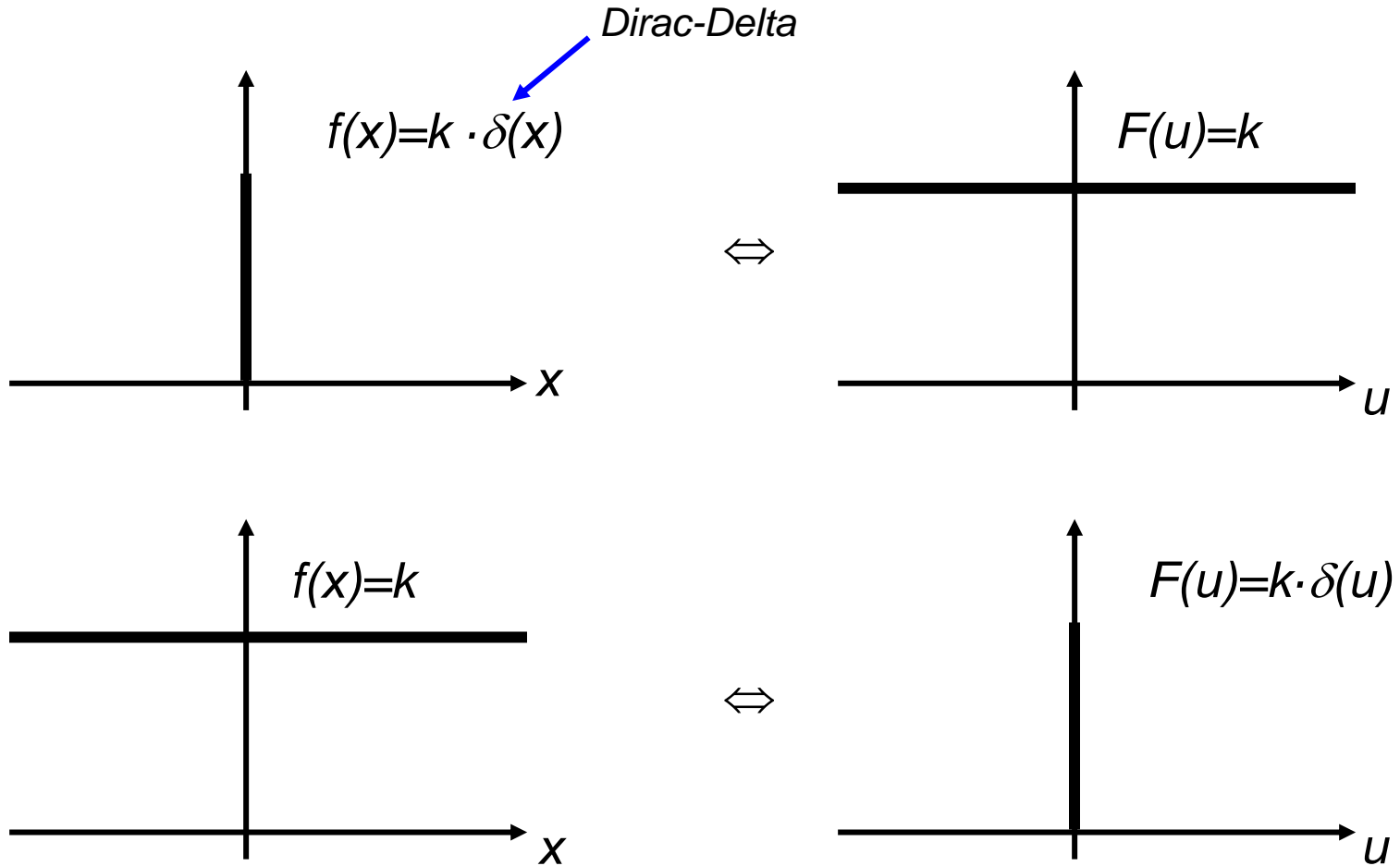
- Die Dirac'sche **Delta-Distribution** δ wertet Funktionen $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ aus
- Verbreitete Notation in der Signalverarbeitung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$

- Anschaulich (aber nicht ganz korrekt) stellt man sich $\delta(x)$ häufig als Funktion vor, die für alle $x \neq 0$ $\delta(x) = 0$ annimmt, $\delta(0) = \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$
 - z.B. Grenzwert der Gauss-Verteilung für $\sigma \rightarrow 0$
 - Grafische Darstellung von $\delta(x - a)$ durch senkrechte Linie bei $x = a$

Fourier-Paar: Konstante Funktion und Delta

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i u x} dx$$

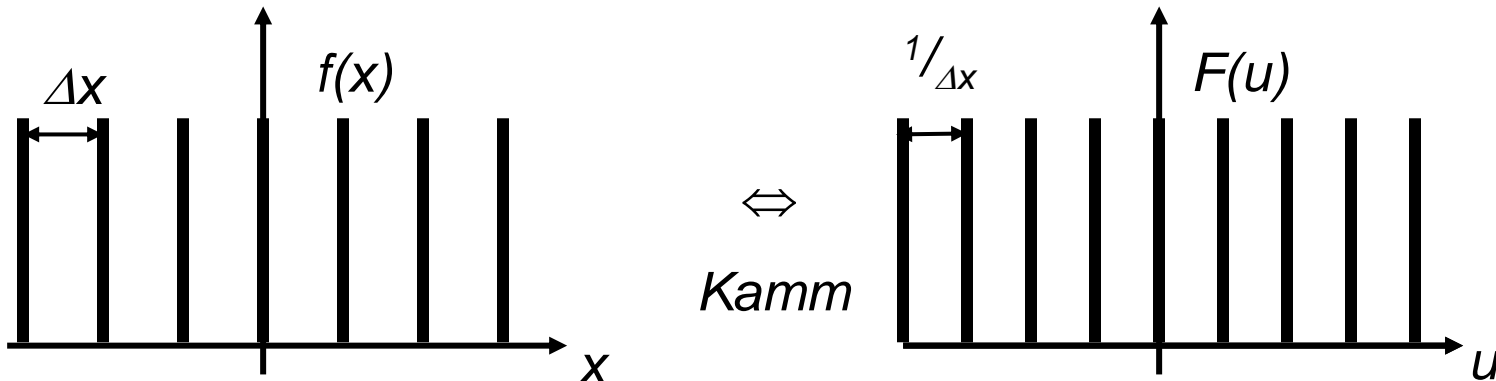


Fourier-Transformation des Dirac-Kamms

- Als **Dirac-Kamm** $\mathbb{W}_{\Delta x}$ bezeichnen wir eine unendliche Folge von Deltas mit Abstand Δx :

$$\mathbb{W}_{\Delta x}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\Delta x)$$

- Die Fourier-Transformierte von $\mathbb{W}_{\Delta x}$ ist $\mathcal{F}\{\mathbb{W}_{\Delta x}\} = \frac{1}{\Delta x} \mathbb{W}_{\frac{1}{\Delta x}}$

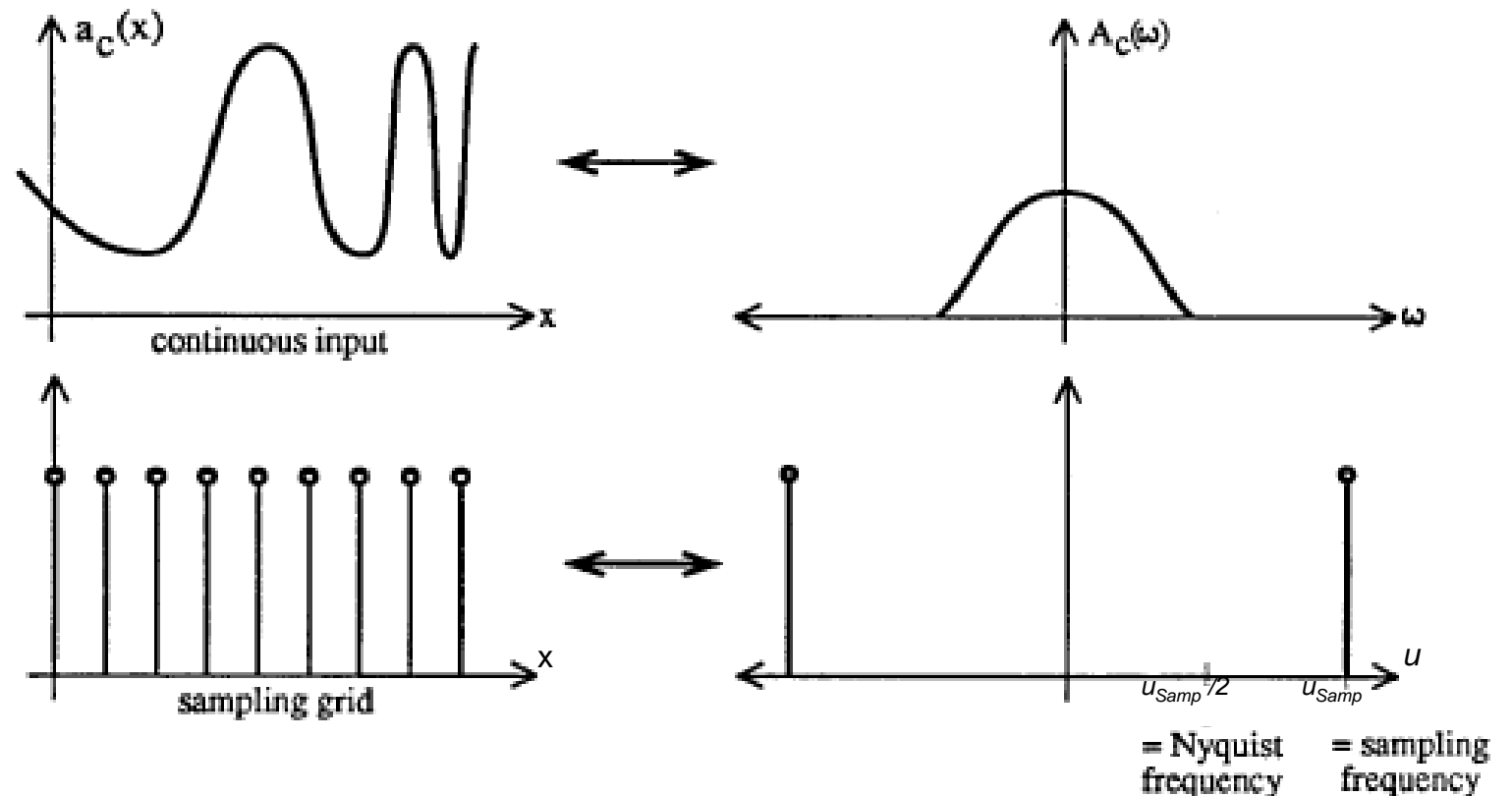


Auswirkung der Abtastung im Frequenzraum

- Eine regelmäßige Abtastung $x_k = f(k \cdot \Delta x)$ von $f(x)$ entspricht einer Multiplikation von f mit $\text{III}_{\Delta x}$

- Laut Faltungssatz ergibt sich im Frequenzraum eine Faltung des Spektrums $F(u)$

mit $\frac{1}{\Delta x} \text{III}_{\frac{1}{\Delta x}}$



Faltung mit dem Dirac-Kamm

1. Eine Faltung von $f(x)$ mit $\delta(x - a)$ ergibt $f(x - a)$:

$$\begin{aligned} f(x) * \delta(x - a) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(x - a - \xi) d\xi \\ \delta(x) = \delta(-x) \swarrow &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(\xi - (x - a)) d\xi \xleftarrow{\text{Definition von } \delta \text{ (Folie 35)}} = f(x - a) \end{aligned}$$

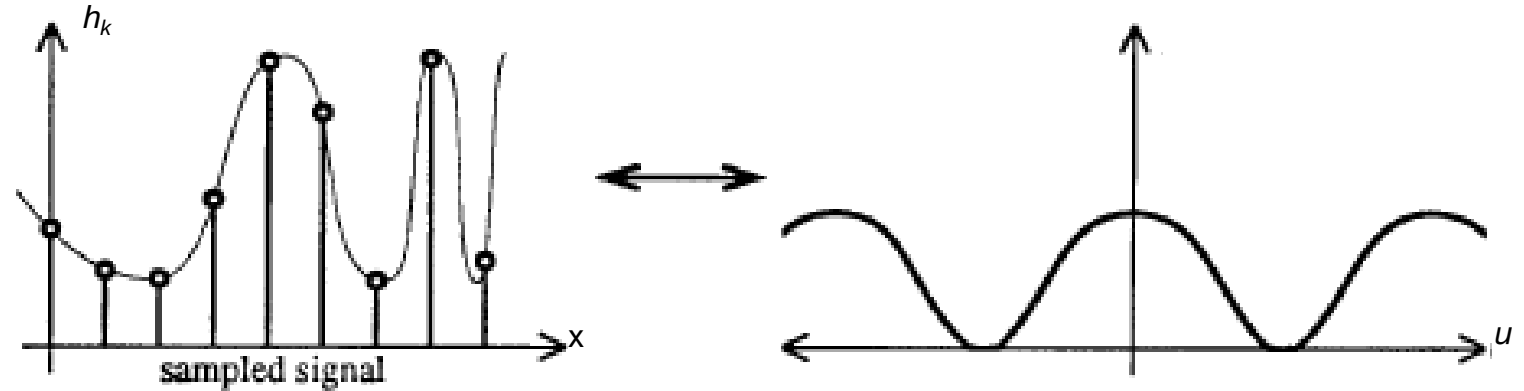
2. Aufgrund der Linearität der Faltung ergibt sich für $\mathbb{W}_{\Delta x}$

$$f(x) * \mathbb{W}_{\Delta x} = f(x) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\Delta x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x - k\Delta x)$$

d.h. wir summieren um $k\Delta x$ verschobene Kopien von f

Alias-Effekt

- Faltung mit $\frac{1}{\Delta x} \sqcap \frac{1}{\Delta x}$ im Frequenzraum erzeugt Kopien des Spektrums im Abstand $\Delta u = 1/\Delta x$



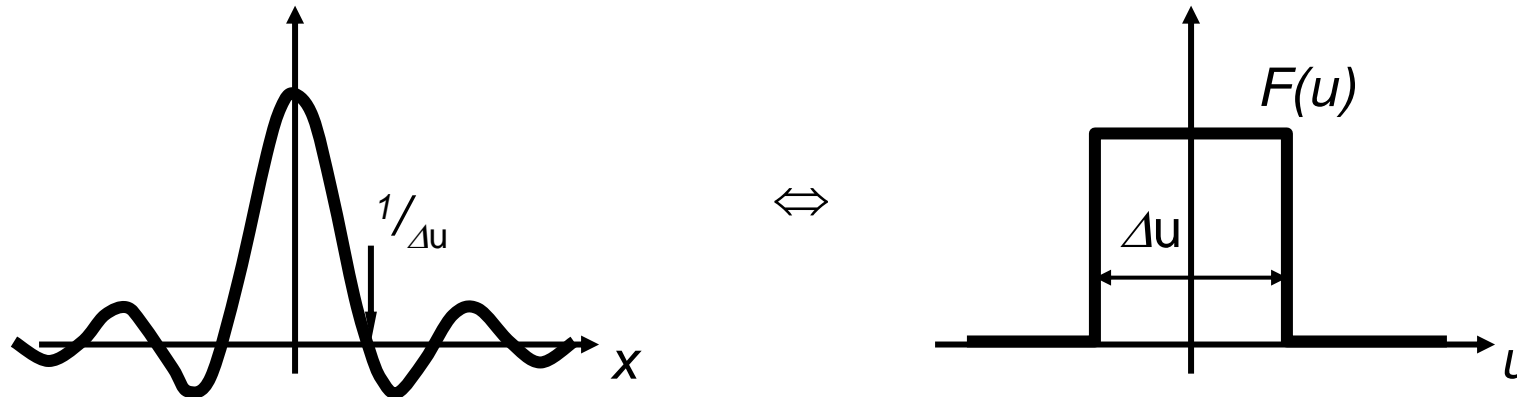
- **Alias-Effekt:** Frequenzanteile von f werden bei anderen Frequenzen dupliziert (lateinisch *alias*=anderswo)
- Wenn das Spektrum keine Frequenzen größer als $\Delta u/2$ enthält, überlappen diese Kopien nicht
 - **Bandbeschränkung** mit Bandbreite (Grenzfrequenz) $B \leq \Delta u/2$
- Das ursprüngliche Spektrum lässt sich durch Multiplikation einer Rechteckfunktion der Breite Δu im Frequenzraum rekonstruieren

Nyquist-Frequenz

- Die Abtastung eines bandbeschränkten Signals f mit Bandbreite B oberhalb der **Nyquist-Frequenz** $\omega=2B$ verhindert das Auftreten von Aliasing-Effekten.
- In der Praxis ist eine entsprechende Bandbegrenzung häufig nicht gegeben
 - Hohe Frequenzen sollten durch eine Vorfilterung entfernt werden

Rekonstruktion des Signals

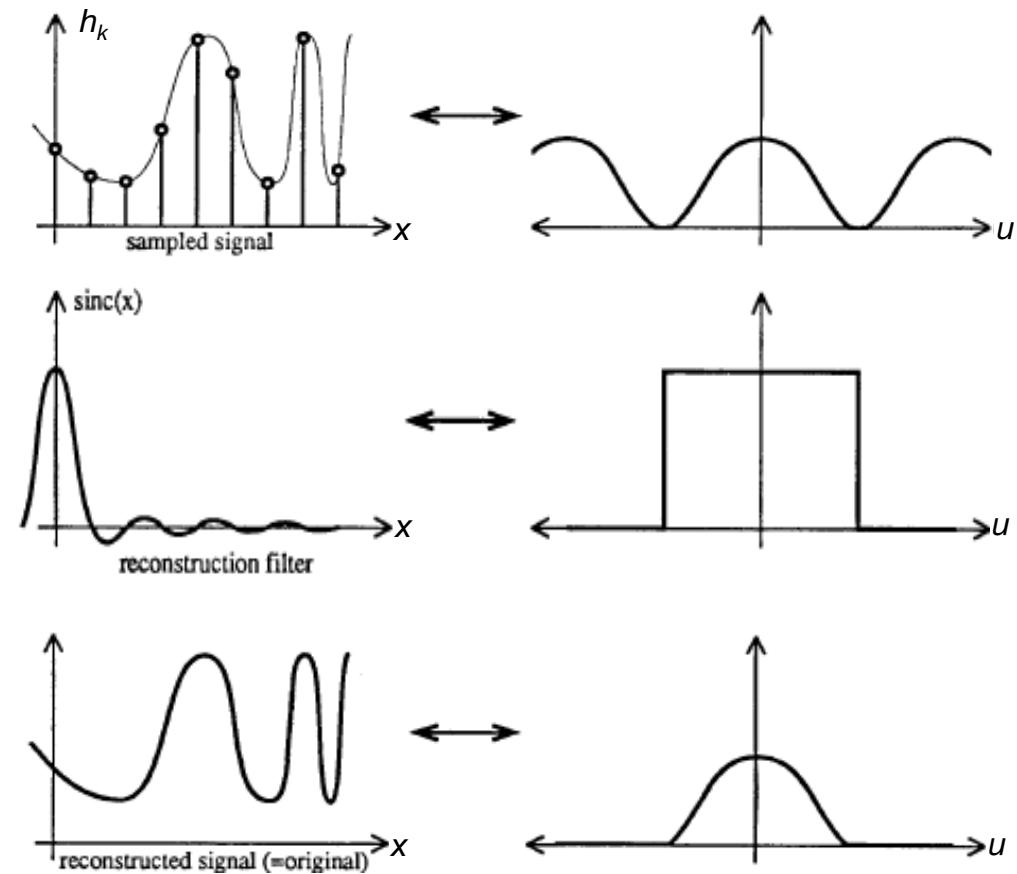
- Der Multiplikation mit einer Rechteckfunktion, mit der die überflüssigen Kopien des Spektrums wieder entfernt werden, entspricht eine Faltung mit dem sinc im Ortsraum
 - Rekonstruiert aus Messpunkten ein kontinuierliches Signal
 - Beispiel für faltungsbasierte Interpolation (siehe 2.4)



Abtast-Theorem

- **Theorem** (Nyquist/Shannon): Wenn $f(x)$ bandbegrenzt ist und oberhalb der Nyquist-Frequenz abgetastet wurde, kann es aus den Messwerten $x_k = f(k \cdot \Delta x)$ exakt rekonstruiert werden.

- Vernachlässigt Auswirkungen der Quantisierung
- Geht bei endlicher Messdauer von einer periodischen Fortsetzung des Signals aus

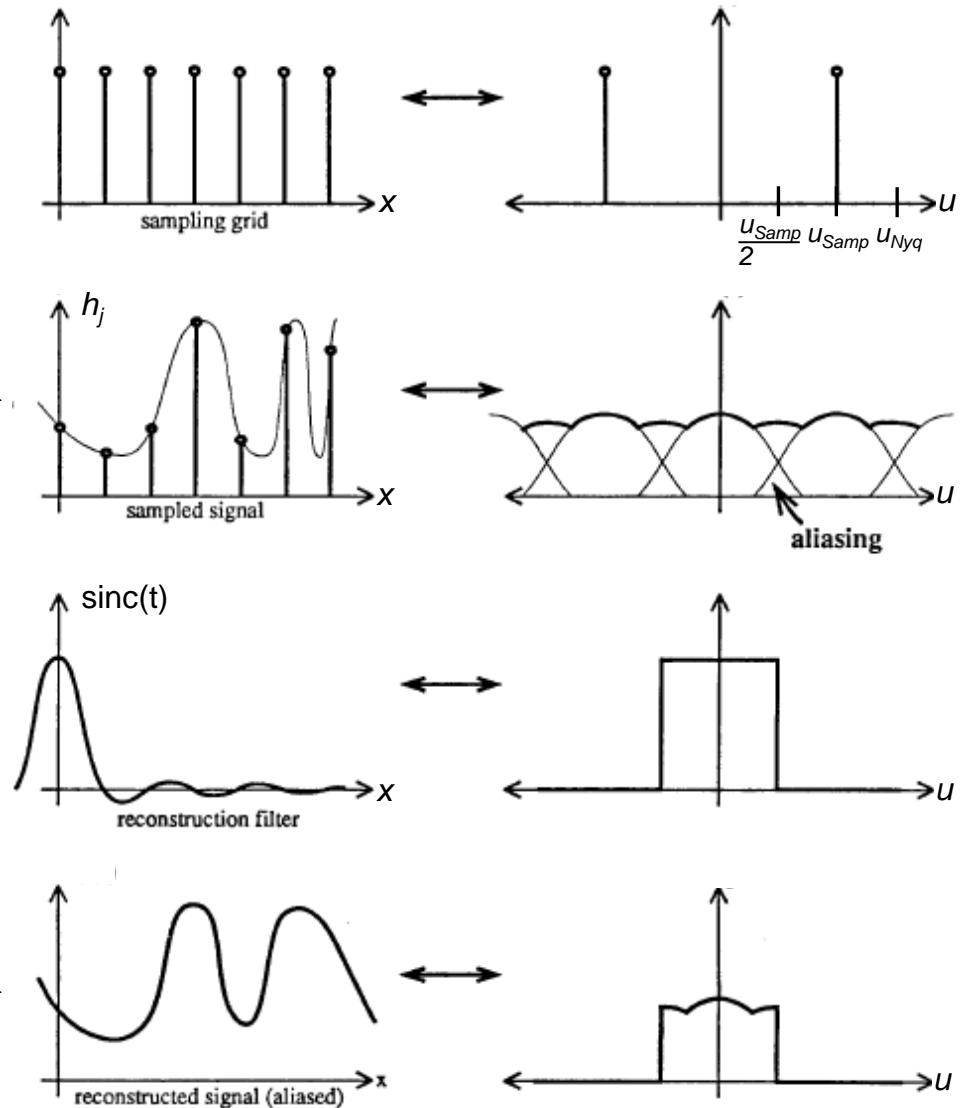


Gegenbeispiel: Unterabtastung

Illustration:
In einem unterabgetasteten 1D-Signal verhindert der Aliasing-Effekt eine korrekte Rekonstruktion

Ursprüngliches
Signal

Rekonstruiertes
Signal



Zusammenfassung

- Das **Abtasttheorem** besagt, dass ein kontinuierliches Signal durch *Abtastung* in ein diskretes Signal überführt und durch *Interpolation* wieder exakt rekonstruiert werden kann
 - *Voraussetzung*: Bandbegrenzung B und Einhalten der **Nyquist-Frequenz** $\omega=2B$
 - Interpolation durch Faltung mit dem Sinus Cardinalis
- Eine Unterschreitung der Nyquist-Frequenz führt zu **Alias-Effekten**, die sich z.B. in störenden Bildmustern äußern können
 - Beispiel in Kapitel 2.4

2.4 Resampling von Bildern

Motivation

- Eine Erhöhung der Bildauflösung bezeichnet man als **Upsampling**
 - *Beispiel:* Darstellung auf einem größeren Monitor
- Eine Reduzierung der Bildauflösung bezeichnet man als **Downsampling**
 - *Beispiel:* Sparen von Speicherplatz
- Bildtransformationen wie Rotationen oder Verschiebungen (um Bruchteile von Pixeln) erfordern ein **Resampling**
 - *Beispiel:* Bildregistrierung



Upsampling ↑



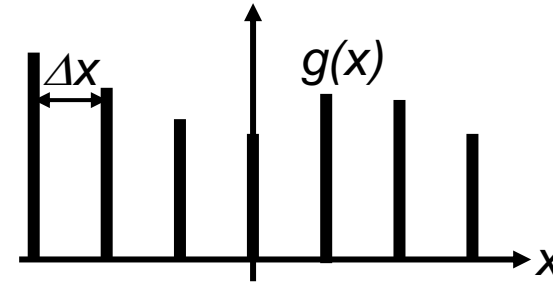
Downsampling ↓



Faltungsbasierte Rekonstruktion

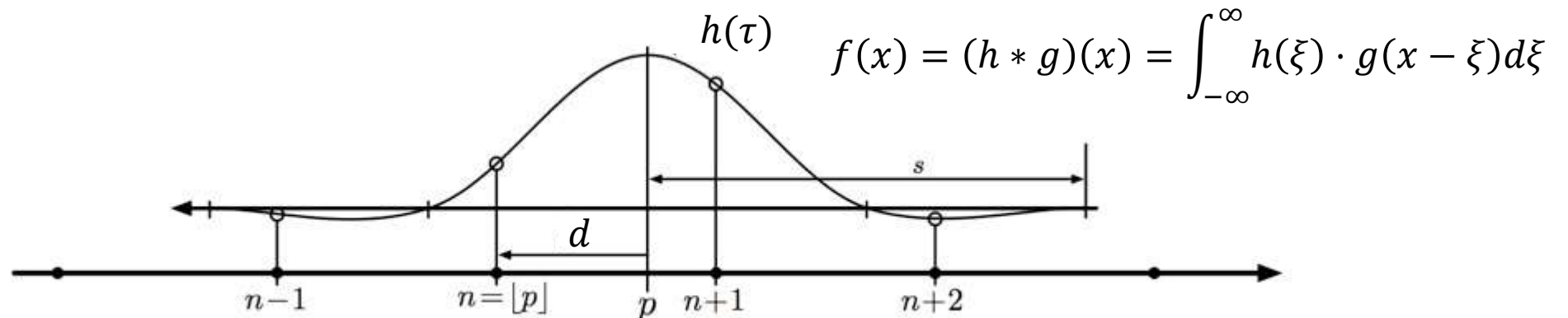
- Ein diskretes Signal (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ lässt sich als gewichtete Summe von Dirac-Deltas schreiben:

$$g(x) = \sum_{i=1}^n y_i \delta(x - x_i)$$



- Ein kontinuierliches Signal $f(x)$ erhalten wir durch Faltung von $g(x)$ mit einem Kern $h(x)$

– Qualität des Ergebnisses und Rechenaufwand hängen vom Kern ab

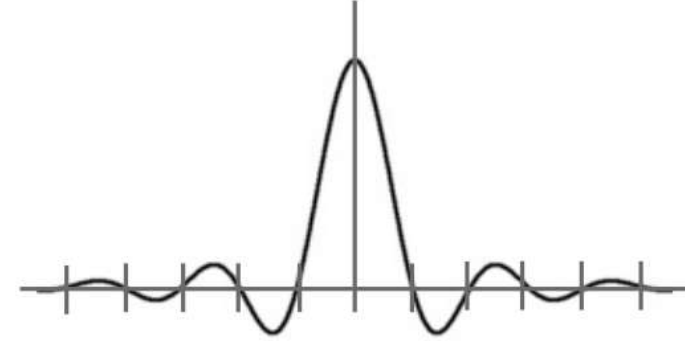


$$f(p) = \Delta x \times [y_{n-1}h(d + \Delta x) + y_n h(d) + y_{n+1}h(d - \Delta x) + y_{n+2}h(d - 2\Delta x)]$$

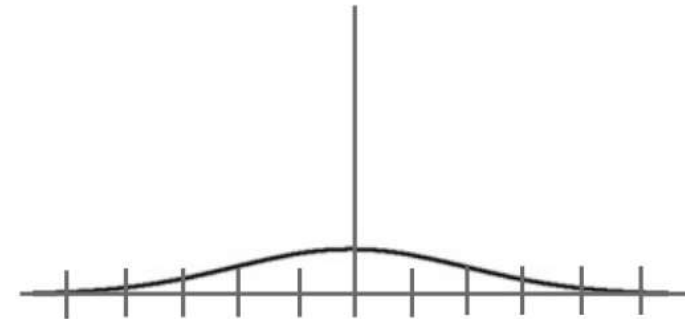
Überlegungen zu Interpolations-Faltungskerne

- Laut **Abtasttheorem** ermöglicht Faltung mit dem Sinc eine exakte Rekonstruktion
 - *Nachteil*: Hoher Rechenaufwand
- In der Praxis zur Interpolation genutzte **Faltungskerne** sind ein Kompromiss zwischen
 - Rechenaufwand (möglichst kleiner Träger)
 - glatten Ergebnissen (erfordern Berücksichtigung der Nachbarschaft)
- Es folgen einige beliebte **Beispiele**

Faltungskerne: Erste Ideen



Hann-windowed sinc
 $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$



Gaussian (stdv=2,
cutoff = 4 stdv)

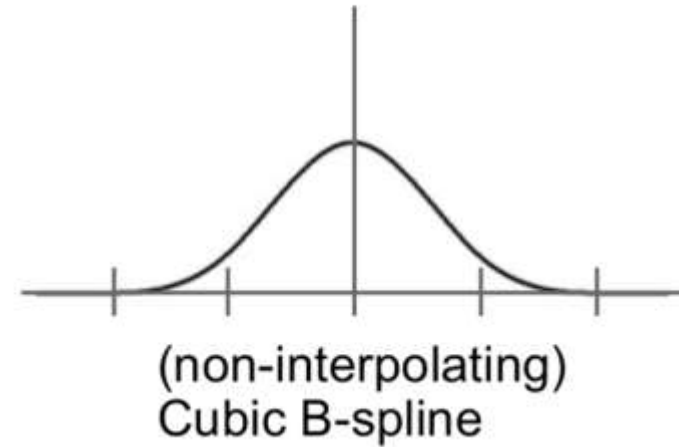
Faltungskerne: Der Catmull-Rom-Spline



Interpolating cubic spline
"Catmull-Rom"

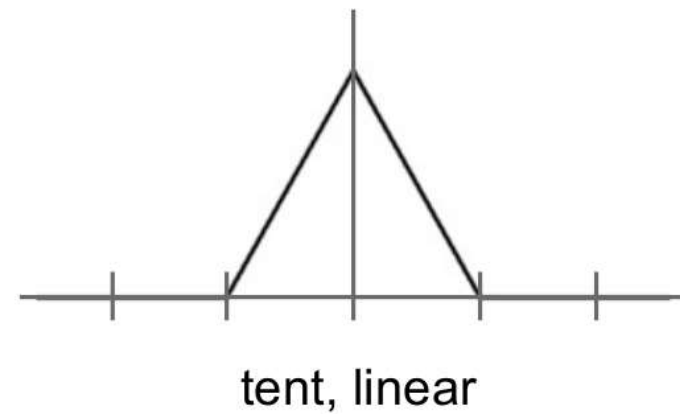
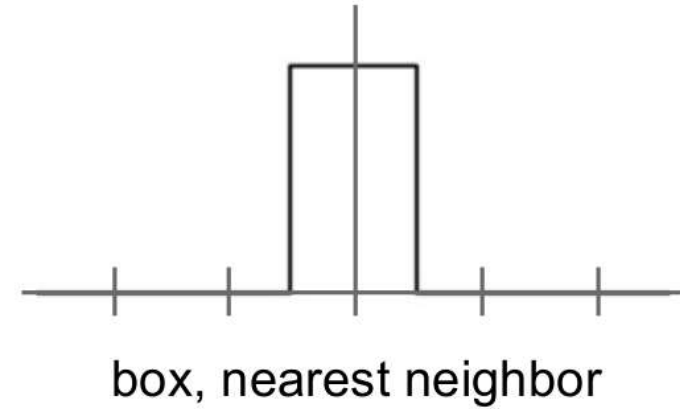
$$w_{\text{crm}}(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} 3|x|^3 - 5|x|^2 + 2 & \text{for } 0 \leq |x| < 1 \\ -|x|^3 + 5|x|^2 - 8|x| + 4 & \text{for } 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & \text{for } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Faltungskerne: Der kubische B-Spline



$$w_{cbs}(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} 3|x|^3 - 6|x|^2 + 4 & \text{for } 0 \leq |x| < 1 \\ -|x|^3 + 6|x|^2 - 12|x| + 8 & \text{for } 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & \text{for } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Faltungskerne: Wenn es schnell gehen soll...



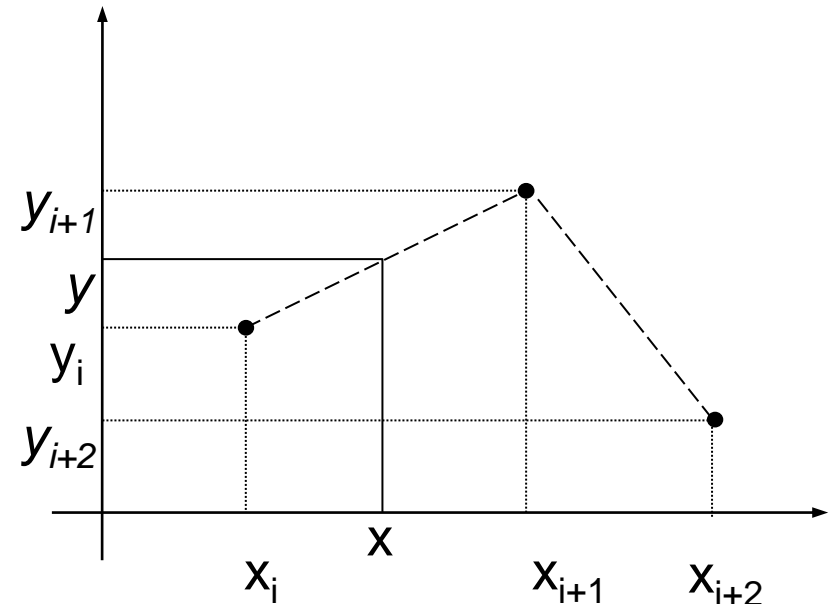
Stückweise Lineare Interpolation

- **Stückweise lineare Interpolation** interpoliert diskrete Signale $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ einfach und effizient
 - Nachteil: An Messpunkten erreichen wir nur C^0 -Stetigkeit
- **Vorgehen:** Zur Interpolation am Punkt x betrachten wir die Nachbarn $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ und berechnen

$$f(x) = (1 - \alpha)y_i + \alpha y_{i+1}$$

mit

$$\alpha = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \in [0, 1]$$



Bilineare Interpolation in rechteckigen Pixeln

- Berechnung von $f(x,y)$ mit **bilinearer Interpolation**:
 1. Lineare Interpolation entlang der oberen und unteren Kanten zur horizontalen Position x

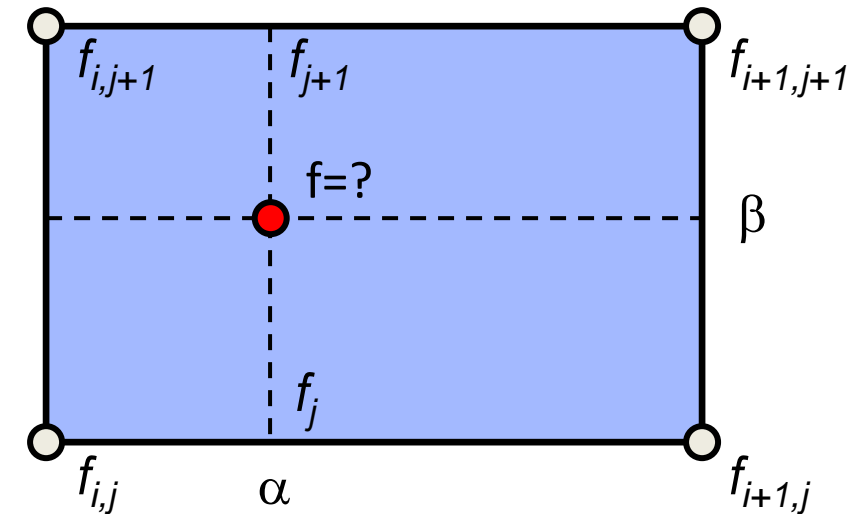
$$f_j = (1-\alpha)f_{i,j} + \alpha f_{i+1,j}$$

$$f_{j+1} = (1-\alpha)f_{i,j+1} + \alpha f_{i+1,j+1}$$

2. Erneute lineare Interpolation der Zwischenergebnisse zur vertikalen Position y

$$f(x,y) = (1-\beta)f_j + \beta f_{j+1}$$

$$\alpha = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad \beta = \frac{y - y_i}{y_{i+1} - y_i}, \quad \alpha, \beta \in [0,1]$$

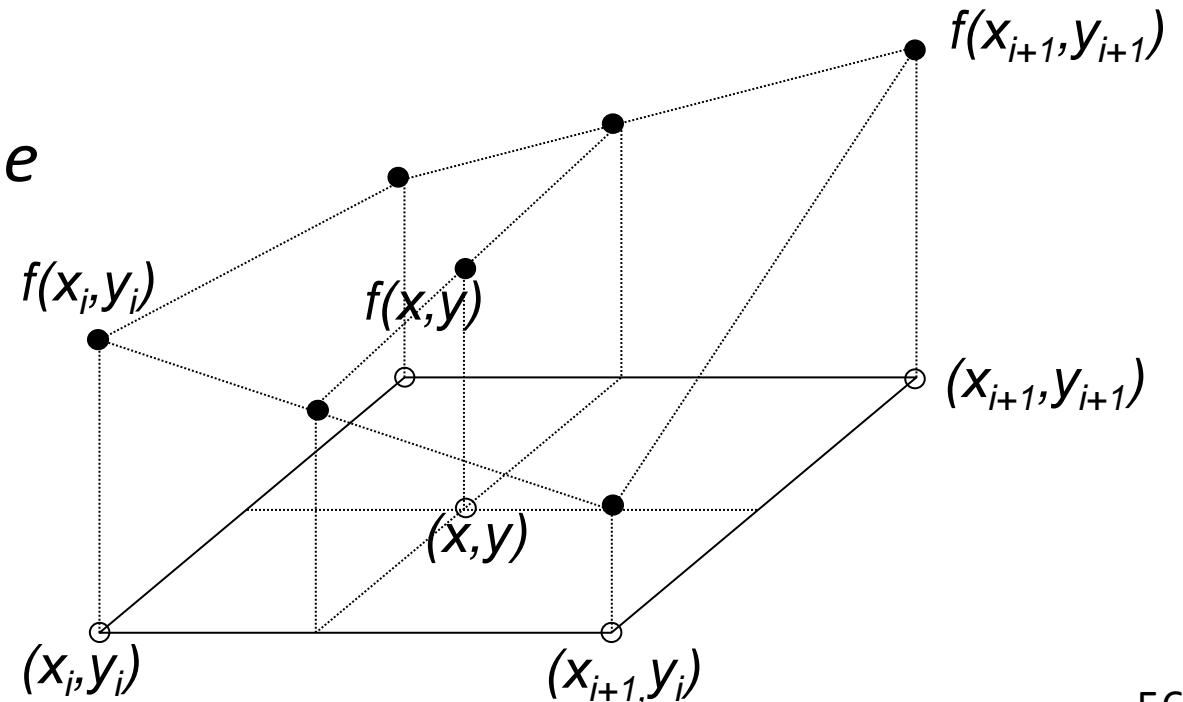


Bilineare Interpolation: Reihenfolge?

- Einsetzen von f_j and f_{j+1} und Ausmultiplizieren ergibt:

$$f(x, y) = (1 - \alpha)(1 - \beta)f_{i,j} + \alpha(1 - \beta)f_{i+1,j} \\ + (1 - \alpha)\beta f_{i,j+1} + \alpha\beta f_{i+1,j+1}$$

- Es spielt keine Rolle, ob wir zuerst horizontal oder vertikal Interpolieren
- Bilineare Interpolation ergibt *keine* lineare Funktion (Ebene)!

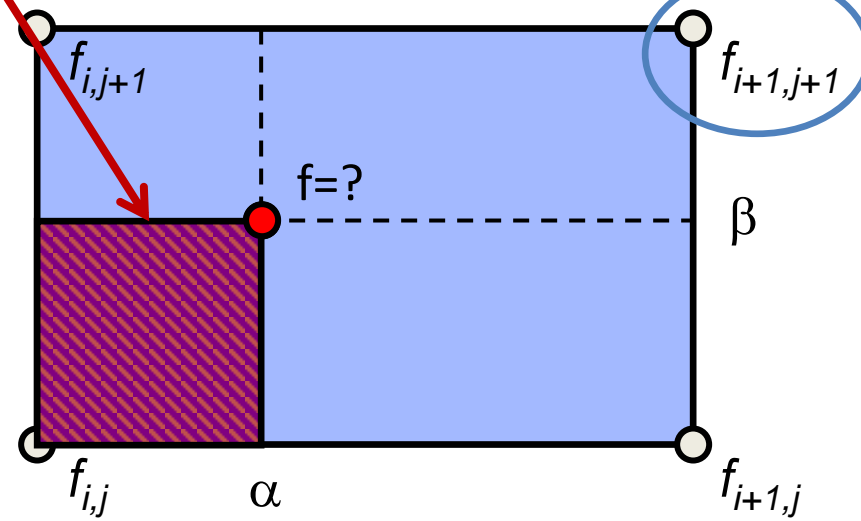


Geometrische Interpretation

- Geometrische Interpretation der bilinearen Interpolation

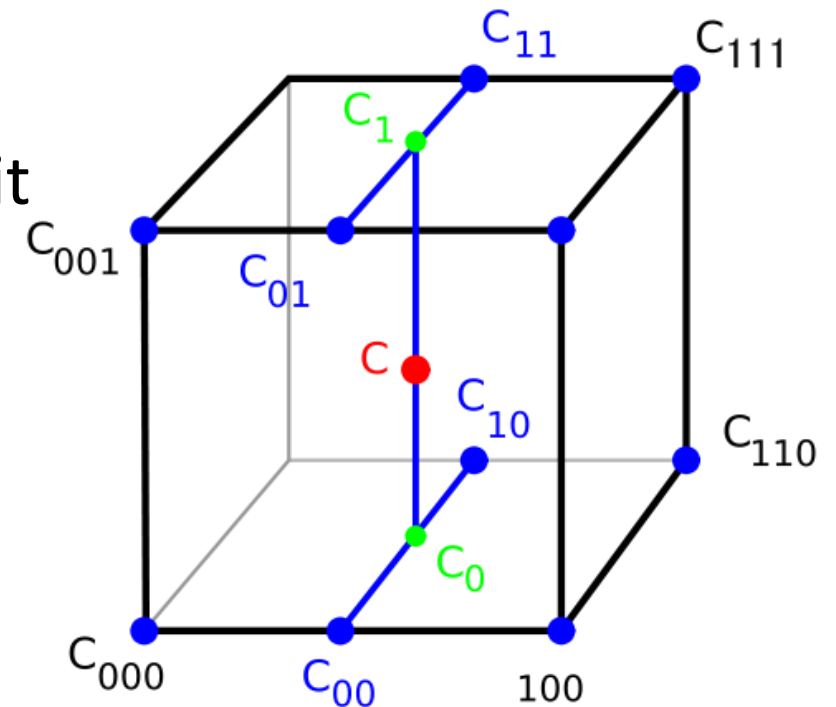
$$f(x, y) = (1 - \alpha)(1 - \beta)f_{i,j} + \alpha(1 - \beta)f_{i+1,j} \\ + (1 - \alpha)\beta f_{i,j+1} + \alpha\beta f_{i+1,j+1}$$

- Wert an jeder Ecke wird durch die Fläche des “gegenüberliegenden” Rechtecks gewichtet



Trilineare Interpolation

- **Trilineare Interpolation** ist die direkte Generalisierung von rechteckigen 2D-Pixeln auf quaderförmige 3D-Voxel
 - Drei lokale Koordinaten: α, β, γ
 - Ergibt eine kubische Funktion, keine lineare
 - Genau wie lineare Interpolation führen auch bi-/trilineare Interpolation nur zu C^0 -Stetigkeit zwischen den Pixeln/Voxeln



Downsampling

- Die einfachste Möglichkeit die Auflösung um Faktor k zu verringern ist es, nur jede k te Zeile und Spalte zu behalten
 - Problem: Aliasing-Artefakte wegen Verletzung des Abtasttheorems
 - Lösungen: Pooling (Mitteln über $k \times k$ Pixel) oder Vorfilterung



Original



Nach naiver Reduktion
um Faktor 2



Nach Pooling über
 2×2 Fenster

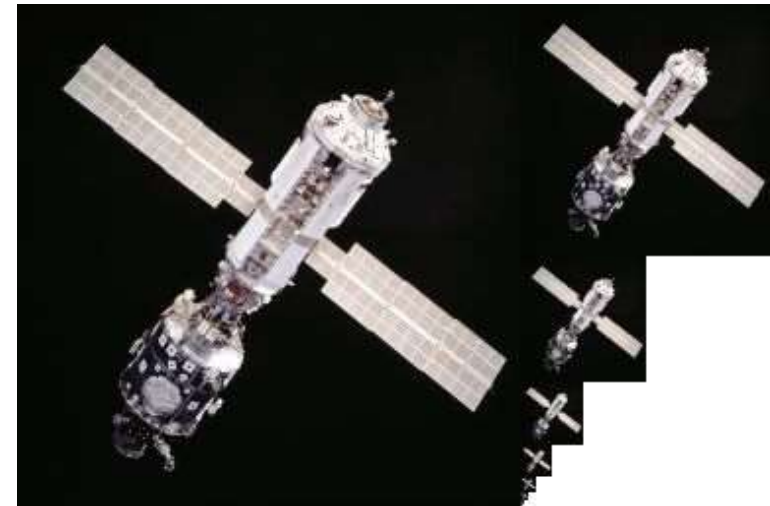
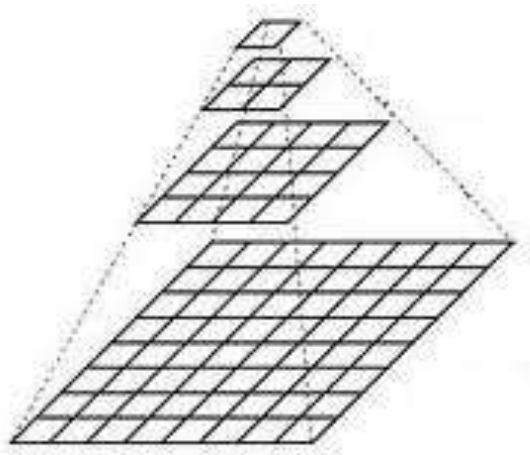


Nach Reduktion mit
Vorfilterung

Bildpyramiden

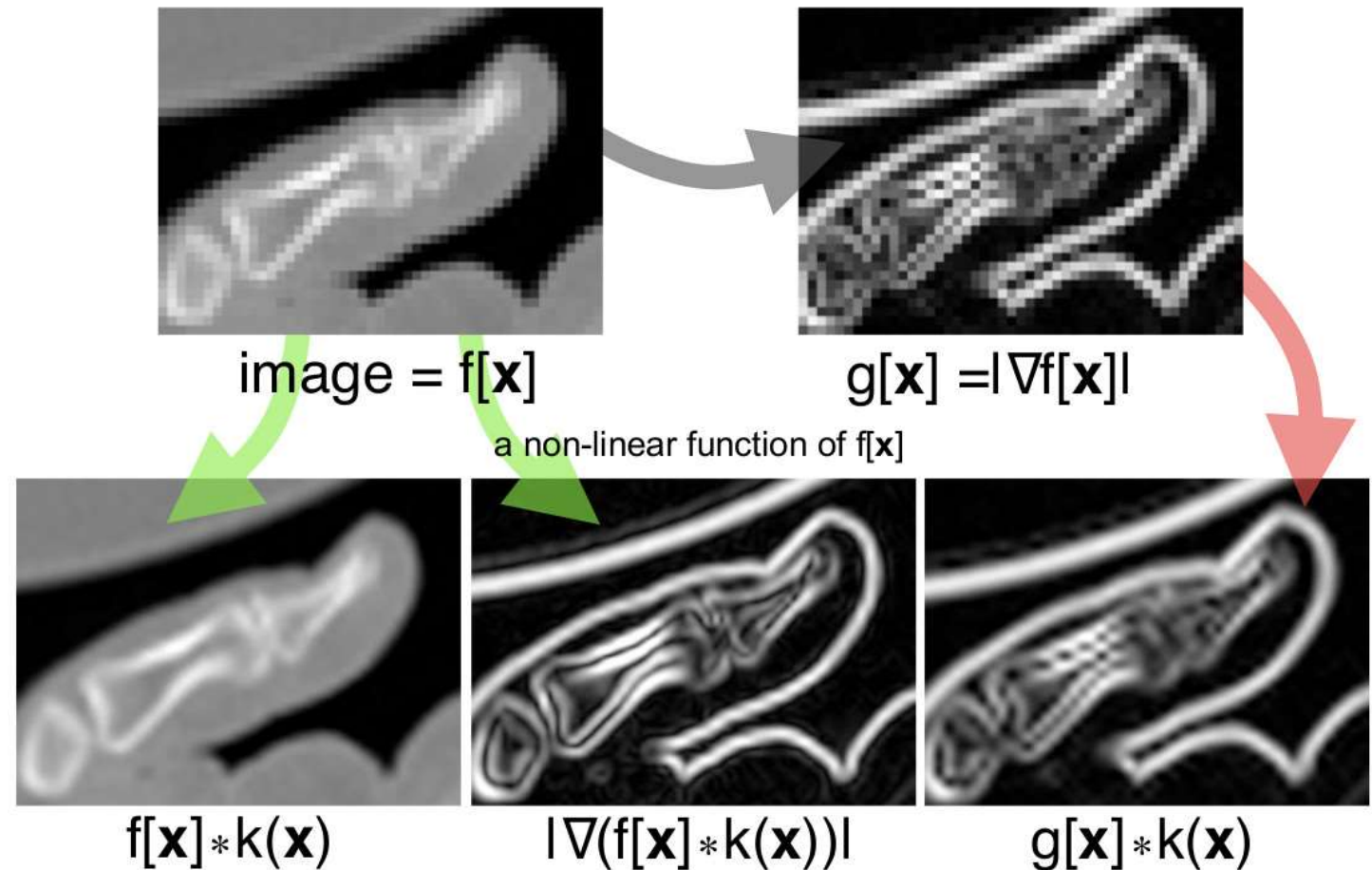
- **Bildpyramiden** werden dort eingesetzt, wo Bilder auf mehreren Skalen benötigt werden
 - Erzeugt durch wiederholtes Downsampling um den Faktor 2
 - Benötigt nur 33% zusätzlichen Speicherplatz:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{3}$$



Interpolation: Was gewinnen wir?

- Interpolation an sich zeigt Bilddetails im Prinzip nicht klarer
 - Information zu höheren Bildfrequenzen ist nicht vorhanden
- *Vor* nichtlinearen Transformationen ausgeführt kann sie trotzdem zu schärferen Ergebnissen führen
 - *Beispiel:*
Kantenerkennung



Superresolution / Super-Auflösung

Als **Superresolution** bezeichnet man Ansätze, die tatsächlich Information in höheren Frequenzbändern hinzufügen

- z.B. aus mehreren Bildern oder mittels Bilddatenbanken



Figure credit: Ledig et al, "Photo-Realistic Single Image Super-Resolution Using a Generative Adversarial Network", arXiv 2016

Zusammenfassung: Resampling

- **Faltungsbasierte Interpolation** ermöglicht die Rekonstruktion glatter Bilder
 - Flexibilität durch große Auswahl unterschiedlicher Kerne
 - Größe (Träger) des Kerns bestimmt wesentlich den Rechenaufwand
- **Lineare Interpolation** ist eine einfache und schnelle Alternative
 - **Bi-/trilineare Interpolation** in 2D- bzw. 3D-Bildern
- **Naives Downsampling** erzeugt Aliasing-Artefakte
 - Bessere Alternativen: Pooling oder Vorfilterung

Zum Nach- und Weiterlesen

- W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery: *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1992
- R.E. Challis, R.I. Kitney: *Biomedical Signal Processing (in four parts)*. Medical & Biological Engineering & Computing, 1990/91
- Andreas Maier et al. (Eds.): *Medical Imaging Systems*. Springer LNCS 11111, 2018 (*Open Access Book*)

Quizfragen zu Kapitel 2

- Wie können wir anhand der Fourierkoeffizienten eines Signals erkennen, ob das Signal reellwertig ist?
- Erklären Sie anhand des Faltungssatzes, wie sich eine Glättung durch Faltung mit einem Gauß-Kern auf das Amplitudenspektrum des Signals auswirkt.
 - Wie wirkt es sich auf die Phasen der Fourierkoeffizienten aus?
- Warum können beim Downsampling von Signalen Aliasing-Artefakte auftreten?
 - Wie können wir das vermeiden?