

**Prof. Dr. Stephan Paul**  
Institut für Experimentalphysik E18

**Priv. Doz. Dr. Norbert Kaiser**  
**Prof. Dr. Wolfram Weise**  
Institut für theoretische Physik T39



Entstanden nach der gleichnamigen Vorlesung

am Physik-Department der  
Technischen Universität München

Autoren: Stefan Fritsch, Bernhard Kirchlechner, Robert Wagner

Graphiken: Michael Kuckein, Roland Kuhn

Konzeption: Niklas Beisert

Überarbeitung: Bernhard Bittner, Norman Hauke, Patrick Michelberger

Entstanden nach der gleichnamigen Vorlesung von

**Professor Dr. Stephan Paul**

Institut für Experimentalphysik E18, Technische Universität München  
James-Franck-Straße, D-85747 Garching  
E-Mail: stephan.paul@physik.tu-muenchen.de

**Dr. habil. Norbert Kaiser**

Institut für Theoretische Physik T39, Technische Universität München  
James-Franck-Straße, D-85747 Garching  
E-Mail: norbert.kaiser@physik.tu-muenchen.de

**Professor Dr. Wolfram Weise**

Institut für Theoretische Physik T39, Technische Universität München  
James-Franck-Straße, D-85747 Garching  
E-Mail: wolfram.weise@physik.tu-muenchen.de

Online-Version verfügbar im World Wide Web:

**<http://www.e18.physik.tu-muenchen.de/~skript/>**

Verbesserungsvorschläge, Berichtigungen und Kommentare an:

**[skript@e18.physik.tu-muenchen.de](mailto:skript@e18.physik.tu-muenchen.de)**

3., durchgesehene und erweiterte Auflage 2005

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die des Nachdrucks, des Vortrags, der Vervielfältigung zu anderen Zwecken als der privaten Verwendung sowie der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig.

**Copyright ©2005 Technische Universität München, Physik-Department, Institut für Experimentalphysik E18. Für die Angaben in diesem Skript wird keine Gewähr im rechtsverbindlichen Sinne übernommen.**

Druck und Vervielfältigung:

Fachschaft Mathematik/Physik/Informatik  
Studierendenvertretung der Technischen Universität München  
Arcisstraße 13  
D-80333 München  
Telefon: (089) 289–22997



# Vorwort

## Vorwort zur ersten Auflage:

Dieses Skript ist während der Vorlesung „Teilchen und Kerne“ von Professor Dr. Stephan Paul, Professor Dr. Wolfram Weise und Priv. Doz. Dr. Norbert Kaiser entstanden, die am Physik-Department der Technischen Universität München im Wintersemester 1998/99 und im Sommersemester 1999 für Studierende zu Beginn des Hauptstudiums angeboten wurde.

Die Veranstaltung versuchte, Kapitel aus der Experimentalphysik mit solchen aus der theoretischen Physik zu kombinieren. Ergänzt wurden die vier wöchentlichen Vorlesungsstunden durch eine zweistündige Arbeitsgruppe, in der vertiefende Aufgaben zu den behandelten Themengebieten diskutiert wurden.

Beim vorliegenden Skript handelt es sich um einen großteils der Vorlesung folgenden Text. Im Wintersemester wurden zunächst überblicksmäßig Beschleuniger und Detektoren, das experimentelle Handwerkszeug der Teilchenphysik, besprochen, und dann der Bogen über die relativ tiefgehende Betrachtung von Streuprozessen, der elektromagnetischen Wechselwirkung und der Struktur des Nukleons sowie der starken Wechselwirkung bis hin zu den Quarks geschlagen.

Der konzeptionelle Weg von den elementaren Wechselwirkungen und den Teilchen hin zur Kernphysik wurde auch im Sommersemester weiter beschritten, indem der schwachen Wechselwirkung und einem Kapitel über Teilchenoszillationen Abschnitte über Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung, Kernmodelle, Zerfälle bis hin zu kollektiven Kernanregungen folgten.

Die Anhänge entstanden aus zwei ergänzenden Vorlesungen im Wintersemester, die von Dr. Lars Schmitt und Dipl. Phys. Philippe Morath gehalten wurden.

Die Gliederung und die wesentlichen Inhalte dieses Textes entsprechen in der Regel der Vorlesung. Die meisten Abschnitte wurden allerdings um erläuternden Text und zahlreiche Grafiken ergänzt. An wenigen Stellen wurden der Systematik halber Abschnitte vor- oder zusammengezogen, wobei die Gliederung von der in der Vorlesung abweicht; dies schien speziell in den Kernphysik-Kapiteln (Kap. 10 und 11) sinnvoll.

Schließlich wurde der Text mit Übungsaufgaben aus der Arbeitsgruppe abgerundet. Die Aufgaben spiegeln ebenso wie die Vorlesung eine gesunde Mischung aus Theorie und Praxis wieder; wichtig zu erwähnen ist allerdings, daß erst durch eingehende Diskussion dieser Übungen ein wirklicher Lernerfolg erzielt werden kann. Darum haben wir uns bewußt auf den Abdruck der Aufgaben beschränkt, nicht aber der Lösungen.

Dieser Text existiert neben dieser Version auf gutem, altem Papier auch als Online-Skript im World Wide Web. Hier hat der Leser die Möglichkeit, neben einem „linearen“ Blättern durch

die einzelnen Kapitel jederzeit zum Inhaltsverzeichnis zurückzukehren, um auf einzelne, ausgewählte Seiten zu gelangen oder per Stichwort- oder Volltextsuche bestimmte Begriffe im Text zu recherchieren. Zudem wurden viele Links ins WWW eingefügt, sowie einige farbige bzw. andere, für die Bildschirmschirmdarstellung besser geeignete Bilder und Grafiken verwendet. Die WWW-Version soll auch als „Test“ für die Möglichkeit dienen, Online-Skripten zu Vorlesungen zur Verfügung zu stellen. Leider wurde unser ursprüngliches Ziel, das Skript in der Tat parallel zum Fortschritt der Vorlesung zur Verfügung zu stellen, nicht erreicht. Wir denken aber, dies mit der Ausführlichkeit des vorliegenden Textes wenigstens ein bißchen entschädigt zu haben.

Kritik, Fehlerberichtigungen, Kommentare und Ergänzungen bitten wir, am besten per Mail, an die Autoren zu schicken. Wir freuen uns über Feedback aus der Leserschaft.

Zu guter Letzt möchten wir den Dozenten für die freundliche Atmosphäre während der gesamten zwei Semester und vor allem für die absolut reibungslose Zusammenarbeit während der Erstellung dieses Textes danken, ebenso Lars Schmitt für seine stete Unterstützung und für das Überlassen der Übungsaufgaben. Schließlich möchten wir es nicht versäumen, den Autoren und Verlagen der Bücher und Texte herzlich zu danken, aus denen wir zahlreiche Abbildungen, Skizzen und Diagramme übernehmen durften.

Garching, Juni 1999

*Die Autoren*

## Vorwort zur zweiten Auflage:

Im Studienjahr 2005- 2006 wurde die Vorlesung zur Kern- und Teilchenphysik erneut durch das Professorenduo Stephan Paul und Wolfram Weise gelesen. Hierzu bot sich natürlich eine Überarbeitung des mittlerweile bereits etablierten Skriptes an, für welche sich die Studenten Bernhard Bittner, Norman Hauke und Patrick Michelberger bereit fanden.

In der aktuellen Version wurden vornehmlich die inhaltlichen Fehler, sowie aber auch die Rechtschreibfehler ausgebessert. Weiterhin wurde der Inhalt an kritischen Stellen mit ausführlicheren Erklärungen ergänzt, sowie einige neue Sachverhalte und Thematiken aus der Vorlesung hinzugefügt.

Ein besonderes Anliegen war ebenfalls die Ausstaffierung des Skriptes mit noch mehr Bildern, einerseits von modernen Experimenten in der Kern- und Teilchenphysik, andererseits um komplexe Sachverhalte dem Leser greifbarer zu machen.

Letztendlich wurden auch die Übungsaufgaben einer Korrektur unterzogen, welche sich vor allem an den Diskussionsaufgaben zum Übungsbetrieb, geleitet von Roland Kuhn, orientierte. Hierbei fanden auch einige spezielle Zusatzinformationen aus der Übung von Axel Müller Eingang in das Vorlesungsskript.

Summa summarum stellt dieses Skript einen, an manchen Stellen doch ziemlich detaillierten, Überblick über die Kern- und Teilchenphysik dar, wodurch dessen Lektüre dem Studierenden gerade im Hinblick auf eine etwaige Prüfungsvorbereitung nur ans Herz gelegt werden kann.

Zu guter Letzt sei auch von unserer Seite angemerkt, daß das vorliegende Werk, trotz allen Mühen unsererseits, lediglich einen zweiten Iterationsschritt auf dem Weg hin zu einer perfekten, vorlesungsbegleitenden Literatur darstellt. Somit erheben wir keinen Anspruch auf universelle Richtigkeit aller Informationen im Skript, freuen uns jedoch über konstruktive Kritik,

sowie etwaige Verbesserungsvorschläge.

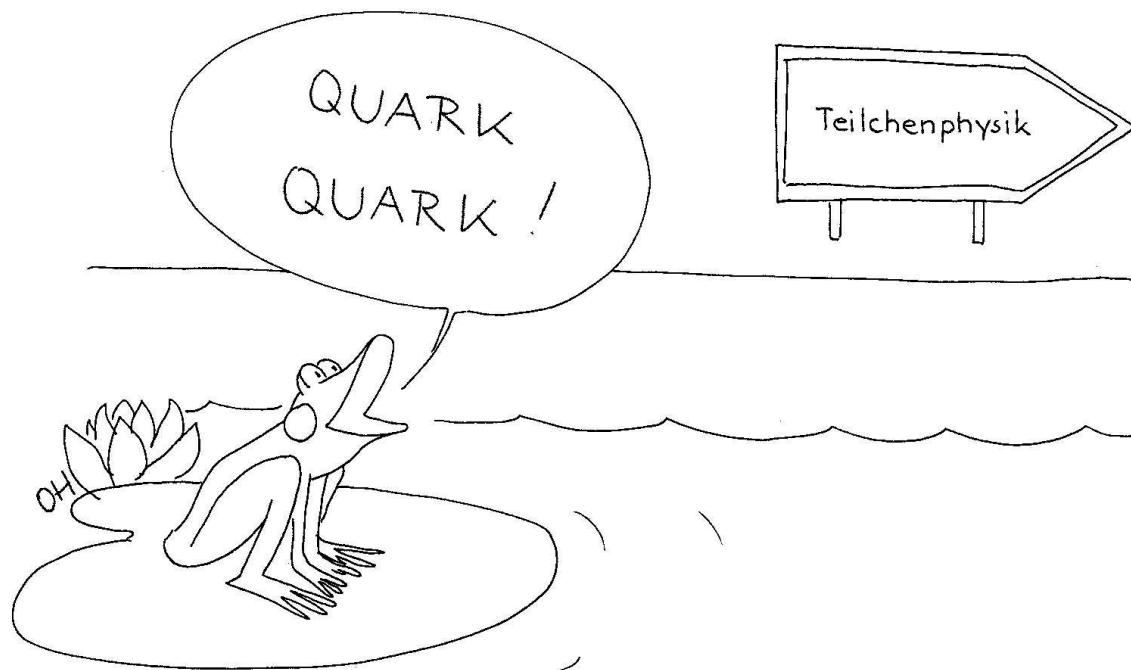
München, Mai 2006

*Die Korrekteure:*

*Bernhard Bittner*

*Norman Hauke*

*Patrick Michelberger*



*Hier geht's zur Teilchenphysik... (aus Spektrum d. Wissenschaft, August 1999)*



# Inhaltsverzeichnis

<b>Präludium</b>	<b>1</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>5</b>
1.1 Größenordnungen . . . . .	6
1.2 Energien und Impulse . . . . .	7
1.3 Elementarteilchen und fundamentale Wechselwirkungen . . . . .	9
1.3.1 Quarks und Leptonen . . . . .	9
1.3.2 Fundamentale Wechselwirkungen . . . . .	10
1.4 Zusammengesetzte Systeme . . . . .	13
1.4.1 Hadronen . . . . .	13
1.4.2 Kerne . . . . .	13
Übungen . . . . .	15
<b>I Teilchen</b>	<b>17</b>
<b>2 Beschleuniger und Detektoren</b>	<b>19</b>
2.1 Beschleuniger . . . . .	20
2.1.1 Wozu benötigt man Beschleuniger? . . . . .	20
2.1.2 Natürliche Beschleuniger . . . . .	20
2.1.3 Einfache elektrische Felder . . . . .	21
2.1.4 Ablenkung eines Teilchens im Magnetfeld . . . . .	24
2.1.5 Betatron . . . . .	25
2.1.6 Zyklotron . . . . .	30
2.1.7 Synchrotron . . . . .	33
2.1.8 Linearbeschleuniger (LINACs) . . . . .	41
2.1.9 Schwerpunktsenergie . . . . .	43
2.1.10 Collider . . . . .	47
2.1.11 Sekundärstrahlen . . . . .	50
2.2 Nachweis von Strahlung . . . . .	51
2.2.1 Elektrisch geladene Teilchen . . . . .	52
2.2.2 Energieverlust eines Teilchens . . . . .	52
2.2.3 Szintillation . . . . .	58
2.2.4 Photomultiplier . . . . .	59
2.2.5 Nachweis der erzeugten Ionisation . . . . .	61
2.2.6 Vielfachstreuung . . . . .	65

2.2.7	Nachweis von Licht . . . . .	66
2.2.8	Blasenkammer . . . . .	66
2.2.9	Kalorimetrie . . . . .	69
2.2.10	Moderne Detektoren . . . . .	71
	Übungen . . . . .	75
<b>3</b>	<b>Streuprozesse</b>	<b>77</b>
3.1	Wirkungsquerschnitt . . . . .	77
3.2	Kinematik . . . . .	78
3.2.1	Relativistische Kinematik von Streuprozessen . . . . .	79
3.2.2	Lorentz-Transformation . . . . .	81
3.3	Reaktionswahrscheinlichkeit und Fermis „Goldene Regel“ . . . . .	83
3.4	Beispiel: Elastische Streuung . . . . .	84
3.5	Beispiel: Streuung am Yukawa- und Coulombpotential . . . . .	85
3.6	Wechselwirkung durch Austausch von Teilchen . . . . .	86
3.6.1	Vorbereitung: Coulomb-Wechselwirkung zweier statischen Ladungsverteilungen . . . . .	86
3.6.2	Yukawa-Austauschwechselwirkung . . . . .	89
3.7	Elastische Elektronenstreuung an einer Ladungsverteilung . . . . .	90
3.7.1	Differentieller Wirkungsquerschnitt und Formfaktor . . . . .	91
3.7.2	Eigenschaften von Formfaktoren . . . . .	92
3.7.3	Beispiele . . . . .	93
3.8	Messung von Formfaktoren spinloser Teilchen . . . . .	95
3.8.1	Kerne: Gebundene Vielteilchensysteme aus Nukleonen . . . . .	95
3.8.2	Messung von Formfaktoren . . . . .	97
3.8.3	Kernradien . . . . .	98
3.8.4	Magnetspektrometer . . . . .	102
3.8.5	Messungen an instabilen Teilchen . . . . .	104
	Übungen . . . . .	106
<b>4</b>	<b>Elektromagnetische Wechselwirkung</b>	<b>109</b>
4.1	Relativistische Wellengleichungen . . . . .	109
4.1.1	Klein-Gordon-Gleichung für Spin-0-Teilchen . . . . .	109
4.1.2	Dirac-Gleichung für Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen . . . . .	111
4.1.3	Lösungen der freien Dirac-Gleichung . . . . .	115
4.2	Grundzüge der QED . . . . .	116
4.2.1	Berechnung von Wirkungsquerschnitten . . . . .	120
4.3	Elementare Prozesse der QED . . . . .	122
4.3.1	Streuung von relativistischen Elektronen an einer Punktladung ohne Spin	122
4.3.2	Elektronenstreuung an (punktförmigen) Spin-0- und Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen	123
4.3.3	Streuung geladener Leptonen . . . . .	125
4.3.4	Paarvernichtung in Photonen . . . . .	126
4.3.5	Compton-Streuung . . . . .	129
4.4	Präzisionstests der QED . . . . .	130
4.4.1	Magnetische Momente . . . . .	130
4.4.2	Lamb-Shift . . . . .	140

Übungen . . . . .	142
<b>5 Struktur des Nukleons</b>	<b>147</b>
5.1 Elektromagnetische Formfaktoren des Nukleons . . . . .	147
5.1.1 Magnetische und elektrische Formfaktoren des Protons . . . . .	147
5.1.2 Messung der Formfaktoren des Protons . . . . .	150
5.1.3 Messung der Formfaktoren des Neutrons . . . . .	156
5.2 Quasielastische und inelastische Elektronenstreuung . . . . .	162
5.2.1 Quasielastische Streuung . . . . .	162
5.2.2 Inelastische Streuung . . . . .	164
5.3 Angeregte Zustände des Nukleons . . . . .	165
5.4 Tiefinelastische Streuung . . . . .	167
5.5 Das Partonmodell . . . . .	170
5.6 Callan-Gross-Relation . . . . .	173
5.7 Quarkverteilungen im Nukleon . . . . .	174
Übungen . . . . .	179
<b>6 Starke Wechselwirkung</b>	<b>185</b>
6.1 Die Quarks bekennen Farbe . . . . .	185
6.2 Symmetrien und Erhaltungssätze . . . . .	191
6.2.1 Noether-Theorem . . . . .	191
6.2.2 Symmetrien in der Quantenmechanik . . . . .	192
6.2.3 Innere Symmetrien . . . . .	193
6.3 Das Quarkmodell . . . . .	198
6.4 Quark-Wellenfunktionen der Mesonen . . . . .	199
6.5 Diskrete Symmetrien . . . . .	202
6.5.1 Raumspiegelung bzw. $\mathcal{P}$ -Parität . . . . .	202
6.5.2 Zeitumkehr . . . . .	204
6.5.3 Ladungskonjugation bzw. $\mathcal{C}$ -Parität . . . . .	205
6.5.4 Das CPT-Theorem . . . . .	208
6.6 Von Quarks zu Hadronen . . . . .	208
6.6.1 Hadronisierung aus dem Vakuum . . . . .	209
6.7 Quarkonia ( $q\bar{q}$ -Zustände) . . . . .	212
6.7.1 Resonante Produktion von Vektormesonen . . . . .	212
6.7.2 Zerfall von Vektormesonen . . . . .	214
6.7.3 Leptonische Zerfälle von Vektormesonen . . . . .	215
6.7.4 Schwere Vektormesonen (Quarkonia) . . . . .	217
6.7.5 Quarkonia und die Zweig-Regel . . . . .	221
6.8 Das Potential der starken Wechselwirkung für Quarks . . . . .	223
6.8.1 Wasserstoffatom und Positronium . . . . .	223
6.8.2 Vergleich von Positronium und Quarkonium . . . . .	226
6.9 Baryonen im Quarkmodell . . . . .	229
6.9.1 Baryonen als Zustände aus drei Quarks . . . . .	232
6.9.2 Nichtrelativistisches Konstituentenquarkmodell für Baryonen . . . . .	234
6.9.3 Magnetische Momente der Oktett-Baryonen . . . . .	236
6.10 Streuung von Hadronen . . . . .	239

6.10.1	Nichtrelativistische Potentialstreuung . . . . .	239
6.10.2	Partialwellenentwicklung . . . . .	240
6.10.3	Resonanzstreuung . . . . .	242
6.10.4	Inelastische Streuung und Argand-Diagramme . . . . .	243
6.10.5	Streuung von Spin-0- an Spin-1/2-Teilchen . . . . .	244
6.11	Erzeugung von Hadronenresonanzen . . . . .	246
6.11.1	Formationsprozesse . . . . .	246
6.11.2	Produktionsprozesse . . . . .	247
6.12	Hadronstreuung bei hohen Energien . . . . .	253
6.12.1	Beobachtungen . . . . .	253
6.12.2	Optisches Modell der Hadronenstreuung . . . . .	256
6.13	Grundzüge der Quantenchromodynamik . . . . .	259
6.13.1	Vorbereitung: Eichinvarianz . . . . .	259
6.13.2	Quarks mit Farbe . . . . .	261
6.13.3	Gluonen . . . . .	262
6.13.4	Lagrangedichte der QCD . . . . .	263
6.13.5	Laufende Kopplungsstärke der QCD . . . . .	265
6.13.6	Skalenbrechung in der tiefinelastischen Streuung . . . . .	267
6.13.7	Darstellung in der “zweiten Quantisierung“ . . . . .	272
6.13.8	Perturbative QCD . . . . .	275
6.13.9	QCD auf dem Gitter . . . . .	276
6.14	Streuprozesse der starken Wechselwirkung . . . . .	277
6.14.1	Streuprozesse . . . . .	277
6.14.2	Teilchenerzeugung bei hohen Energien . . . . .	278
6.14.3	Kinematik . . . . .	280
6.15	Hochenergiereaktionen und Konstituenten der Hadronen . . . . .	284
6.15.1	Leptonpaar Produktion in hadronischen Kollisionen . . . . .	284
6.16	Elastische Quarkstreuung bei hohen Energien . . . . .	288
6.16.1	Analogie zur $e^+e^-$ -Streuung . . . . .	288
6.16.2	Quarkstreuung . . . . .	289
6.17	Bestimmung magnetischer Momente . . . . .	295
	Übungen . . . . .	299
<b>7</b>	<b>Schwache Wechselwirkung</b>	<b>307</b>
7.1	Überblick . . . . .	307
7.1.1	Eigenschaften der schwachen Wechselwirkung . . . . .	308
7.1.2	Grundlegende Prozesse . . . . .	309
7.2	Leptonen . . . . .	310
7.3	Paritätsverletzung . . . . .	314
7.4	Die V-A-Theorie der schwachen Wechselwirkung . . . . .	318
7.4.1	Der Axialvektorstrom . . . . .	318
7.4.2	Kopplungen der Leptonen: . . . . .	320
7.5	Anwendungen der V-A-Theorie . . . . .	321
7.5.1	Elektronenspektrum im Myonzerfall . . . . .	321
7.5.2	Berechnung des $R$ -Verhältnisses beim $\pi$ -Zerfall. . . . .	324

<b>7</b>	<b>Hadronenphysik</b>	<b>321</b>
7.1	Hadronenstruktur . . . . .	321
7.2	Hadronenzerfälle . . . . .	322
7.3	Hadronenverbündelungen . . . . .	323
7.4	Hadronenverbündelungen . . . . .	324
7.5	Paritätsverletzung bei $\pi$ - und $\mu$ -Zerfall . . . . .	326
7.5.3	Paritätsverletzung bei $\pi$ - und $\mu$ -Zerfall . . . . .	326
7.5.4	$\tau$ -Zerfälle . . . . .	328
7.5.5	Zerfall schwerer Mesonen . . . . .	330
7.6	Neutronenzerfall . . . . .	331
7.7	Hadronische Zerfälle seltsamer Teilchen . . . . .	340
7.7.1	$\Delta I = 1/2$ – Regel . . . . .	340
7.7.2	$\Delta S = 1$ – Übergänge . . . . .	341
7.8	Kopplung der W-Bosonen an die Quarkfamilien . . . . .	342
7.8.1	Cabibbo-Hypothese . . . . .	343
7.8.2	Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix . . . . .	345
7.9	Axiale und vektorielle Ladung beim Nukleon . . . . .	346
7.10	$\nu$ -Lepton-Streuung . . . . .	348
7.10.1	Was passiert bei der Streuung an Antineutrinos? . . . . .	350
7.10.2	Tiefinelastische $\nu$ -Streuung . . . . .	352
7.10.3	Anwendung . . . . .	354
7.10.4	Wie realisiert man $\nu$ -Streuung? . . . . .	356
7.11	Vereinheitlichung von elektromagnetischer und schwacher Wechselwirkung . . . . .	358
7.11.1	Eichtheorie der elektro-schwachen Wechselwirkung . . . . .	359
7.11.2	Wechselwirkung mit geladenen Strömen: . . . . .	362
7.11.3	Einbeziehung der Quarks . . . . .	364
7.11.4	Masse des $W^\pm$ - und $Z^0$ -Bosons: der Higgs-Mechanismus . . . . .	365
7.12	Bestimmung einiger Parameter des Standardmodells . . . . .	369
7.12.1	Bestimmung des Weinberg-Winkels für neutrale Ströme . . . . .	369
7.12.2	Bestimmung der Massen von $W^+$ , $W^-$ und $Z^0$ . . . . .	371
	Übungen . . . . .	376
<b>8</b>	<b>Teilchenoszillationen</b>	<b>387</b>
8.1	Das Zweizustandsproblem . . . . .	387
8.2	Das $K^0$ -System . . . . .	389
8.2.1	Lebensdauer von $K^0$ . . . . .	391
8.2.2	Seltsamkeitsoszillationen . . . . .	393
8.2.3	Regeneration . . . . .	395
8.3	CP-Verletzung im $K^0$ -System . . . . .	397
8.3.1	$\mathcal{CP}$ -Verletzung . . . . .	398
8.3.2	Der Parameter $\epsilon$ in der $\mathcal{CP}$ -Verletzung . . . . .	400
8.3.3	Zerfall von $K^0$ und $\bar{K}^0$ in $\pi^+\pi^-$ : Zeitevolution . . . . .	401
8.3.4	Direkte $\mathcal{CP}$ -Verletzung. . . . .	402
8.4	Neutrino-Oszillationen . . . . .	404
8.4.1	Zustandsmischung bei Neutrinos . . . . .	405
8.4.2	Experimente . . . . .	408
	Übungen . . . . .	413
<b>II</b>	<b>Kerne</b>	<b>417</b>
<b>9</b>	<b>Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung</b>	<b>419</b>

9.1	Struktur des Nukleon-Nukleon-Potentials . . . . .	420
9.2	Nukleon-Nukleon-S-Wellen-Streuphasen . . . . .	422
9.3	Das Ein-Pion-Austausch-Potential (OPE) . . . . .	424
9.3.1	Wechselwirkung durch Bosonen (-Mesonen) Austausch . . . . .	424
9.3.2	Pion-Austausch und langreichweite NN-Wechselwirkung . . . . .	424
9.3.3	Pion-Nukleon-Kopplungskonstante und Goldberger-Treiman-Relation .	425
9.3.4	Spin-Isospin-Struktur des OPE-Potentials . . . . .	426
9.4	Das Deuteron . . . . .	426
9.4.1	Wellenfunktion des Deuterons . . . . .	427
9.4.2	Radius und Quadrupolmoment . . . . .	428
9.4.3	Magnetisches Moment des Deuterons . . . . .	429
	Übungen . . . . .	431
<b>10</b>	<b>Kernmodelle</b>	<b>433</b>
10.1	Experimentelle Beobachtungen . . . . .	433
10.1.1	Radien . . . . .	433
10.1.2	Bindungsenergien . . . . .	434
10.1.3	Massenbestimmung in Kernreaktionen . . . . .	435
10.1.4	Massenbestimmung mit Penning-Falle . . . . .	436
10.1.5	Schlußfolgerungen . . . . .	436
10.2	Tröpfchenmodell . . . . .	437
10.3	Fermigasmodell . . . . .	441
10.4	Schalenmodell des Atomkerns . . . . .	444
10.4.1	Hamilton-Operator des Kerns . . . . .	445
10.4.2	Phänomenologisches Kernpotential . . . . .	445
10.4.3	Spin-Bahn-Kopplung . . . . .	447
10.4.4	Relativistisches (Dirac-)Schalenmodell . . . . .	450
10.4.5	Einfache Vorhersagen des Schalenmodells . . . . .	451
10.4.6	Isospin von Atomkernen . . . . .	456
	Übungen . . . . .	456
<b>11</b>	<b>Zerfälle</b>	<b>461</b>
11.1	$\beta$ -Zerfall . . . . .	462
11.2	Elektroneneinfang . . . . .	465
11.3	Typische $\beta$ -Zerfalls-Lebensdauern . . . . .	466
11.4	Kern- $\beta$ -Zerfall . . . . .	466
11.4.1	Drehimpulse und $\beta$ -Zerfälle . . . . .	468
11.4.2	Darstellung des $\beta$ -Zerfalls im Kurie-Plot . . . . .	469
11.5	$\alpha$ -Zerfall von Atomkernen . . . . .	470
11.5.1	Theorie des $\alpha$ -Zerfalls . . . . .	471
11.6	Kernspaltung . . . . .	476
11.6.1	Historischer Überblick . . . . .	476
11.6.2	Spontane Spaltung . . . . .	476
11.6.3	Induzierte Spaltung . . . . .	478
11.6.4	Spaltprodukte . . . . .	479
	Übungen . . . . .	480

<b>12 Radioaktivität, Strahlenwirkung, Kernreaktoren</b>	<b>483</b>
12.1 Strahlungseinheiten . . . . .	483
12.2 Zellschädigung durch ionisierende Strahlung . . . . .	484
12.2.1 Strahlenwirkung . . . . .	484
12.2.2 Radiobiologische Wirksamkeit . . . . .	485
12.2.3 Klassifizierung . . . . .	485
12.3 Natürliche und künstliche Strahlungsbelastung . . . . .	485
12.4 Kernreaktoren . . . . .	487
12.4.1 Spaltmaterial . . . . .	487
12.4.2 Spaltprodukte . . . . .	489
12.4.3 Moderation . . . . .	490
12.4.4 Vier-Faktor-Formel . . . . .	490
Übungen . . . . .	492
<b>13 Deformierte und angeregte Kerne</b>	<b>495</b>
13.1 Deformierte Kerne . . . . .	495
13.1.1 Deformationen im Schalenmodell . . . . .	496
13.2 Rotationszustände . . . . .	498
13.3 Kollektive Dipolschwingungen . . . . .	501
13.3.1 Elektrische Dipolanregungen im Schalenmodell . . . . .	501
13.3.2 Kollektive Zustände im Schalenmodell . . . . .	504
13.3.3 Weitere Typen von kollektiven Anregungen . . . . .	507
13.4 Höhere Energien . . . . .	508
<b>14 Kernreaktionen</b>	<b>509</b>
14.1 Übersicht . . . . .	509
14.2 Coulombanregung . . . . .	511
14.3 Einfang Reaktionen . . . . .	512
14.4 Transfer Reaktionen . . . . .	513
14.4.1 Stripping-Reaktion . . . . .	514
14.4.2 Pick-up Reaktionen . . . . .	516
14.4.3 Tiefinelastische Streuung und Fusionsreaktionen . . . . .	517
<b>15 Phasen stark Wechselwirkender Materie</b>	<b>521</b>
15.1 Kernmaterie . . . . .	521
15.2 Hadronische Materie . . . . .	524
15.3 Quark-Gluon-Plasma . . . . .	524
15.4 Rapiditätsverteilungen . . . . .	526
15.5 Thermodynamik von Ensembles relativistischer Teilchen . . . . .	527
<b>16 Sternentwicklung und Elementsynthese</b>	<b>531</b>
16.1 Primordiale Elementsynthese . . . . .	531
16.2 Sternentwicklung . . . . .	533
16.3 Wasserstoffverbrennung . . . . .	534
16.4 Heliumverbrennung . . . . .	535
16.5 Verbrennung zum Eisen . . . . .	537

16.6 Stern-Kollaps . . . . .	537
16.7 Synthese schwerer Elemente . . . . .	538
<b>A Addition von Drehimpulsen und Helizität</b>	<b>541</b>
A.1 Clebsch-Gordan-Zerlegung . . . . .	541
A.2 Helizität . . . . .	543
<b>B Relativ interessante Ergänzungen</b>	<b>547</b>
B.1 Lorentztransformation . . . . .	547
B.2 Comptonstreuung . . . . .	548
<b>C Einige Beschleuniger und Detektoren</b>	<b>551</b>
<b>D Forschungsreaktor FRM-II</b>	<b>553</b>
<b>E Etwas Fachenglisch</b>	<b>559</b>
<b>Literatur</b>	<b>583</b>

# Präludium

## Historisches:

- Leukipp und Demokrit hatten bereits im 5. Jahrhundert vor Chr. folgende Idee:

Die Wirklichkeit besteht aus *Atomen* (kleinsten, unteilbaren Teilchen) und *leerem Raum* („Vakuum“).

Der griechische Philosoph Leukipp gilt zusammen mit seinem Schüler Demokrit als Begründer des Atomismus. Demnach besteht die Welt aus leerem Raum und Materie. Der leere Raum wird notwendig, da sich die Materie ohne ihn nicht bewegen könnte. Durch Umordnung der kleinsten Teilchen, der Atome (gr.: unteilbar, das Kleinste), entsteht Veränderung. Alles Stoffliche setzt sich somit aus den Atomen zusammen, durch deren Umordnungen eine makroskopische Veränderung erklärt werden kann.

In manchen Historiker-Kreisen wird behauptet, dass Leukipp nie existiert habe. Angeblich soll Demokrit diesen Namen als Pseudonym benutzt haben; die heutige wissenschaftliche Lehre unterstützt diese Meinung allerdings nicht.

- Sir Isaac Newton (1642-1727) über die Wechselwirkung von Teilchen:

“Now the smallest particles of matter may cohere by the strongest attractions, and compose bigger particles of weaker virtue... There are therefore agents in nature able to make the particles of bodies stick together by very strong attractions. And it is the business of experimental philosophy to find them out.”



**Interessante Fragen, die nach Lektüre des Skripts beantwortet werden können:**

- Woher kennen wir das Alter des Universums?
- Woher kommt die Elementverteilung auf der Erde?
- Warum sind Meteoriten aus Eisen?
- Warum zerfällt das freie Neutron...ist im Kern aber stabil?
- Was ist die kosmische Strahlung und warum sind in ihr kaum Elektronen aber viele Myonen enthalten?
- Warum gibt es keine Antiwelt?
- Warum gibt es Kernkraft?
- Was ist Strahlung?
- Worin liegt der Nutzen von Radioaktivität außerhalb der Physik?
- Was sind die grundlegenden Bausteine der Natur und wie wechselwirken sie miteinander?

Wie zu erkennen ist, decken diese Fragen alle Größenordnungen vom Universum selbst ( $10^{26}$  Meter) bis zum kleinsten Teilchen ( $10^{-19}$  Meter) ab. Dabei muss die Geschichte von der Entstehung des Universums bis heute berücksichtigt werden, in der sich nach und nach der uns bekannte Teilchenzoo entwickelt hat. Die Entwicklung des Universums und der Elementarteilchen ist Abbildung 1 aufgezeigt.

Interessant ist die Energieverteilung des Universums. Die für uns sichtbare Materie, sprich Sterne bzw. Galaxien, macht nur etwa 5% der gesamten Energie aus. Der Großteil setzt sich aus noch nicht näher definierter dunkler Materie und dunkler Energie zusammen

**Literaturempfehlungen:**

- H. Frauenfelder, E. M. Henley, *Subatomic Physics*, 4th Edition, Prentice Hall, New Jersey 1999 [Fr91]
- F. Halzen, A. D. Martin, *Quarks and Leptons*, Wiley & Sons, New York 1984 [Ha84]
- E. Lohrmann, *Hochenergiephysik*, 5. Auflage, Teubner, Stuttgart 2005 [Lo86]
- B. R. Martin, G. Shaw, *Particle Physics*, 2nd Edition, Wiley & Sons, New York 1997 [Ma97]
- D. H. Perkins, *Introduction to High Energy Physics*, 3rd Edition, Addison-Wesley, New Jersey 1987 [Pe87]
- B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche, *Teilchen und Kerne*, 5. Auflage, Springer Akademischer Verlag, Berlin 2004 [Po99]
- W. S. C. Williams, *Nuclear and Particle Physics*, Oxford Science Publ., Oxford 1991 [Wi91]
- L. Bergmann, C. Schaefer, *Teilchen*, de Gruyter, Berlin 1992

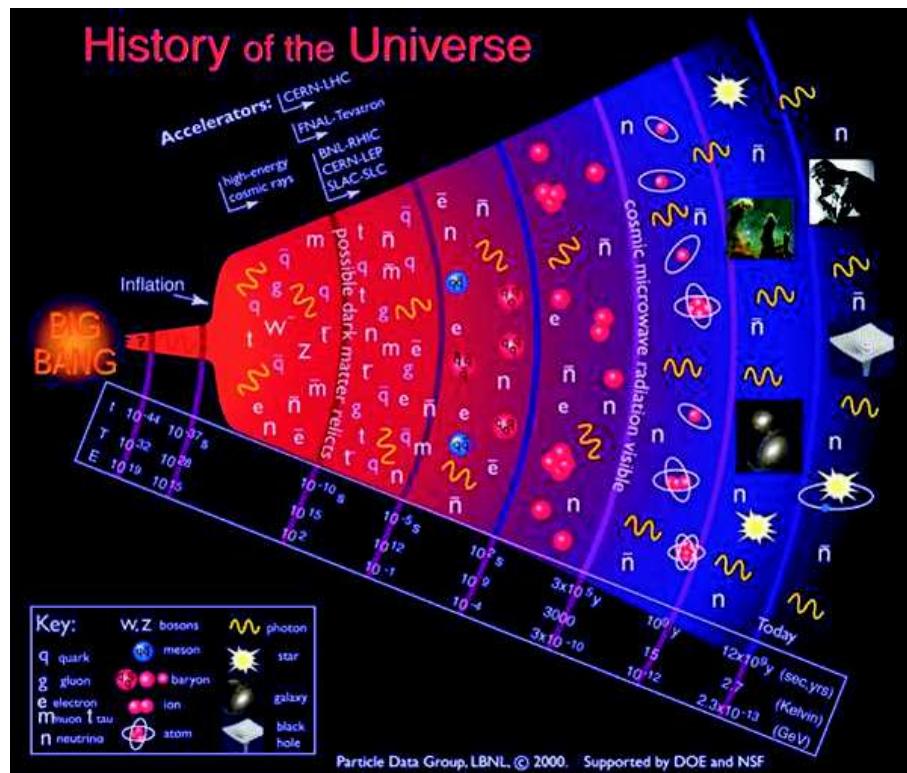


Abb. 1: Entwicklung des Universums



# Kapitel 1

## Einführung

In diesem einführenden Kapitel werden zunächst relevante Begriffe aus den Vorlesungen des Grundstudiums wiederholt, sowie einige grundlegende Begriffe der Teilchen- und Kernphysik erläutert. Zu Beginn wollen wir uns einen Überblick verschaffen über die *Längenskalen* (Kap. 1.1) und die *Energieskalen* (Kap. 1.2), auf deren Basis wir im Rahmen der Kern- und Teilchenphysik Untersuchungen anstellen. Danach wollen wir in den Abschnitten 1.3 und 1.4 in einem ersten „Crashkurs“ diejenigen Teilchen und deren Wechselwirkungen kennenlernen, mit denen wir es im folgenden zu tun haben werden.

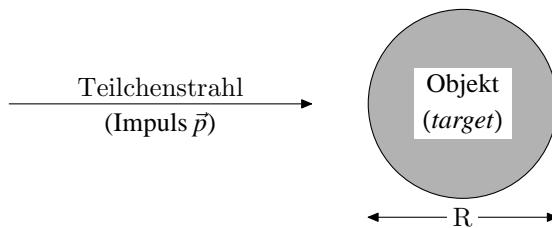
Das Ziel der Teilchenphysik ist die Erforschung der elementaren Bausteine der Materie und ihrer fundamentalen Wechselwirkungen. Die dazu verfolgte Methode – der Einsatz hoher Energien – gewährleistet ein hohes Auflösungsvermögen. Den experimentellen Zugang stellen *Streuprozesse* dar (Abb. 1.1). Hierbei wird ein Strahl aus Teilchen mit dem Impuls  $\vec{p}$  an einem Objekt mit Ausdehnung  $R$  gestreut.

Um Objektstrukturen mit der räumlichen Ausdehnung  $R$  auflösen zu können, folgt unter Beachtung des *Welle-Teilchen-Dualismus* und der *Heisenberg'schen Unschärferelation*

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \quad (\lambda = 2\pi/k, \quad \hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}), \quad \Delta \vec{p} \cdot \Delta \vec{x} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.1)$$

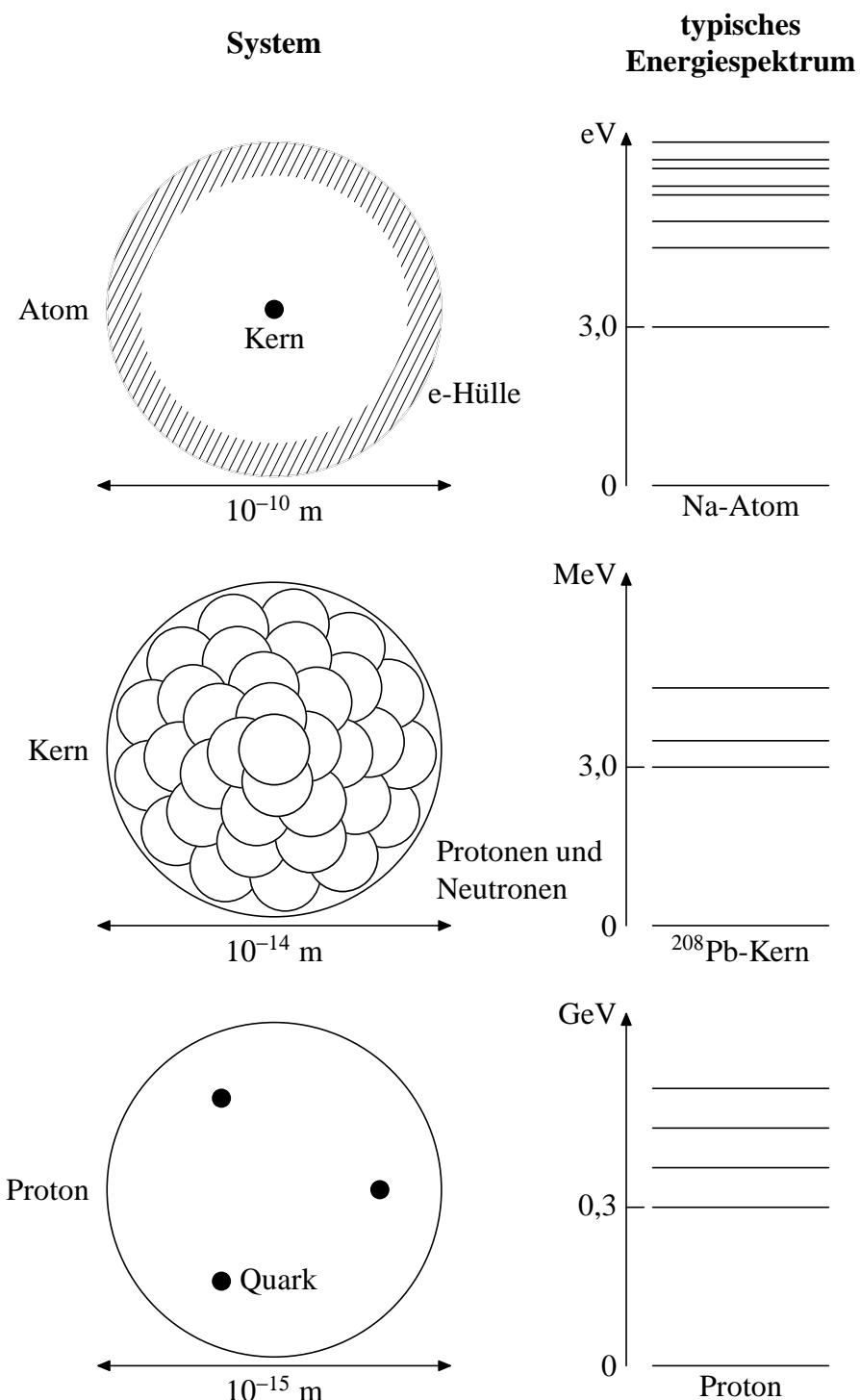
die Bedingung:

$$k \cdot R \geq 1 \quad \text{bzw.} \quad p \cdot R \geq \hbar$$



**Abb. 1.1:** Experimenteller Zugang: Streuprozesse

## 1.1 Größenordnungen



**Abb. 1.2:** Längenskalen und Hierarchie der Strukturen im Atom. Daneben sind typische Anregungsenergien und -spektren gezeigt. Je kleiner die gebundenen Systeme sind, desto größer sind ihre Anregungsenergien.

Es ist sinnvoll, entsprechend der Längenskalen der zu betrachtenden Teilchen (Abb. 1.2), wie z.B. Kerne oder Protonen, sich passende, „natürliche“ Einheiten, zu wählen. Einige Beispiele:

- natürliche Längeneinheit:

$$1 \text{ fm} (\text{Fermi}) = 10^{-15} \text{ m} = 10^{-13} \text{ cm}$$

- Energie-Einheiten:

$$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$$

$$1 \text{ GeV} = 10^3 \text{ MeV} = 10^9 \text{ eV}$$

- Lichtgeschwindigkeit

$$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

Als nützlich erweist es sich, folgenden Zahlenwert im Kopf zu behalten:  $\hbar \cdot c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ .

**Beispiel:** Wie groß muß der Strahlimpuls  $\vec{p}$  mindestens sein, um etwa Strukturen  $R < 0.1 \text{ fm}$  – beispielsweise im Inneren eines Protons – zu erforschen?

$$p \geq \frac{\hbar}{R} = \frac{\hbar c}{0.1 \text{ fm} \cdot c} \approx \frac{0.2 \text{ GeV}}{0.1 c} = 2 \frac{\text{GeV}}{c}$$

**Rationalisierte Einheiten.** Ähnlich, wie man in der Elektrodynamik gerne zum Gauß-System greift, weil sich dieses als am angemessensten erweist, sind in der Teilchenphysik die sog. *rationalisierten Einheiten* sehr nützlich, bei denen  $\hbar = 1$  und  $c = 1$  gesetzt wird. Energie, Impuls, Masse und inverse Zeit besitzen dann dieselbe Einheiten. Zur Umrechnung sind folgende Werte nützlich:  $\hbar c \approx 0.197 \text{ GeV fm}$ ;  $c \approx 3 \cdot 10^{23} \text{ fm s}^{-1}$ . Daneben kennt man noch die *Weißkopfeinheiten* mit zusätzlich  $\pi = 1$ , die allerdings nicht so weit verbreitet sind. Hinweis: Eine ausführliche Diskussion über Sinn und Unsinn von Einheitensystemen neben den SI-Einheiten findet sich in [Fl97].

## 1.2 Energien und Impulse

In der Regel werden wir es in der Kern- und Teilchenphysik häufig mit relativistischen Teilchen zu tun bekommen, deren Kinematik durch die *spezielle Relativitätstheorie* bestimmt ist. Die Energie eines Teilchens mit Masse  $m$  und Impuls  $\vec{p}$  ergibt sich zu:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (p = |\vec{p}|) \tag{1.2}$$

- Das Photon besitzt keine Ruhemasse,  $m = 0$ , und damit gilt:

$$E = pc \quad (p = \hbar k) \quad (1.3)$$

Diese Gleichung gilt auch für Teilchen mit endlicher Ruhemasse bei hohen Geschwindigkeiten, wo die Ruheenergie klein gegenüber dem Impuls ist.

- Für nichtrelativistische Teilchen mit Masse  $m$  und Impuls  $\vec{p}$  (Geschwindigkeit  $Vv \ll c$ ) ergibt sich:

$$E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + o(p^4), \quad (1.4)$$

$mc^2$  stellt dabei die *Ruheenergie*, der Term  $p^2/(2m)$  die *kinetische Energie* dar.

**Erhaltungssätze für Energie und Impuls:** Jedes freie Teilchen der Masse  $m$  ist charakterisiert durch seinen Impuls  $\vec{p}$  und seine Energie  $E$ :

$$E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}.$$

Energie und Impuls werden zusammengefaßt im *Viererimpuls*

$$P = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

mit  $p^0 = E/c$ ;  $p^i$  = Impulskomponente  $i = 1, 2, 3$  und der Eigenschaft

$$P^2 = P \cdot P = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2.$$

Der Viererimpuls kann in ko- und kontravarianter Schreibweise dargestellt werden:

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E/c, \vec{p}) \quad (\text{kontravariante Darstellung})$$

$$p_\mu = (p_0, p_1, p_2, p_3) = (E/c, -\vec{p}) \quad (\text{kovariante Darstellung})$$

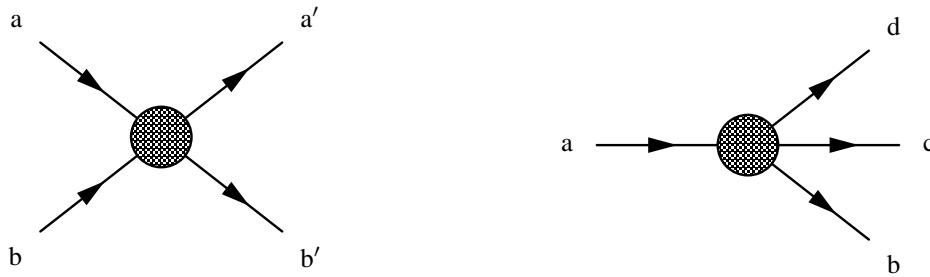
$$P^2 = \sum_{\mu=0}^3 p^\mu p_\mu \equiv p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \quad (\text{Skalarprodukte von Vierervektoren})$$

In der letzten Zeile wurde die Einstein-Summenkonvention eingeführt: Treffen zwei gleiche Indizes aufeinander (einer oben, einer unten), so wird über alle möglichen Werte des Index summiert. Tritt ein Index nur einfach auf, so gilt die Gleichung für jeden Wert des Index. Es handelt es sich also eigentlich um mehrere Gleichungen bzw. eine Vektorgleichung.

- Neben dem Viererimpuls gibt es noch die Orts-Zeit-Vierervektoren  $x^\mu = (ct, \vec{x})$
- Mit der Minkowski-Metrik  $g^{\mu\nu}$  ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen ko- und kontravarianten Vierervektoren:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu}, \quad p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu, \quad p^\mu = g^{\mu\nu} p_\nu$$

### 1.3 Elementarteilchen und fundamentale Wechselwirkungen



**Abb. 1.3:** Zweiteilchen-Streuprozesse

**Abb. 1.4:** Zerfall eines Teilchens

- Bei allen Reaktionen von Teilchen  $a + b \rightarrow c + d + e + \dots$  ist die Summe der Viererimpulse im Anfangs- und Endzustand eine Erhaltungsgröße. Es gilt Energiebilanz:

$$E_a + E_b = E_c + E_d + \dots$$

und Impulsbilanz:

$$\vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{p}_c + \vec{p}_d + \dots$$

Beispiele:

1. Zweiteilchenprozesse  $a + b \rightarrow a' + b'$  (Abb. 1.3)

$$\begin{aligned} E_a + E_b &= E_{a'} + E_{b'} \\ \vec{p}_a + \vec{p}_b &= \vec{p}_{a'} + \vec{p}_{b'} \end{aligned}$$

2. Zerfälle von Teilchen  $a \rightarrow b + c + \dots$  (Abb. 1.4)

$$\begin{aligned} E_a &= E_b + E_c + \dots = m_a c^2 \\ \vec{p}_a &= \vec{p}_b + \vec{p}_c + \dots = 0 \quad (\text{falls Teilchen } a \text{ ruht}) \end{aligned}$$

## 1.3 Elementarteilchen und fundamentale Wechselwirkungen

Im Folgenden wollen wir eine erste Übersicht über Elementarteilchen und deren Wechselwirkungen geben.

### 1.3.1 Quarks und Leptonen

Quarks und Leptonen sind Elementarteilchen mit *Spin* (Eigendrehimpuls)  $S = \frac{1}{2}$ . Zu jedem in Tab. 1.1 aufgeführten Teilchen gibt es ein entsprechendes *Antiteilchen* mit gleicher Masse und entgegengesetzter Ladung:  $Q(\text{Antiteilchen}) = -Q(\text{Teilchen})$ .

Quarksorte ( <i>flavour</i> )	Ladung [e]	Masse [ $\text{GeV}/c^2$ ]
u ( <i>up</i> )	+2/3	$\sim 10^{-2}$
d ( <i>down</i> )	-1/3	$\sim 10^{-2}$
s ( <i>strange</i> )	-1/3	$\sim 10^{-1}$
c ( <i>charm</i> )	+2/3	1.0 – 1.6
b ( <i>bottom</i> )	-1/3	4.1 – 4.5
t ( <i>top</i> )	+2/3	170 – 190

Lepton (Sorte)	Ladung [e]	Masse [ $\text{MeV}/c^2$ ]
$e^-$ (Elektron)	-1	0.511
$\nu_e$ (Elektron-Neutrino)	0	$\sim 0$ (?)
$\mu^-$ (Myon)	-1	105.66
$\nu_\mu$ (Myon-Neutrino)	0	< 0.17
$\tau^-$ ( $\tau$ -Lepton)	-1	1777
$\nu_\tau$ ( $\tau$ -Neutrino)	0	< 18.2

**Tab. 1.1:** Quarks und Leptonen, die elementaren Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen

Die Quarks werden nicht im Sinne freier Teilchen beobachtet. Die hier angegebenen Massen entsprechen Werten, die mittels der Theorie der starken Wechselwirkung (Kap. 6) für „quasi-freie“ Quarks aus entsprechenden Experimenten deduziert werden. Hierzu später mehr...

### 1.3.2 Fundamentale Wechselwirkungen

**Darstellung durch Feynman-Streudiagramme:** *Feynman-Diagramme* sind eine sehr effiziente Methode, das Matrixelement eines Prozesses anzuschreiben. Die Feynman-Regeln geben an, wie dieses aus einem Feynman-Graph abgeleitet werden kann. Die Eleganz des Verfahrens wird einem jedoch erst bewußt, nachdem man einige Matrixelemente „zu Fuß“ ausgerechnet hat. Wie allgemein in der Teilchenphysik üblich, werden wir im Verlauf des Textes von diesem Hilfsmittel regen Gebrauch machen, und wollen die Übersicht in diesem Abschnitt auch direkt mit Feynman-Diagrammen beginnen.

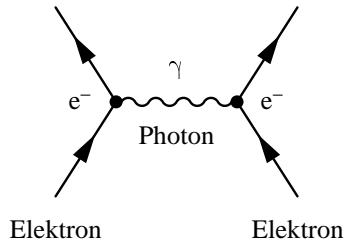
**Gravitation:** Die Gravitation spielt eine singuläre Rolle im Kanon der Wechselwirkungen, und wird eingehend in der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) [Fl98] behandelt.

**Elektromagnetische Wechselwirkung:** Diese bestimmt beispielsweise die Physik der Atomhülle (Coulomb-Kräfte) und wird durch *Photonen* vermittelt, den Quanten des elektromagnetischen Feldes.

- Die Wechselwirkung zweier Elektronen durch Austausch eines Photons (Masse  $m_{\text{Ph}} = 0$ ) ist als Beispiel eines Feynman-Diagramms der elektromagnetischen Wechselwirkung in Abb. 1.5 zu sehen.

- Die Stärke der Wechselwirkung wird durch die *Feinstruktur-Konstante*  $\alpha$  charakterisiert.

$$\alpha \equiv \alpha_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (\text{übliche Konvention: } \epsilon_0 = 1)$$

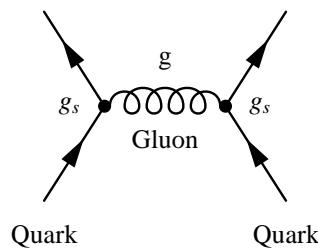


**Abb. 1.5:** Beispiel: Wechselwirkung zweier Elektronen – Feynman-Diagramm

**Starke Wechselwirkung:** Sie bestimmt zum Beispiel die innere Struktur von Proton und Neutron; ferner die Physik der Atomkerne. Vermittelt wird die starke Wechselwirkung durch *Gluonen*.

- Ein Beispiel eines Feynman-Diagramms ist in Abb. 1.6 zu sehen: Wechselwirkung durch Austausch eines Gluons (Masse  $m_g = 0$ ).
- Stärke der Wechselwirkung:

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi\hbar c} = \begin{cases} \approx \frac{1}{10} & \text{bei hohen Impulsen } Q \gtrsim 10 \text{ GeV/c} \\ \gtrsim 1 & \text{bei niedrigen Impulsen } Q < 0.2 \text{ GeV/c} \end{cases}$$



**Abb. 1.6:** Beispiel: Wechselwirkung zweier Quarks – Feynman-Diagramm

**Schwache Wechselwirkung:** Diese bestimmt unter anderem den  $\beta$ -Zerfall des Neutrons:  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ; sie wird vermittelt durch  $W^\pm$ - und  $Z^0$ -Bosonen.

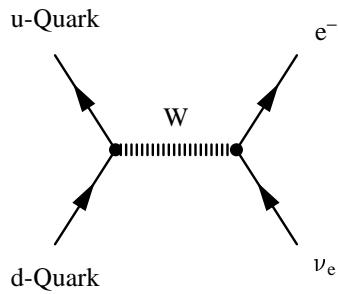
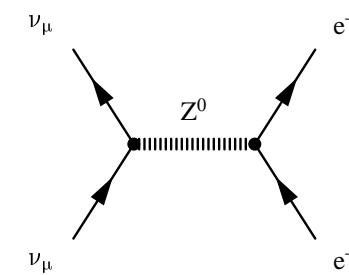
- Beispiele für typische Feynman-Diagramme sind die Wechselwirkung zwischen Quarks und Leptonen durch Austausch eines  $W$ -Bosons („geladener Strom“, da Ladung übertragen wird), mit  $m_W = (80.4 \pm 0.1) \text{ GeV}/c^2$  (Abb. 1.7) und die Wechselwirkung von Leptonen durch Austausch eines  $Z^0$ -Bosons („neutraler Strom“) mit  $m_{Z^0} = (91.187 \pm 0.007) \text{ GeV}/c^2$  (Abb. 1.8).

	schwach	elektromagnetisch	stark
Quarks: u, d, c, s, t, b	✓	✓	✓
Leptonen: e, $\mu$ , $\tau$ $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	✓	✓	—
Austauschteilchen („Bosonen“)	$W^\pm, Z^0$	$\gamma$	8 Gluonen

**Tab. 1.2:** Teilchen und ihre Wechselwirkungen

- Stärke der Wechselwirkung:

$$G_W = 1.023 \cdot M_p^{-2} \cdot 10^{-5} \approx 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} c^4$$

**Abb. 1.7:** Beispiel: Austausch eines  $W$ -Bosons im Feynman-Diagramm**Abb. 1.8:** Beispiel: Austausch eines  $Z^0$ -Bosons im Feynman-Diagramm

- Die Reichweite der Wechselwirkung wird durch die Masse des Austauschteilchens bestimmt. Heisenbergs Unschärferelation darf hierbei nicht verletzt werden, daher sinkt die Lebensdauer mit zunehmender Masse und damit auch die Reichweite des Austauschteilchens.
- Die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung können zur elektroschwachen Wechselwirkung zusammengefasst werden.
- Weiterhin kann die elektroschwache Wechselwirkung mit der starken Wechselwirkung im *Standardmodell* der Elementarteilchenphysik zusammengefaßt werden.
- Die drei fundamentalen Wechselwirkungen der Elementarteilchen werden durch Austausch von *Vektorbosonen* (Teilchen mit Spin 1) vermittelt:
  - Photonen,  $W$ - und  $Z^0$ -Bosonen für die elektroschwache Wechselwirkung,
  - Gluonen für die starke Wechselwirkung.

Welche der in Abschn. 1.3.1 besprochenen Teilchen an elektromagnetischer, starker und schwacher Wechselwirkung teilnehmen, ist in Tab. 1.2 zusammengefaßt.

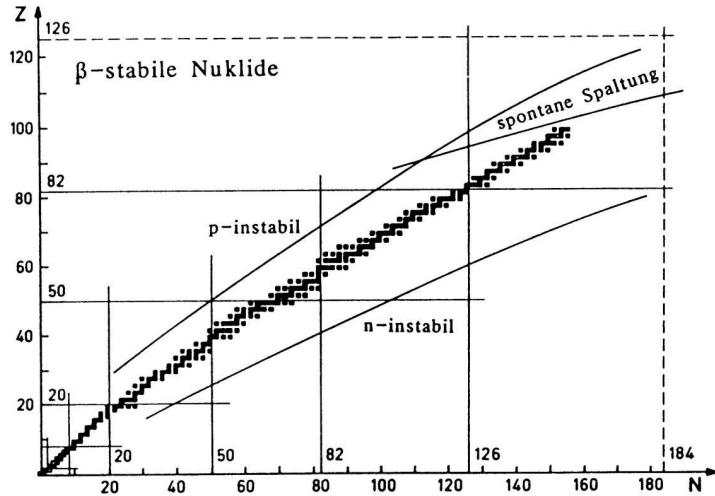


Abb. 1.9: Die  $\beta$ -stabilen Kerne in der  $Z$ - $N$ -Ebene (nach [Bo69])

## 1.4 Zusammengesetzte Systeme

### 1.4.1 Hadronen

Gebundene Systeme aus Quarks und Gluonen werden als *Hadronen* bezeichnet. Man unterscheidet:

- **Baryonen** sind aus drei Valenzquarks zusammengesetzte  $|qqq\rangle$ -Systeme mit halbzahligem Spin ( $J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ ), wie beispielsweise die Nukleonen (Proton mit Quarkinhalt  $|uud\rangle$  und Ladung  $Q = e$ , Neutron mit Quarkinhalt  $|udd\rangle$  und Ladung  $Q = 0$ ).
- **Mesonen** sind Systeme aus Quark-Antiquark-Paaren  $|q\bar{q}\rangle$ , mit ganzzahligem Spin ( $J = 0, 1$ ), wie beispielsweise das Pion  $\pi^+, \pi^0, \pi^-$  mit Drehimpulsquantenzahl  $J = 0$  oder das Rho-Meson  $\rho^+, \rho^0, \rho^-$  mit  $J = 1$  (beide konstituieren sich aus u und d-Quarks).

### 1.4.2 Kerne

Kerne sind gebundene Vielteilchensysteme aus Nukleonen. Für die *Kernmassenzahl*  $A$  gilt:

$$\text{Kernmassenzahl } A = \text{Protonenzahl } Z + \text{Neutronenzahl } N$$

Eine Übersicht der bekannten Nuklide („Nuklidkarte“) findet sich in Abb. 1.9. Nuklide mit gleicher Massenzahl  $A$  werden als *Isobare* bezeichnet, diejenigen mit gleicher Ladungszahl  $Z$  als *Isotope* und solche mit gleicher Neutronenzahl  $N$  als *Isotone*.

Für die Bindungsenergie im Nukleon ergibt sich

$$B = [Z(M_p + m_e) + NM_n - M(A, Z)] c^2 \quad (1.5)$$

mit  $M_p = 938.27 \text{ MeV}/c^2$ ,  $M_n = 939.57 \text{ MeV}/c^2$  und  $m_e = 0.51 \text{ MeV}/c^2$ . Man erhält also die Summe der Ruheenergien der einzelnen Atombausteine von der eine Defektmassenenergie abgezogen wird. Für die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon ergibt sich damit:

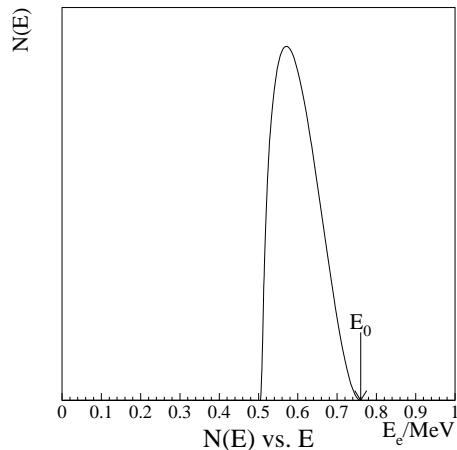
$$\frac{B}{A} \approx 8 \text{ MeV}.$$

## Übungen zu Kapitel 1

**Übung 1.1: Energiebilanz beim Pionzerfall.** Wie groß sind die (totalen) Energien des Myons und des Antineutrinos, die sich aus dem  $\beta$ -Zerfall eines ruhenden Pions gemäß  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$  ergeben? (Masse des Pions:  $m_{\pi^-} = 139.6 \text{ MeV}/c^2$ ; Masse des Myons:  $m_\mu = 105.7 \text{ MeV}/c^2$ )

**Übung 1.2:  $\beta$ -Zerfall des Elektrons.** Das gemessene Energiespektrum von Elektronen beim Zerfall des Neutrons hat die in Abb. 1.10 gezeigte Form.

- Zeigen Sie, daß diese empirische Tatsache mit einem reinen Zweikörperzerfall  $n \rightarrow p + e^-$  nicht zu vereinbaren ist.
- Bei einer Koinzidenzmessung mit einem ruhenden Proton im Endzustand wird die maximale totale Energie des Elektrons experimentell zu  $E_0 \approx 760 \text{ keV}$  bestimmt. Ermitteln Sie für das Teilchen X die Masse, die sich aus dem Dreikörperzerfall  $n \rightarrow p + e^- + X$  ergibt (Massen:  $m_p = 938.27 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_n = 939.57 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ ).
- Überlegen Sie sich, wie sich das Energiespektrum qualitativ bei  $\beta$ -Zerfällen in Kernen verändert.



**Abb. 1.10:** Energiespektrum der Elektronen beim  $\beta$ -Zerfall



# **Teil I**

## **Teilchen**



# Kapitel 2

## Beschleuniger und Detektoren



**Abb. 2.1:** Das Bild zeigt einen Ausschnitt des Atlas- Detektors, welcher zur Messung des Higgs- Bosons am LHC (CERN) in Genf verwendet wird

### Literaturempfehlungen zu diesem Kapitel:

- F. Hinterberger, *Physik der Teilchenbeschleuniger*, Springer Akademischer Verlag, Heidelberg 1997 [Hi97]
- C. Grupen, *Teilchendetektoren*, B. I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1993 [Gr93]
- G. Musiol, J. Ranft, R. Reif, D. Seelinger, *Kern- und Elementarteilchenphysik*, 2. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main 1995 [Mu95]
- K. Wille, *Physik der Teilchenbeschleuniger*, Teubner, Stuttgart 1992 [Wi92]

## 2.1 Beschleuniger

Dieses Kapitel bietet einen Überblick über verschiedene Arten von Beschleunigern. Zunächst wird das Verhalten von geladenen Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern näher beschrieben, worauf die Bewegung eines Teilchens in einem Beschleuniger basiert. Dann werden die verschiedenen Beschleunigertypen mit ihren Eigenheiten erläutert. Am Ende des Kapitels wird die Detektion von Strahlung behandelt, womit Rückschlüsse auf das Verhalten der beschleunigten Teilchen gezogen werden können.

### 2.1.1 Wozu benötigt man Beschleuniger?

Beschleuniger sind eine einfache Möglichkeit Teilchen mit hohen Energien zu erhalten, die für verschiedene Anwendungen benötigt werden:

- Bei der Suche nach dem *Kleinsten*. Um hier hohe Auflösungen zu erzielen, werden kleine Wellenlängen benötigt. Um dies zu erreichen ist ein großer Impuls nötig ( $\lambda \sim 1/p$ ).
- Erzeugung neuer Teilchen und Teilchensorten.

$$M_{\text{neu}} > M_{\text{stabil}}$$

Die Masse der neuen Teilchen muss aus der Energie der Anfangsteilchen genommen werden.

$$E \simeq p \cdot c \geq M_{\text{neu}} c^2$$

- Manipulation von Teilchen

### 2.1.2 Natürliche Beschleuniger

Natürliche Beschleunigungsmechanismen spielen in der heutigen Physik nur noch eine untergeordnete Rolle und werden nur noch bei einigen speziellen Aufgaben verwendet. Historisch stellen diese aber die ersten verwendbaren Teilchenstrahlen dar.

#### 2.1.2.1 Kosmische Strahlung

Mit diesem *Beschleuniger* wurden die ersten Versuche an hochenergetischen Teilchen durchgeführt, z.B. der erste Nachweis des Pions.

Die primäre kosmische Strahlung, Protonen und  $\gamma$ -Strahlung, trifft auf Atome in der Atmosphäre und erzeugt dort sekundäre Teilchen. Diese erzeugen einen Teilchenfluss  $\Phi$  (etwa ein Teilchen pro Minute und  $\text{cm}^2$ ) auf der Erdoberfläche mit den Experimenten möglich sind.

#### 2.1.2.2 Gravitation

Die Gravitation spielt bei Beschleunigern auf Grund der hohen Energien und kleinen Teilchenmassen *fast* keine Rolle. Eine Ausnahme spielt hier die Beschleunigung von ultrakalten Neutronen.

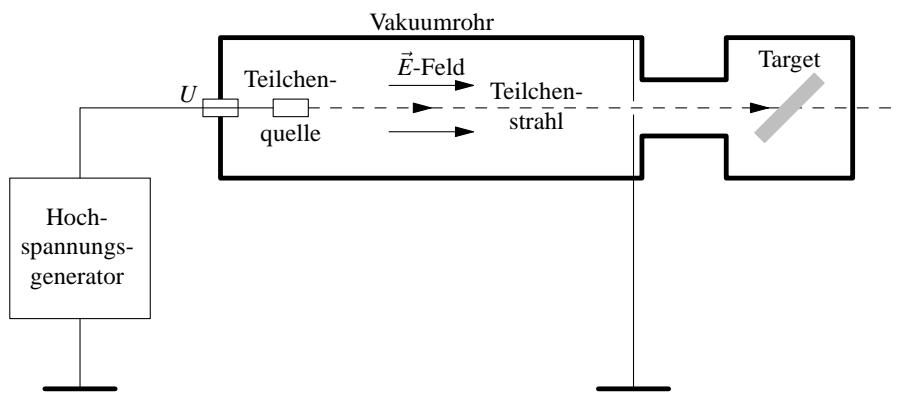
Neutronen mit Energien  $E \lesssim 300\text{neV}$  können mit Materiewänden und magnetischen Feldern eingefangen werden. Um sie zu detektieren, müssen sie aber diese Barriere überwinden: bei

einem Fall von 1 Meter Höhe gewinnen die Neutronen  $\Delta E \sim 100\text{eV}$ . Dieser Energieunterschied reicht aus, um die Falle zu verlassen.

### 2.1.3 Einfache elektrische Felder

Generell werden elektrische Felder durch Potentialdifferenzen bzw. Ladungen erzeugt. Elektrische Felder sind Vektorfelder - an jedem Raumpunkt haben sie also sowohl einen Betrag als auch eine Richtung definiert. Es gilt folgender Zusammenhang zwischen der Potentialdifferenz  $U$  und dem elektrischen Feld  $\vec{E}$ :

$$U = \int \vec{E}(\vec{x}) d\vec{x}$$



**Abb. 2.2:** Schema eines Hochspannungs-Beschleunigers

In einem Hochspannungs-Beschleuniger wird ein Teilchen mit Ladung  $q$  im elektrischen Feld  $\vec{E}$  beschleunigt (Abb. 2.2). Für die Kraft  $\vec{F}$  auf eine Ladung  $q$  im Feld  $\vec{E}$  gilt:

$$\vec{F}(x) = q\vec{E}(x)$$

Dabei gewinnen sie die Energie

$$E = \int \vec{F}(x) d\vec{x} = \int q\vec{E}(x) d\vec{x} \quad (2.1)$$

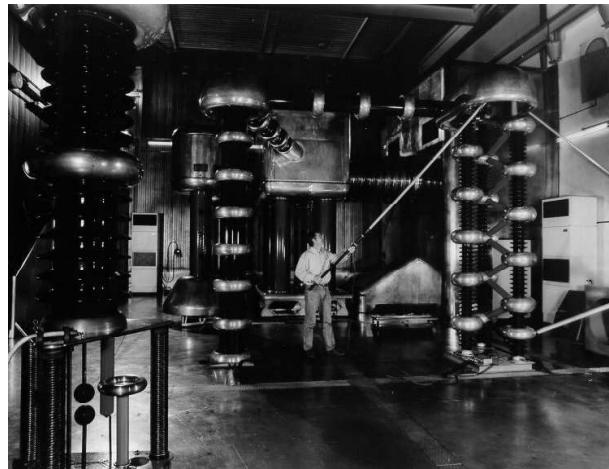
Für ein konstantes elektrisches Feld vereinfacht sich (2.1) zu

$$E = q\vec{E}\Delta x \quad (2.2)$$

**Cockcroft-Walton-Beschleuniger:** Dieses Verfahren wird zum Beispiel im *Cockcroft-Walton-Beschleuniger* (Nobelpreis<sup>1</sup> 1961 für Cockcroft und Walton) (Abb. 2.3) oder im *Van-de-Graaff-Beschleuniger* (Abb. 2.4) verwendet.

Für den Cockcroft-Walton-Beschleuniger haben seine Erfinder eine eigene Hochspannungsquelle entwickelt, den Cockcroft-Walton-Generator.

<sup>1</sup><http://www.nobel.se/laureates/physics-1961.html>



**Abb. 2.3:** Cockcroft-Walton-Beschleuniger

**Van-de-Graaff-Beschleuniger:** Im Van-de-Graaff-Beschleuniger wird elektrische Ladung auf mechanischem Wege in einen feldfreien Raum der Beschleunigungselektrode gebracht. Die hieraus entstehende Spannung wird zur Beschleunigung benutzt. In der verbreitetste Methode der Realisierung bedient man sich eines umlaufenden Bandes, auf das wahlweise positive oder negative Ladung abgestreift wird (vgl. Bandgenerator). Die Ladung wird dann durch das Band zum Pol transportiert und über Nadeln zur Poloberfläche (meist in Form einer Kugel) abgesaugt. Eine eingebrachte Ionenquelle emittiert schließlich Ionen, welche in einem evakuierten Rohr durch die entstandene Potentialdifferenz beschleunigt und durch einen Magneten auf das Target hin abgelenkt werden. Siehe hierzu auch Abb. 2.4. Die maximal erreichbare Feldstärke im Van-de-Graaff-Beschleuniger beträgt  $\varepsilon dx = 20 \cdot 10^6$  V. Damit werden Endenergien von  $E = 20 \cdot 10^6$  eV = 20 MeV für  $q = e$  erreicht. Diese Feldstärken sind aber nur unter Luftabschluss erreichbar, da sonst schon bei relativ niedrigen Spannungen ein Überschlag stattfinden würde. Als hochspannungsfestes Gas zur Luftverdrängung eignet sich z.B. SF<sub>6</sub>. Der Van-de-Graaff-Beschleuniger ist der weitverbreitetste Niedrigenergiebeschleuniger und erreicht die höchsten Spannungen aller Potentialbeschleuniger. Außerdem weißt er die höchste Spannungskonstanz auf, was für eine kleine Energieunschärfe  $\Delta E$  der beschleunigten Teilchen sorgt.

Zwei Van-de-Graaff-Beschleuniger mit Umladung bezeichnet man als *Tandem-Beschleuniger*. Dieser benötigt negativ geladene Ionen, die man erzeugt, indem man den (aus der Quelle emittierten) Ionenstrahl zunächst durch einen Wasserstoffstrahl laufen lässt. Hierbei findet Elektroneneinfang statt, wodurch negativ geladenen Ionen entstehen. Diese werden durch ein elektrisches Potential beschleunigt und treffen dann auf eine dünne Folie, wodurch sie Hüllelektronen verlieren („stripping“) und zu positiv geladenen Ionen werden. Dadurch kann die Beschleunigungsspannung noch einmal wirksam werden, und somit eine höhere Endenergie erreicht werden. Dieses Verfahren ist vor allem für Ionen mit  $Z \gg 1$  nützlich, da diese bei der Umladung mehrfach positiv ionisiert werden können und dadurch natürlich stärker beschleunigt werden. Hierdurch sind Energien von  $E_{\text{ion}} \approx 1$  GeV erreichbar. Der Tandem-van-de-Graaff-Beschleuniger am Münchner Beschleunigerlaboratorium<sup>2</sup> (Abb. 2.5) besitzt eine Endenergie von 14 MeV bei Protonen.

<sup>2</sup><http://www.bl.physik.tu-muenchen.de/>

## 2.1 Beschleuniger

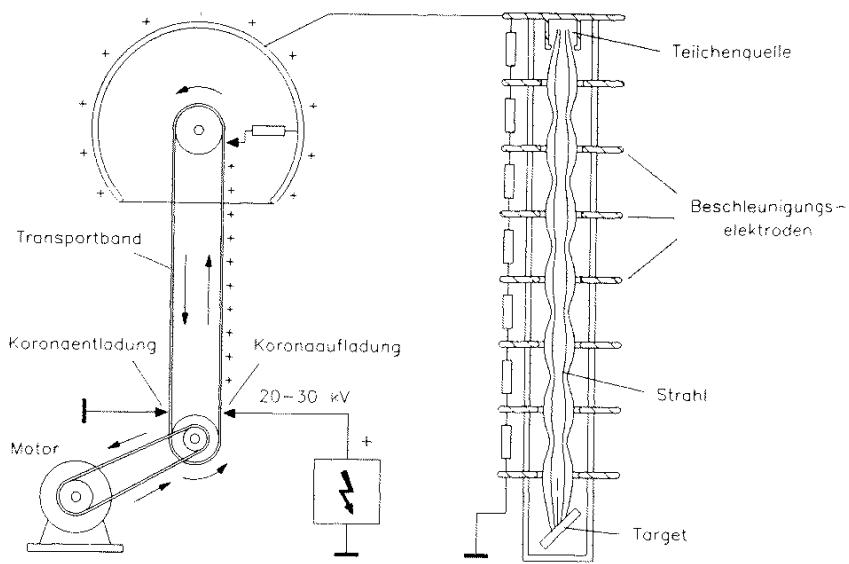


Abb. 2.4: Schema eines Van-de-Graaff-Beschleunigers (aus [Wi92])

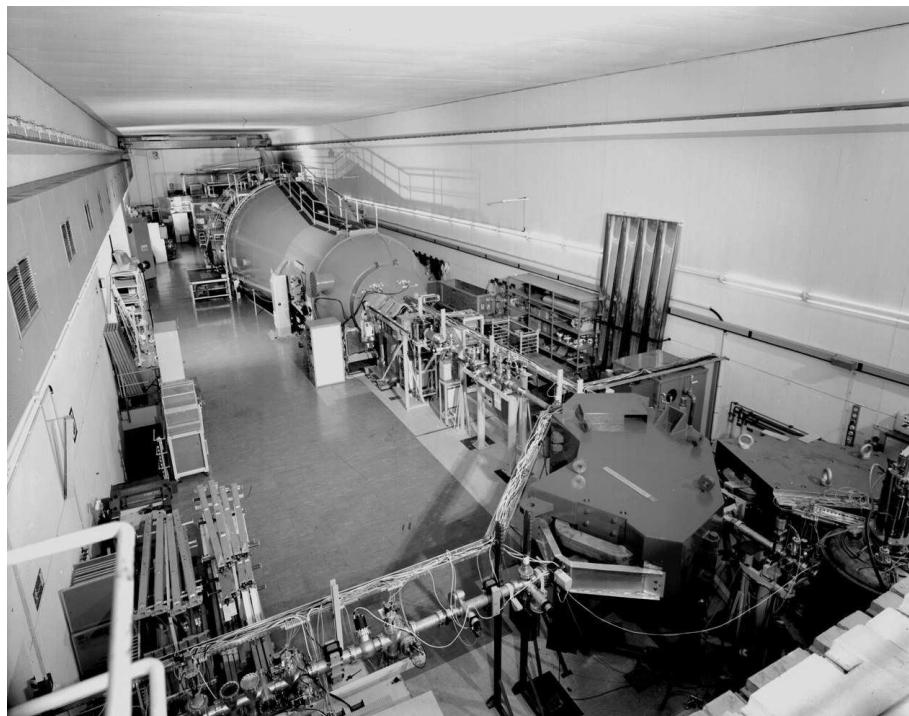


Abb. 2.5: Der Tandem-Van-de-Graaff-Beschleuniger am Münchener Beschleunigerlaboratorium

### 2.1.4 Ablenkung eines Teilchens im Magnetfeld

Im Magnetfeld bewegt sich ein geladenes Teilchen auf einer Kreisbahn. Hierfür ist das Gleichgewicht aus Lorentzkraft und Zentripetalkraft verantwortlich:

Für die Lorentzkraft gilt:

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot q \quad (2.3)$$

wobei  $\vec{p} = m_0 \gamma \vec{V} = m_0 c \beta \gamma$  (für kleine Energien wird dies zu  $\vec{p} = m \vec{V}$  wegen  $\gamma \approx 1$ ) und  $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  gilt.

Die Lorentzfaktoren  $\beta$  und  $\gamma$  sind aus der speziellen Relativitätstheorie bekannt und genügen den Relationen:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} \quad \beta = \frac{\vec{V}}{c}$$

Für  $\vec{V} \perp \vec{r}$  und  $\vec{V} \perp \vec{B}$  gilt dann:

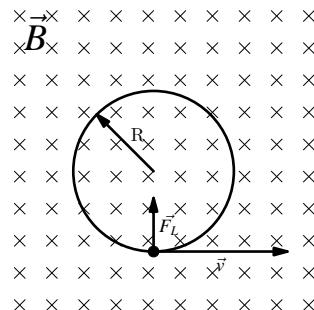
$$\omega = \frac{V}{r} \quad \text{und} \quad F = (V \cdot B) \cdot q \quad (2.4)$$

Desweiteren gilt für die Zentrifugalkraft:

$$F_{\text{Zentr}} = \frac{mV^2}{r} = \omega^2 r \cdot m \quad (2.5)$$

Im Gleichgewicht ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} F_Z &= F_L \\ m\omega^2 r &= V \cdot B \cdot q \\ m \frac{V}{r} &= B \cdot q \\ \Rightarrow \frac{p}{qB} &= r \end{aligned}$$



**Abb. 2.6:** Lorentzkraft. Die Kreuze deuten an, daß das  $\vec{B}$ -Feld in die Blattebene hineingeht. Entsprechend müßte ein auf der Bahn kreisendes Teilchen positive Ladung besitzen (z. B. ein Positron).

Für  $q = e$ ,  $p$  in GeV,  $r$  in m und  $B$  in T vereinfacht sich dies zu

$$\frac{p}{B} \approx r \cdot 0.3 \quad (2.6)$$

Dies ist die *Standardgleichung für Teilchen im Magnetfeld*.

Wie lange benötigt das Teilchen für einen Umlauf?

$$\tau = \frac{\Delta s}{V} = \frac{2\pi r}{V} \quad \text{mit} \quad r = \frac{p}{|q| \cdot B} = \frac{c \cdot m_0 \cdot \beta \cdot \gamma}{|q| \cdot B}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{2\pi \cdot m_0 \cdot \gamma}{|q|B}$$

Für  $V \ll c$  gilt:  $\gamma \rightarrow 1$  und damit gilt für  $\tau$ :

$$\tau = \frac{2\pi \cdot m_0}{|q|B}$$

In dieser Näherung gilt für die Umlauffrequenz  $\omega_c$ , auch

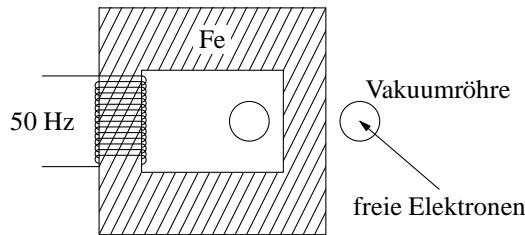
Zyklotronfrequenz genannt:

$$\omega = \frac{|q|B}{\gamma m_0} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} \omega_c = \frac{|q|B}{m_0}$$

Es zeigt sich, dass die Umlauffrequenz unabhängig vom Impuls  $\vec{p}$  des Teilchens ist, solange die Näherung  $\gamma \approx 1$  gilt.

## 2.1.5 Betatron

Das Betatron wurde 1940 an der University of Illinois von D. Kerst entwickelt. Im Betatron, auch Elektronenschleuder genannt, werden die Elektronen nicht mit Hilfe von Beschleunigungselektroden oder -resonatoren, sondern im elektrischen Wechselfeld eines Transformatorkerns beschleunigt.



**Abb. 2.7:** Schematische Darstellung eines Betatrons

Nach dem Induktionsgesetz entsteht um die Feldlinien eines zeitlich veränderlichen Magnetfeldes ein elektrisches Wirbelfeld. Befinden sich frei bewegliche Elektronen in dem induzierten elektrischen Feld, dann werden sie beschleunigt. Das zeitlich veränderliche Magnetfeld erzeugt man im Betatron in einem Transformatorkern mit einem Wechselstrom von 50 bis 500 Hz, der durch die Primärwicklung fließt.

Eine schematische Darstellung geben Abb. 2.7 und 2.8. Als Sekundärwicklung des Transformators dient der Elektronenstrahl, der in ein gut evakuiertes Ringrohr eingeschossen wird. Das

Magnetfeld, welches den Strahl auf der Kreisbahn hält, muß so gewählt werden, daß die beschleunigten Elektronen bei allen vorkommenden Energien im Beschleunigungsrohr auf dem Sollkreisradius  $R_s$  gehalten werden. Man nennt dieses Magnetfeld das Führungs- oder Haltefeld.

Da aufgrund der Beschleunigung durch die Wirbelfelder der Impuls der Elektronen zunimmt, erhöht sich bei konstantem Haltefeld der Radius der Kreisbahn. Um dem entgegen zu wirken, muss das Haltefeld mit der Zeit zunehmen. Im Folgenden wird nun die Beziehung für eine stabile Bahn abgeleitet:

- Für die Vergrößerung des Impulses gilt:

$$\frac{d}{dt} m \cdot V = F = e \cdot E_\varphi$$

- mit:  $m \cdot V = p = |q|RB = eRB$

$$\rightarrow e \cdot E_\varphi = e\dot{R}B + eR\dot{B}$$

- Dem zeitlich variierenden Magnetfeld kommen hierbei zwei Aufgaben zu:

- Das  $B$ -Feld hält Elektronen mit der Geschwindigkeit  $\vec{V}$  auf der Kreisbahn.
- Die zeitliche Variation von  $B$  beschleunigt die Elektronen.
- Das Elektron soll die Vakuumkammer nicht verlassen, d.h:  $R(t) = const = R_s$  mit

$$ds = 2\pi R_s \quad ; \quad dF = 2\pi R \cdot dR$$

- verwende 3. Maxwell-Gleichung:  $\oint E_\varphi ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int B dF$

$$\Rightarrow E_\varphi \cdot R_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R_s} R \cdot B(R) dR$$

- mit der Ersetzung  $E_\varphi = R_s \cdot \dot{B}$

$$\rightarrow R_s^2 \cdot \dot{B}(R_s) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R_s} R \cdot B(R) dR$$

- sowie der Definition:  $\int_0^{R_s} R \cdot B(R) dR = \overline{B}_{\text{ind}} \cdot \frac{R_s^2}{2}$
- folgt die Beziehung für eine stabile Bahn (konstanter Radius):

$$B_{\text{Halte}}(R = R_s) = \frac{1}{2} \overline{B}_{\text{ind}}(R = R_s) \quad \text{über die Zeit konstant,}$$

wobei der radiale Mittelwert des Induktionsfeldes bis zum Abstand des Sollkreisradius vom Kern gegeben ist durch:  $\int_0^{R_s} RB(R) dR = \overline{B}_{\text{ind}}(R_s) \cdot R_s^2 / 2$ . Das Haltefeld muss also bei der Vakuumröhre halb so groß sein, wie der Mittelwert des induzierten magnetischen Feldes.

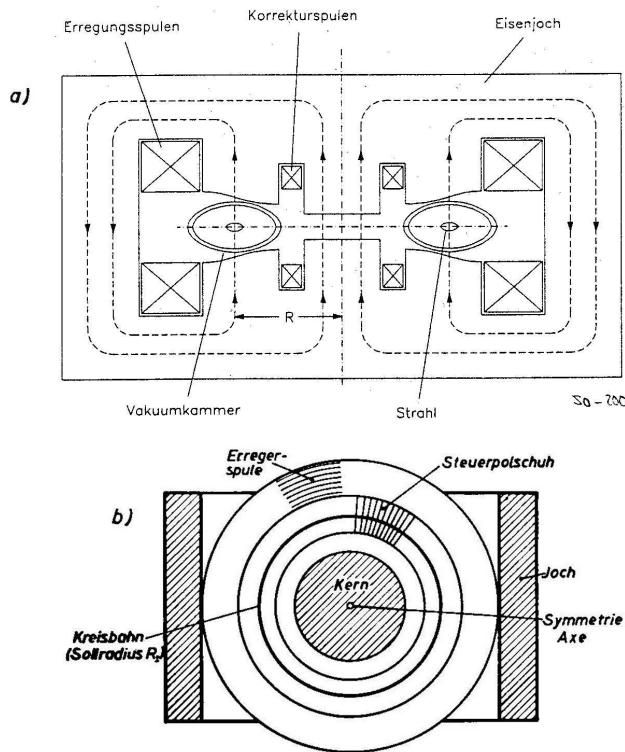


Abb. 2.8: Betatron a) Schnitt durch die Symmetriechse b) Aufsicht (aus [Ko55])

**Stabilitätsbedingung:** Um Teilchen, die von der Sollbahn abweichen, wieder auf die vorgesehene Flugbahn zu bringen muss das Betatron so konstruiert sein, dass auf abweichende Teilchen eine rücktreibende Kraft in Richtung Sollbahn wirkt.

- Radiale Stabilität:

Nach Abb. 2.9 wirken auf ein Teilchen im Betatron die Zentrifugalkraft:  $F_Z = mV^2/r$  sowie die rücktreibende Lorentzkraft:  $F_L = eVB(r)$ . Wir wollen nun die Bedingung für ein Magnetfeld finden, das folgendes leistet: Auf der Sollbahn der Teilchen befinden sich Zentrifugalkraft und Lorentzkraft im Kräftegleichgewicht. Weichen die Teilchen nach außen ab, so wirke die Lorentzkraft rücktreibend, weichen die Teilchen nach innen ab, so sollen sie via Zentrifugalkraft wieder weiter nach außen kommen. Dies wird erfüllt für:

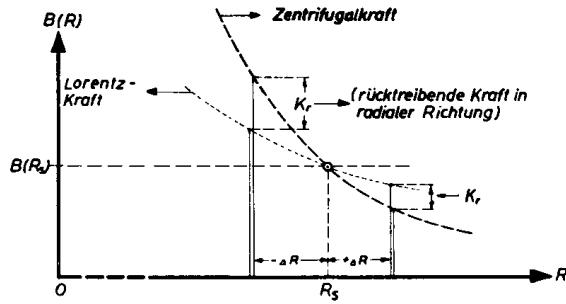


Abb. 2.9: radiale Stabilität im Betatron (aus [Ko55])

$$R < R_S: F_Z > F_L$$

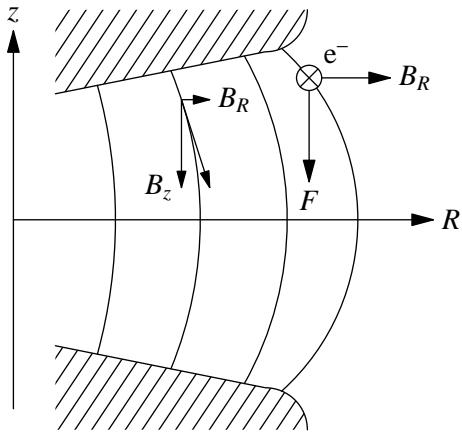
$$R > R_S: F_Z < F_L$$

$F_L$  muss also weniger schnell mit  $R$  abfallen als  $F_Z$ . Um dies zu realisieren, muss das Magnetfeld wie folgt beschaffen sein:

$$B(r) \propto R^{-n}, \quad n < 1$$

B-Feld muß langsamer mit  $R$  abfallen als  $1/R$

- Axiale Stabilität:



Durch die Krümmung der Magnetfeldlinien nach außen wird bei einer axialen Auslenkung eine rücktreibende Kraft in  $z$ -Richtung zu  $z = z_0$  erzeugt.

$$V_z \neq 0 \Rightarrow F_L^z = e \cdot V_z B_R$$

Die Stabilität im Betatron wird dann durch  $B(r) \propto R^{-n}$  mit  $n > 0$  gewährleistet. Andernfalls würde durch eine Krümmung nach Innen die zusätzliche Kraft in die falsche Richtung wirken und die axiale Auslenkung noch vergrößert.

Abb. 2.10: Axiale Stabilitätsbedingung

Insgesamt erhalten wir also folgende Bedingung für eine stabile Bahn im Betatron:

B-Feld muß mit  $R$  abfallen wie  $B(r) \propto R^{-n}$  mit  $1 > n > 0$

Eine grundlegende Eigenschaft aller Kreisbeschleuniger sind die Schwingungen um die Soll-Lage, die sogenannte *Betatronschwingerung*. Beim Betatron ist sie für  $0 < n < 1$  vorhanden, wobei gilt:  $\omega_{\text{Betatron}} < \omega_{\text{Umlauf}}$ .

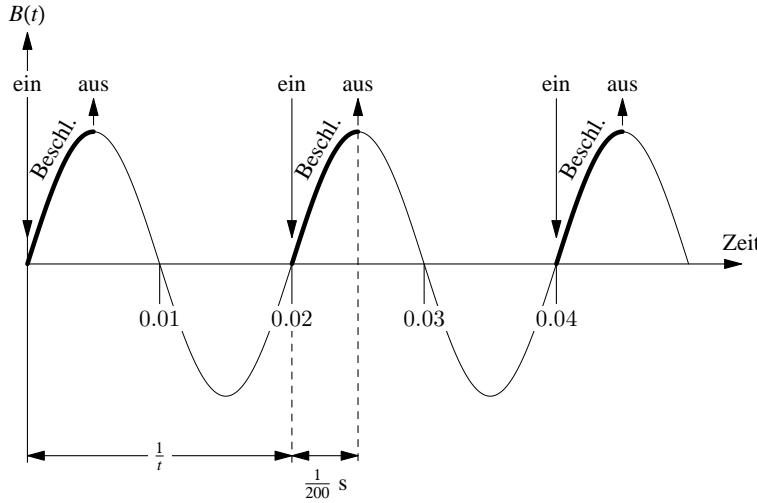
Die Bedingung  $0 < n < 1$  wird auch *zweite Stabilitätsbedingung* genannt und gilt für alle Kreisbeschleuniger.

**Betriebsmodus:** Typische Werte für den Betriebs eines Betatrons sind:

$$\beta \approx 1 \quad 2\pi R \approx 1 \text{ m} \quad t_{\text{Umlauf}} = \frac{2\pi R}{c} = \frac{1}{3 \cdot 10^8} \text{ s} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

Für die Beschleunigungsdauer  $\Delta t$  gilt: die Beschleunigung erfolgt nur in der ersten Viertel-Periode der Schwingung (Abb. 2.11), da ein Anstieg des Feldes für die Induktion benötigt wird und das Feld eine positive Stärke haben muss, da sonst der Strahl in die falsche Richtung vom Haltefeld abgelenkt wird. Es gilt also bei einer Erregerfrequenz von 50 Hz:

## 2.1 Beschleuniger



**Abb. 2.11:** Phasendiagramm,  $\omega \approx 50 \text{ Hz}$

$$\Delta t = \frac{1}{4} \cdot \text{Wiederholfrequenz}^{-1} = \frac{1}{4 \cdot 50 \text{Hz}} = \frac{1}{200} \text{s}$$

$$\Rightarrow \text{in } \Delta t = \frac{1}{200} \text{s} \text{ gibt es } \frac{\Delta t}{t_{\text{Umlauf}}} = \frac{1}{6 \cdot 10^{-7}} \approx 1.5 \cdot 10^6 \text{ Umläufe}$$

Geht man also in einer Idealisierung davon aus, dass die Elektronen schon zu Beginn der Beschleunigungsphase praktisch ihre Endgeschwindigkeit erreicht haben, dann erfolgen in der kurzen Phase über eine Million Umläufe.

Für die Energie gilt:

$$\frac{\Delta E}{\text{Umlauf}} \approx 10 \text{ eV}$$

$$E^{\text{Ende}} \approx 1.5 \cdot 10^7 \text{ eV} = 15 \text{ MeV}$$

Für große Energien ist die relativistische Massenzunahme  $m = \gamma m_0 = m_0 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  zu beachten. Die Betatronschwingungen werden durch die Massenzunahme des Elektrons gedämpft (die Amplitude nimmt auf etwa ein 1/20 bis 1/30 ihrer ursprünglichen Höhe ab).

Beim größten Betatron, 1952 von D. Kerst konstruiert, hat man etwa  $10^5$  Umläufe erreicht, sowie einen Energiegewinn von  $\Delta E = 3 \text{ keV}$  pro Umlauf.

$E_{\text{max}} \approx 300 \text{ MeV bei } 1 \text{ m Radius}$

Im medizinischen Einsatz sind heute Energien von  $E \approx 20 \text{ MeV}$  typisch. Die Elektronen werden aus ihrer Bahn ausgelenkt und auf ein Target geleitet. Mit der dabei entstehenden Bremsstrahlung oder direkt mit den Elektronen lassen sich dann Bestrahlungen durchführen.

Betatrons sind nicht für Protonen geeignet, da

1. eine Dämpfung der Schwingung fehlt, aufgrund der geringeren relativistischen Massenzunahme
2. Protonen zu langsam umlaufen, d. h. zu wenig Umläufe/Periode ausführen und dadurch zu wenig effektive Beschleunigung erfahren ( $V_p \leq \frac{1}{10} V_e$ ,  $E_p^{\text{Ende}} \approx 1 \text{ MeV}$ )

**Wie erhält man höhere Energien?** Beispielsweise durch mehrmaliges Durchlaufen einer Beschleunigungsstrecke. Dies wird in Kreisbeschleunigern wie *Zyklotron*, *Mikrotron* oder *Synchrotron* ausgenutzt, welche wir in den folgenden Abschnitten besprechen wollen.

## 2.1.6 Zyklotron

Eine weitere Beschleunigerart ist das sog. Zyklotron. Ein Zyklotron hat gegenüber dem Betatron den Vorteil, dass Haltefeld und Beschleunigungsfeld entkoppelt sind. Dabei kann die Beschleunigungsstrecke mehrmals durchlaufen werden. Dadurch werden höhere Endenergien erreicht. Auch hier werden mit Hilfe eines Magnetfeldes geladene Teilchen auf eine Kreisbahn gelenkt. Aus dem Gleichgewicht von Lorentz- und Zentrifugalkraft erhält man die Zyklotron-umlauffrequenz  $\omega_c$ :

$$m\omega^2 r = \frac{mV}{r} \cdot \omega r = VB \cdot q \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \frac{qB}{m} \quad (2.7)$$

Das Teilchen wird im Zentrum eines Magneten eingeschossen ( $R \approx 0$ ) und durchläuft nun die Beschleunigerstrecke und gewinnt dadurch Energie. Dann tritt es in ein Magnetfeld ein und wird um 180 Grad abgelenkt. Nun durchläuft es die Beschleunigungsstrecke in entgegengesetzter Richtung. Um auch hier das Teilchen wieder zu beschleunigen muss die Beschleunigungsspannung umgepolt werden: das Teilchen erfährt eine erneute Beschleunigung. Dieser Vorgang wiederholt sich bei jedem Umlauf, so daß das Teilchen pro Umlauf 2x eine Beschleunigungsstrecke durchläuft. Dabei gewinnt es bei jedem Durchlauf durch die Potentialdifferenz an Energie und Impuls. Dies führt zu einem Anwachsen des Radius, jedoch bleibt die Umlauffrequenz  $\omega_c$  unabhängig von  $r$ ,  $E$  und  $p$  konstant. Deshalb sind im Zyklotron Beschleunigungsfrequenz (HF) und Umlauffrequenz konstant und gleich:

$$\omega_{\text{HF}} = \omega = \omega_c \quad (\text{Zyklotronfrequenz}) \quad (2.8)$$

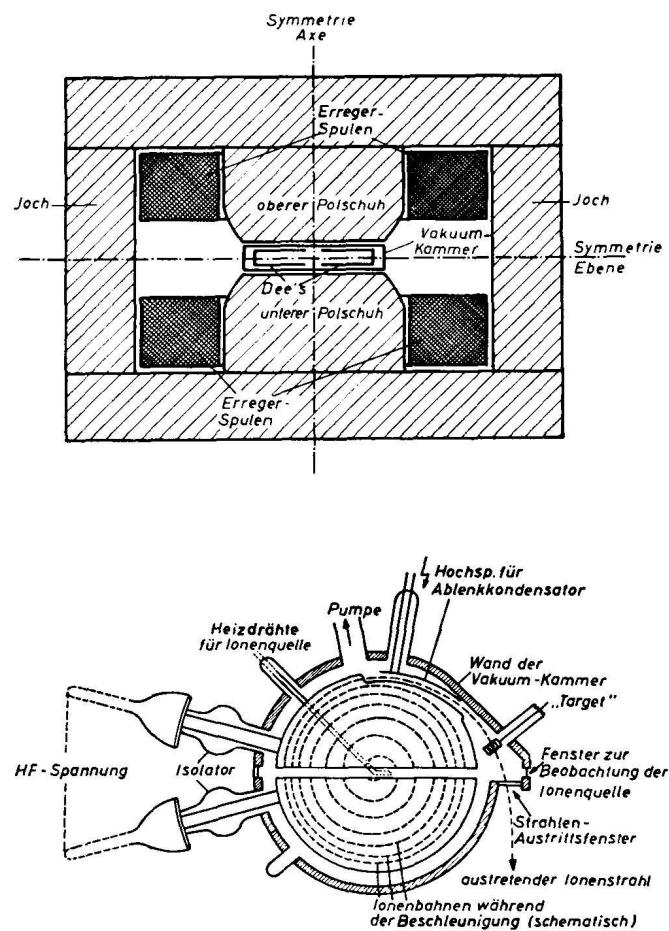
Für das Beschleunigungsfeld gilt:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega_{\text{HF}} \cdot t).$$

Damit ist also gesichert, dass das Teilchen bei jedem Durchlauf der Beschleunigungsstrecke auch wirklich beschleunigt wird. Für einen maximalen Radius  $r = R_{\max}$  erfolgt dann die Ejektion des Strahls.

**Betriebsmodus** Die maximale Energie im Zyklotron (nicht-relativistisch) ist nur durch  $B$  und  $R_{\max}^2$  aus (2.6) gegeben. Sie ist dann erreicht, wenn der Radius maximal wird:

## 2.1 Beschleuniger



**Abb. 2.12:** Schema eines Zyklotrons (aus [Ko55])

$$E_{\max} = q^2 \frac{R_{\max}^2}{2m_0} B^2 = \frac{p_{\max}^2}{2m} \quad (2.9)$$

Die Umlauffrequenz für Protonen im nichtrelativistischen Fall beträgt:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m_0} = 15.2 \cdot B \quad (2.10)$$

wobei  $f$  in MHz und  $B$  in Tesla (T) gemessen wird. Aus (2.9) und (2.10) erhalten wir für die maximale Energie:

$$E_{\max} = 2\pi^2 R_{\max}^2 f^2 m_0 \quad (2.11)$$

Mit  $B_{\text{typ}} \approx 1.5$  T,  $f \approx 22,8$  MHz und einer typischen Spannung auf der Beschleunigungsstrecke zwischen den Duanden (den „D“s bzw. in der amerikanischen Literatur oft auch einfach Dees genannt, siehe Abb. 2.12) von 200–500 kV ergeben sich 20–25 MeV Endenergie bei ca. 50- 400 Umläufen.

Da man fast einen (HF-modulierten) Dauerstrom erreichen kann, erhält man mit  $10^8$ – $10^9$  Ionen/Teilchenwelle im Mittel hohe Ströme der Größenordnung mA (das sind  $10^{16}$  Teilchen/Sekunde).

Dies stellt einen Vorteil von Zyklotrons dar.

**Relativistischer Massenanstieg:** Ein Problem stellt der relativistische Massenanstieg dar:

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{V}{c}, \quad \gamma = \frac{E}{m_0 c^2}$$

mit  $\omega_{\text{HF}} \approx \omega_c$  nur konstant für  $\gamma \approx 1$

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}}{m c^2} \quad \Rightarrow \quad p \ll m$$

Dies liegt daran, dass sich die Umlauffrequenz mit der Massenzunahme verringert. Da die Massenzunahme bei Elektronen aufgrund der hohen Geschwindigkeiten eine größere Rolle spielt, kann ein Zyklotron nicht für Elektronen verwendet werden ( $m_e = 0.511$  MeV), wohl aber für Protonen und Ionen.

Bei gleicher Umlauffrequenz erreichen Deuteronen doppelt so hohe Energien wie Protonen,  $\alpha$ -Teilchen ( $q = 2$ , d. h. im Spalt hat man  $\Delta E = 2eU$ ) viermal so viel, da hier  $m_0 c^2$  größer ist ( $m_0 c_D^2 = 2 \cdot m_0 c_H^2$ ).

Hierbei ist zu beachten, daß zwar die selben Einstellungen für Deuteronen und  $\alpha$ -Teilchen benutzt werden können, da sie die gleiche spezifische Ladung  $q/m$  besitzen, aber für Protonen muss das Zyklotron angepasst werden.

**Höhere Energien:** Diese können erreicht werden, indem  $\omega_{HF}$  variiert wird oder man das Magnetfeld  $B$  mit der Geschwindigkeit ansteigen lässt, um die Umlauffrequenz konstant zu halten:

- $\omega_{HF}$  variabel: Beim sog. *Synchrozyklotron* wird  $\omega_{HF}$  mit dem Massenzuwachs reduziert, die Teilchen können dadurch auf der Bahn gehalten werden und bleiben in Takt mit der HF-Spannung. Man erreicht in etwa  $10^4$ – $10^5$  Umläufe.

Beispiel: Einige technische Details des 187"-Zyklotrons in Berkeley<sup>3</sup>. Hier beträgt die Frequenzmodulation  $\Delta\omega_{HF}/\omega_{HF} = 50\%$  für Protonen und 25% für Deuteronen. Bei einem Durchmesser von 4.7 md wird eine Endenergie von  $E_{max} = 730$  MeV bei 100 Hz Modulation erreicht. Vorteilhaft: Durch viele Umläufe ist nur eine kleine Potentialdifferenz an den Dauanden nötig:  $\Delta E \approx 5$  keV/Umlauf und  $\omega_p \approx 20$ –40 MHz gepulst. Einen Nachteil stellt das kurze Zeitfenster für die Injektion dar, man erhält nur in etwa  $\approx 1/1000$  der bei Zyklotrons üblichen Ströme.

- $B$  steigt mit  $r$  an: Isochronzyklotron. Da hier  $dB/dr > 0$  gilt, ist eine komplizierte Feldanordnung erforderlich, weil analog zum Betatron eine Feldabhängigkeit im Exponenten von  $n < 0$  zu Instabilitäten führt. Meist wird das Feld in alternierenden Gradienten angeordnet.

Hier bleibt also der Teilchenumlauf aufgrund der Feldstärkeerhöhung synchron mit  $\omega_{HF}$ , was den Namen „Isochronzyklotron“ verständlich macht. Mit  $p_{max} \approx 600$  MeV/c erhält man hohe Ströme. Auch liefert dieses Zyklotron eine hohe Endenergie ( $E^{max} \sim 1$  GeV).

Am PSI<sup>4</sup> (Paul-Scherrer-Institut) wird ein Isochronzyklotron zur Produktion von Neutronen eingesetzt.

### 2.1.7 Synchrotron

Das Prinzip des 1945 von Veksler, McMillan und Wideröe konstruierten Synchrotrons besteht darin, die Beschleunigungsfrequenz  $\omega_{HF}(t)$  und das Magnetfeld  $B(t)$  synchron so zu verändern, daß die Teilchen, deren Umlauffrequenz und Impuls aufgrund der Beschleunigung sinkt bzw. anwächst, in den Beschleunigungszellen immer eine beschleunigende Spannung erfahren und gleichzeitig weiterhin auf der vorgegebenen Bahn im Vakuum gehalten werden.

Auch hier berechnet sich der höchste erreichbare Impuls wieder nach der Formel

$$p_{max} = q \cdot R_s \cdot B_{max}.$$

Um den Energiegewinn  $W$  pro Umlauf zu berechnen, betrachtet man zunächst die Gesamtenergie eines Teilchens in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz:

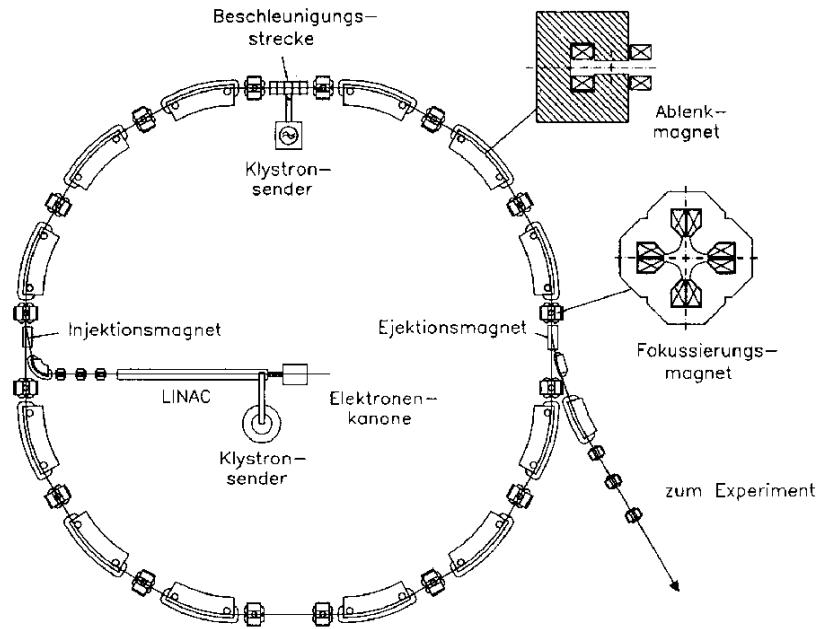
$$\omega_{Teilchen} = \frac{qB}{m} = \frac{qc^2B}{E} \Rightarrow E = \frac{qc^2B}{\omega_{Teilchen}}$$

Daraus folgt für  $W = \frac{\text{Energiegewinn}}{\text{Umlauf}}$ :

---

<sup>3</sup><http://www.berkeley.edu/>

<sup>4</sup><http://www.psi.ch/>



**Abb. 2.13:** Schema eines Synchrotrons (aus [Wi92])

$$W = \frac{dE}{dt} \cdot \frac{2\pi}{\omega_{\text{Teilchen}}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{Teilchen}}} q c^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{B}{\omega_{\text{Teilchen}}} \right) = qU - \text{Verluste}$$

Man berechnet also das Produkt aus Energieänderung pro Sekunde und Sekunden pro Umlauf um auf den Energiegewinn pro Umlauf zu kommen. Dies entspricht der Ladung des Teilchens multipliziert mit der pro Umlauf durchlaufenen Spannung. Abzuziehen für dieses ideale Ergebnis sind natürlich eventuelle Verlustfaktoren (z.B. durch Strahlung).

⇒ B- Feld muss mit t ansteigen. Die Auslenkung erfolgt bei

$$B = B_{\max} \quad \rightarrow \quad p_{\max} = q \cdot R_S \cdot B_{\max}$$

- Was passiert mit der Frequenz  $\omega_{\text{Teilchen}}$ , wenn die Energie des Teilchens zunimmt?  
Annahme:  $V_{\text{Teilchen}} = c$

$$\Rightarrow V_{\text{Teilchen}} = \text{const} \quad \Rightarrow \beta = 1 \quad \Rightarrow \omega_{\text{Teilchen}} = \text{const.} \quad \Rightarrow W = \frac{2\pi c^2}{\omega_{\text{Teilchen}}^2} \cdot q \cdot \frac{dB}{dt} = q \cdot U - \text{Verluste.}$$

- Wie gross muss  $\omega_{HF}$  sein?

$$\omega_{HF} = k \cdot \omega_{\text{Teilchen}} = k \cdot \frac{V}{R} \quad \text{wobei } k \text{ eine ganze Zahl ist.}$$

Unter Verwendung von

$$\omega_{HF} = k \cdot \frac{|q| \cdot B}{m_{\text{Teilchen}}} = k \cdot \frac{|q| \cdot B}{\gamma \cdot m_0} = k \cdot \frac{|q| \cdot B}{m_0} \cdot \frac{E_0}{E} \quad \text{mit} \quad E_0 = m_0 c^2$$

und Ausdrücken von  $E$  durch  $p$  (bzw. durch  $B$ ) erhält man:

$$\Rightarrow \omega_{HF} = k \cdot \frac{|q| \cdot B}{m_0 \sqrt{1 + \left(\frac{cqBR}{E_0}\right)^2}}$$

Da  $R_s$  oft sehr groß und  $\omega_{Teilchen}$  klein ist  $\rightarrow$  wähle  $k \gg 1$  damit HF-Kavitäten (= HF-Hohlraumschwingungen) günstige Größen haben (Größe  $\sim \lambda_{HF} \sim \frac{1}{\omega_{HF}}$ ) Beispiel:  $2\pi R = 27\text{km(LHC)} \rightarrow \omega_{Teilchen} \sim 10\text{kHz}, \omega_{HF}^{typ} \sim 400\text{MHz}$ .

Bei hohen Geschwindigkeiten gilt:  $\beta \approx 1$  konstant  $\Rightarrow \omega_{Teilchen} = \text{konstant} \Rightarrow dB(t)/dt = \text{konstant}$ .

Die Fokussierung erfolgt durch  $B(r) \sim r^{-n}$  und  $0 < n < 1$  im Magnetfeldgradienten, wie bereits beim Betatron in Abschn. I diskutiert.

Derzeit werden die größten Beschleunigungen am Tevatron des FNAL erreicht. Hier wird bei einem Magnetfeld von  $B_{max} \approx 4,2 \text{ T}$  und einem Radius von  $R = 1 \text{ km}$  ein Maximalimpuls von  $P_{max} = 900 \text{ GeV/c}$  erreicht. Geplant ist am CERN der Large Hadron Collider<sup>5</sup> (LHC) mit supraleitenden Magneten mit  $B_{max} \approx 8,4 \text{ T}$ , einem Radius von  $R \approx 4.3 \text{ km}$  und einem Maximalimpuls von  $P_{max} = 7000 \text{ GeV/c} = 7 \text{ TeV/c}$ .

### 2.1.7.1 Phasenstabilität

Um die Teilchen zu beschleunigen wird eine hochfrequente Wechselspannung an der Beschleunigungsstrecke angelegt. Die Frequenz muss mit der Umlauffrequenz der Teilchen abgeglichen werden, damit immer ein beschleunigendes Feld durchlaufen wird.

$$\omega_{HF} = k\omega_{Teilchen} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Die Umlauffrequenz wurde oben schon berechnet. Damit ergibt sich für  $\omega_{HF}$ :

$$\omega_{HF} = k \frac{|q| \cdot B}{m_T} = k \frac{|q| \cdot B}{m_0 \cdot \gamma} = k \frac{|q| \cdot B}{m_0} \cdot \frac{E_0}{E} = k \cdot \frac{|q| \cdot B}{m_0 \left[ 1 + \left( \frac{c|q| \cdot B \cdot R}{E_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

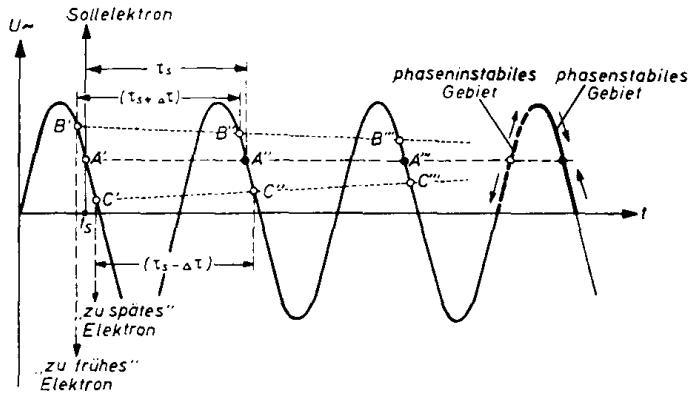
Da  $R_s$  oft sehr groß ist, wird  $\omega_{Teilchen}$  klein. Um dennoch eine für normale HF-Kavitäten gut erreichbare Frequenz der Beschleunigungsspannung zu haben werden große  $k$  verwendet.

Verschiedene Teilchen, die nicht auf ihrer Sollbahn fliegen, legen unterschiedliche Weglängen zurück, was eine Phasenverschiebung bezüglich  $\omega_{HF}$  und damit eine Energieverschmierung zur Folge hat. Um dem entgegenzuwirken, erfolgt die Beschleunigung im abfallenden Teil der HF-Hochspannung, wodurch eine Schwingung, die Synchrotron-Schwingung, um die Sollbahn erzeugt wird (Abb. 2.14).

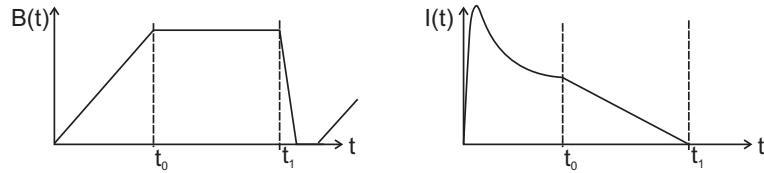
Kommt ein Teilchen mit zu kleiner Kreisbahn zu früh, sieht es ein höheres Feld. Dadurch erhält es mehr Energiezuwachs, der Radius wächst und die Umlaufzeit erhöht sich im Vergleich zu

---

<sup>5</sup><http://www.lhc01.cern.ch/>



**Abb. 2.14:** Phasendiagramm für Synchrotron (aus [Ko55])



**Abb. 2.15:** Stärke des Magnetfeldes und Intensität des Teilchenstrahles während eines Umlaufes. Bei  $t = 0$  werden die Teilchen eingeschossen, bei  $t_0$  ist die Beschleunigung beendet und mit der Extraktion der Teilchen wird begonnen. Diese ist bei  $t_1$  abgeschlossen.

Teilchen auf der Sollbahn. Dies wirkt sich vor allem bei sehr hohen Energien aus, da hier fast nur Massenzuwachs (und damit Impuls- und Radiuszuwachs) und kaum mehr Geschwindigkeitszuwachs erfolgt.

Ein Teilchen auf einer zu großen Kreisbahn legt einen längeren Weg zurück und kommt zu spät. Deshalb sieht es ein niedrigeres Feld, erhält weniger Energiezuwachs und der Radius und die Umlaufzeit werden kleiner.

Im Synchrotron gilt: HF-Frequenz > Umlauffrequenz. Wenn man also in ein Synchrotron kontinuierlich Teilchen einschießt, bilden sich Teilchenpakete („bunches“), wobei innerhalb dieser Pakete Synchrotronschwingung auftritt.

**Spills:** Da das Magnetfeld immer an die aktuelle Energie der Teilchen angepasst werden muss, kann kein durchgehender Strahl erzeugt werden. So entstehen immer Zyklen (Beschleunigung und Extraktion) von 15 bis 30 Sekunden, wobei die Extraktionszeiten 2 bis 20 Sekunden betragen. Die Teilchen während einer Extraktion nennt man *Spill* (siehe Abb. 2.15).

### 2.1.7.2 Schwache und starke Fokussierung

Wie hält man einen Strahl zusammen, der ca.  $10^5$  mal umläuft und dabei  $10^6$  km Weg zurücklegt?

- schwache Fokussierung:

Aufgrund der Betatronschwingungen variiert der Radius  $R$  der Teilchenbahn. Für die maximale Abweichung gilt:

$$\Delta R_{\max} = \frac{a}{\sqrt{1-n}} R \quad (\text{für } 0 < n < 1); \text{ n: Feldindex}$$

Dabei bedeutet  $a$  den Winkel der Teilchenbahn zur Tangente der Kreisbahn am Anfang der Schwingung. Da  $n$  klein ist, wird  $\Delta R$  sehr groß. Deshalb benötigt man hierfür große Vakuumkammern, wodurch der Aufwand und die Kosten explodieren (Beispiel: Synchrotron in Dubna).

- starke Fokussierung:

Alternierende Sektionen mit stark fokussierenden ( $n \gg 1$ ) und defokussierenden ( $n \ll 0$ ) Eigenschaften ( $|n| \approx 400$ ) werden nacheinander durchlaufen (analog zur Optik: Eine Kombination aus Sammel- und Zerstreuungslinsen; Beispiel: AGS (alternating gradient synchrotron) am CERN und Brookhaven. Wie man solche Sektionen konkret realisiert, werden wir im Folgenden noch besprechen).

Dadurch erhält man viele Schwingungsperioden pro Umlauf, wobei die Phase  $\Phi$  stabil und  $\Delta R$  klein bleibt:

$$\Phi_{\text{Betatron}} \ll 2\pi, \quad \Delta R_{\max} = \frac{a}{\sqrt{1-n}} \cdot R \ll R$$

### schwache Fokussierung des Synchrotrons

	<b>Dubna</b>	<b>Argonne</b>
Max. Energie	10 GeV	12.5 GeV
Vakuumkammer	150 cm × 40 cm	78 cm × 13 cm
Maximales Feld	1.3 T	2.1 T
Radius	30 m	24 m
erbaut	1957	1962

### starke Fokussierung des Synchrotrons

	<b>DESY</b> für Elektronen	<b>CERN</b> für Protonen (PS)
Max. Energie	6 GeV	28 GeV
Vakuumrohr	13 cm × 9 cm	13 cm × 7 cm
Maximales Feld	0.85 T	1.3 T
Radius	35 m	70 m

**Tab. 2.1:** Beispiele für Synchrotrons

**Stabilitätspunkt:** Betrachtet man die Abhängigkeit der Umlauffrequenz vom Impuls, wenn dieser geändert wird, so ergibt sich:

$$\frac{d\tau}{\tau} = \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \cdot \frac{dp}{p} \quad \text{mit } \alpha = 1 - n$$

Bei schwacher Fokussierung gilt für den Parameter  $\alpha$ :

$$\alpha = |1 - n| \Rightarrow \gamma_{\text{injekt}}^2 \gg \alpha, \quad \frac{d\tau}{\tau} \propto \frac{dp}{p}$$

Für die Phasenlage gilt die Diskussion aus Abschnitt 2.1.7.1.

Bei starker Fokussierung ist  $\alpha > 1$  möglich. Folglich gilt bei kleinem  $\gamma$  (Einschußenergie):

$$\gamma_{\text{injekt}}^2 < \alpha$$

Nach einem Teil der Beschleunigung wächst  $\gamma$  und  $d\tau/\tau \propto dp/p$  wie bei der schwachen Fokussierung. Für niedrige Energien ist dann die Phasenlage auf dem ansteigenden, für hohe Energien wegen des Vorzeichenwechsels auf dem abfallenden Ast von  $U_{\text{HF}}$ .

Daher erhält man einen *Phasensprung* bei einer gewissen Energie  $E = E_{\text{krit}}$ . Wegen dieses Phasensprungs und der Betatronschwingung erfolgt hier eine sukzessive Beschleunigung in verschiedenen Anlagen.

→ bei Einschuß:  $\frac{d\tau}{\tau} \sim -\frac{dp}{p}$  Phasenlage auf ansteigendem Ast der Hochfrequenz (2.12)

→ nach  $\gamma > \gamma_{\text{krit}}$ :  $\frac{d\tau}{\tau} \sim \frac{dp}{p}$  Phasenlage auf abfallendem Ast der Hochfrequenz (2.13)

**Synchrotronenschwingung:** Die Bewegung der Phasenlage der Teilchen um den „Arbeitspunkt“ führt zu Schwingungen, sogenannten *Synchrotronenschwingungen* mit  $\omega_{\text{Synch}} \ll \omega_T$ . Dies wird als langsame Atmung der Bahn bezeichnet. Die Schwingungen sind mit der Zeit (d. h. im Laufe der Beschleunigung) gedämpft. Für die radialen Schwingungen gilt:

$$\delta r \propto \delta E \Rightarrow \frac{\Delta r}{r_{\text{Soll}}} = -\text{const} \left[ \frac{U_{\text{max}}}{(1-n)^3 r_{\text{Soll}}^3} \right]^{1/4}$$

Auch die Betatronschwingung ist stark mit der Zeit gedämpft.

**Magnetische Linsen:** Für die starke Fokussierung verwendet man heute, den Methoden der Optik entsprechend, *magnetische Linsen* anstelle von „combined function“ Magneten mit alternierenden  $n$ .

**Ablenkmagnete:** Zur Ablenkung des Teilchenstrahls verwendet man magnetische *Dipole*, wie in Abb.2.16 gezeigt.

**Linsen:** Als konvexe und konkave Linsen zum Beispiel zur Fokussierung des Strahls verwendet man *Quadrupole* (Abb. 2.17). Diese fungieren als *Zerstreuungslinse* in die eine Richtung und als *Sammellinse* in die andere. Dicke Linsen werden dadurch erreicht, daß man zwei gegeneinander gedrehte Quadrupole verwendet, die dann in beide Richtungen fokussierend wirken.

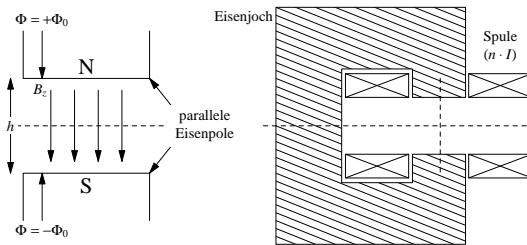


Abb. 2.16: Dipolmagnete

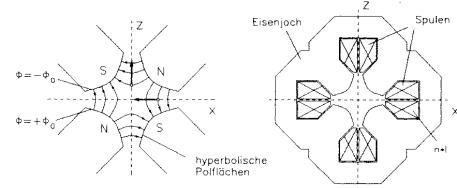


Abb. 2.17: Quadrupolmagnete (aus [Wi92])

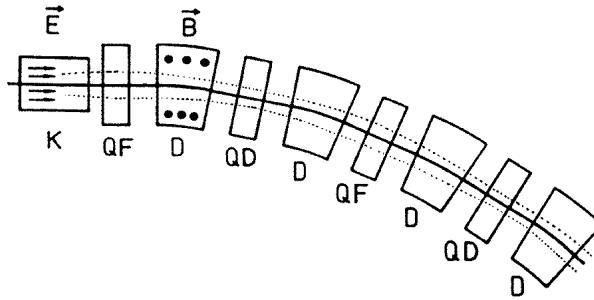


Abb. 2.18: Magnetsektion eines Beschleunigers mit Dipolenmagneten und Quadrupoldupletts (aus [Po96]).

Einen typischen, maßstabsgetreuen Ausschnitt eines Synchrotrons in der Aufsicht zeigt Abb. 2.18. Man erkennt die wesentlichen Beschleunigungs- und Magnelemente sowie das Strahlrohr (durchgezogene Linie). Hochfrequenzbeschleunigungsröhrchen (K) sind im allgemeinen nur an wenigen Stellen des Synchrotrons angeordnet. Das Feld der Dipolmagnete (D), die die Teilchen auf der Kreisbahn halten, steht senkrecht zur Bildebene. Jeweils zwei Quadrupolmagnete bilden ein Duplett, welches eine fokussierende Wirkung auf den Strahl hat. Dies ist durch die gestrichelte Linie angedeutet, die die Strahleinheitlende (in vergrößertem Maßstab) darstellt. In der gezeigten Ebene haben die mit QF bezeichneten Quadrupole fokussierende ( $n \gg 1$ ) und die mit QD bezeichneten Quadrupole defokussierende ( $n \ll 1$ ) Wirkung.

**Beispielwerte:** Am Proton-Synchrotron (PS) am CERN beträgt  $E_{\max} = 30 \text{ GeV}$ ,  $E_{\text{krit}} = 6.7 \text{ GeV}$ . Diese Werte erreicht man mit  $n = 392$  sowie  $\omega = 5 \dots 16 \text{ MHz}$ . Die Injektionsenergie beträgt  $E_{\text{inj}} = 50 \text{ MeV}$ .

**Betatronschwingung bei starker Fokussierung:** Betatronschwingungen können gezielt mittels Störmagneten angeregt werden, um Strahlen aus dem Synchrotron zu extrahieren. Dies kann man in Abb. 2.19 erkennen. Hierbei ist zu beachten, daß die Frequenz dieser „neuen“ Schwingung kein Vielfaches der Umlauffrequenz ist ( $\omega_{\text{Betatron}} \neq m \cdot \omega_{\text{Umlauf}}$ ).

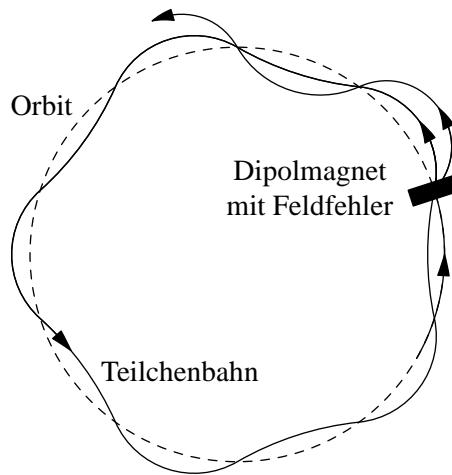


Abb. 2.19: Teilchenbahnen

### 2.1.7.3 Elektronensynchrotrons

Die radiale Ablenkung einer Ladung bedeutet eine Beschleunigung einer Ladung und damit einen Energieverlust durch Strahlung. Eine beschleunigte Ladung strahlt *Synchrotronstrahlung* ab, deren Energie (und damit der Energieverlust des beschleunigten Teilchens) vom Krümmungsradius  $R$  und dem Verhältnis von Teilchenenergie zu Teilchenmasse wie folgt abhängig ist:

$$\Delta E_{\text{synch}} = \frac{4\pi}{3} e^2 \beta^2 \frac{\gamma^4}{R} \propto \frac{E^4}{m^4} \cdot \frac{1}{R} \quad (2.14)$$

Aufgrund der  $m^{-4}$ -Abhängigkeit der abgestrahlten Energie in (2.14) erhält man für Elektronen dramatisch höhere Verluste als beispielsweise für Protonen:

$$m_e \approx \frac{1}{2000} \cdot m_p \Rightarrow \Delta E_{\text{synch}, e} \approx 1.6 \cdot 10^{13} \Delta E_{\text{synch}, p}$$

Dadurch ergibt sich eine obere Energiegrenze für Elektronensynchrotrons, nämlich wenn der Energiegewinn genau so groß ist wie der Verlust durch Strahlung:  $\Delta E_{\text{HF}} = \Delta E_{\text{synch}}$ .

Um diese Verluste zu minimieren, verwendet man folgende Techniken:

- hohe HF-Leistung mit supraleitenden HF-Strukturen
- großer Krümmungsradius ( $1/R$ -Term in Gleichung 2.14).

Im Elektronensynchrotron liegt die höchsten, bisher erreichten Energien bei ein Impulsen von  $p_{\text{max}}^{\text{Elektron}} \approx 100 \text{ GeV}/c$  (LEP II<sup>6</sup> 1999). Zum Vergleich: für Protonen erhält man einen Maximalimpuls von 7000 GeV/c (am LHC).

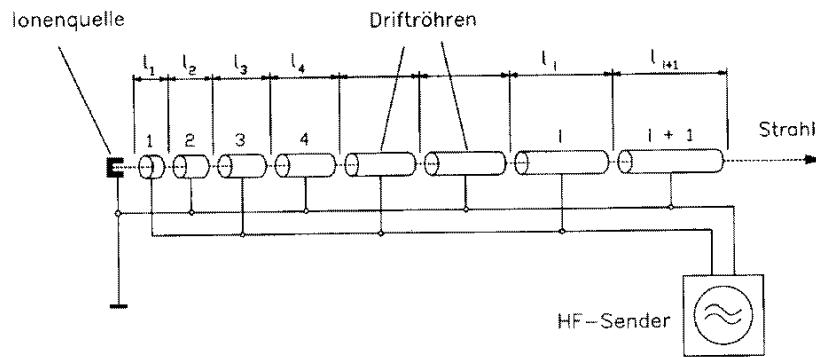
<sup>6</sup><http://www.cern.ch/CERN/Divisions/SL/lep2page.html>



**Abb. 2.20:** Synchrotronringe am Fermilab aus der Vogelperspektive



**Abb. 2.21:** Innenansicht eines Tunnels (Fermilab Double Ring)



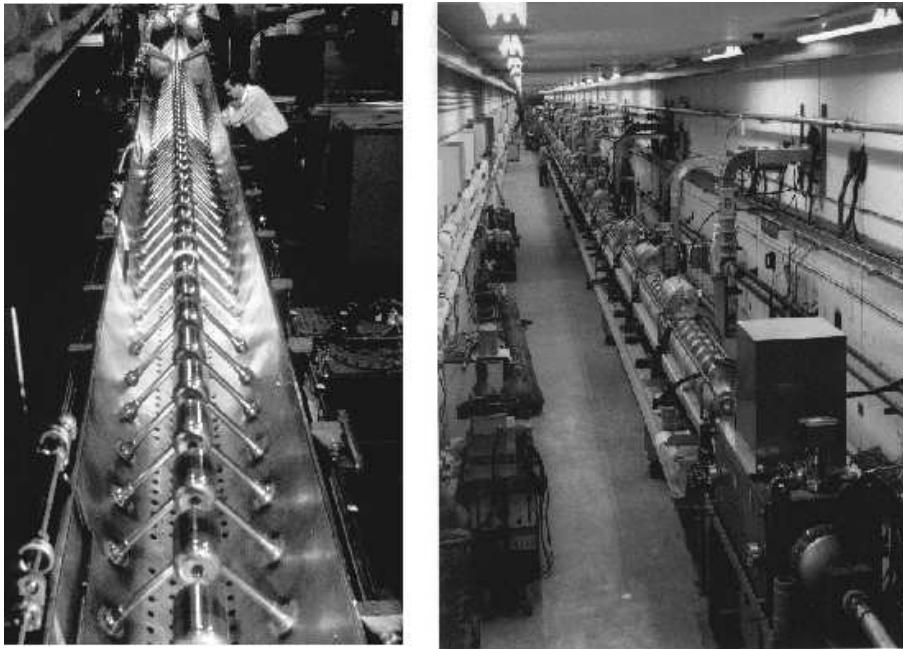
**Abb. 2.22:** Schema eines Protonen-LINACs (aus [Wi92])

### 2.1.8 Linearbeschleuniger (LINACs)

Ein weiterer Typ von Beschleunigern sind die Linearbeschleuniger. Hier werden, wie man schon aus dem Namen erahnen kann, die Teilchen auf einer linearen Bahn beschleunigt.

#### 2.1.8.1 Protonen-LINACs

Wir betrachten eine Serie von leitenden Röhren, welche über eine Hochfrequenz miteinander gekoppelt sind (siehe Abb. 2.22). Die eingeschossenen Protonen werden zwischen den Röhren (z.B. Röhre 1 und 2 in Abb. 2.22) beschleunigt. Vor dem Auftreffen in Röhre 2 muß dann das  $E$ -Feld umgepolt werden, um eine erneute Beschleunigung zu gewährleisten. Dies wird erreicht, indem eine Wechselspannung der passenden Frequenz an die sog. Driftröhren angelegt wird. Während des Umpolens würde das Teilchen ein “falsches” Feld sehen, es wird aber durch die Driftröhren abgeschirmt und sieht das Feld erst wieder nach dem Austritt aus der Röhre. Bis dahin ist das Feld aber schon umgepolt.



**Abb. 2.23:** Protonen-LINACs

Die Teilchen werden allerdings schneller. Um  $\omega_{HF}$  noch konstant zu halten, muß die Flugstrecke zwischen den HF-Spalten zunehmen. Deshalb gibt es für die Beschleunigung der Protonen ein Limit durch die bautechnischen Grenzen der Länge der Abschirmung. Die Länge der Driftröhren ergibt sich aus:

$$l_i = \frac{V \cdot T_{HF}}{2} = \frac{V}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega_{HF}} = \frac{\pi \cdot V}{\omega_{HF}} \quad \Rightarrow \quad E_{max} \approx 50 \text{ MeV}$$

Aus diesem Grund werden LINACs bei Protonen nur noch als Vorbeschleuniger benutzt. Solche Strukturen heißen Wideröe oder Alvarez, je nachdem, ob die HF in aufeinanderfolgenden Spulen phasengleich oder phasenverschoben ( $\phi = \pi$ ) ist. Typische Energien für Protonen-LINACs sind 50 – 100 MeV.

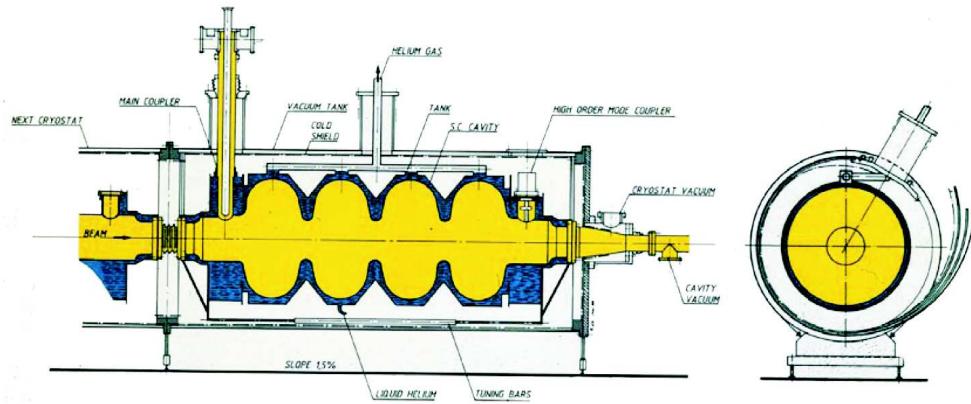
### 2.1.8.2 Elektronen-LINACs

Anders als schwere Protonen erreichen Elektronen bereits nach dem Durchlaufen weniger Driftröhren Geschwindigkeiten nahe an der Lichtgeschwindigkeit  $V \sim c$ . Damit würde die Länge der Driftröhren sehr groß und ihre Struktur damit sehr unhandlich. Daher nutzt man nun die fast konstante Geschwindigkeit der Elektronen für eine alternative Struktur zu deren Beschleunigung.

Erzeugt man in einem Hohlleiter eine stehende Welle mit einer Phasengeschwindigkeit  $V_{ph} < c$  und stimmen die Geschwindigkeiten der Elektronen und der Welle überein ( $V_{Teilchen} = V_{ph}$ ), so sieht das Elektron ein zeitlich konstantes Feld. Dies führt bei korrekter Phase zu einer stetigen Beschleunigung (analog zum Wellenreiten).

Da die Elektronen allerdings nicht exakt Lichtgeschwindigkeit erreichen, ist die Phasengeschwindigkeit einer freien Welle zu groß ( $V_{Teilchen} < V_{Welle}$ ). Dieses Problem kann man aber um-

## 2.1 Beschleuniger



**Abb. 2.24:** Runzelröhre

gehen, indem man die Impedanz des Hohlleiters erhöht. Deshalb verwendet man bei Elektronen-LINACs Runzelröhren (loaded wave guides, Abb. 2.24), mit welchen man die Impedanz regulieren kann.

### 2.1.8.3 Phasenstabilität im LINAC

Wir betrachten Abb. 2.29.

- Kommt ein Teilchen zu früh an, sieht es ein schwächeres  $E$ -Feld, und erhält dadurch weniger Beschleunigung, die Phase bewegt sich nach  $+t$ .
- Kommen Teilchen zu spät, erfahren sie ein stärkeres  $E$ -Feld also eine höhere Beschleunigung und die Phasenbewegung verläuft in Richtung  $-t$ .

Dies bewirkt eine longitudinale Schwingung. (Man beachte: Im Synchrotron benutzt man zur Stabilisierung den absteigenden Ast der Hochfrequenzspannung, hier beim Linearbeschleuniger wird der aufsteigende Ast verwendet.)

### 2.1.8.4 Räumliche Fokussierung

Die räumliche Fokussierung im Elektronen-LINAC ist schwierig zu erreichen, aber die relativistische Raumkontraktion hilft:

Bei 30 GeV ( $\gamma = E/(mc^2) \approx 60000$ ) wird die Länge eines Labors von ( $L_{\text{Labor}} \approx 3 \text{ km}$ ) auf eine effektiven Länge von ( $L_{\text{LINAC}} \approx 50 \text{ cm}$ ) kontrahiert, d.h. die Elektronen „sehen“ eine sehr stark „verkürzte“ Flugstrecke. Darüberhinaus haben die  $E$ -Felder zwischen den Elektroden eine fokussierende Wirkung.

## 2.1.9 Schwerpunktsenergie

Die nutzbare Energie in einer Reaktion von zwei Teilchen wird bestimmt durch die Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$ , mit:

$$S = (P_1 + P_2)^2$$



**Abb. 2.25:** Beamlines am Fermilab (Tevatron)



**Abb. 2.26:** Elektronen-LINAC am SLAC

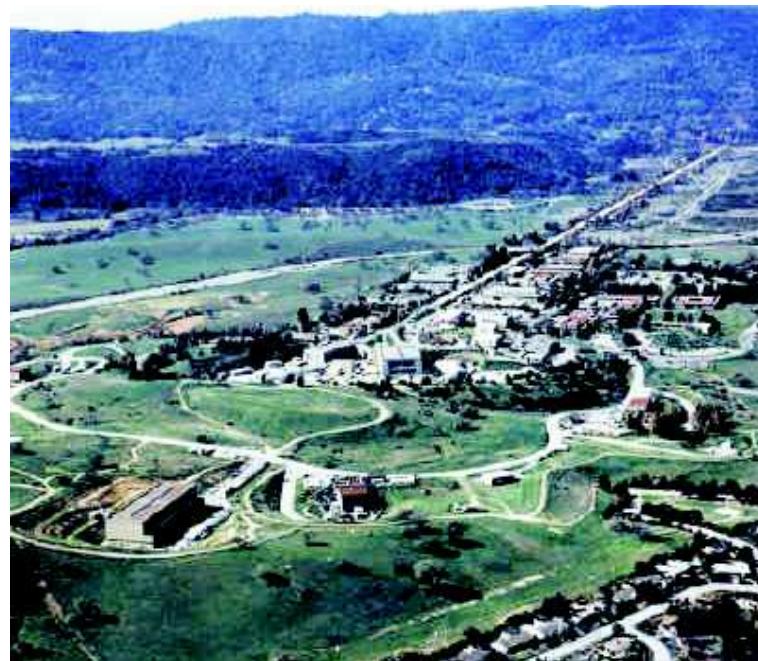


Abb. 2.27: Luftaufnahme vom SLAC- Gelände

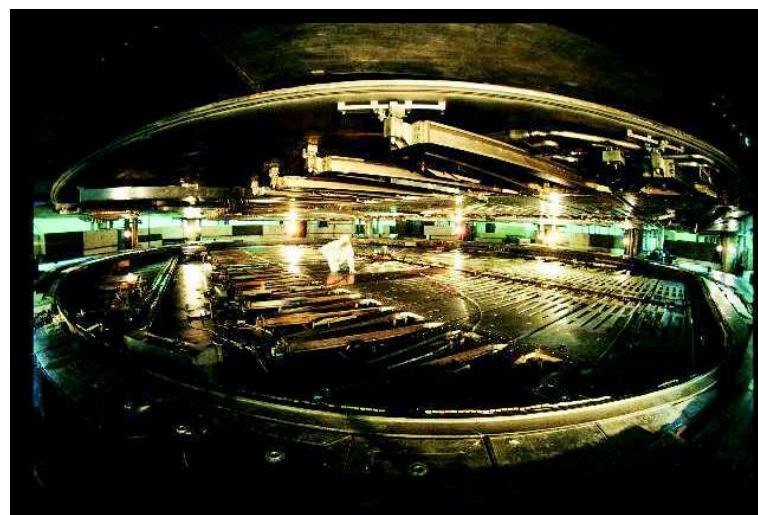


Abb. 2.28: Größter weltweiter Zyklotron: Triumpf

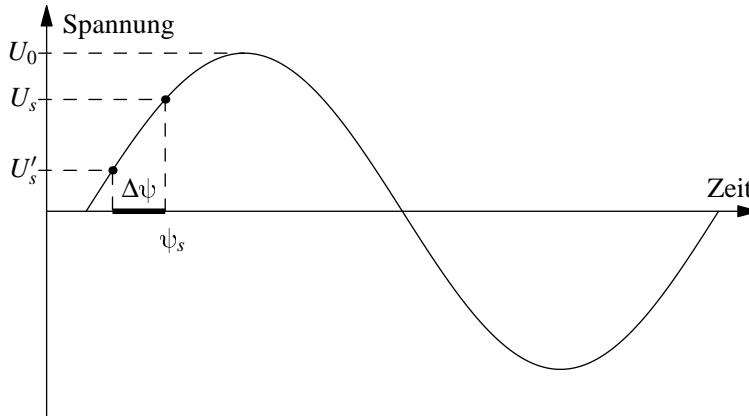


Abb. 2.29: Phasendiagramm für LINAC (Momentaufnahme)

Hierbei stellen  $P_i$  die Vierimpulse der Teilchen dar.

Bei der Kollision zweier Teilchen gibt es zwei Möglichkeiten:

- Beschießen eines ruhenden Targets:

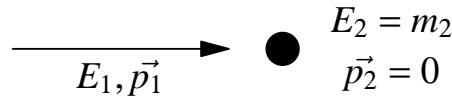


Abb. 2.30: ruhendes Target

gegeben sind dabei:  $E_1, \vec{p}_1, E_2 = m_2, \vec{p}_2 = 0$  (Wir benutzen die in Abschn. 1.1 besprochenen rationalisierten Einheiten:  $c = \hbar = 1$ ).

$$\begin{aligned} S &= \left( \frac{E_1 + m_2}{\vec{p}_1} \right)^2 = (E_1 + m_2)^2 - p_1^2 \\ &= \underbrace{E_1^2 - p_1^2}_{m_1^2} + m_2^2 + 2E_1 m_2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2 \end{aligned}$$

Für zwei Protonen ( $m_p = m_1 = m_2 = 0.938 \text{ GeV}$ ) ergibt sich beispielsweise die Schwerpunktssenergie zu

$$W = \sqrt{s} = \sqrt{2m_p^2 + 1.87 \text{ GeV} \cdot E_1}.$$

Für  $E \gg m$  ist dann  $\sqrt{s} = \sqrt{1.87 \text{ GeV} \cdot E_1}$ . Der Rest der Energie geht in die kinetische Energie des Schwerpunkts.

Für  $E = 450 \text{ GeV}$  ist  $\sqrt{s} \approx 29 \text{ GeV}$ .

- Kollision zweier Teilchen im Schwerpunktssystem:



Abb. 2.31: ruhender Schwerpunkt

$$S = \left( \begin{array}{c} E_1 + E_2 \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{array} \right)^2 = (E_1 + E_2)^2 \quad \text{mit } \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

$$\Rightarrow W = \sqrt{s} = E_1 + E_2$$

Hierbei wird die kinetische Energie besser genutzt, da der Schwerpunkt ruht und deshalb keine kinetische Energie für dessen Bewegung aufgewendet werden muß.

### 2.1.10 Collider

Das Prinzip des ruhenden Schwerpunkts wird in Collidern verwirklicht. Bei ihnen werden zwei Teilchenstrahlen gleicher Masse aber entgegengesetzter Ladung in einem Ring, der aus einer Vakuumröhre besteht, gegeneinander beschleunigt und treffen dann aufeinander (Abb. 2.34)

Einige Beispiele:

$e^+e^-$ -Collider : LEP II<sup>7</sup> mit 100 + 100 GeV

$p\bar{p}$ -Collider : FNAL<sup>8</sup> mit 0.9 + 0.9 TeV

$pp$ -Collider : LHC<sup>9</sup> mit 7 + 7 TeV (2 Ringe, getrennte Vakuumkammern, trickreiche Magnete)

Im Collider werden

- die Teilchen auf ihre Endenergie beschleunigt.
- die Teilchen bei ihrer Endenergie gespeichert und eventuell Energie nachgeführt (bei Elektronen, wegen Synchrotronstrahlung).
- Teilchenpakete (sog. bunches) an „Wechselwirkungspunkten“ zur Kollision gebracht.

Aber: Die Anzahl der Kollisionen ist viel kleiner als die Anzahl der Teilchen im Ring; dadurch gehen nur wenige Teilchen durch Wechselwirkung verloren (vorausgesetzt, man hat ein gutes Vakuum in der Röhre,  $< 10^{-11} mbar$ , um Stöße mit dem Restgas zu vermeiden).

Die ersten Collider, so auch LEP am CERN (Abb. 2.32), benutzten *ein* Synchrotron für beide Teilchenarten. Hierbei wird ausgenutzt, daß Antiteilchen und Teilchen sich auf gleicher Bahn bewegen, lediglich orts- und zeitgespiegelt. Jedoch sind bei getrennten Ringen höhere Ströme erreichbar. Bei Protonen-Collidern ohne Antiteilchen werden getrennte Ringe benötigt ( $pp$ -Collider-LHC).

**Nachteile:** Die Zahl der produzierten und gespeicherten Antiteilchen ist gering. Die Reaktionsrate in Kollisionen ist gegeben durch:

$$R = \sigma \cdot L \quad L = f \cdot n \cdot \frac{N_1 \cdot N_2}{A}$$

$\sigma$  : Wirkungsquerschnitt für die Reaktion [Fläche:  $cm^2 \rightarrow barn$ ]

$L$  : Luminosität [ $1/(Fläche \cdot Sekunde)$ ]

$f$  : Umlauffrequenz

$A$  : Querschnitt der sich überlappenden Strahlen

$N_1, N_2$  : Anzahl der Teilchen in den sich kreuzenden Paketen

$n$  : Anzahl der Teilchenpakete im Ring

$f$  und  $n$  sind dabei durch die Beschleunigerstrukturen gegeben.

In sogenannten fixed-target-Experimenten ist die Reaktionsrate gepulst (Wiederholfrequenz des Beschleunigungszyklus), aber wesentlich höher; abhängig von der Dicke des Targets.

Um große Reaktionsraten zu erhalten, sollten

- $N_1, N_2$  groß sein. Dies wird begrenzt durch die Wechselwirkung der Teilchen im Paket („bunch“) untereinander und die komplizierte Herstellung bzw. Speicherung von Antiteilchen.
- $\Delta$  klein sein, d.h. hohe Fokussierung an den Wechselwirkungspunkten, was durch die Strahl-Strahl-Wechselwirkung (z.B. Coulombabstoßung) begrenzt wird.

Typische Werte:  $L = 10^{32} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$  (Cornell, FNAL)

angestrebt für LHC:  $L = 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$

SLAC/KEK  $L = 10^{33} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$

In „fixed-target“-Experimenten ist die Targetdicke nahezu beliebig wählbar. Typische Werte für die Luminosität sind  $L \approx 10^{37} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ .

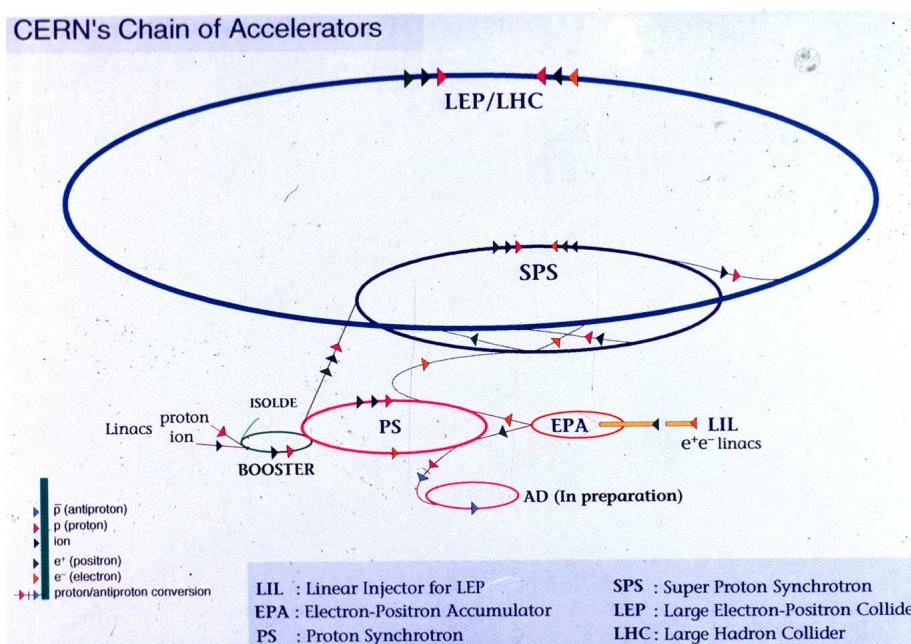


Abb. 2.32: CERN's Chain of Accelerators

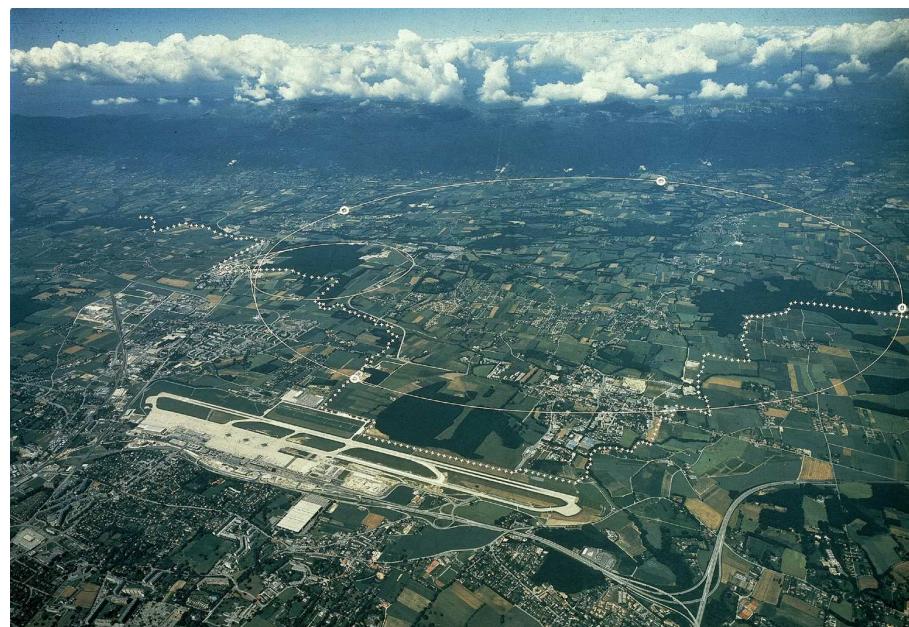


Abb. 2.33: CERN in Vogelperspektive

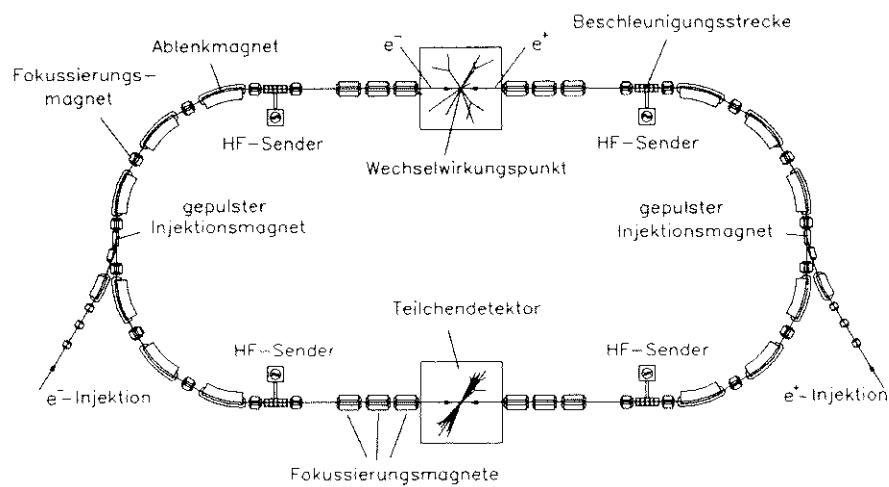


Abb. 2.34: Prinzip eines Colliders (aus [Wi92])



**Abb. 2.35:** Bild aus dem LEP (CERN)

### 2.1.11 Sekundärstrahlen

Da instabile Teilchen zerfallen lassen sie sich nicht in normalen Beschleunigern beschleunigen. Um diese instabilen Teilchen für Experimente verwenden zu können, müssen sie kurz vor der Verwendung erzeugt werden.

**Antiprotonen  $\bar{p}$ :** Protonen mit einer Energie von  $E = 28\text{GeV}$  werden auf ein langes Target (60cm Beryllium) geschickt. Mit einer statistischen Wahrscheinlichkeit von  $10^{-3}$  bis  $10^{-4}$  werden  $\bar{p}$  erzeugt. Diese werden gesammelt und zur Energiefokussierung gekühlt. Kurz vor dem Experiment werden sie dann auf die gewünschte Energie beschleunigt.

**Pionen  $\pi^\pm$ :** Hierfür lässt sich wieder obiger Aufbau verwenden. Nur die Wahrscheinlichkeit für die Erzeugung der Pionen ist höher.  
Die Pionen werden nach ihrer Entstehung durch einen Impulsfilter (Magnetkanal) dem Experiment zugeleitet.

**Kaonen  $K^\pm$**  werden wie die Pionen hergestellt, aber in 20 mal kleineren Intensitäten.  
Bei hohen Energien sind Pionen und Kaonen physikalisch nicht separabel; die Teilchen-differenzierung muss also im Strahl erfolgen (siehe dazu das nächste Kapitel).  
Pionen und Kaonen haben eine kurze Lebensdauer ( $\tau \sim 10^{-8}\text{s}$ ). Dies ist aber die Eigenzeit. Im Laborsystem habe sie bei Energien von  $E \sim 100\text{GeV}$  eine Lebensdauer von

$$\tau_{\text{Lab}} = \tau \cdot \gamma \quad \Rightarrow L_{\text{Flug}} = c \cdot \tau_{\text{Lab}} \sim \text{km}.$$

**Myonen**  $\mu^\pm$  lassen sich am einfachsten als Tertiärstrahl erzeugen: es wird ein Strahl von Pionen erzeugt und gewartet bis dieser zerfällt.

$$\pi \rightarrow \mu + \nu_\mu$$

Im Laborsystem fliegen die Myonen auch wieder nach “vorne“. Über ein Magnetsystem lässt sich nur eine Impulsselektierung durchführen. Insgesamt lassen sich Intensitäten von  $10^8$  Myonen pro Spill erreichen.

Zuletzt soll hier noch ein kurzer Überblick über die Vor- und Nachteile eines Fixed Target Experiments und eines Colliders gegeben werden:

Experiment	Vorteil	Nachteil
<u>Fixed Target</u>	höhere Reaktionsrate robuster Strahl hohe Statistik Detektor um Strahlrohr konzipierbar	Kühlung Boosteffekte
<u>Collider</u>	höhere Energien Strahl mehrfach verwendbar	Kleinwinkelbereich der Streuung problematisch geringe Reaktionsrate

## 2.2 Nachweis von Strahlung

Um Informationen über beschleunigte Teilchen und ihrer Interaktion, zum Beispiel bei einer Kollision, zu erhalten, muss die emittierte Strahlung näher untersucht werden. Aus Intensität, Winkelverteilung, Energieabhängigkeiten,etc. lassen sich allerhand Rückschlüsse ziehen.

**Das Hauptziel:** Die Bestimmung des 4-Vektors eines Teilchens, sowie dessen Lage im Raum, d. h. neben  $(x_0, y_0, z_0)$  eine der folgenden Messgrößenkombinationen:

$$(E, \vec{p}), \quad (m c^2, \vec{p}), \quad \left( E, \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, mc^2 \right), \quad \text{etc.}$$

$$\text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E}{mc^2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{V}{c} = \frac{pc}{E}$$

Zur Messung können folgende Methoden beitragen:

- Positionsempfindliche Detektoren —> Richtung und Lage des 4-Impulses
- Ablenkung im Magnetfeld —>  $|\vec{p}|$
- Energie: Teilchen setzen im aktiven Medium eines *Kalorimeters* gesamte Energie um (teilweise Sichtbarmachung), mit Eichung erhält man  $E$ .

- $m$ : Nur ganz bestimmte Massen kommen als stabile Teilchen in der Natur vor (e, p, n,  $\pi$ , etc.), d. h. die Trennung verschiedener Massenbereiche reicht, um die absolute Masse eines bekannten Teilchens zu bestimmen.
- Čerenkovstrahlung, Flugzeit  $\rightarrow \beta$
- Übergangsstrahlung  $\rightarrow \gamma$
- charakteristischer Zerfall eines Teilchens, Nachweis der Sekundärprodukte.

Der Nachweis eines Teilchens erfolgt durch Wechselwirkung mit einem Medium. Dabei unterscheidet man:

- elektromagnetische Wechselwirkung mit  $\Delta E \ll E$
- Wechselwirkung mit  $\Delta E \approx E$  (Kalorimetrie)

### 2.2.1 Elektrisch geladene Teilchen

Der Nachweis elektrisch geladener Teilchen erfolgt durch Wechselwirkung des Coulombfeldes des Teilchens mit den Hüllelektronen des Nachweismaterials (Coulomb-WW). Dabei sind folgende Fälle möglich:

- Anregung der Atome  $\rightarrow$  Lichtemission
- Ionisation der Atome  $\rightarrow$  Nachweis der freigesetzten Ladungsträger
- Polarisierung des Mediums  $\rightarrow$  Čerenkovstrahlung, Übergangsstrahlung

### 2.2.2 Energieverlust eines Teilchens

Der Energieverlust geschieht beispielsweise durch inelastische Stöße mit der Elektronenhülle der Atome im Absorber.

Der Impulsverlust berechnet sich klassisch zu:

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\text{Coulomb}} dt \quad \text{setze } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1 \quad (2.15)$$

Da sich die longitudinale Komponente der Wechselwirkung bei der Integration herausmittelt (symmetrisch für  $\pm x$ ), spielen nur die transversalen Kräfte eine Rolle, für die gilt:

$$F_{c\perp} = F_c \cdot \cos \vartheta = F_c \cdot \frac{b}{|\vec{r}|} = F_c \frac{b}{\sqrt{x^2 + b^2}}$$

Dabei bezeichnet  $b$  den Impakt- bzw. Stoßparameter (Abb. 2.36). Hieraus erhält man durch Ausführen der Integration in (2.15):

## 2.2 Nachweis von Strahlung

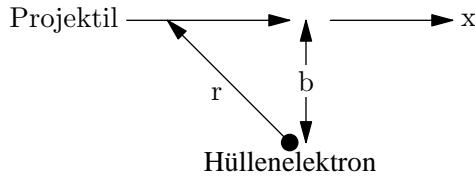


Abb. 2.36: Stoßparameter

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{c\perp} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{c\perp} \frac{dt}{dx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{c\perp} \frac{dx}{V} = \frac{2z \cdot e^2}{V \cdot b} \quad (2.16)$$

Hierbei wurde verwendet, daß:  $x = b \cdot \tan \vartheta \quad \frac{dx}{d\vartheta} d\vartheta = \frac{b}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta \quad$  sowie  $dx = b$

$$\Rightarrow F_{c\perp} = F_c \cdot \cos \vartheta = \frac{z \cdot e^2}{r^2} \cos \vartheta = \frac{z \cdot e^2}{b^2} \cos^3 \vartheta \quad (2.17)$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{z \cdot e^2}{b^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3 \vartheta \cdot \frac{b}{V} \cdot \frac{1}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta = 2 \cdot \frac{z \cdot e^2}{b \cdot V} \quad (2.18)$$

Dies gilt auch relativistisch.

$$\Delta E(b) = \frac{\Delta p^2}{2m_e} = \frac{2z^2 e^4}{m_e V^2 b^2}, \quad (2.19)$$

wobei  $V$  die Geschwindigkeit des Teilchens und  $z$  seine Ladung ist. Für den gesamten Energieverlust  $\Delta E$  ergibt sich mit der Wichtung für jedes  $b$  durch  $P(b)$ :

$$\Delta E = \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \Delta E(b) P(b) db$$

Um den Wichtungsfaktor zu bestimmen, betrachten wir einen Zylinder der Länge  $dx$  um die Teilchenbahn (= differentieller Materieausschnitt). Die Wahrscheinlichkeit ein Elektron in Intervall  $[b, b+db]$  auf der Strecke  $dx$  anzutreffen ist:

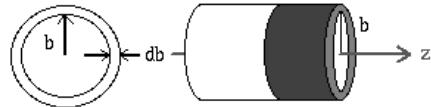


Abb. 2.37: Differentieller Materieausschnitt

$$P(b) db = 2\pi b db \cdot \underbrace{\frac{Z}{A} \cdot N_a \cdot \rho \cdot dx}_{\text{Anzahl der } e^- \text{ pro Einheitsfläche}}$$

mit der Ordnungszahl  $Z$ , dem Atomgewicht  $A$ , der Avogadrozahl  $N_a$  und der Dichte  $\rho$ .

Für  $\Delta E$  ergibt sich folglich:

$$\Delta E = \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \Delta E(b) P(b) db = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e V^2} \cdot \frac{Z}{A} \cdot N_a \cdot \rho \ln \frac{b_{\min}}{b_{\max}} \cdot dx \quad (2.20)$$

Aus dem maximalen Impulsübertrag im Stoß  $\Delta p_{\max} = 2m_e V$  bzw. dem minimalen Energieübertrag  $\Delta E_{\min} = I$ , der mindestens der Ionisierungsenergie  $I$  des Hüllelektrons entsprechen muss, ergibt sich der minimale bzw. maximale Stoßparameter zu:

$$b_{\min} = \frac{ze^2}{mV^2}; \quad b_{\max} = \frac{ze^2}{V} \sqrt{\frac{2}{m_e I}} \quad (2.21)$$

Setzt man nun die Werte für  $b_{\min}$  und  $b_{\max}$  in Gl. 2.20 ein und stellt die Gleichung nach  $\frac{\Delta E}{dx}$  um so erhält man für  $\Delta E \rightarrow dE$  den spezifischen Energieverlust:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{mV^2} \frac{Z}{A} \cdot N_0 \cdot \ln \sqrt{\frac{2m_e V^2}{I}} \quad (2.22)$$

Dieser Energieverlust erfolgt durch Anregung oder Ionisation der Atome in der Materie. Führt man eine quantenmechanische Ableitung mit relativistischen Korrekturen durch, so ergibt sich die *Bethe-Bloch-Formel*, die den mittleren Energieverlust in Materie angibt:

$$-\frac{dE}{dx} = 4\pi N_0 \frac{Z}{A} \frac{z^2 e^4}{mV^2} \cdot \left[ \ln \frac{2m_e V^2}{I} - \ln(1 - \beta^2) - \beta^2 - \frac{c_K}{Z} \right] \quad (2.23)$$

Mit:

- $\frac{N_0}{A}$  : Anzahl der Atome/Volumeneinheit
- $z$  : Ladung des einlaufenden Teilchens
- $A$  : Ordnungszahl (z. B. für  $^{12}\text{C}$ : 12)
- $Z$  : Ladungszahl (z. B. für  $^{12}\text{C}$ : 6)
- $x$  : durchlaufene Schichtdicke [ $\text{g/cm}^2$ ]
- $I$  : effektives Ionisationspotential ( $\approx 10 \cdot Z \text{ eV}$ )
- $\frac{Z}{A} \approx 0.5$  : für viele praktische Materialien (Abschn. 10.2)
- $c_K$  : Korrektur für Bindungsenergie der Elektronen auf der K-Schale

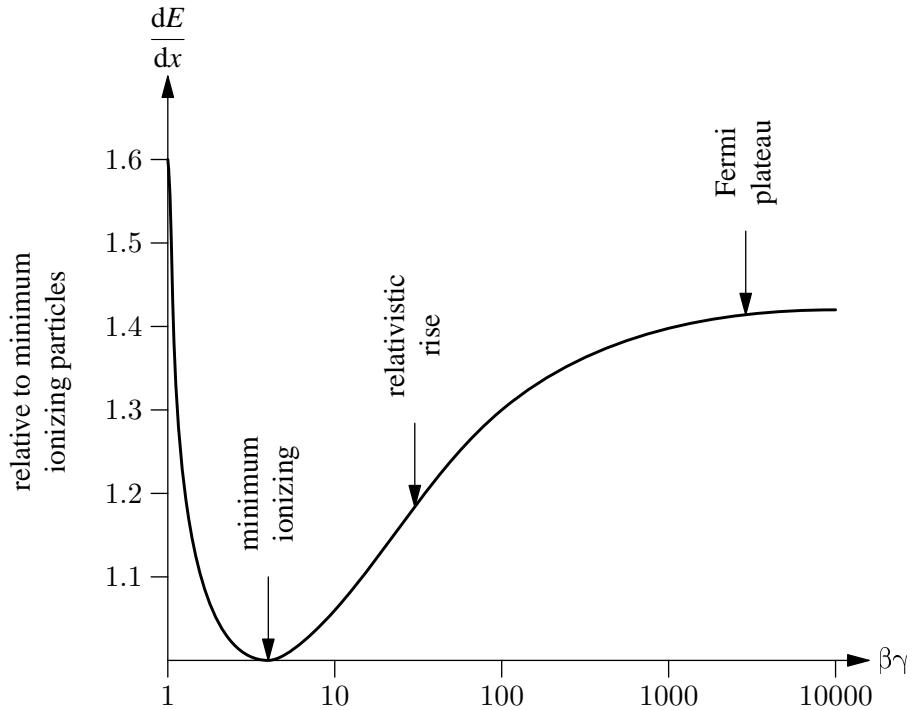


Abb. 2.38: Energieverlust durch Ionisation

- Das Minimum des Energieverlustes liegt bei  $\beta\gamma \approx 3$ , also bei  $E \approx 3m_e c^2$ . Abbildung 2.38 zeigt die Abhängigkeit des Energieverlusts pro Einheitslänge von der Größe  $\beta\gamma$  des Teilchens.
- Für leichte Teilchen (Elektronen), wird  $dE/dx$  größer, da der maximale Impulstransfer an das Hüllenelektron für schwere Teilchen kleiner ist als für Elektronen.
- Für kleine Energien gilt:  $dE/dx \propto 1/E \propto 1/V^2$ . Der Kurvenverlauf nach dem Minimum lässt sich folgendermaßen erklären:

**Relativistischer Anstieg:** Die transversale Feldstärke steigt proportional zur Lorentzkontraktion ( $\varepsilon_{\perp} \propto \gamma$ ). Abbildung 2.39 veranschaulicht dies: durch die Bewegung des geladenen Teilchens werden die transversalen Feldlinien zusammengezogen. Dadurch wächst die Reichweite des Feldes, also auch der Stoßparameter. Es wird somit mehr Energie abgegeben.

**Sättigung.** Wenn  $b$  in etwa dem Abstand der Atome entspricht, schirmen sich die nächsten Nachbarn gegenseitig ab und der Anstieg von  $\varepsilon_{\perp}$  bleibt wirkungslos. Damit erhält man eine Sättigung.

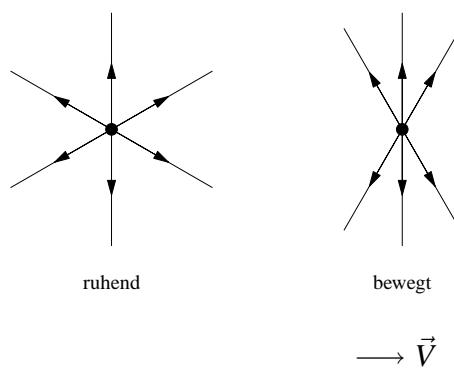


Abb. 2.39: Feldlinien einer bewegten Punktladung

Das Verhältnis von Sättigungsenergieabnahme zu minimaler Energieabnahme wächst mit dem Atomabstand. Deshalb ist

$$R = \frac{dE}{dx} \Big|_{\text{Sätt}} / \frac{dE}{dx} \Big|_{\text{min}}$$

groß für Gase (wegen des großen Atomabstands;  $\approx 1.8$  für Xenon) und klein für Festkörper. Typische Werte sind in Tab. 2.2 angegeben.

Der Energieverlust ist die Summe vieler Einzelprozesse. Man erhält daher statistische Schwankungen für die Anzahl der Prozesse und Details des Streuprozesses (Energieübertrag auf Elektronen).

Für dicke Schichten ist die Verteilung der Häufigkeit von  $dE$  der dabei erzeugten Elektronen um den mittleren Energieverlust fast gaußförmig (Abb. 2.40). Für dünne Schichten ergeben sich dagegen starke Schwankungen (langer Schwanz der Verteilung zu großen Energieverlusten). Diese stammen von seltenen Einzelprozessen mit hohem Energieübertrag. Diese Elektronen nennt man *Delta-Elektronen*.

Die entstehende Verteilung des Energieverlustes lässt sich mit Hilfe der *Landau-Verteilung* nähern:

$$P(\Delta E - \Delta E_{\text{mp}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\lambda + e^{-\lambda})} \quad (2.24)$$

$$\lambda : \frac{\Delta E \cdot \Delta E_{\text{mp}}}{\xi}$$

$\Delta E_{\text{mp}}$  : wahrscheinlichster Energieverlust

$\xi$  : materialabhängige Konstante

Für Argon mit  $\xi \approx 0.125$  keV erhält man beispielsweise folgende Daten: Bei 1 cm Wegstrecke ergibt sich  $\Delta E_{\text{mp}} \approx 1.2$  keV und ein mittlerer Energieverlust von  $\Delta E_m = 2.69$  keV

Es gibt noch weitere Prozesse, die zum Energieverlust bei Durchgang durch Materie führen:

- Leichte Teilchen werden bei Wechselwirkung mit dem Coulombfeld des Atomkerns gebremst. Die so beschleunigten Ladungen strahlen *Bremsstrahlung* ab. Dieser Effekt ist nur wichtig für Elektronen, da  $dE \propto 1/m^2$  („Abschütteln eines Photons aus dem Feld des Elektrons durch Richtungsänderung“). Ein Beispiel ist die in Röntgenröhren erzeugte Röntgenbremsstrahlung.

$$\frac{dE}{dx_{\text{Brems}}} \propto \frac{Z^2}{A} \cdot z^2 \cdot \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \cdot E \cdot f(z) \quad (2.25)$$

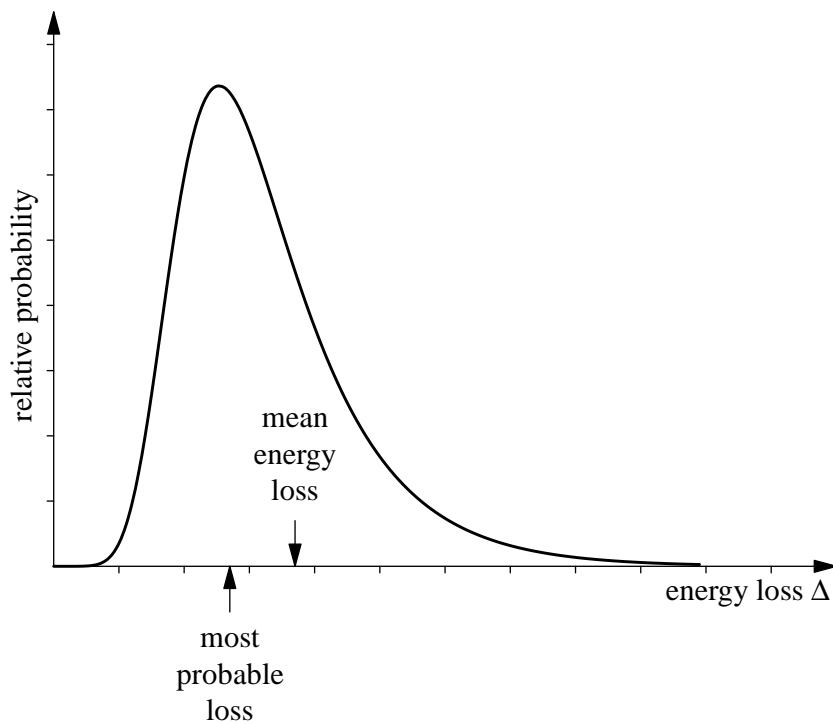
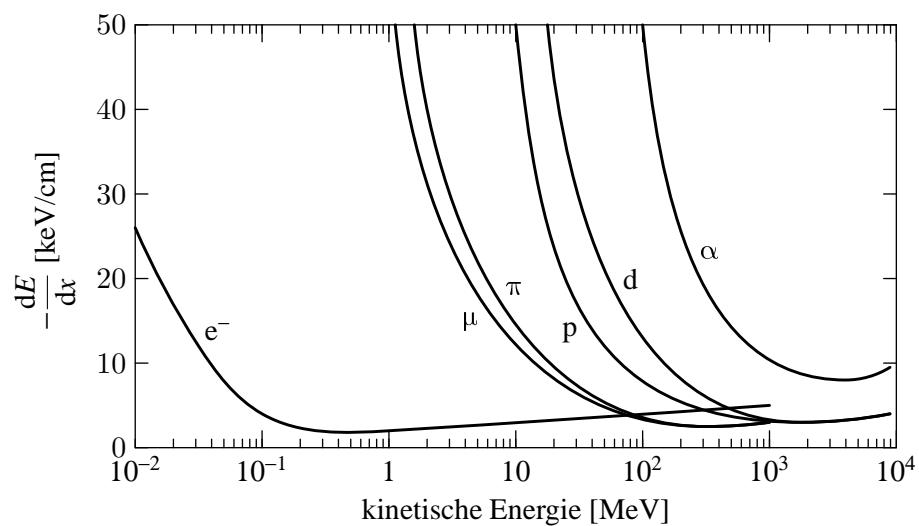
Aus den Formeln für die Bremsstrahlung ergibt sich die Strahlungslänge  $x_0 = E'/E_0$ .

- Kern-Wechselwirkung schwerer Projektilen: Der Kern wird hierbei aufgebrochen, und neue Teilchen werden produziert. Dies ist also ein stark *inelastischer* Prozeß. Bei hoher Energie kommt es zur Schauerentwicklung, einem lawinenartigen Anwachsen der Teilchenzahl, was in der Kalorimetrie von größter Bedeutung ist.

Material	$dE/dx _{\text{min}} [\text{MeV}/\text{cm}]$
Plexiglas	2.3
Eisen	11.65
Uran	20.66
Xenon (Gas)	$7.3 \cdot 10^{-3}$

Tab. 2.2: typische Werte für Energieabnahme in verschiedenen Materialien

## 2.2 Nachweis von Strahlung

**Abb. 2.40:** Fluktuationen im Energieverlust: Landau-Verteilung**Abb. 2.41:** Emulsionen, Teilchenidentifizierung LEP

- Wenn die Geschwindigkeit der Teilchen  $V_{\text{Teilchen}}$  größer ist als die Lichtgeschwindigkeit im Medium  $c_{\text{Medium}} = c_{\text{Vakuum}}/n$  wird Strahlung emittiert, die sogenannte Čerenkov-Strahlung . Diese wird in Analogie zum Machschen Schallkegel unter einem bestimmten Winkel

$$\cos \Theta_C = 1/(\beta n)$$

emittiert. Die Messung des Emissionswinkels ergibt  $\beta$ . Aus der Ablenkung des Teilchenstrahls im Magnetfeld (Impulsbestimmung) erhält man dann die Masse  $m$  via  $p = \beta E$  ( $c=1$ ).

**Erklärung für das Auftreten der Strahlung:** Ein geladenes Teilchen fliege durch ein polarisierbares Medium und erzeugt entlang seiner Flugrichtung Polarisation. Für  $V/c < 1$  ist diese Polarisation sphärisch symmetrisch (Atome vor und hinter dem Teilchen „sprechen“ miteinander; Informationsaustausch ist für Geschwindigkeiten kleiner  $c$  möglich). Für  $V/c > 1$  ist die Polarisation hingegen asymmetrisch dipolartig (Atome vor und hinter dem Teilchen können nicht schnell genug „kommunizieren“). Die Relaxation bewirkt eine Abstrahlung, da sich das Dipolmoment mit der Zeit ändert.

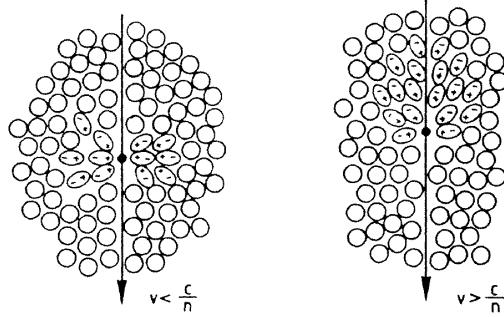


Abb. 2.42: Teilchen im polarisierten Medium (aus [Ma66])

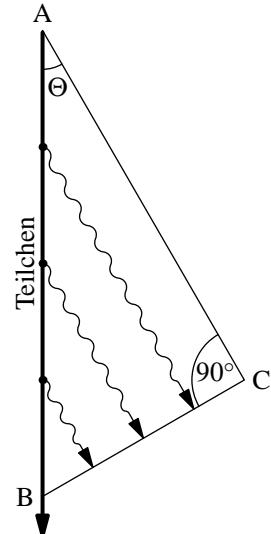


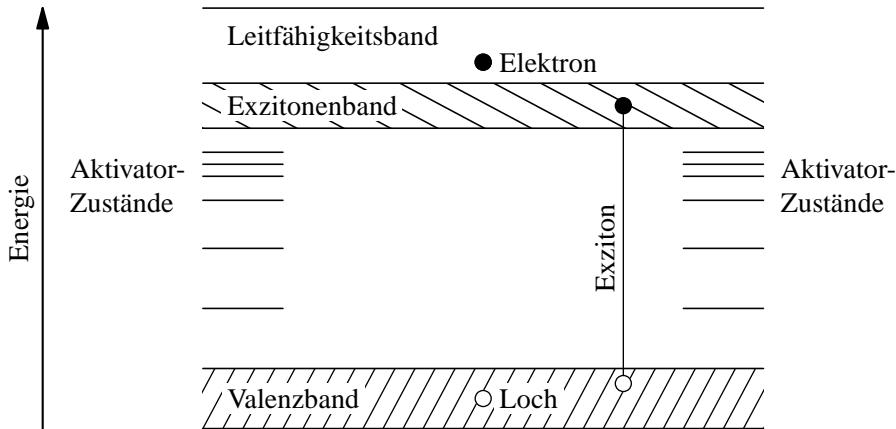
Abb. 2.43: Čerenkov-Abstrahlung

## 2.2.3 Szintillation

**Prinzip:** In Szintillatoren wird die Anregung eines Festkörpers durch Energieverlust in sichtbares Licht konvertiert. Dieses wird in optischen Empfängern wie zum Beispiel dem Photomultiplier oder der Photodiode gemessen.

Als Szintillationsmaterialien dienen anorganische Kristalle wie NaI(Tl), CsI(Tl), organische Stoffe, Plastik oder Gase. In organischen Verbindungen wird ein Fluoreszenzstoff angeregt (z.B. Naphtalin). In Kristallen wird zunächst ein Elektron aus dem Valenzband ins Leitungsband angehoben (5–10 eV) und damit ein Exziton (ein gebundenes Elektron-Loch-Paar) erzeugt. Entweder wird bei der Rekombination Licht emittiert oder die Energie an den Aktivator (Tl) übertragen, der sich dann durch Phononen- bzw. Photo-Emission abregt (Abb. 2.44).

## 2.2 Nachweis von Strahlung



**Abb. 2.44:** Anregungen im NaI(Tl)-Kristall

**Lichtausbeute:** In NaI(Tl) ergeben sich  $4 \cdot 10^4$  Photonen pro MeV Energieverlust, in Plastik hingegen nur 20 bis 30% von NaI.

**Wellenlänge:** Die Abstrahlung erfolgt im nahen UV- oder im sichtbaren Bereich.

**Wellenlängenverschiebung:** Bei der Szintillation werden in einem Material (organische Moleküle) Hüllelektronen angeregt, was zu einer Lichtemission führt (zum Beispiel UV-Licht). Die Selbstabsorption des Lichts im Material verringert allerdings die Anzahl der beobachteten Lichtquanten am Rande des Materials und die Ausbeute ist positionsabhängig, da am Rand emittierte Photonen eher das Material verlassen können. Dadurch ist die Weglänge des Lichts im Szintillator sehr kurz.

Ausweg: Durch die Beimischung anderer Farbmoleküle wird eine Frequenzverschiebung erreicht. Emission und Absorption durch elektronische An- und Abregung erfolgen dabei mit unterschiedlichen Wellenlängen (siehe Abb. 2.45).

Ohne diese Frequenzverschiebung wird die starke Lichtemission durch die elektrischen Übergänge in allen Niveaus von Rotations- und Vibrationsbanden absorbiert.

Durch die Verschiebung des Absorptions- zum Emissionsband ( $\lambda_{\text{Szintillator}} < \lambda_{\text{Wellenschieber}}$ ) wird die Reichweite der Wellenschieberfrequenzen viel größer als die Reichweite der Szintillatorfrequenzen ( $\lambda_{\text{Wellenschieber}} \gg \lambda_{\text{Szintillator}}$ ).

Die Verschiebung erfolgt zu kleineren Frequenzen hin. Zum Beispiel wird eine Emission von Szintillatorlicht im UV- Bereich mit einem Wellenlängenschieber in den grünen Bereich verschoben und dann vom Photomultiplier detektiert, dessen maximale Empfindlichkeit im Wellenlängenbereich von 400 – 500nm liegt.

### 2.2.4 Photomultiplier

Lichtquanten werden über photosensitive Detektoren nachgewiesen. Dazu eignet sich zum Beispiel eine Kathode, aus der mittels Photoeffekt Elektronen ausgelöst werden. Für einzelne Pho-

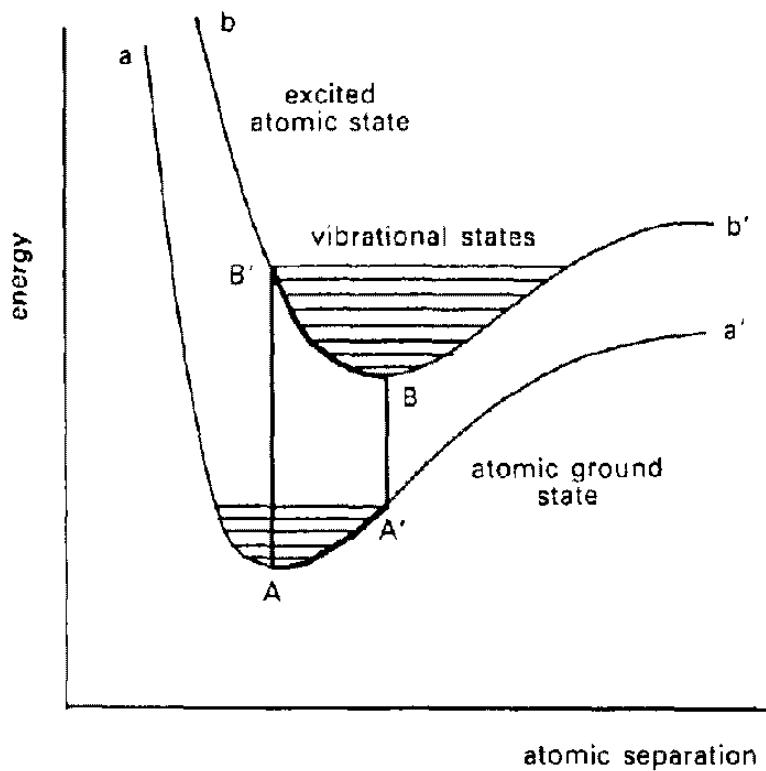


Abb. 2.45: Elektronische An- und Abregung in Molekülen

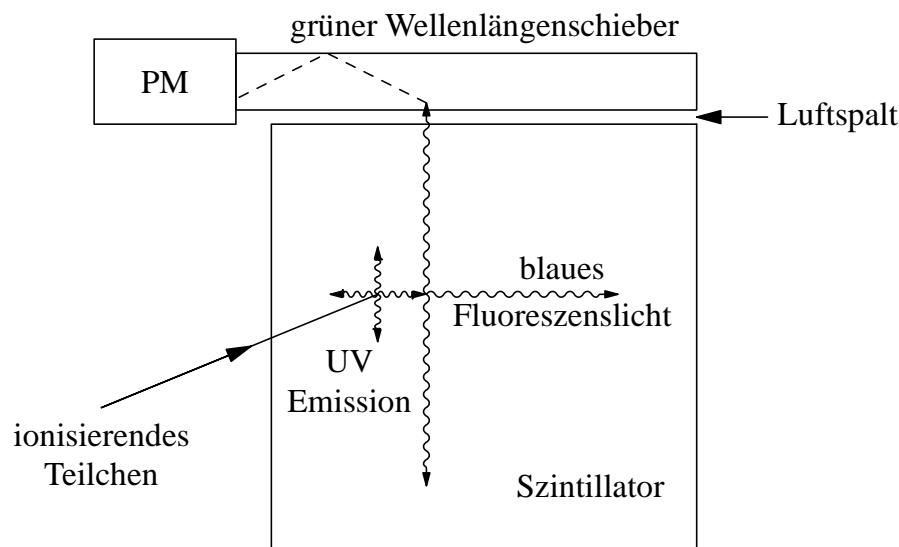


Abb. 2.46: Schema eines Szintillationszählers

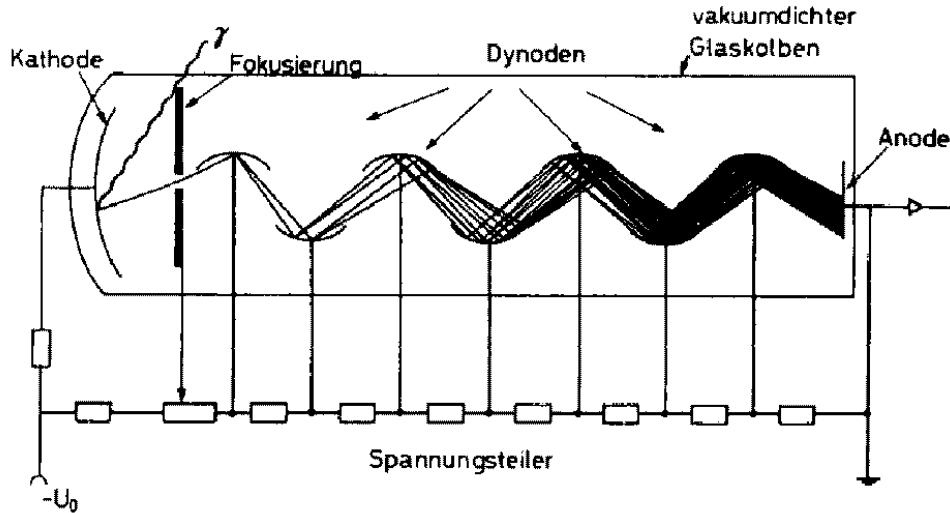


Abb. 2.47: Schema eines Photomultipliers (aus [Gr93])

tonen ist das Signal jedoch zu schwach - es muss also verstärkt werden. Dazu wird im Photomultiplier eine Dynodenanordnung verwendet, wie in Abbildung 2.47 gezeigt. Zwischen den Dynoden sind Spannungen angelegt. Die Dynoden bestehen dabei aus einem Material mit einer niedrigen Austrittsarbeit. Dadurch erhöht sich mit jedem Auftreffen der Elektronen auf die nächste Dynode die Anzahl der ausgelösten Elektronen. Es tritt eine Lawineneffekt auf. Am Ende erhält man ein gut messbares Signal.

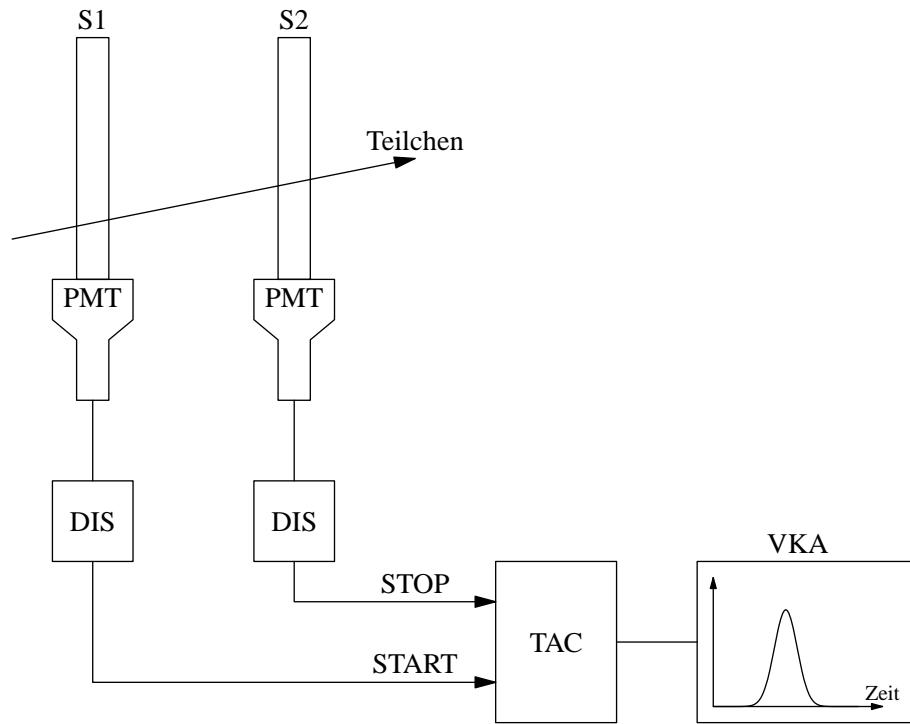
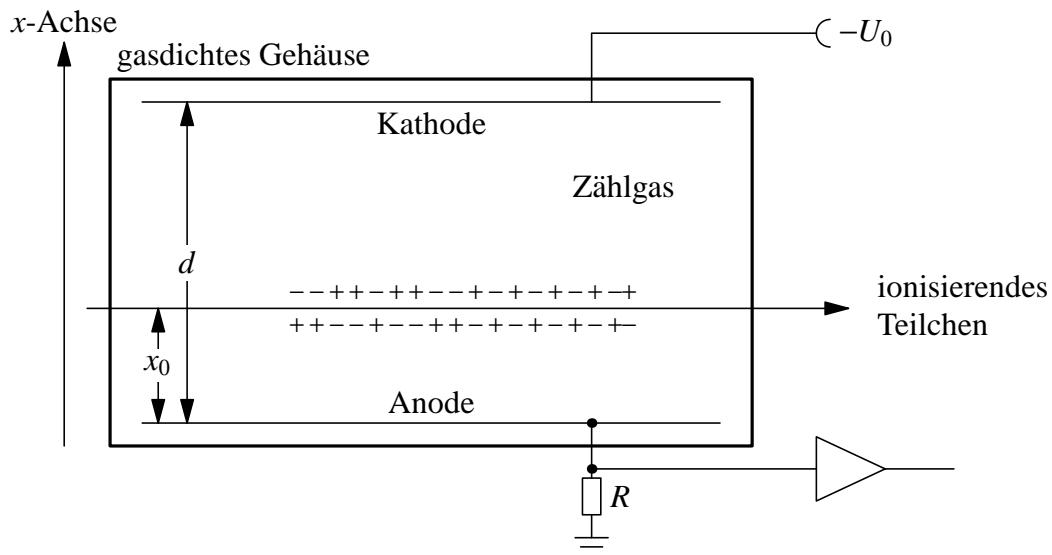
Die Pulse von organischen Szintillatoren sind mit einigen Nanosekunden sehr schnell ( $\tau_{\text{Anstieg}} \approx 10^{-9} \text{ s}$ ). Die von den Photomultipliern erreichte Zeitauflösung von 100–200 ps reicht aus, um diese schnellen Pulse getrennt zu detektieren.

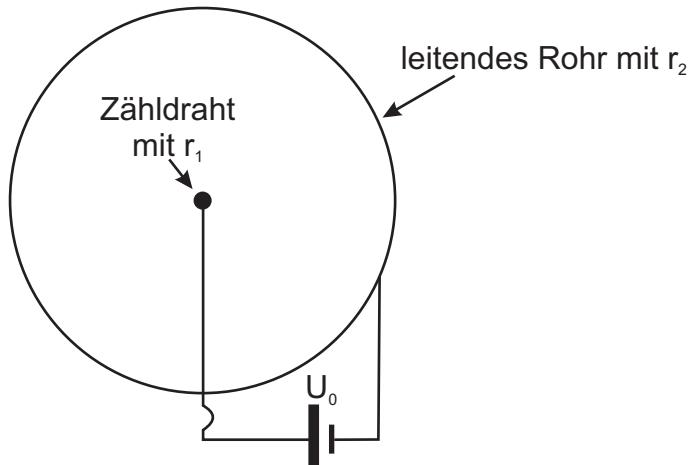
### 2.2.5 Nachweis der erzeugten Ionisation

Der Nachweis der im Detektor hervorgerufenen Ionisation kann zum Beispiel geschehen durch:

- *Gasproportionalzähler* (Abb. 2.49): Bei dem Durchgang eines geladenen Teilchens durch ein Gas werden freie Ladungsträger produziert. Diese werden dann durch ein elektrisches Feld getrennt (Drift der Ladungsträger im Gas) und der induzierte Strom wird am Widerstand  $R$  über einen Verstärker gemessen. Bei sauberer Handhabung haben die Ladungsträger eine lange Lebensdauer.
- *Gasverstärkung*: Elektronen werden im hohen elektrischen Feld eines dünnen Drahtes (Durchmesser 10 – 50  $\mu\text{m}$ ) oder einer GEM- Folie innerhalb eines Gasvolumens beschleunigt (Abb. 2.50). Die elektrische Feldstärke im Zählrohr beträgt:

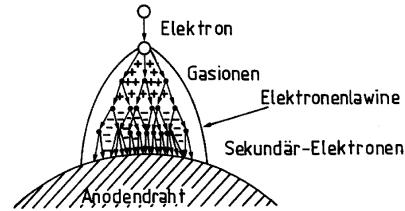
$$\varepsilon(r) = V_0 \cdot \frac{1}{r \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

**Abb. 2.48:** Anwendung: Flugzeitmessung**Abb. 2.49:** Schema eines Gasproportionalzählers



**Abb. 2.50:** Schema eines Gasproportionalzählers

Hierdurch wird das Elektron zum Draht hingezogen und in der Nähe des Drahtes beschleunigt. Die Folge ist die Ionisation von Gasmolekülen, wodurch neue Ladungsträger entstehen, die wiederum beschleunigt werden. So entsteht ein Lawineneffekt (Abb. 2.51). Die Gasverstärkung erreicht hierbei ca.  $10^5$  zusätzlich produzierte Elektronen. Empfindliche Ladungsverstärker registrieren ein Signal von  $10^5 \dots 10^7$  Elektronen.



**Abb. 2.51:** Elektronenlawine zur Gasverstärkung

- **Geiger-Müller-Zähler:** Das eben beschriebene Prinzip findet im sogenannten Geiger-Müller-Zähler Anwendung. Der Geiger-Müller-Zähler, schlicht auch Geigerzähler genannt, ist ein Detektor für ionisierende Strahlung. Darunter fallen z.B.  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ - und Röntgenstrahlen. Er wurde 1928 von den Physikern Hans Geiger und Walther Müller in Kiel erfunden. Der Zähler wird heutzutage hauptsächlich eingesetzt um radioaktive Substanzen zu erkennen und deren Strahlungsintensität abzuschätzen.

**Ortsinformation:** Um Informationen über den Ort der Ereignisse zu erhalten kann entweder eine Anordnung vieler unabhängiger Zählrohre wählen ("strawtube- System"), oder viele Drähte als Anode verwenden (Abb. 2.52; MWPC: Multi Wire Proportional Chamber). Ein Vorverstärker an jedem Draht liefert dann Informationen über den Weg des Elektrons. Hiermit kann aufgrund des Wegunterschiedes eine Ortsauflösung  $\sigma_x = \frac{\Delta x}{\sqrt{12}}$  (Varianz einer Rechtecksverteilung  $\Rightarrow 1/\sqrt{12}$ ) erreicht werden (Nobelpreis<sup>10</sup> 1992 für G. Charpak). Typische Drahtabstände sind 2 bis 4 mm. Somit lässt sich eine Ortsauflösung von 0,6 bis 1,2mm erreichen.

Ein Vorteil ist die Möglichkeit hohe Zählraten zu messen. Nachteilig wirken sich die geringe Ortsauflösung und die vielen nötigen Vorverstärker aus.

<sup>10</sup><http://www.nobel.se/laureates/physics-1992.html>

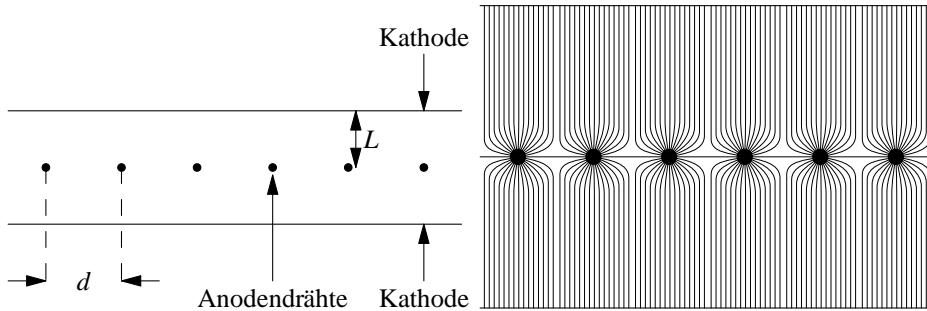


Abb. 2.52: Schema einer Vieldrahtkammer

**Verfeinerung:** Statt viele Anodendrähte zu verwenden, kann man auch den Zeitpunkt der aufgesammelten Elektronen messen.

Ein Teilchen stößt im Abstand  $d$  vom Anodendraht durch den Zähler. Die erzeugten Elektronen brauchen eine Zeit  $t = d/V$  um zum Draht zu gelangen, wobei die typische Driftgeschwindigkeit  $V_{\text{Drift}} \approx 5 \text{ cm}/\mu\text{s}$  beträgt (der Beschleunigung im elektrischen Feld wirken Stöße mit Gasmolekülen entgegen). Die Zeitauflösung der Vorverstärker liegt bei ca. 1 ns.

Gemessen wird die Zeitdifferenz zwischen den Szintillatorblitzen eines zeitgebenden Detektors ( $t = 0$ ) und der Ankunft der ersten Elektronen am Draht. Dadurch ist der Abstand  $d$  der Ionisation zum Draht genau bekannt. Die hierdurch erreichte Ortsauflösung beträgt  $\sigma \approx 100 \mu\text{m} - 200 \mu\text{m}$  bei einem Drahtabstand von 2 bis 4 cm.

$$x = \int v^-(t) dt$$

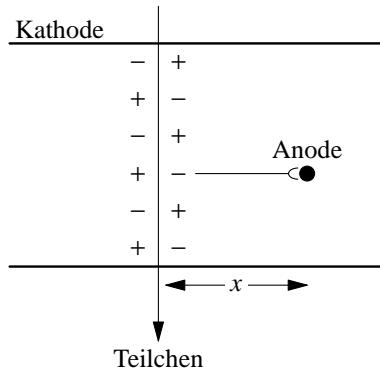


Abb. 2.53: Driftprinzip

In Collider-Detektoren werden typischerweise zylindrische Driftkammern (Abb. 2.54) verwendet, in denen durch zusätzliche Potentialdrähte das Driftfeld erzeugt wird.

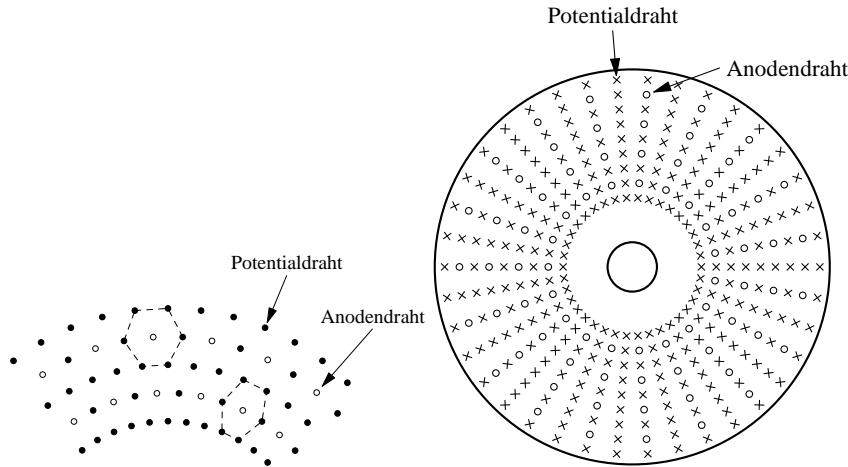


Abb. 2.54: Schema einer zylindrischen Driftkammer

### 2.2.6 Vielfachstreuung

Beim Durchlaufen eines Teilchens durch Materie finden viele Streuprozesse statt, die jeweils eine Richtungsänderung bewirken (Abb. 2.55). Dadurch erhält man eine Auffächerung eines Teilchenstrahls.

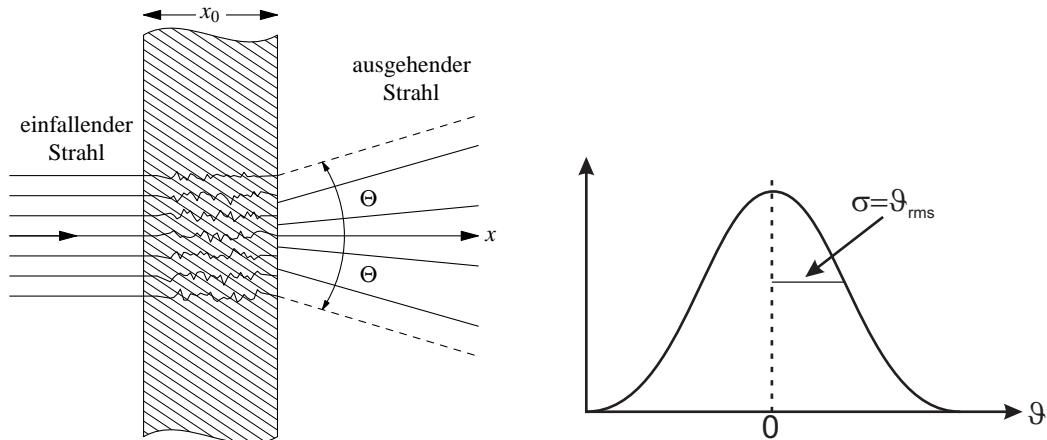


Abb. 2.55: Vielfachstreuung und Winkelverteilung

$$\sigma_\vartheta = \vartheta_{\text{rms}} = \frac{13,6 \text{ MeV}}{\beta \cdot c \cdot p} \dot{z} \cdot \sqrt{\frac{\Delta x}{x_0}} \left( 1 + 0,038 \ln \frac{\Delta x}{x_0} \right)$$

$x_0$  ist die Strahlungslänge,  $p$  der Impuls der Teilchen.

Vor allem für Elektronen ist dieser Prozeß wichtig wegen deren kleiner Masse und daher großer möglicher Richtungsänderung. Er verfälscht die Richtungsmessung in Detektorsystemen und auch der Energieverlust muss berücksichtigt werden.

## 2.2.7 Nachweis von Licht

Für den Nachweis von Licht bzw. allgemein elektromagnetischer Strahlung sind hauptsächlich drei Effekte von Bedeutung, die stark material- und energieabhängig sind:

**Photoeffekt** ( $\gamma + \text{Atom} \longrightarrow e + \text{Atom}$ ): Ein  $\gamma$ -Quant wird von einem Atom absorbiert und ein Elektron aus seiner Schale „geworfen“. Dieser Prozeß ist stark abhängig von der Kernladungszahl  $Z$  des Atoms. Für den Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  gilt (eine ausführliche Beschreibung des Wirkungsquerschnitts folgt in Kapitel 3):

$$\sigma_{\text{ph}} \propto Z^{4.5}.$$

Außerdem ergeben sich Resonanzphänomene durch die Schalenstruktur des Atoms ( $E_\gamma = E_{\text{Schale}}^e$ ). Der Photoeffekt ist hauptsächlich bei kleinen Energien im keV Bereich von Interesse. Um die Energie des Photons zu erhalten, genügt der Nachweis der Elektronenergie.

**Comptonstreuung** ( $\gamma + \text{Atom} \longrightarrow \gamma + e + \text{Ion}$ ): Ein Photon wird an einem quasifreien Elektron gestreut. Die Bindungsenergie der Elektronen im Atom muß bei diesem Prozeß klein gegenüber der Energie des  $\gamma$ -Quants sein. Der Comptoneffekt dominiert bei Photonenenergien um einige 100 keV bis in den niedrigen MeV-Bereich. Durch den Nachweis der Richtung und der Energie des Elektrons erhält man die Energie des  $\gamma$ -Quants. Für den Wirkungsquerschnitt ergibt sich:

$$\sigma_c \propto \frac{\ln E}{E} \cdot Z \quad (\text{inkohärente Streuung an den Hüllenelektronen})$$

**Paarbildung** ( $\gamma + \text{Atom} \longrightarrow e^- + e^+ + \text{Atom}$ ): Das Photon konvertiert in ein Elektron und ein Positron, wobei der Kern den Restimpuls aufnimmt. Hier muß die Photonenenergie größer als die Ruheenergie von Elektron und Positron sein ( $E_\gamma > 2m_e = 1.022 \text{ MeV}$ ). Der Nachweis der Elektronen-Positronen-Energie liefert wieder die Energie des  $\gamma$ -Quants. Für den Wirkungsquerschnitt erhält man:

$$\sigma_p \propto Z^2 \quad (\text{kohärente Streuung am Kern})$$

Der Nachweis von sekundären Elektronen bzw. deren Ionisation oder weiteren Wechselwirkungen wird in Siliziumzählern oder Kalorimetern (siehe Abschn. 2.2.9) verwendet. Eine Übersicht der charakteristischen Absorptionskoeffizienten in Blei ergibt sich direkt aus den eben besprochenen Wirkungsquerschnitten und ist in Abb. 2.56 wiedergegeben. Es zeigt sich, dass mit steigender Photonenenergie der Absorptionskoeffizient leicht sinkt, um dann sprunghaft wieder anzusteigen (K- bzw. L-Kante). Dies liegt daran, dass die Photonen mit steigender Energie plötzlich auch an Elektronen weiter innen liegender Schalen absorbiert bzw. gestreut werden können. Bei genauerer Betrachtung zeigt sich eine Unterstruktur, die auf die Energieverteilung in den Unterschalen zurückzuführen ist.

## 2.2.8 Blasenkammer

1952 entwickelt, ist die Blasenkammer schon alt aber immer noch anschaulich (Abb. 2.57). Mit ihr wurden viele wertvolle Entdeckungen gemacht.

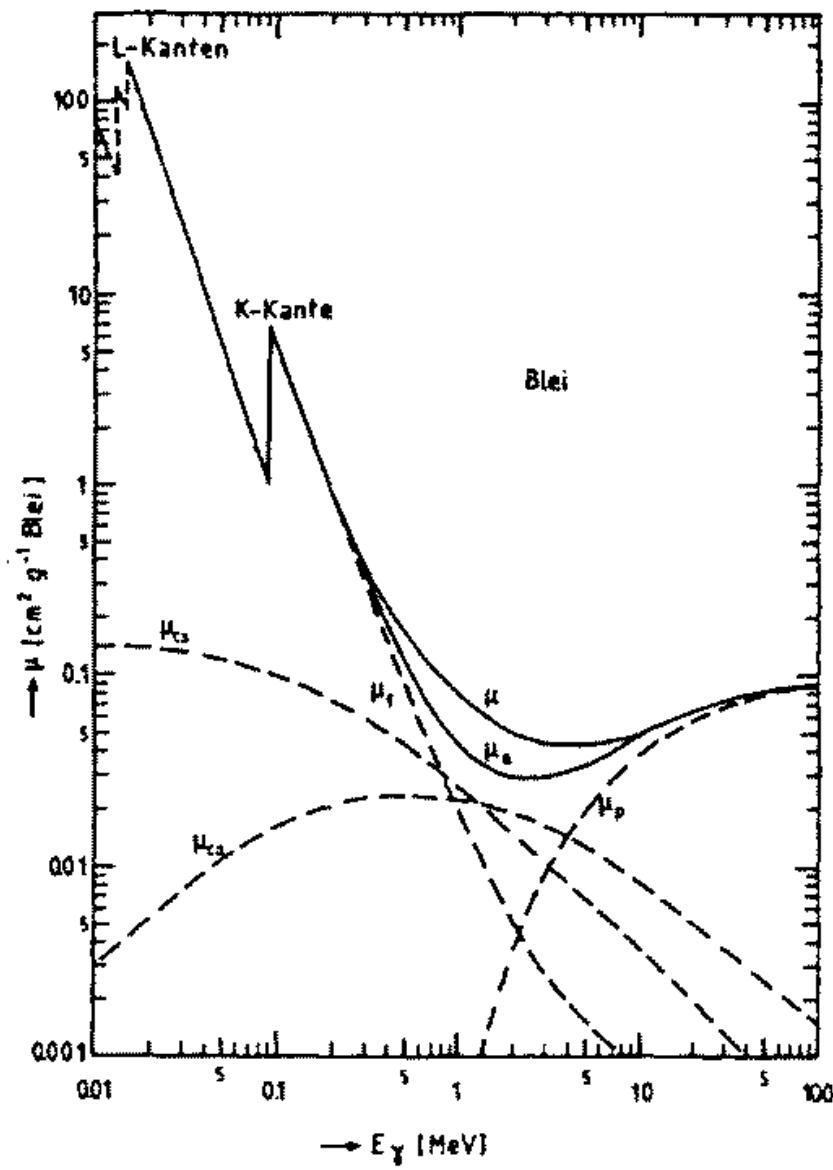
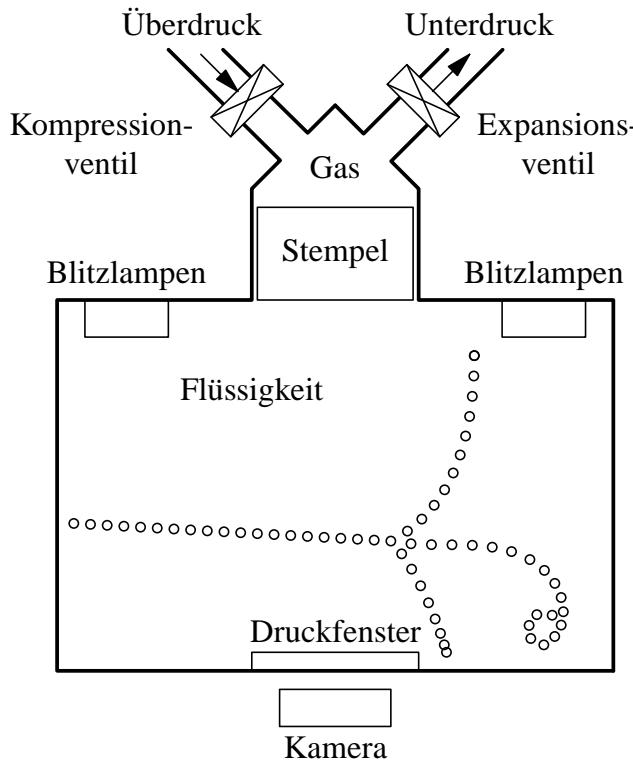


Abb. 2.56: Energieabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten (aus [He66])



**Abb. 2.57:** Schema einer Blasenkammer

Zum Prinzip: In einem Behälter mit sauberer, überhitzter Flüssigkeit (z. B. Wasserstoff, Propan ( $C_3H_8$ ), Freon) bilden sich an „Kristallisationszentren“, die durch Ionisation entstehen, Blasen. Die Blasen entlang der Spur eines geladenen Teilchens werden photographiert. Es lassen sich Rückschlüsse auf die Flugbahn von ionisierenden Teilchen ziehen.

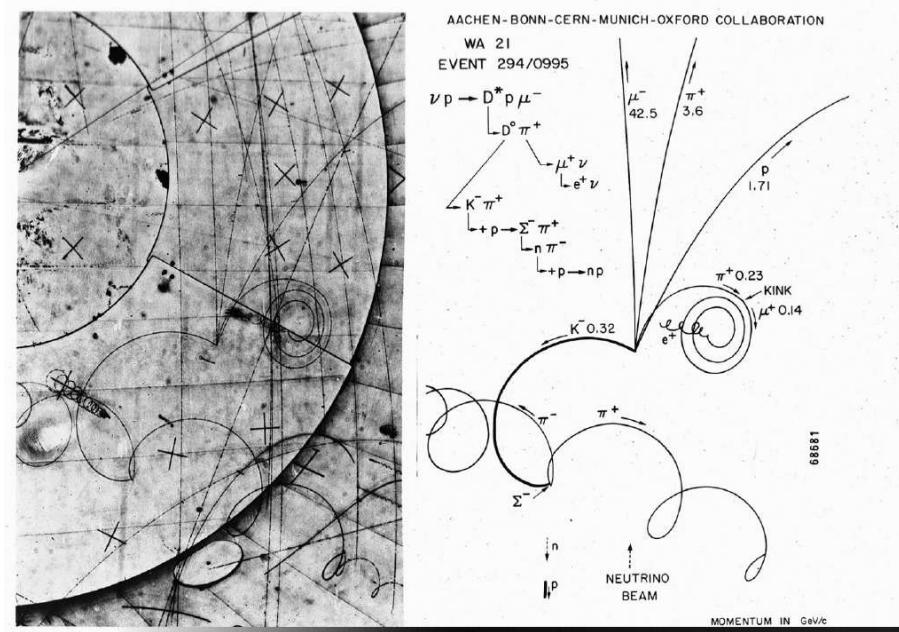
Um sich diesen Effekt zu veranschaulichen, kann man eine einfache Analogie bemühen, die aus dem Chemielabor bekannt sein dürfte: Bei destilliertem Wasser in einem sauberen Gefäß ist der Siedeverzug zu beachten ( $T_{\text{Siede}} > 100^\circ\text{C}$ ). Um dies zu verhindern, werden Siedesteinchen zugegeben, an denen sich wiederum Blasen bilden.

Der Prozeß lässt sich in vier Schritte unterteilen:

1. Teilchen fliegt durch Flüssigkeit (Druck  $\approx 5\text{--}20$  bar)
2. Dekompression (ausgelöst durch ein externes Detektorsignal) durch einen Kolben führt zu einer kurzzeitigen Überhitzung
3. Blasenbildung an Ionisationspunkten
4. Mit Kamera und Blitzlicht wird ein Blasenkammerbild erzeugt. Mit vielen Kameras lässt sich ein dreidimensionales Bild erstellen.

Die Wiederholung dieses Prozesses ist etwa einmal pro Sekunde möglich. Wenn sich die Kammer in einem Magnetfeld befindet ( $B \approx 2\text{--}3$  T), wird die Krümmung der Spuren sichtbar und man erhält daraus den Impuls der jeweiligen ionisierenden Teilchen. Eine typische Blasenkammer-Aufnahme und ihre Interpretation zeigt Abbildung 2.58.

## 2.2 Nachweis von Strahlung



**Abb. 2.58:** Bilder einer Blasenkammer (BEBC, Big European Bubble Chamber am CERN)

### 2.2.9 Kalorimetrie

In einem Kalorimeter wird die gesamte Energie des einfallenden Teilchens im Medium deponiert. Das Medium besteht hierbei aus aktiven oder aus einer Mischung aus passiven (Absorber) und aktiven Materialien. In passiven Materialien finden hauptsächlich Bremsstrahlungs- und Paarbildungsprozesse statt. Das aktive Medium dient zum Nachweis der Energie.

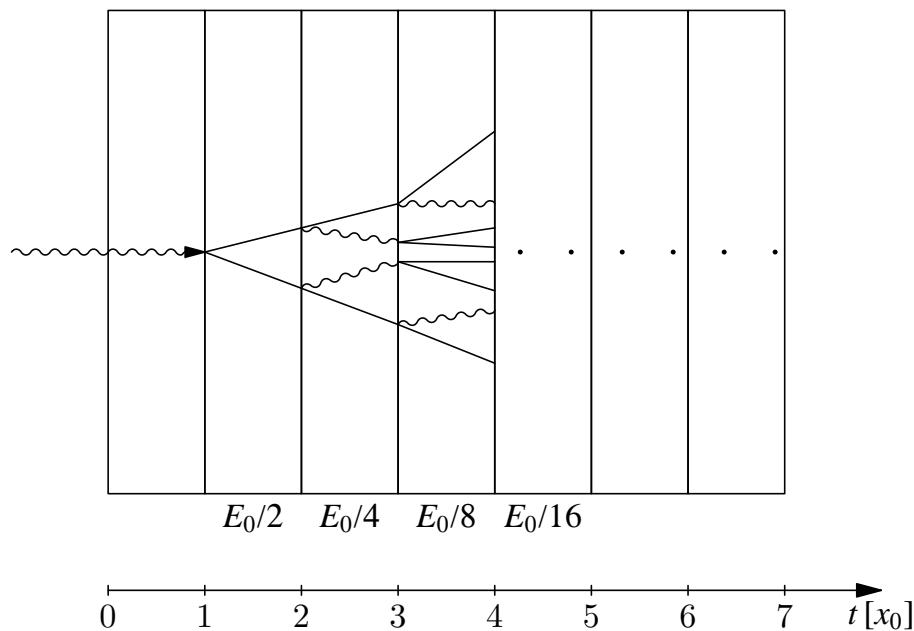
Es treten dabei verschiedene Kaskaden-Prozesse auf:

- *Elektromagnetische Prozesse* (Abb. 2.59): Hierzu sind Materialien mit hoher Kernladungszahl  $Z$  von Vorteil, da die meisten Prozesse mit  $Z^2$  ansteigen.

Die beiden hier alternierenden Hauptprozesse sind Paarbildung und Bremsstrahlung. Diese treten auf, bis die gesamte Energie "verbraucht" ist, also die letzten neu erzeugten Teilchen selber keine weitere Bremsstrahlung oder Paarbildung mehr zeigen.

Die Sichtbarmachung erfolgt durch:

- Ionisation im aktiven Material (Pb-Argon-Zähler)
  - Anregung von Szintillationslicht (Pb-Szintillationszähler)
  - Emission von Čerenkovstrahlung (Pb-Glas-Zähler)
  - *Hadronische Prozesse* (Abb. 2.60): Hier sind Materialien mit hoher Massenzahl  $A$  notwendig, da die meisten Prozesse  $\propto A$  oder  $\propto A^{2/3}$  ansteigen.
- Es werden neue Teilchen durch Kernstöße oder inelastische Streuung an Nukleonen erzeugt. Diese Sekundärteilchen setzen die Lawine fort oder zerfallen (wie  $\pi^0$ ) und erzeugen eine elektromagnetische Kaskade. Die Sichtbarmachung erfolgt wie bei den elektromagnetischen Prozessen. Die erhaltene Signalhöhe an Licht oder Ladung ist proportional zur Anfangsenergie der Teilchen. Die Auflösungen der einzelnen Kalorimeter sind in Tabelle 2.3 dargestellt.

**Abb. 2.59:** Elektromagnetische Kaskade im Kalorimeter

Kalorimeter	$\frac{\sigma(E)}{E}$
e.m. Kalorimeter ( $\gamma, e^\pm$ )	$\frac{2-5\%}{\sqrt{E}}$
hadron. Kalorimeter ( $p, n, \pi^\pm$ )	$\frac{30-80\%}{\sqrt{E}}$

**Tab. 2.3:** Energieauflösung

Zum Schluß sei noch kurz eine kompakte Darstellung über die Vorteile eines Szintillatorzählers und eines Halbleiterzählers gegeben:

Detektortyp	Eigenschaft
Szintillator	+ großflächig (Kunststofffolien oder aufgedampfte Kristalle) + billig + robust (keine Deckschicht notwendig) – ungenau, bzw. viele Teilchen notwendig
Halbleiter	+ sehr genau und scharf – im Allgemeinen teuer – eventuell Kühlung erforderlich (z.B. durch Schutzschicht, Leitungsschicht) $\Rightarrow$ Totschicht/ hohe Signalverluste

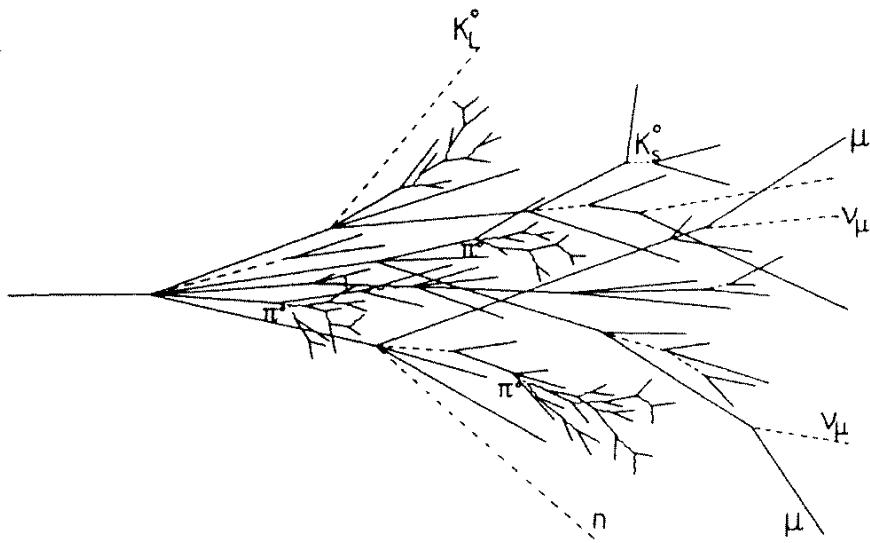
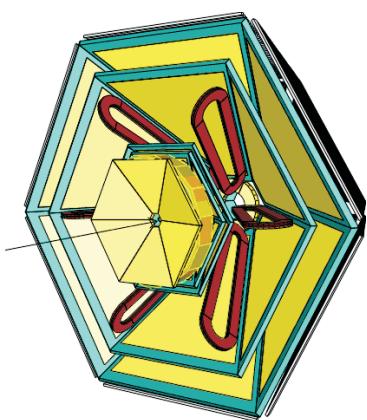


Abb. 2.60: Hadronische Kaskade im Kalorimeter (aus [Gr93])

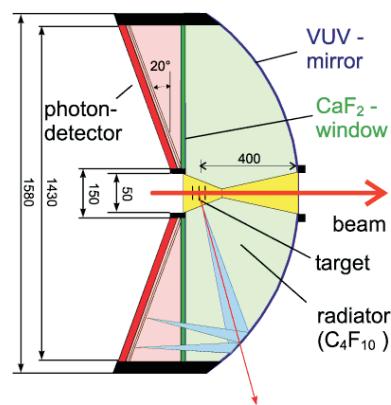
## 2.2.10 Moderne Detektoren

Moderne Detektoren wie z. B. COMPASS (Abb. 2.63) oder DELPHI am LEP (Abb. 2.64) bestehen aus vielen Detektorsystemen:

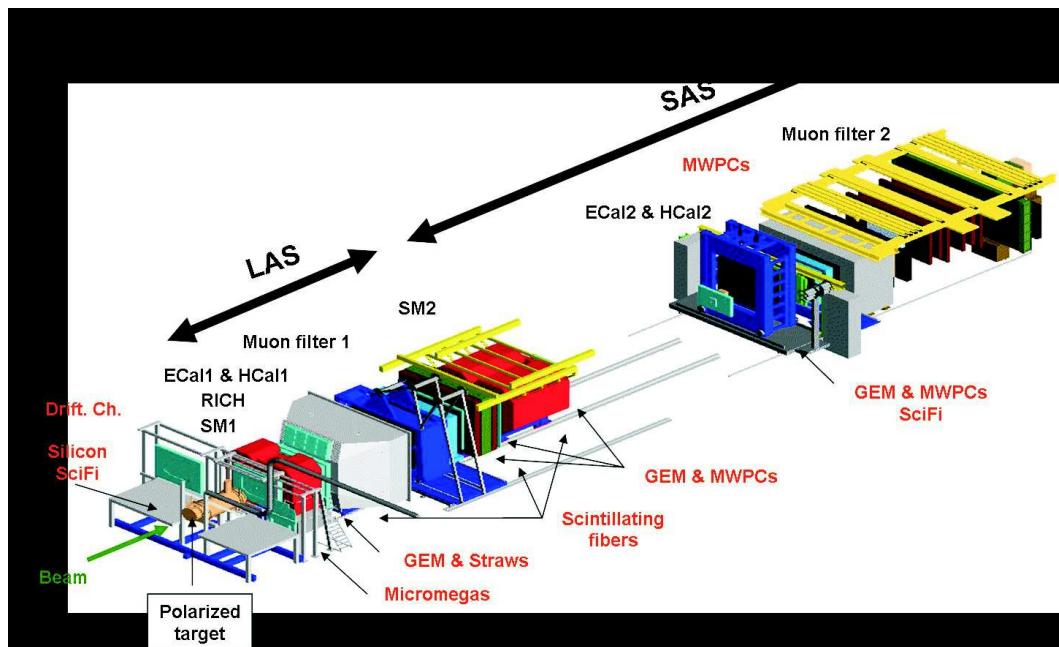
- *Ortsmessung:* Sie wird durch räumliche Separation der Ereignisdichte bewerkstelligt. Hierzu verwendet man z.B. Gasdedektoren (100 bis 200  $\mu\text{m}$ ) oder Halbleiterdetektoren (2 bis 5  $\mu\text{m}$ ).
- *Impulsmessung:* Aus einer Ortsmessung im Magnetfeld erhält man den Impuls ( $B \approx 1 - 2\text{T}$ ).
- *Teilchenidentifizierung:* Aus der Energie  $E$  oder der Geschwindigkeit  $V$  und dem Impuls  $p$  erhält man die Masse  $m$  des Teilchens.
- *Photonennachweis:* Die Photonen werden in Kalorimetern nachgewiesen.
- *Neutronen:* Sie werden in hadronischen Kalorimetern nachgewiesen.



**Abb. 2.61:** 3-d Ansicht des Hades-Experiments



**Abb. 2.62:** Schematische Darstellung des Rich-Detektor (Teil des Hades Experiments)



**Abb. 2.63:** Beispiel eines modernen Detektors in fixed-target Geometrie: COMPASS

## 2.2 Nachweis von Strahlung

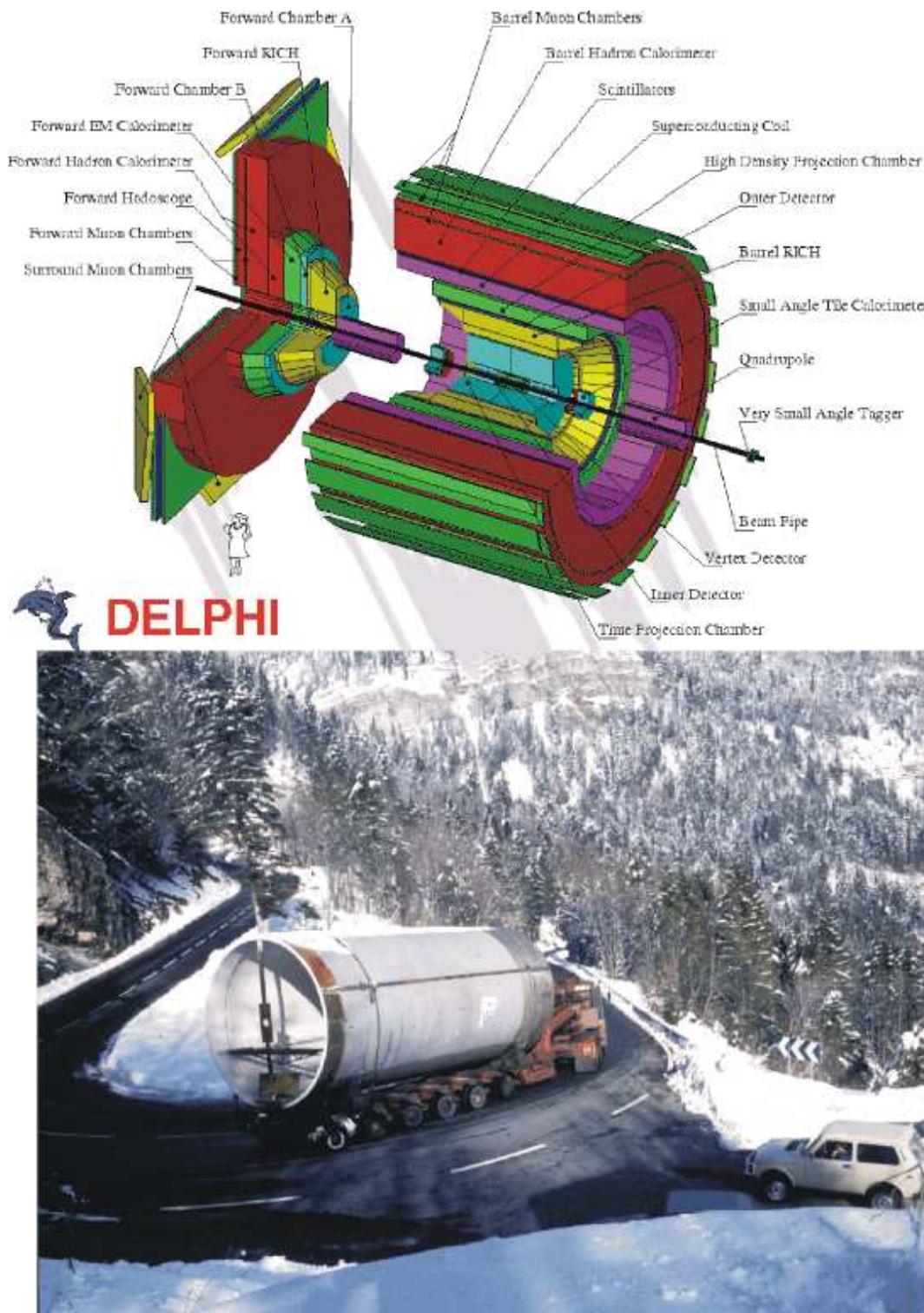
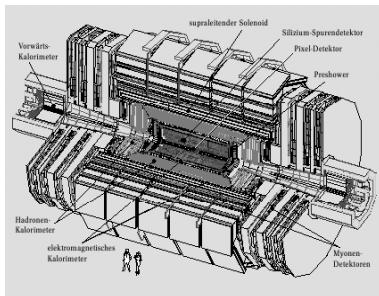
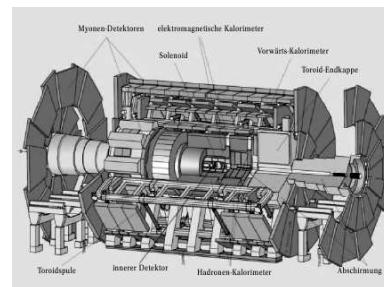


Abb. 2.64: Beispiel eines modernen Detektors für Collider: DELPHI



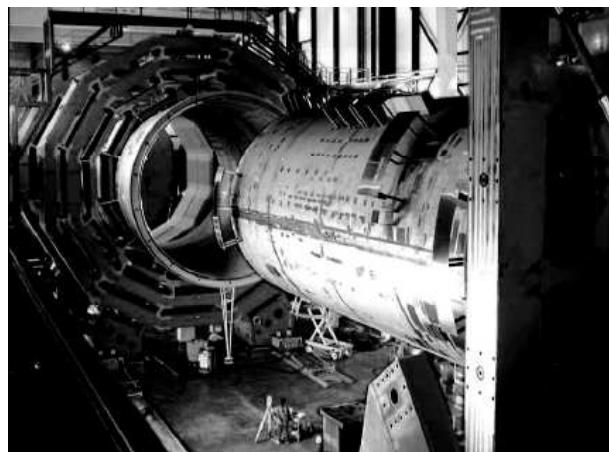
**Abb. 2.65:** Schematische Skizze des CMS- Detektors am LHC; Bild aus Physik Journal, Ausgabe 2,2006



**Abb. 2.66:** Schematische Skizze des Atlas- Detektors am LHC; Bild aus Physik Journal, Ausgabe 2,2006



**Abb. 2.67:** Der CMS- Detektor am CERN; Bild aus Physik Journal, Ausgabe 2,2006



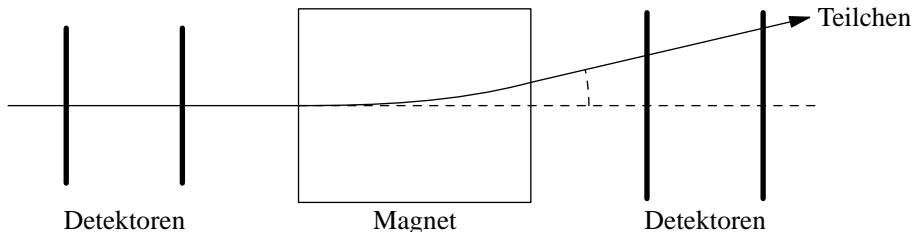
**Abb. 2.68:** Der CMS- Detektor am CERN

## Übungen zu Kapitel 2

### Übung 2.1: Energien von Teilchenbeschleunigern

- Das Super-Proton-Synchrotron am CERN bei Genf beschleunigt Protonen auf eine Energie von  $E = 450 \text{ GeV}$ . Wie groß ist die invariante Schwerpunktsenergie  $W = \sqrt{s}$  beim Stoß dieser Protonen auf ein ruhendes Wasserstofftarget?
- Am Fermilab bei Chicago werden im Tevatron Protonen und Antiprotonen auf jeweils  $E = 1000 \text{ GeV}$  beschleunigt und an Kreuzungspunkten zur Kollision gebracht. Wie groß ist die Schwerpunktsenergie in diesem Fall? Auf welche Energie müßte man einen Protonenstrahl bringen, um bei der Reaktion mit einem ruhenden Zielteilchen die gleiche Schwerpunktsenergie zu haben?
- Am PEP II am SLAC in Stanford werden Elektronen mit einer Energie von  $9.0 \text{ GeV}$  mit Positronen mit einer Energie von  $3.11 \text{ GeV}$  zur Kollision gebracht. Wie groß ist hierbei die Schwerpunktsenergie? Schlagen Sie nach, welcher Teilchenmasse diese Energie entspricht.

**Übung 2.2:** Der unten abgebildete Aufbau stellt ein einfaches Magnetspektrometer dar. Geladene Teilchen mit einem Impuls von  $6 \text{ GeV}/c$  durchlaufen ein Feldintegral von  $1 \text{ Tm}$ . Ortsempfindliche Detektoren zeichnen die Spur der Teilchen vor und hinter dem Magneten auf.



- Berechnen Sie den Ablenkwinkel, den diese Teilchen erfahren.
- Wie gut muß die Winkelauflösung der hinter dem Magneten aufgestellten Spurdetektoren mindestens sein, um den Impuls auf 1% genau zu bestimmen?
- Welche Mindestortsauflösung ergibt sich bei Detektoren, die im Abstand von 1 m zueinander und im Abstand von 2 m hinter dem Zentrum des Magneten angeordnet sind?

(Annahme: Der Strahl laufe parallel in den Magneten ein und sei dort beliebig genau bestimmt.)

**Übung 2.3:** In einem Szintillator werden ca.  $100 \text{ eV}$  Energieverlust eines durchlaufenden Teilchens benötigt, um ein Photon im sichtbaren Bereich zu erzeugen, wobei allerdings nur ca. 2% dieses Lichts im Photomultiplier nachgewiesen werden. In einer Halbleiterdiode werden ca.  $3.6 \text{ eV}$  benötigt, um ein Elektron-Loch-Paar zu erzeugen, in einem Gas erfordert eine Ionisation  $30 \text{ eV}$ .

- Wie groß ist die relative Auflösung  $\delta E/E$  bei einem Energieverlust von  $1 \text{ MeV}$ ?
- Wie dick müssen die jeweiligen Zähler für diesen Energieverlust sein?

**Übung 2.4:** Ein geladenes Teilchen, das sich durch ein Medium mit einer Geschwindigkeit bewegt, die größer ist als die Lichtgeschwindigkeit in diesem Medium, erzeugt Čerenkov-Strahlung. Die Strahlung wird auf einem Kegelmantel ausgesendet für dessen Öffnungswinkel die folgende Beziehung gilt:

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n}$$

wobei  $n$  der Brechungsindex des Mediums ist und  $\beta = \frac{v}{c}$  die Geschwindigkeit des Teilchens in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit.

- a) Berechnen Sie die Schwelle in  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  ab der Teilchen in den unten angegebenen Radiatormaterialien Čerenkov-Licht aussenden. Welchen Impulsen entspricht dies für geladene Pionen?

Medium	N <sub>2</sub>	C <sub>4</sub> F <sub>10</sub>	Aerogel	Quarz
Brechungsindex ( $n - 1$ )	$1.205 \times 10^{-6}$	$1.53 \times 10^{-3}$	0.05	0.458

- b) In einem Schwellenčerenkovzähler werden Teilchenarten unterschieden, indem der Brechungsindex über den Gasdruck so eingestellt wird, daß bei gegebenem Impuls eine Teilchensorte Licht erzeugt, die andere aber nicht. Bestimmen Sie die optimalen Brechungsindizes um bei 10 GeV/c Teilchenimpuls Pionen von Kaonen und Kaonen von Protonen trennen zu können.

Hinweis:  $m_{\pi^+} = 139.6 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_p = 938.27 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_{K^-} = 493.7 \text{ MeV}/c^2$

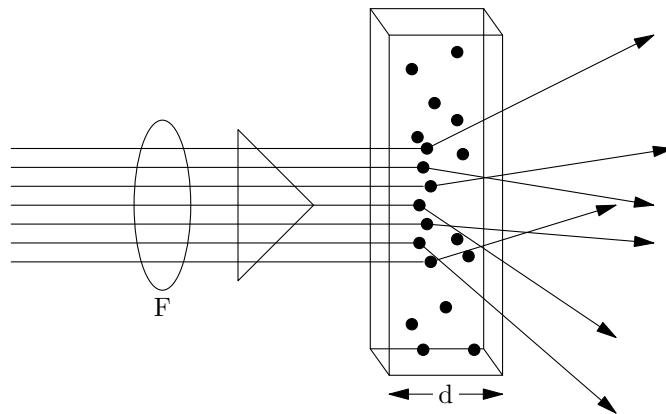
# Kapitel 3

## Streuprozesse

Streuexperimente sind *das* Mittel zur Untersuchung der Struktur von Atomkernen und anderen Teilchen. Deshalb widmen wir ein ganzes Kapitel der eingehenden Betrachtung von Streuprozessen. Dabei gehen wir zunächst auf die relativistische Kinematik ein. Dann betrachten wir Streuungen an verschiedenen Ladungsverteilungen, wobei wir erstmals dem Formfaktor begegnen werden. Abschließend werden wir als Beispiel die Bestimmung von Kernradien behandeln.

### 3.1 Wirkungsquerschnitt

Wir betrachten die Streuung von Teilchen der Sorte A an einem Target aus Teilchen der Sorte B:



**Abb. 3.1:** Streuung an einem Target der Dichte  $n_b$

Im Folgenden werden einige wichtige Grundbegriffe der Streutheorie erläutert:

**Fluss:**

$$J = n_a \cdot V_a = \frac{\dot{N}_a}{F} = \frac{\text{Zahl}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}$$

Hier ist  $n_a$  die Dichte und  $V_a$  die Geschwindigkeit der einfallenden Teilchen.

**Zahl der Target-Teilchen innerhalb des Strahlquerschnitts:**

$$N_b = n_b \cdot F \cdot d$$

Mit  $F$  Fläche des Strahlquerschnittes.

**Luminosität:**

$$L = J \cdot N_b$$

**Reaktionsrate:**

$$R = L \cdot \sigma_r$$

$\sigma_r$  : Wirkungsquerschnitt für die Reaktion  $r$

**Totaler Wirkungsquerschnitt:**

$$\sigma = \sum_r \sigma_r$$

**Differentieller Wirkungsquerschnitt:** Winkelverteilung einzelner produzierter oder gestreuer Teilchen

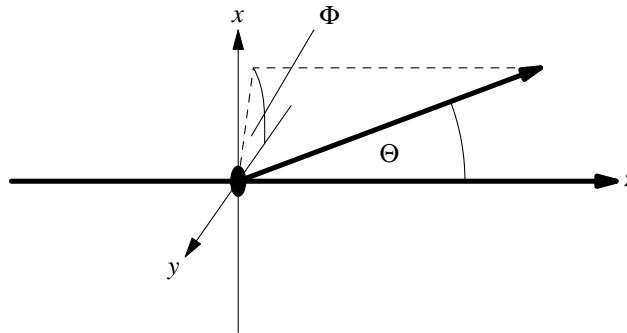


Abb. 3.2: Definition der Streuwinkel

$$dR(\theta, \phi) = L \cdot \frac{d\sigma_r(\theta, \phi)}{d\Omega} \cdot d\Omega$$

**Reaktionsquerschnitt:**

$$\sigma_r = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d \cos \theta \frac{d\sigma_r}{d\Omega}(\theta, \phi)$$

## 3.2 Kinematik

Man kann viel über Teilchen, Strukturen und Wechselwirkungen aus Streuprozessen lernen. Dabei wird zwischen elastischer und inelastischer Streuung unterschieden.

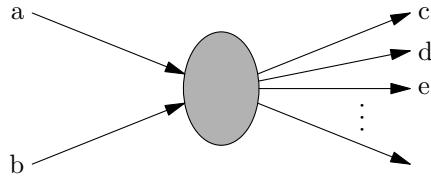


Abb. 3.3: Ein Streuprozess

**Klassifizierung:** Stoßprozesse lassen sich in 2 Klassen einteilen:

Reaktion	Klasse
$a + b \longrightarrow a + b$	elastische Streuung
alle anderen Prozesse	inelastische Streuung

### 3.2.1 Relativistische Kinematik von Streuprozessen

Die Teilchen  $a$  und  $b$  seien charakterisiert durch ihre Energien und Impulse, dargestellt im Vierervektor:

$$P_a^\mu \equiv P_a = \left( \frac{E_a}{c}, \vec{p}_a \right)$$

$$P_b^\mu \equiv P_b = \left( \frac{E_b}{c}, \vec{p}_b \right)$$

Dann ist das Skalarprodukt der Viererimpulse:

$$P \cdot P' = \frac{1}{c^2} E E' - \vec{p} \cdot \vec{p}'$$

$$P_a^2 = \frac{E_a^2}{c^2} - \vec{p}_a^2 = m_a^2 c^2$$

$$P_b^2 = \frac{E_b^2}{c^2} - \vec{p}_b^2 = m_b^2 c^2$$

Darin sind  $m_a$  und  $m_b$  die sog. *invariante Massen*, die lorentzinvariant, also in jedem Intertialsystem gleich sind. Sie entsprechen den Ruhemassen. Diese Invarianz gilt allgemein für das Quadrat jedes Viererimpulses, insbesondere auch für:

$$S = (P_a + P_b)^2 = \left( \frac{E_a}{c} + \frac{E_b}{c} \right)^2 - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2$$

Man definiert das **Schwerpunktsystem** (CM-System, *center of mass*-System) als das System, in dem der Gesamtdreierimpuls verschwindet:

$$\vec{p}_a = -\vec{p}_b, \quad \text{d. h.} \quad \vec{P} = \vec{p}_a + \vec{p}_b = 0$$

Im Schwerpunktsystem gilt:

$$\sqrt{s} = \frac{W}{c} = \frac{(E_a + E_b)}{c}$$

$\sqrt{s}$  ist die totale Energie im Schwerpunktsystem, sie ist diejenige Energie, welche bei der Reaktion von Teilchen zur Erzeugung neuer Teilchen zur Verfügung steht. Als Invariante bleibt diese Größe auch in allen anderen Bezugssystemen unverändert.

## Transformation vom Laborsystem in das Schwerpunktsystem

Da die Schwerpunktsenergie unter Transformation erhalten bleibt, können wir nun die Energien der Teilchen in verschiedenen Bezugssystem miteinander verknüpfen.

**Laborsystem:** das Teilchen  $a$  („Projektil“) mit der Energie  $E_a = \gamma m_a c^2$  und dem Impuls  $\vec{p}_a$  trifft auf das Teilchen  $b$  („Target“), welches sich in Ruhe befindet ( $\vec{p}_b = 0$ ) und die Energie  $E_b = m_b c^2$  besitzt.

**Schwerpunktsystem:** hier gilt:  $\vec{p}_a^* = -\vec{p}_b^* \equiv \vec{p}^*$

Laborsystem:

$$\begin{aligned} S &= \left( \frac{E_a}{c} + m_b c \right)^2 - \vec{p}_a^2 \\ &= \frac{E_a^2}{c^2} - \vec{p}_a^2 + m_b^2 c^2 + 2E_a m_b \\ &= (m_a^2 + m_b^2) c^2 + 2E_a m_b \end{aligned}$$

Schwerpunktsystem:

$$S = \frac{(E_a^* + E_b^*)^2}{c^2}$$

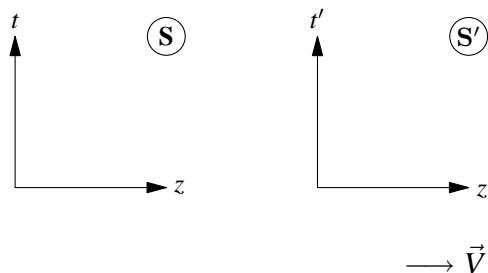
Da  $S$  in allen Systemen konstant ist, gilt folglich:

$$\sqrt{s} = \frac{E_a^*}{c} + \frac{E_b^*}{c} = \sqrt{(m_a^2 + m_b^2) c^2 + 2E_a m_b}$$

**Beispiel:** Beim Stoß zweier Teilchen mit gleicher Masse ( $m_a = m_b \equiv m$ ;  $E_a^* = E_b^* \equiv E^*$ ) gilt:

$$W = c\sqrt{s} = 2E^* = c\sqrt{2m(E_a + mc^2)}$$

### 3.2.2 Lorentz-Transformation



**Abb. 3.4:** Die Bezugssysteme S und S'

System S' bewege sich relativ zu System S mit der Geschwindigkeit  $V$  entlang der positiven  $z$ -Achse. Die  $z$ -Achse wird hierbei im allgemeinen in die Strahlachse gelegt. Dann transformiert sich der Orts-Zeit-Vierervektor folgendermaßen:

$$x' = x, \quad y' = y$$

$$\begin{pmatrix} z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ ct \end{pmatrix}$$

$$\beta = \frac{V}{c}, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

- **Transformation der Energien und Impulse:**

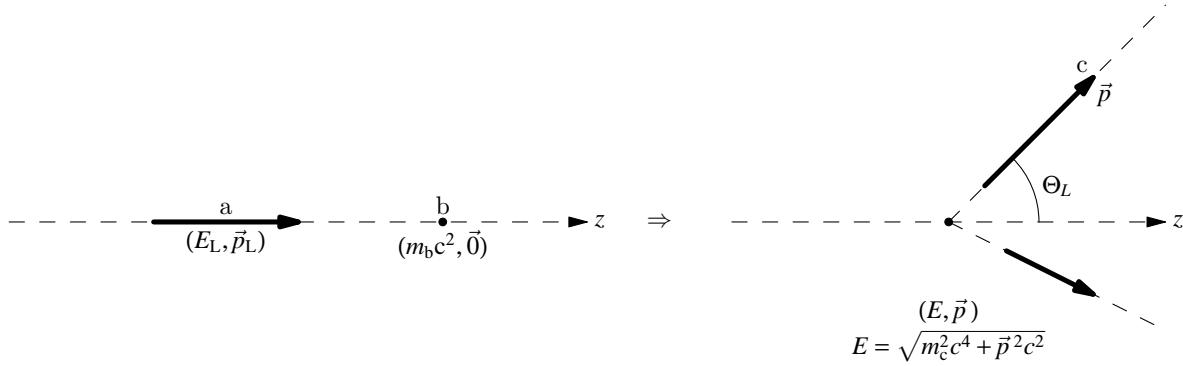
Analog werden die Viererimpulse transformiert:

$$P' = \left( \frac{E'}{c}, \vec{p}' \right), \quad P = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right); \quad p'_x = p_x, \quad p'_y = p_y$$

$$\begin{pmatrix} p'_z \\ \frac{E'}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_z \\ \frac{E}{c} \end{pmatrix}$$

- **Transformation vom Laborsystem (L) ins Schwerpunktsystem (CM):**

Stoß zweier Teilchen im Laborsystem:  $a + b \rightarrow c + \dots$

**Abb. 3.5:** Stoß zweier Teilchen im Laborsystem

Die Lorentztransformation vom L-System in das CM-System (Impulse  $\vec{p}^* = (0, 0, p^*)$ ) ergibt:

$$\begin{aligned} p_a^* &= \gamma(p_L - \frac{V}{c^2} E_L) & p_a^* + p_b^* &= 0 \\ p_b^* &= -m_b V \gamma & \\ \Rightarrow \beta &= \frac{p_L c}{E_L + m_b c^2}, & \gamma &= \frac{E_L + m_b c^2}{W} \\ W &= \sqrt{(m_a^2 + m_b^2) c^4 + 2 E_L m_b c^2} \end{aligned}$$

- Transformation des Streuwinkels:**

Der Streuwinkel des Teilchens  $c$  im Laborsystem sei  $\theta_L$ . Wir transformieren diesen Winkel nun in das Schwerpunktsystem. Der Impuls des Teilchens  $c$  ist im L-System bei geeigneter Wahl der Koordinatenachsen (siehe Abb. 3.5)

$$\vec{p} = (0, p \sin \theta_L, p \cos \theta_L).$$

Die Lorentztransformation in das CM-System sieht dann folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} p_x^* &= p_x = 0 \\ p_y^* &= p_y = p \sin \theta_L \\ p_z^* &= \gamma \left( p \cos \theta_L - \frac{V E}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Der CM-Impuls ist, ausgedrückt durch den CM-Winkel  $\theta_{CM}$ ,

$$\vec{p}^* = (0, p^* \sin \theta_{CM}, p^* \cos \theta_{CM})$$

Also:

$$\boxed{\tan \theta_{CM} = \frac{p_y^*}{p_z^*} = \frac{p \sin \theta_L}{\gamma(p \cos \theta_L - \frac{V E}{c^2})}}$$

### 3.3 Reaktionswahrscheinlichkeit und Fermis „Goldene Regel“

Quantenmechanisch wird ein Streuprozeß oder eine Reaktion durch den Hamiltonoperator  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  der Wechselwirkung und den (normierten) Wellenfunktionen des Anfangs- und des Endzustandes  $\psi_i$  bzw.  $\psi_f$  beschrieben.

Das Matrixelement (Streuamplitude) ist:

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle \psi_f | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle$$

- Die **Übergangswahrscheinlichkeit ( $i \rightarrow f$ ) pro Zeit** wird bestimmt durch *Fermis goldene Regel*

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rho(E_f)$$

(3.1)

mit der Dichte der Endzustände

$$\rho(E) = \frac{dn(E)}{dE}$$

Beispiel: Wir betrachten ein Teilchen, das in das Impulsintervall  $[p, p + dp]$  gestreut wird:

$$dn(p) = V_{\text{vol}} \frac{4\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3} dp \quad (V_{\text{vol}}: \text{Volumen})$$

Der Faktor  $\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}$  ergibt sich aus der Heisenberg'schen Unschärferelation in 3 Dimensionen:  $\Delta\vec{x} \cdot \Delta\vec{p} = h^3 = (2\pi\hbar)^3$ . Für die Dichte der Zustände folgt damit durch Transformation auf Kugelkoordinaten:  $dn(\vec{p}) = V_{\text{vol}} \cdot \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} = V_{\text{vol}} \cdot \underbrace{\frac{p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}}_{\text{Kugelkoord.}} d\Omega = V_{\text{vol}} \cdot \frac{4\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3} dp$

Mit der Beziehung zwischen Energie und Impuls

$$dE = V dp \quad (V: \text{Geschwindigkeit}),$$

die sowohl nicht-relativistisch als auch relativistisch gilt, erhalten wir:

$$\rho(E) = \frac{V_{\text{vol}}}{V} \frac{p^2}{2\pi^2\hbar^3}$$

- Der **Wirkungsquerschnitt für eine Reaktion  $a + b \rightarrow \dots$**  ist definitionsgemäß

$$\sigma_{i \rightarrow f} = \frac{\text{Reaktionsrate } R}{\text{Luminosität } L} = \frac{N_a N_b}{L} W_{i \rightarrow f}$$

Mit der goldenen Regel (Gl. 3.1) ergibt sich:

$$\sigma_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar V_a} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rho(E_f) V$$

Das Volumen  $V_{\text{vol}}$  in dieser Formel wird durch Einsetzen der normierten Wellenfunktionen aus dem Matrixelement gekürzt.

### 3.4 Beispiel: Elastische Streuung

Hier soll insbesondere die Potentialstreuung in Bornscher Näherung (Potential  $U$ ; Teilchenmasse  $m$ , nichtrelativistischer Impuls  $p = mV$ ) betrachtet werden.

Wenden wir nun unsere gewonnenen Kenntnisse auf den Fall der elastischen Streuung an. Gegeben seien normierte Wellenfunktionen und das Matrixelement:

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{V_{Vol}}} \exp\left(\frac{i\vec{p}_i \cdot \vec{r}}{\hbar}\right), \quad \psi_f = \frac{1}{\sqrt{V_{Vol}}} \exp\left(\frac{i\vec{p}_f \cdot \vec{r}}{\hbar}\right), \quad \int_{V_{Vol}} d^3r \psi^* \psi = 1$$

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{1}{V_{Vol}} \int d^3r \exp\left(\frac{-i\vec{p}_f \cdot \vec{r}}{\hbar}\right) U(\vec{r}) \exp\left(\frac{i\vec{p}_i \cdot \vec{r}}{\hbar}\right) = \frac{1}{V_{Vol}} \int d^3r e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} U(\vec{r}) \quad (3.2)$$

Wie man leicht sehen kann, handelt es sich bei dem letzten Integral in 3.2 um die Fouriertransformierte des Wechselwirkungspotentials in den Raum des übertragenen Impulses  $\Rightarrow$  vgl. optischer Abbildung des Potentialprofils des Targetteilchens.

Bei der Streuung wird folgender Impuls übertragen:  $\hbar\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$ ;  $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| = p$ . Die erste Beziehung wurde auch in Gl. (3.2) verwendet.

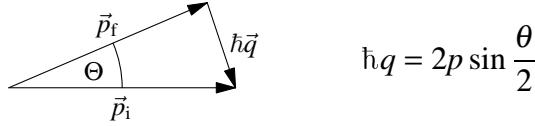


Abb. 3.6: Der bei der Streuung übertragene Impuls

Dabei wurde beachtet, dass die Winkelhalbierende senkrecht auf der Verbindungsachse der Impulse steht.

Die Dichte der Endzustände im Impulsintervall  $[p, p + dp]$  und Raumwinkelintervall  $d\Omega$  ist:

$$dn = \frac{V_{Vol} p^2}{(2\pi\hbar)^3} dp d\Omega = \frac{V_{Vol}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p^2}{V} dE d\Omega$$

$$\rho_f = \frac{dn}{dE} = \frac{V_{Vol} p^2 d\Omega}{V (2\pi\hbar)^3}$$

Der **differentielle Wirkungsquerschnitt** ist dann

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar V} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{V_{Vol}^2 p^2}{V (2\pi\hbar)^3} = \frac{m^2 V_{Vol}^2}{4\pi^2 \hbar^4} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (3.3)$$

bzw.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, E)|^2 = \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} \left| \int d^3r e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} U(\vec{r}) \right|^2$$

(3.4)

## 3.5 Beispiel: Streuung am Yukawa- und Coulombpotential

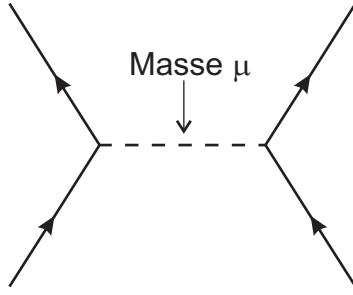
Mit der (Born-)Streuamplitude:

$$f(\theta, E) = -\frac{mV_{Vol}}{2\pi\hbar^2} \mathcal{M}_f \quad (3.5)$$

Hinweis: Die Verallgemeinerung für 2-Teilchen-Reaktionen ( $a + b \rightarrow c + d$ ) im Schwerpunktssystem mit relativistischer Kinematik (Geschwindigkeiten  $V/c = pc/E$ ; Relativimpulse  $\vec{p}_i$  bzw.  $\vec{p}_f$  im Anfangs- bzw. Endzustand) ergibt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V_{Vol}^2 p_f^2}{4\pi^2 \hbar^4 V_i V_f} |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

### 3.5 Beispiel: Streuung am Yukawa- und Coulombpotential



**Abb. 3.7:** Modell der Wechselwirkung durch Austausch eines Teilches mit Masse  $\mu$

Wir betrachten hier die Streuung eines nicht-relativistischen Teilchens (Masse  $m$ , kinetische Energie  $E_{kin} = p^2/2m$ ) in Bornscher Näherung am sog. Yukawa- bzw. abgeschirmten Coulomb-potential:

$$U(r) = \frac{\lambda}{r} e^{-\mu r}, \quad r = |\vec{r}|$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} U(r) &= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 U(r) \int_{-1}^{+1} d\cos\theta e^{iqr\cos\theta} = \\ &= \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty dr r \sin qr U(r) = \\ &= \frac{4\pi\lambda}{q} \int_0^\infty dr \sin qr e^{-\mu r} = \frac{4\pi\lambda}{q^2 + \mu^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Bei der Berechnung dieses Intergals wurde der sehr nützliche Trick verwendet, das Koordinatensystem so zu wählen, dass  $\vec{e}_z = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}$  gilt, das heißt die z- Achse in Richtung des ausgetauschten

Impulses zeigt. Als Modell für die Wechselwirkung der Teilchen  $a$  und  $b$  lässt sich das Modell des Austausches eines Teilchens der Masse  $\mu$  verwenden (siehe Abb. 3.7).

- Der **differentielle Wirkungsquerschnitt** ist gegeben durch:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} \left| \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} U(r) \right|^2$$

Mit Gl. (3.6) ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{4m^2}{\hbar^4} \left( \frac{\lambda}{q^2 + \mu^2} \right)^2 \\ \hbar^2 q^2 &= 4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Man kann also durch eine gemessene Winkelverteilung den Abschirmparameter des Coulomb-Potentials  $\mu$  berechnen.

- Bei Streuung eines nicht-relativistischen Punktteilchens mit Ladung  $Z_1 e$  am Coulombpotential einer Punktladung  $Z_2 e$  gilt:

$$U_c(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi r} \quad \left( \lambda = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi} \sim Z_1 Z_2 \alpha \hbar c, \quad \mu = 0, \quad \epsilon_0 := 1 \right)$$

Somit ergibt sich aus (3.7) die **Rutherford-Streuung**: ( $E = \frac{p^2}{2m}$ )

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{2m Z_1 Z_2 \alpha \hbar c}{\hbar^2 q^2} \right)^2 = \left( \frac{Z_1 Z_2 \alpha}{4E_{\text{kin}}} \right)^2 \frac{\hbar^2 c^2}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} \quad (3.8)$$

- Für hohe Energien ergibt sich dann der **Rutherford-Streuquerschnitt** mit **relativistischer Kinematik** ( $V \approx c$ ,  $E \approx |\vec{p}|c$ ):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z_1^2 Z_2^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{16E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (3.9)$$

## 3.6 Wechselwirkung durch Austausch von Teilchen

### 3.6.1 Vorbereitung: Coulomb-Wechselwirkung zweier statischen Ladungsverteilungen

Die potentielle Energie einer Ladungsverteilung  $\rho_1$  im Potential  $\phi$  einer anderen Ladungsverteilung  $\rho_2$  ist:

$$U = \int d^3x \rho_1(\vec{x}) \phi(\vec{x}) = \int d^3x \int d^3x' \rho_1(\vec{x}) G(\vec{x}, \vec{x}') \rho_2(\vec{x}')$$

Aus den Maxwell-Gleichungen ergibt sich für das Potential  $\phi$  die Poisson-Gleichung

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\rho_2(\vec{x}),$$

die sich mit Hilfe einer Green-Funktion

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

mit der Eigenschaft

$$\vec{\nabla}_x^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

lösen lässt. Man erhält damit für das Potential:

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho_2(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Beim Beispiel zweier Punktteilchen mit Ladungen  $\pm e$  und den Ladungsdichten

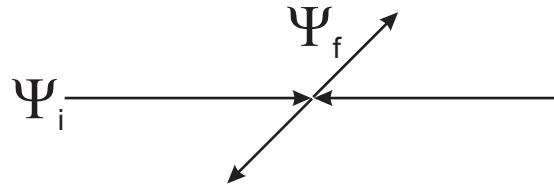
$$\rho_1 = +e\delta^3(\vec{x} - \vec{r}_1), \quad \rho_2 = -e\delta^3(\vec{x} - \vec{r}_2)$$

ist die Lösung besonders einfach. Die potentielle Energie ist dann nämlich:

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -e^2 G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{-e^2}{4\pi|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Das Matrixelement  $\mathcal{M}_{fi}$  für die Streuung von Teilchen 1 mit der Wellenfunktion  $\Psi_i$  an Teilchen 2 mit der Wellenfunktion  $\Psi_f$  ergibt sich aus der Gleichung

$$\mathcal{M}_{fi} = \int d^3r \Psi_f^*(\vec{r}) U(\vec{r}) \Psi_i(\vec{r}) \quad \text{mit } \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$



**Abb. 3.8:** Ein- und Auslaufende Wellenfunktionen  $\Psi_i$  und  $\Psi_f$

Als Ansatz für die (normierte) Wellenfunktionen eignet sich:

$$\Psi_{i,f}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V_{Vol}}} e^{i \frac{\vec{p}_{i,f} \cdot \vec{r}}{\hbar}}$$

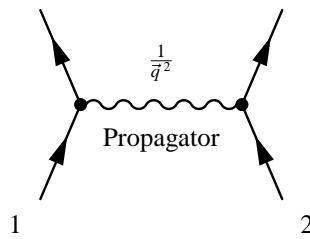
Dies entspricht dem Ansatz einer ebenen Welle. Somit folgt für die Matrixelemente:

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{1}{V_{Vol}} \int d^3r e^{-i\frac{\vec{p}_f \cdot \vec{r}}{\hbar}} \cdot U(\vec{r}) \cdot e^{i\frac{\vec{p}_i \cdot \vec{r}}{\hbar}} = \frac{1}{V_{Vol}} \int d^3r e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot U(\vec{r}) \quad \text{mit } \hbar \vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$$

Mit der Bornschen Näherung ergibt sich dann die Streuamplitude zu:

$$\mathcal{M}_{fi} \propto -\frac{e^2}{4\pi} \int d^3r \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}}{|\vec{r}|} = -\frac{e^2}{|\vec{q}|^2} \quad (\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Dies entspricht dem Ergebnis des Yukawa-Potentials mit  $\mu = 0$  und  $\lambda = 1$ . Feldtheoretisch lässt sich dies als **Austausch eines virtuellen Photons** interpretieren:



**Abb. 3.9:** Austausch eines Photons

Allgemein braucht bei virtuellen Teilchen aufgrund der Unschärferelation die Energie-Impuls-Beziehung  $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$  nicht erfüllt zu sein. Man kann deshalb annehmen, daß das ausgetauschte Photon  $E = \hbar\omega = 0$  hat und (trotzdem) den übertragenen Impuls  $\hbar\vec{q}$  transportiert. Der Term  $\frac{1}{|\vec{q}|^2}$  wird auch als *Propagator* bezeichnet.

### 3.6.1.1 Einführung in die Quantenfeldtheorie

In der QFT wird ein Vektor immer als Vierervektor mit der Frequenz  $\omega$  und dem Wellenvektor  $\vec{k}$  des Teilchens beschrieben:

$$q = \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

Die Potentialfunktion  $\Phi(\vec{x})$  ist nun nicht mehr nur eine Funktion des Orts, sondern auch der Zeit:

$$\text{Potential } \Phi(\vec{x}) \quad \longrightarrow \quad \text{Feld } \Phi(x) = \Phi(t, \vec{x})$$

Eine der wichtigsten Merkmale der QFT ist die *Feldquantisierung*:

$$\Phi(x) = \frac{1}{V} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [a_q e^{-iq \cdot x} + a_q^\dagger e^{+iq \cdot x}]$$

$a_q$  und  $a_q^\dagger$  sind hier als Operatoren, nämlich als Quantenerzeuger und -vernichter zu verstehen. Sie wirken auf dem Vakuumzustand  $|0\rangle$ , bzw. einen Feldzustand  $|\Phi_q\rangle$ . Man sieht hier, dass durch die Ersetzung der klassischen Amplituden durch quantenmechanische Operatoren die Feldamplitude automatische quantisiert wird  $\Rightarrow$  Quantenfeld.

Erzeugungsoperator für ein Feldquant mit dem Impuls  $\hbar q$      $a_q^\dagger |0\rangle = |\Phi_q\rangle$

Vernichtungsoperator für ein Feldquant mit dem Impuls  $\hbar q$      $a_q |\Phi_q\rangle = |0\rangle$

Die aus der Elektrodynamik bekannte Greensfunktion  $G(\vec{x}, \vec{x}')$  wird in der QFT durch einen Propagator  $G(x, x')$  (mit Vierervektoren) ersetzt. Der Operator  $\mathbb{T}$  heißt Zeitordnungsoperator und ist für die zeitlich richtige Anwendung der Operatoren notwendig.

$$G(\vec{x}, \vec{x}') \longrightarrow G(x, x')$$

$$G(x, x') = -i \langle 0 | \underbrace{\mathbb{T}}_{\text{Zeitordnung}} \underbrace{\text{Vernichtung am Zeitpkt. } x_1}_{\Phi(x_1)} \underbrace{\text{Erzeugung zum Zeitpkt. } x_2}_{\Phi^\dagger(x_2)} | 0 \rangle$$

### 3.6.2 Yukawa-Austauschwechselwirkung

Wir betrachten den Austausch eines Teilchens mit Masse  $m$  und Energie-Impuls-Beziehung  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ . Hinweis: Diese Wechselwirkung ist im allgemeinen spinabhängig, was wir jedoch hier systematisch ignorieren.

Die passende Feldgleichung ist die Klein-Gordon-Gleichung:

$$\left( \vec{\nabla}^2 - \mu^2 \right) \phi(\vec{x}) = -g \delta^3(\vec{x} - \vec{r}_1); \quad \mu = \frac{mc}{\hbar}$$

(statischer Fall ( $E = 0$ ) mit punktförmiger Quelle und Kopplungskonstante  $g$ )

Diese lösen wir wieder mit Hilfe einer Green-Funktion:

$$\left( \vec{\nabla}^2 - \mu^2 \right) G(\vec{x}, \vec{x}') = -\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'); \quad G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{e^{-\mu|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Das Potential ist dann

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = g^2 G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-\mu|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$$

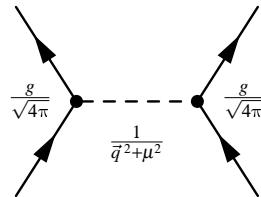
und die Streuamplitude folgt abermals aus der Bornschen Näherung:

$$\mathcal{M}_{fi} \propto -\frac{g^2}{4\pi} \int d^3 r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{e^{-\mu r}}{r} = \frac{-g^2}{\vec{q}^2 + \mu^2}$$

Ein negatives Vorzeichen des Matrixelements bedeutet dabei eine repulsive Wirkung des Potentials. Die Reichweite der Wechselwirkung ist gegeben durch:

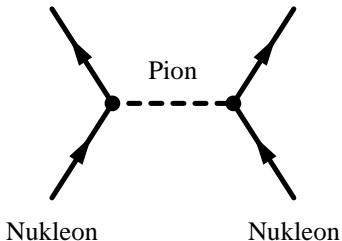
$$\Delta = \mu^{-1} = \frac{\hbar}{mc}$$

(Compton-Wellenlänge des Austauschteilchens)



Die Spinabhängigkeit, welche wir ja vernachlässigt haben, entscheidet hier letztlich über Attraktion oder Repulsion der Wechselwirkung.

**Beispiel 1:** Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung durch Austausch eines Pions

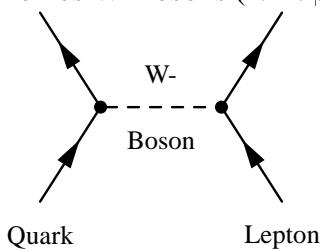


Reichweite:

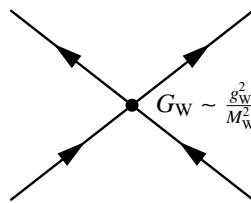
$$\Delta = \frac{\hbar}{m_\pi c} \approx 1.4 \text{ fm}$$

**Beispiel 2:** Schwache Wechselwirkung durch Austausch eines W-Bosons (z. B.  $\beta$ -Zerfall)

$$\mathcal{M}_{fi} \propto \frac{g_W^2}{\vec{q}^2 + M_W^2 \frac{c^2}{\hbar^2}}$$

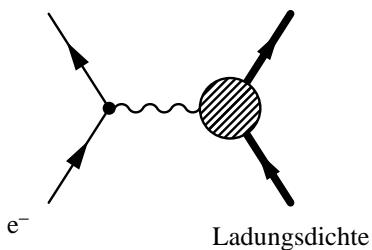


Für  $\hbar^2 |\vec{q}^2| \ll M_W^2 c^2$  geht dies über in die Fermi-Kopplung:



### 3.7 Elastische Elektronenstreuung an einer Ladungsverteilung

Wir betrachten im folgenden die Streuung von Elektronen an einer Ladungsverteilung (Abb. 3.10) und verwenden hier aus Gründen der Übersichtlichkeit wieder natürliche Einheiten.



Ladungsdichte  $e\rho(\vec{r})$  mit

$$\int d^3r \rho(\vec{r}) = Z$$

Abb. 3.10: Feynmangraph der Elektronenstreuung

Der Viererimpuls bleibt wie immer erhalten:

$$p + P = p' + P'; \quad p^2 = p'^2 = m_e^2, \quad P^2 = P'^2 = M^2$$

Daraus erhält man die Rückstoßenergie bei elastischer Streuung:

$$(p + P)^2 = s = (p' + P')^2$$

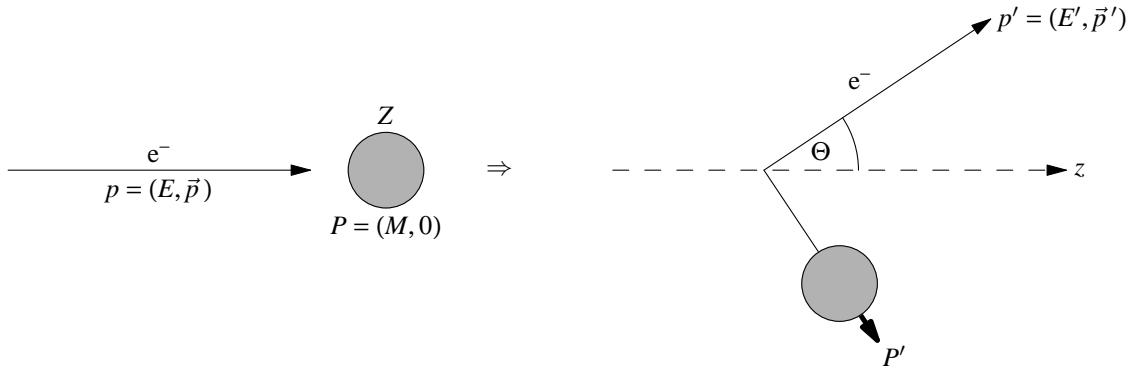
$$m_e^2 + M^2 + 2 p \cdot P = m_e^2 + M^2 + 2 p' \cdot P'$$

$$p \cdot P = p' \cdot P' = p' \cdot (p + P - p') = p' \cdot p + p' \cdot P - m_e^2$$

Für relativistische Elektronen mit  $E \approx |\vec{p}| \gg m_e$  gilt die Näherung:

$$(E - E')M = E'E - \vec{p}' \cdot \vec{p} \approx E'E(1 - \cos \theta)$$

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2}(1 - \cos \theta)}$$



**Abb. 3.11:** Elektronenstreuung im Laborsystem

### 3.7.1 Differentieller Wirkungsquerschnitt und Formfaktor

Für relativistische Elektronen (Abschn. 3.4 und 3.5) ergibt sich für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{E'}{2\pi\hbar^2 c^2} \right)^2 \left| \int d^3 r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} U(\vec{r}) \right|^2 \quad (3.10)$$

Für das Potential einer ausgedehnten Ladungsverteilung (mit  $\epsilon_0 = 1$ ) gilt:

$$U(\vec{r}) = -\frac{e^2}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Mit der Verwendung von

$$e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = -\frac{1}{\vec{q}^2} \vec{\nabla}^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}; \quad \vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

und zweimaliger partieller Integration lässt sich der letzte Teil von Gl. 3.10 fouriertransformieren. Hierbei muss als Randbedingung das Verschwinden der Ladungsverteilung im Unendlichen gefordert werden.

$$\begin{aligned} \int d^3 r \int d^3 r' e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= -\frac{1}{\vec{q}^2} \int d^3 r \int d^3 r' e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r}') \vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ &= -\frac{1}{\vec{q}^2} \int d^3 r \int d^3 r' \vec{\nabla}^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{1}{\vec{q}^2} \int d^3 r \int d^3 r' e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r}') \vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{4\pi}{\vec{q}^2} \int d^3 r' e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} \rho(\vec{r}') \end{aligned}$$

Der Formfaktor der Ladungsverteilung ist wie folgt definiert:

$$F(\vec{q}) = \frac{1}{Z} \int d^3 r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r})$$

Durch Vergleich mit dem differentiellen Wirkungsquerschnitt einer Punktladung erhält man:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Punkt}} |F(\vec{q})|^2$$

Wobei  $(d\sigma/d\Omega)_{\text{Punkt}}$  der Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einer Punktladung ist (ohne Spin, siehe Rutherfordstreuung in Abschnitt 3.5):

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Punkt}} = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

### 3.7.2 Eigenschaften von Formfaktoren

Alle Formfaktoren haben folgende Normierungseigenschaft:

$$F(\vec{q} = 0) = \frac{1}{Z} \int d^3 r \rho(\vec{r}) = 1$$

---

### 3.7 Elastische Elektronenstreuung an einer Ladungsverteilung

Für kugelsymmetrische Ladungsverteilungen  $\rho(\vec{r}) = Zf(r)$  (mit  $r = |\vec{r}|$  und  $q = |\vec{q}|$ ) gilt:

$$\begin{aligned} F(\vec{q}) &= \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} f(r) = 2\pi \int_0^\infty dr r^2 f(r) \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) e^{iqr \cos \theta} = \\ F(q^2) &= \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty dr r \sin(qr) f(r) \end{aligned}$$

Dabei soll die Schreibweise  $F(q^2)$  verdeutlichen, daß  $F$  nur vom Betrag von  $\vec{q}$  abhängt. Durch Entwicklung nach  $q$  erhält man daraus eine Potenzreihe in  $q^2$ :

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty dr r \left( qr - \frac{1}{6} q^3 r^3 + \dots \right) f(r) = \\ &= 1 - \frac{q^2}{6} \cdot 4\pi \int_0^\infty dr r^4 f(r) + \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

Aus (3.11) läßt sich der mittlere quadratische Radius

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{Z} \int d^3r r^2 \rho(\vec{r})$$

folgendermaßen berechnen:

$$\langle r^2 \rangle = -6 \frac{dF(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0}$$

(3.12)

Dieser Ausdruck ist experimentell gut bestimmbar, da Messungen bei kleinen  $q^2$  relativ einfach sind.

#### 3.7.3 Beispiele

Eine homogen geladene Kugel mit der Ladungsverteilung

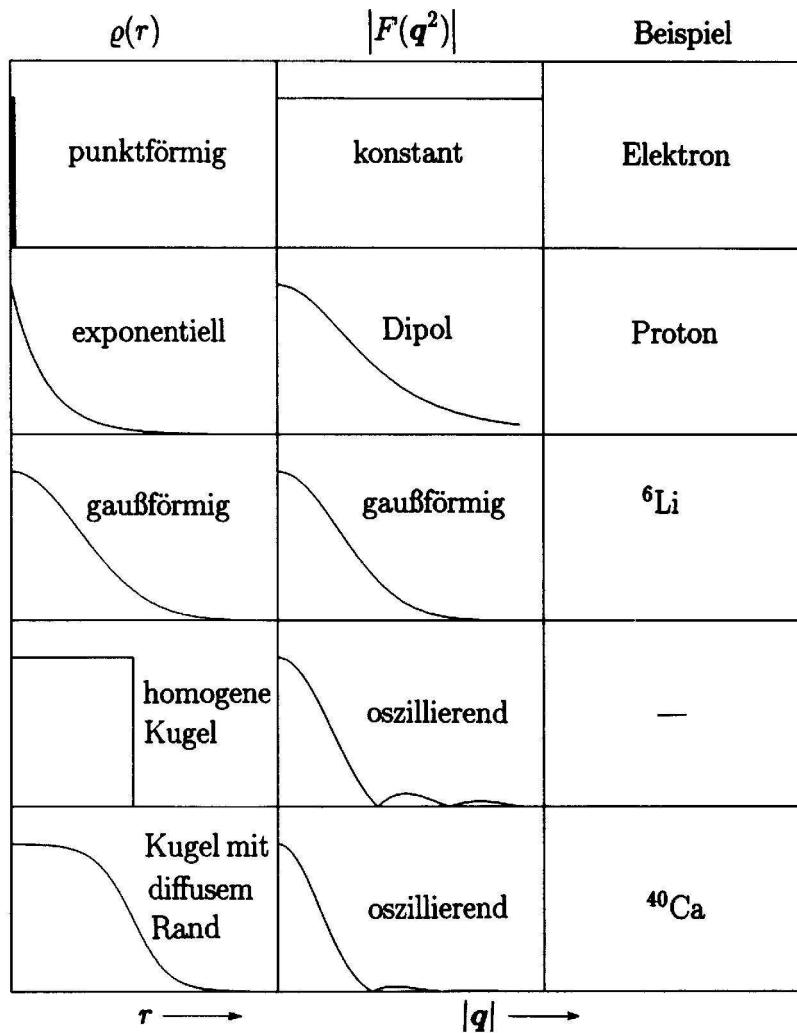
$$f(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

besitzt den Formfaktor

$$F(q) = \frac{3}{(qR)^3} (\sin(qR) - qR \cos(qR)); \quad \langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2 \quad (3.13)$$

Durch Messung des Wirkungsquerschnitts lassen sich theoretisch berechnete Formfaktoren überprüfen. Beispielsweise bedingt die erste Nullstelle des Formfaktors ein Beugungsminimum in  $d\sigma/d\Omega$  bei  $q \approx 4.5/R$ . Weitere Beispiele sind in Tabelle 3.1 angegeben.

Ladungsverteilung $f(r)$	Formfaktor $F(q^2)$
Punkt $\frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$	1 konstant
exponentiell $\frac{a^3}{8\pi} \cdot \exp(-ar)$	$\left(1 + \frac{q^2}{a^2}\right)^{-2}$ Dipol
Gauß $\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(\frac{-a^2 r^2}{2}\right)$	$\exp\left(\frac{-q^2}{2a^2}\right)$ Gauß
homogene Kugel $\begin{cases} C & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$	$3\alpha^{-3}(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$ (mit $\alpha = qR$ ) oszillierend



Tab. 3.1: Ladungsverteilungen und die zugehörigen Formfaktoren (aus [Po96])

### 3.8 Messung von Formfaktoren spinloser Teilchen

Bei Streuung von  $e^-$  an spinlosen Teilchen mit  $Z = 1$  ist der Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} |F(q^2)|^2 \quad \text{mit} \quad F(q^2) = \int d^3r \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$$

Dabei ist  $\vec{q}$  der Impulsübertrag (rationalisierte Einheiten). Es gilt:

$$\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}' = 2|\vec{p}^*| \sin \frac{\theta^*}{2}$$

$\vec{p}^*$  und  $\theta^*$  sind Impuls und Winkel im Schwerpunktsystem. Für kugelsymmetrische Ladungsverteilungen  $f(r)$  gilt:

$$F(\vec{q}) \rightarrow F(|\vec{q}|) = 4\pi \int f(r) \frac{\sin(qr)}{qr} r^2 dr \quad \text{Symbolisch: } F(|q|) = F(q^2)$$

Normierung:

$$1 = \int d^3r f(r) = \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} dr d\cos\theta d\phi f(r) \cdot r^2 = 4\pi \int_0^\infty f(r) r^2 dr$$

#### 3.8.1 Kerne: Gebundene Vielteilchensysteme aus Nukleonen

Interessant ist die Massenverteilung von Elektronen und Nukleonen. Ein Mensch besteht z.B. zu 70 kg aus Nukleonen und nur zu 35 g aus Elektronen.

Kernmassenzahl $A = \text{Protonenzahl } Z + \text{Neutronenzahl } N$
---

Nuklide mit gleicher ...	sind ...
Massenzahl $A$	Isobare
Ladungszahl $Z$	Isotope
Neutronenzahl $N$	Isotone

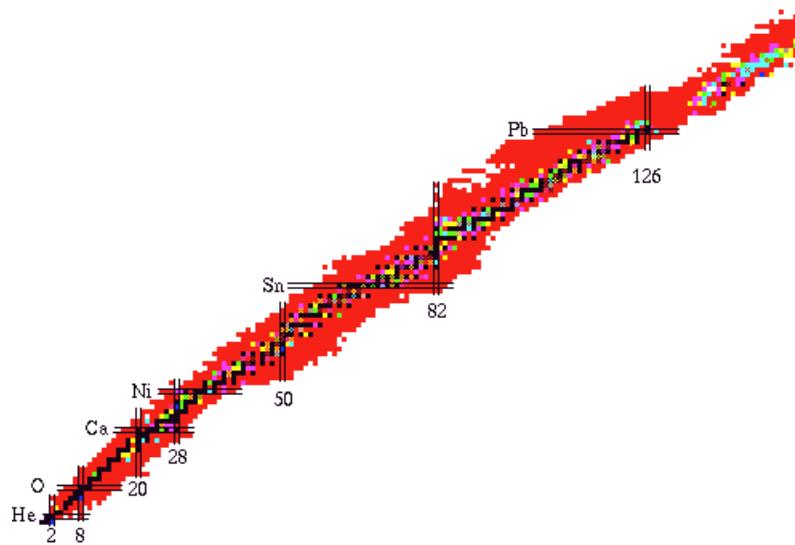
Die Bindungsenergie  $B$  eines Atomkerns ist

$$B = \left( Z \cdot (M_p + m_e) + N \cdot M_n - M(A, Z) \right) \cdot c^2$$

mit

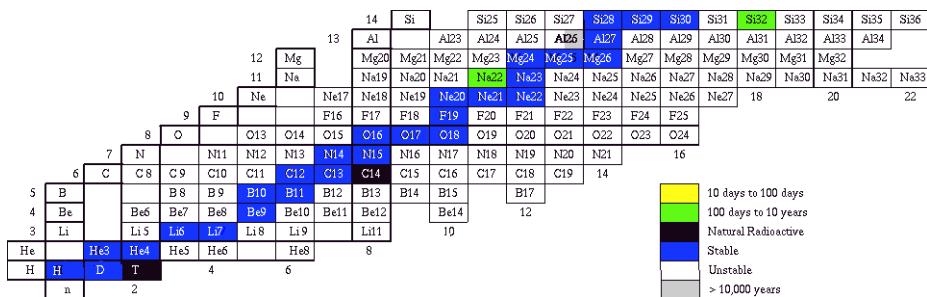
$$M_p = 938.7 \text{ MeV}/c^2 \quad M_n = 939.57 \text{ MeV}/c^2 \quad m_e = 0.51 \text{ MeV}/c^2$$

Die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon ist



siehe auch <http://www.dne.bnl.gov/CoN/index.html>

**Abb. 3.12:** Nuklidkarte (Übersicht)



**Abb. 3.13:** Anfang der Nuklidkarte

$$\frac{B}{A} \approx 8 \text{ MeV}$$

Nomenklatur:

$$\boxed{^A X} \quad X \text{ ist ein beliebiges Element}$$

z.B.  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^{12}\text{C}$ ,  ${}^{14}\text{C}$  ( ${}^{14}\text{C}$  ist radioaktiv mit einer Lebensdauer von ca. 5000 Jahren)

### 3.8.2 Messung von Formfaktoren

(von spinlosen Teilchen)

Betrachten wir z. B. Kerne. Zunächst interessiert uns, welche Energie wir brauchen, um sie zu untersuchen. Dabei nehmen wir an, daß wir noch Strukturen in der Größenordnung der Wellenlänge des ausgetauschten Photons auflösen können. Also:

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \lambda = \frac{\hbar}{q} = \frac{\hbar}{p} \quad (\hbar q \text{ ist Impuls des ausgetauschten Photons})$$

Aus der Optik kennen wir die Beziehung  $\lambda \leq r$ . Oft wird auch die Größe  $\tilde{q}$  eingeführt:

$$\tilde{q} = \frac{q}{\hbar} \quad [\text{fm}^{-1}]$$

Mit der obigen Beziehung gilt nun:  $\tilde{q} \geq r^{-1}$ . Atomkerne mit Massen von ca.  $1 - 200 \text{ GeV}/c^2$  haben Radien von  $r \approx 1 - 10 \text{ fm}$  ( $r \approx r_0 A^{\frac{1}{3}}$ ). Der nötige Impulsübertrag ist daher

$$\frac{c\hbar\tilde{q}}{c} = \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{c} \cdot \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \hbar\tilde{q} = q \geq 50 \text{ MeV}$$

Atomkerne mit Massen von ca.  $1 - 200 \text{ GeV}/c^2$  haben Radien von  $r \approx 1 - 10 \text{ fm}$  ( $r \approx r_0 A^{\frac{1}{3}}$ ). Der nötige Impulsübertrag ist daher

$$c\hbar q \geq \frac{\hbar c}{r} \approx 50 \text{ MeV}$$

Dabei gilt für  $q$ :

$$q = |\vec{p} - \vec{p}'| = \sqrt{p^2 + (p')^2 - 2pp' \cos \theta}$$

Für Elektronen bei so hohen Energien ist die Näherung  $pc \approx E$ , also eine Vernachlässigung der Ruhemasse, sinnvoll.

$$c\hbar\tilde{q} = cq = c\sqrt{p^2 + (p')^2 - 2pp' \cos \theta} \approx \sqrt{E^2 + (E')^2 - 2EE' \cos \theta} \quad (3.14)$$

Zusammen mit ( $M$  ist die Masse des Streuzentrums)

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2}(1 - \cos \theta)} \quad (3.15)$$

lassen sich aus (3.14) die möglichen  $E$  und  $\theta$  bestimmen.  $E'$  ist minimal bei  $\theta = 180^\circ$  ( $\cos \theta = -1$ ). Wählt man nun z. B.  $E \approx 800$  MeV und  $A \approx 12$  ( $E \ll Mc^2$ ), erhält man

$$E'_{\min} = \frac{800 \text{ MeV}}{1 + \frac{0.8}{11.2} \cdot 2} \approx 700 \text{ MeV}$$

Mit (3.14) ergibt sich also  $q \approx 1500$  MeV/c. Analog erhält man  $q \approx 1060$  MeV/c für  $\theta = 90^\circ$ ,  $q \approx 400$  MeV/c für  $\theta = 30^\circ$  und  $q \approx 130$  MeV/c für  $\theta = 10^\circ$ . Die gewählte Energie ist also gut zum Abtasten von Kernstrukturen geeignet.

### 3.8.3 Kernradien

Die Ladungsverteilung  $f(r)$  lässt sich theoretisch als Fouriertransformation aus dem Formfaktor  $F(q^2)$  berechnen:

$$f(r) \underset{\substack{\text{Fourierücktrafo} \\ \text{ges.Ladung Kern}}}{=} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty F(q^2) e^{-i\vec{q}\vec{r}} d^3q = \underbrace{\frac{1}{Z}}_{\text{ges.Ladung Kern}} \rho(r) \quad (3.16)$$

Leider ist  $q^2 = (\vec{p} - \vec{p}')^2$  nicht lorenzinvariant. Nur der Vierervektor  $Q^2 = (P - P')^2 = (E - E')^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2$  ist invariant. Für einen kleinen Rückstoß mit  $E \sim E'$  gilt, auch im Laborsystem:

$$q^2 = -Q^2$$

Ebenfalls erfordert die Berechnung von Gl. (3.16) die Kenntnis von  $F(q^2)$  über einen großen Bereich von  $q^2$ , da von 0 bis Unendlich integriert werden muss. Bei großen  $q^2$  ist das sehr schwierig, da der Wirkungsquerschnitt sehr klein wird ( $d\sigma/d\Omega \propto 1/q^4$ ). In der Praxis decken deshalb die Experimente keinen ausreichend großen  $q^2$ -Bereich ab, so daß man Modellannahmen über  $f(r)$  macht, daraus  $F(q^2)$  berechnet und mit den Meßwerten vergleicht (Tab. 3.1 auf Seite 94).

Stellt man sich den Kern als homogene Kugel vor, ergibt sich (Abschn. 3.7.3) ein Formfaktor von

$$F(q^2) = \frac{3}{(\tilde{q}R)^3} (\sin \tilde{q}R - \tilde{q}R \cos \tilde{q}R) \quad (3.13')$$

Es stellt sich nun die Aufgabe, aus einer Messung von  $F(q^2)$  den Kernradius  $R$  zu bestimmen. Im Falle der homogenen Kugel treten Beugungsminima und -maxima auf. Das erste Minimum befindet sich bei:

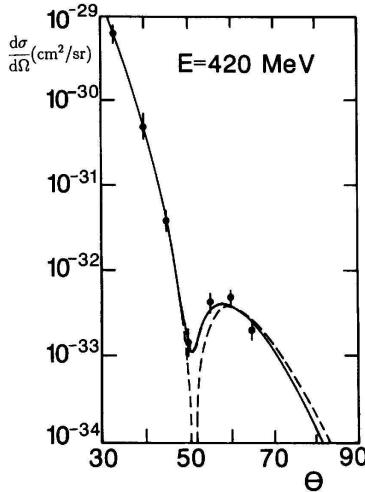


Abb. 3.14: Wirkungsquerschnitt bei Streuung an  $^{12}\text{C}$  (aus [Po96])

$$\tilde{q}R = 4.5$$

Bei  $^{40}\text{Ca}$  (siehe Abb. 3.15) ist beispielsweise im 1. Minimum  $\tilde{q} \approx 1/\text{fm}$ , also  $R \approx 4.5 \text{ fm}$ . Aus Kernmodellen erhält man die Formel

$$R = R_0 \cdot A^{\frac{1}{3}} = 1.21 \text{ fm} \cdot A^{\frac{1}{3}} \quad (3.17)$$

Daraus ergibt sich für  $^{40}\text{Ca}$  ein Radius von  $R \approx 4.1 \text{ fm}$ . Analog dazu ist in Abb. 3.14 der Formfaktor von  $^{12}\text{C}$  abgebildet. Das Minimum liegt dort bei  $q = 2p^* \sin(\theta^*/2) = 355 \text{ MeV}$ .

Führt man die Messungen an verschiedenen Kernen durch, findet man die erwartete Verschiebung des Minimums mit der Kerngröße (Abb. 3.15).

*Merke:* ein kleiner Radius (also im Ortsraum scharf definiert) zieht eine Verbreiterung von  $F(q^2)$  (im Impulsraum schlecht definiert) nach sich.

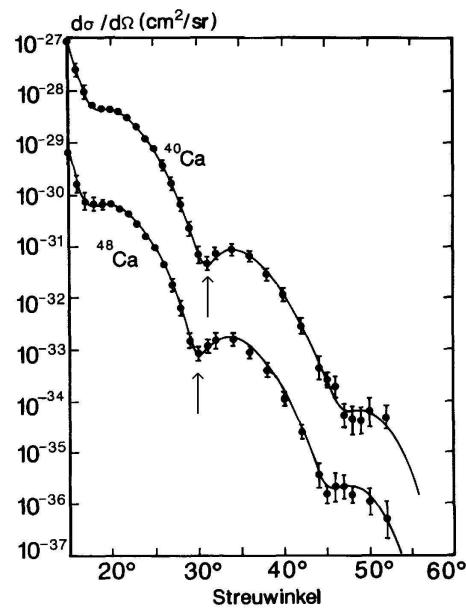
$$\Delta x \propto \frac{1}{\Delta p}$$

Genauere Messungen von  $\rho(r) = Z \cdot f(r)$  zeigen, daß Kerne *keine* Kugeln mit scharf definierter Oberfläche sind. Typisch für die Ladungsverteilung  $\rho(r)$  ist dagegen ein Plateau (Kugel) mit einem sich daran anschließenden Gaußschen Abfall (diffuser Rand). Diese Verteilung wird durch die sog. *Fermiverteilung mit zwei Parametern*

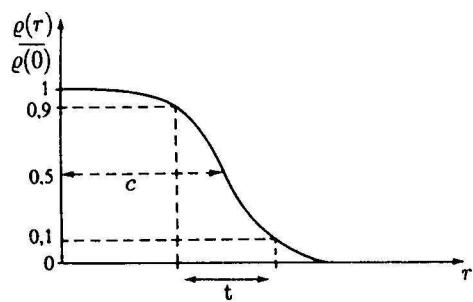
$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1}{1 + e^{(r-c)/a}}$$

gut beschrieben. Dabei sind (s. Abb. 3.16):

- $\rho_0$ : Normierungskonstante
- $c$ : Radius der halben Dichte
- $a$ : beschreibt Oberflächendichte



**Abb. 3.15:** Streuung an verschiedenen Ca-Isotopen. Zur besseren Darstellung wurden die Wirkungsquerschnitte jeweils mit 10 bzw.  $10^{-1}$  multipliziert. Die durchgezogenen Linien entsprechen Ladungsverteilungen, die man an die Daten angepaßt hat (aus [Po96]).



**Abb. 3.16:** Fermiverteilung mit zwei Parametern (aus [Po96])

- Die sog. *Hautdicke*  $t$  ist die Dicke des Bereichs, in dem die Ladungsdichte von 90% auf 10% des Maximalwerts absinkt:

$$t = r \Big|_{\frac{\rho}{\rho_0} = 0.1} - r \Big|_{\frac{\rho}{\rho_0} = 0.9} = 2a \ln 9$$

Für alle schweren Kerne ist sie ungefähr gleich groß und beträgt

$$t \approx 2.4 \text{ fm}$$

Abweichungen hiervon gibt es bei leichten Kernen, insbesondere bei  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^6\text{Li}$ ,  ${}^7\text{Li}$  und  ${}^9\text{Be}$  – das ist bereits ein Hinweis auf eine spezielle Struktur dieser Kerne. Die Ladungsverteilungen einiger Kerne sind in Abb. 3.17 dargestellt.

- Die Halbwertsdicke  $c$  hängt folgendermaßen von der Nukleonenzahl ab:

$$c = 1.07 \text{ fm} \cdot A^{\frac{1}{3}}$$

- Aus der Ladungsdichte  $\rho(r)$  können wir außerdem den mittleren quadratischen Ladungsradius errechnen:

$$\langle r_{\text{em}}^2 \rangle = 4\pi \int_0^\infty r^2 \rho(r) r^2 dr$$

Für mittlere und schwere Kerne erhalten wir:

$$\langle r_{\text{em}}^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad \text{mit} \quad r_0 = 0.94 \text{ fm}$$

Daraus können wir folgern, daß

1. das Kernvolumen  $V = \frac{4\pi R^3}{3} \propto A$  (Anzahl der Nukleonen) ist.
2. die Kerndichte näherungsweise konstant ist, d. h. Kerne verhalten sich in dieser Beziehung wie Festkörper oder Flüssigkeiten.

Unser Ergebnis können wir nun nochmals mit dem Modell der „scharf begrenzten Kugel“ mit Dichte  $\rho = 1/V_{\text{Vol}}$  und Radius  $R$  vergleichen. Aus

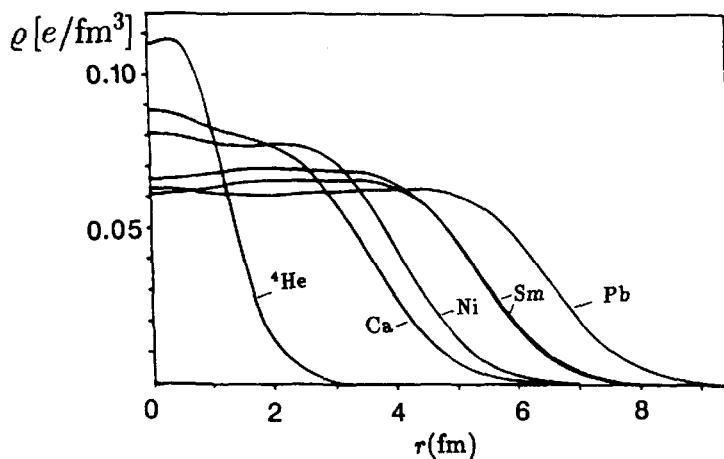
$$\langle r_{\text{em}}^2 \rangle = 4\pi \int_0^R \underbrace{\frac{3}{4\pi R^3}}_{\text{Normierung}} r^2 \cdot r^2 dr = \frac{3}{5} R^2$$

ergibt sich dann die bekannte Radiusformel

$$R = R_0 \cdot A^{1/3} \quad \text{mit} \quad R_0 = 1.21 \text{ fm} \quad (3.17')$$

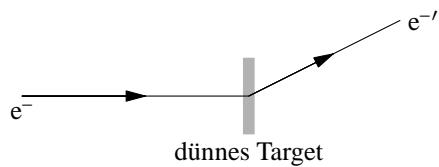
Insgesamt haben die Messungen einen großen Einfluß auf die Modelle zur Beschreibung von Kernen, insbesondere die Abweichungen bei den leichten Kernen.

Ein Studium des Formfaktors hin zu hohen Wellenzahlen ( $q \approx 3 \dots 4 \text{ fm}^{-1}$ ) erlaubt außerdem den Zugang zu kurzwelligeren Fourierkomponenten, d. h. die Strukturen können mit höherer Genauigkeit bestimmt werden. Eine Analyse, freilich nicht mehr auf Basis der Fermiverteilung, zeigt dann Änderungen in der Ladungsverteilung für verschiedene Kerne.



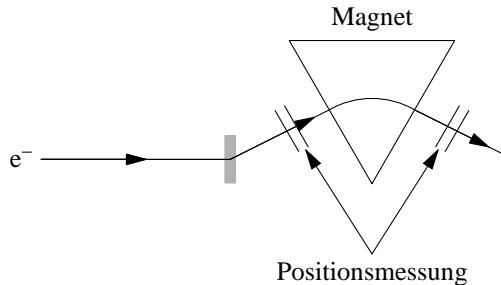
**Abb. 3.17:** Ladungsverteilung verschiedener Kerne (aus [Po96])

### 3.8.4 Magnetspektrometer



**Abb. 3.18:** Streuung von  $e^-$  an einem dünnen Target

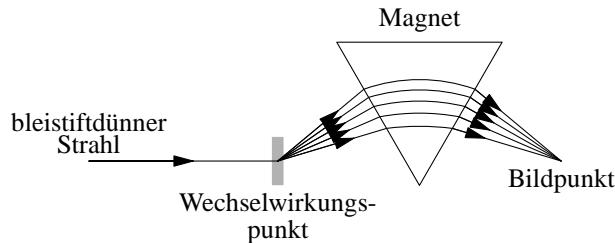
Um bei der in Abb. 3.18 abgebildeten Elektronenstreuung  $q^2$  zu bestimmen, muß man den Streuwinkel  $\vartheta$ , sowie die Impulse von  $e^-$  und  $e^-'$  messen. Bei guten Elektronenbeschleunigern ist  $\Delta p/p$  klein, so daß Richtung und Impuls des einfallenden Teilchens mit einer kleinen Ungenauigkeit bestimmt sind. Für die Messung der gleichen Größen beim gestreuten Elektron benutzt man Magnetspektrometer, deren Prinzip in Abb. 3.19 dargestellt ist. Dabei wird zuerst mit einem Paar von Positionsmeßung der Streuwinkel bestimmt. Danach durchläuft das Teilchen einen Ablenk magneten und ein weiteres Detektorpaar zur erneuten Positionsbestimmung. Aus dem Ablenk winkel, bewirkt durch das Magnetfeld, kann dann der Impuls errechnet werden.



**Abb. 3.19:** Prinzip eines Magnetspektrometers

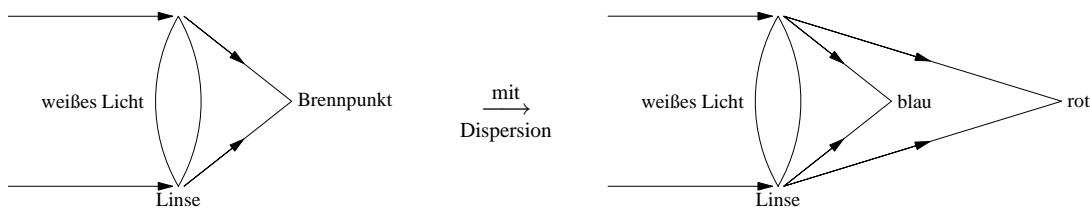
Allerdings wird die Impulsmessung dadurch verschlechtert, daß das Elektron seine Energie verändert, bevor es in den Magneten gelangt. Dabei spielt sowohl Bremsstrahlung als auch der gewöhnliche elektronische Energieverlust  $dE/dx$  beim Durchlaufen jeglicher Materie eine Rolle.

Eine mögliche Abhilfe ist, in einem abbildenden Spektrometer (Abb. 3.20) zuerst den Impuls und dann den Winkel zu messen. Dabei werden alle Teilchen in einem bestimmten Winkelbereich ( $\theta_1 < \theta < \theta_2$ ), welche denselben Impuls  $p_0$  haben, auf einen Punkt in der Bildebene abgebildet (Abb. 3.22). Vor dem Durchgang durch die magnetische Optik wird die Energie der Strahlteilchen durch keinen Detektor verändert.



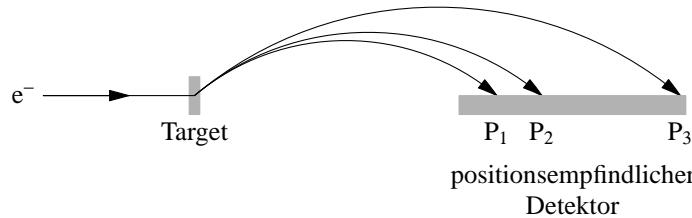
**Abb. 3.20:** Prinzip eines abbildenden Magnetspektrometers

Das Prinzip ist das gleiche wie in der Optik. Durch die Dispersion liegen die Brennpunkte für verschiedene Wellenlängen an unterschiedlichen Positionen.



**Abb. 3.21:** Dispersion in der Optik

In unserem Fall baut man also eine Magnetoptik mit maximaler Dispersion. Man nutzt eine Kombination aus Sammellinse und Prisma (Quadrupol und Dipol), wodurch für einen Objekt-punkt verschiedene Wellenlängen auf verschiedene Bildpunkte abgebildet werden.



**Abb. 3.22:** Impulsdetektion mit Hilfe einer magnetischen Optik

Durch Bestimmung des Auftreffpunktes und Kenntnis des Objektpunktes (aus Strahllage und Targetposition) erhält man schließlich den Impuls  $p$ . Dabei ist  $\Delta p/p$  proportional zur Größe des Bildpunktes, d. h. man benötigt einen guten Positionsnauchweis und damit eine gute Optik. Zum Ortsnachweis verwendet man meistens Driftkammern (Nobelpreis<sup>1</sup> 1992 für G. Charpak, siehe auch Abschnitt I).

Durch eine geschickte Anordnung der Magnete ist die Abbildung in der anderen Projektion, d. h. senkrecht zur Ablenkrichtung des Magnetspektrometers, *nicht* vom Impuls  $p$  abhängig, sondern nur vom Emissions- bzw. Streuwinkel  $\theta$ , der so auch bestimmt werden kann.

Ein Beispiel für ein Magnetspektrometer ist das MAMI-B-Experiment in Mainz (A1-Kollaboration, Abb. 3.23), ein 3-Achsen Spektrometer für Koinzidenzmessungen. Die Winkelbestimmung erfolgt durch die Position des Detektors, der sich auf einem Kreis um das Target bewegen lässt. Hier wird eine  $p$ -Auflösung von  $\Delta p/p \approx 2 \cdot 10^{-4}$  bei einer Impulsakzeptanz von 20% je Messung erreicht. Die Strahlfleckgröße ist  $500 \mu\text{m}$  bei einer Impulsunschärfe des Strahls von  $\Delta p/p \approx 10^{-4}$ .

### 3.8.5 Messungen an instabilen Teilchen

Ein  $\pi$ -Meson, welches z.B. durch Beschießen eines Targets mit Protonen entsteht, hat eine Lebensdauer von nur  $\tau_\pi \approx 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ . Aufgrund dieser kurzen Lebensdauer sind Targets aus Pionen nicht möglich. Bewegt sich das Pion schnell, so wird die Lebensdauer im Laborsystem jedoch durch die Zeitdilatation verlängert:

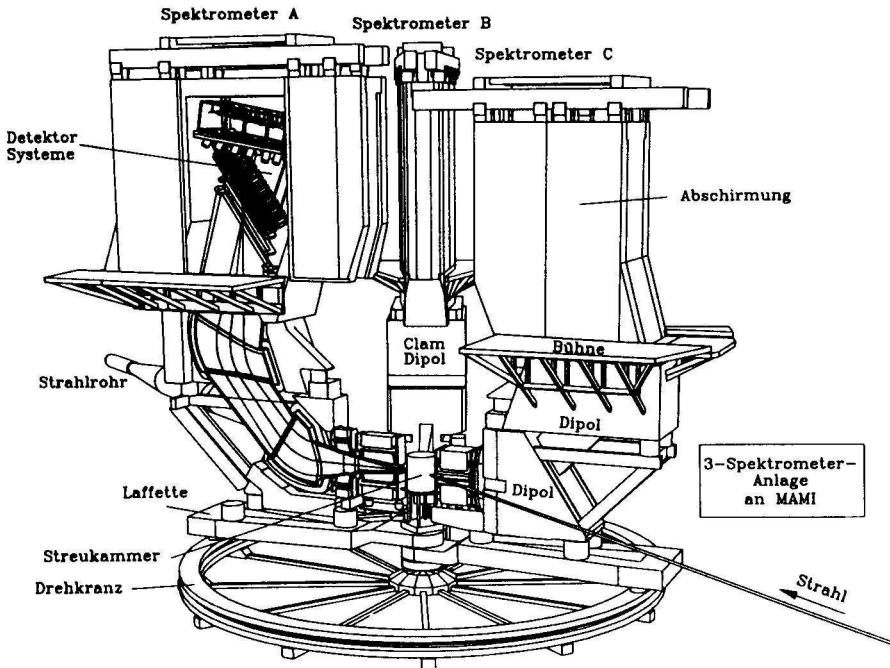
$$\tau_{\text{Labor}} = \tau_\pi \cdot \gamma$$

Für  $E_\pi \approx 100 \text{ GeV}$  ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \beta &\approx 1 \\ \gamma &\approx \frac{E}{mc^2} = \frac{100}{0.139} = 719.4 \\ \Rightarrow \tau_{\text{Labor}} &= 1870.5 \cdot 10^{-8} \text{ s} = 1.87 \cdot 10^{-5} \text{ s} \end{aligned}$$

Mit dieser Lebensdauer kann es

<sup>1</sup><http://www.nobel.se/laureates/physics-1992.html>



**Abb. 3.23:** Aufbau von MAMI–B (aus [Po96])

$$\lambda = \tau \cdot c = 5.61 \text{ km}$$

weit fliegen, d. h.  $1/e$  der Pionen überleben diese Strecke. Das bedeutet, daß man ohne große Probleme Strahlen aus nicht stabilen Teilchen erzeugen kann.

Elektromagnetische Untersuchungen von solchen Strahlen laufen ähnlich ab, wie bei Streuung von Neutronen an Kernen. Beispielsweise streut man Pionen an Wasserstoff. Im Endzustand beobachtet man dabei Pion und Elektron, um den Prozeß  $\pi e \rightarrow \pi e$  zu selektieren.

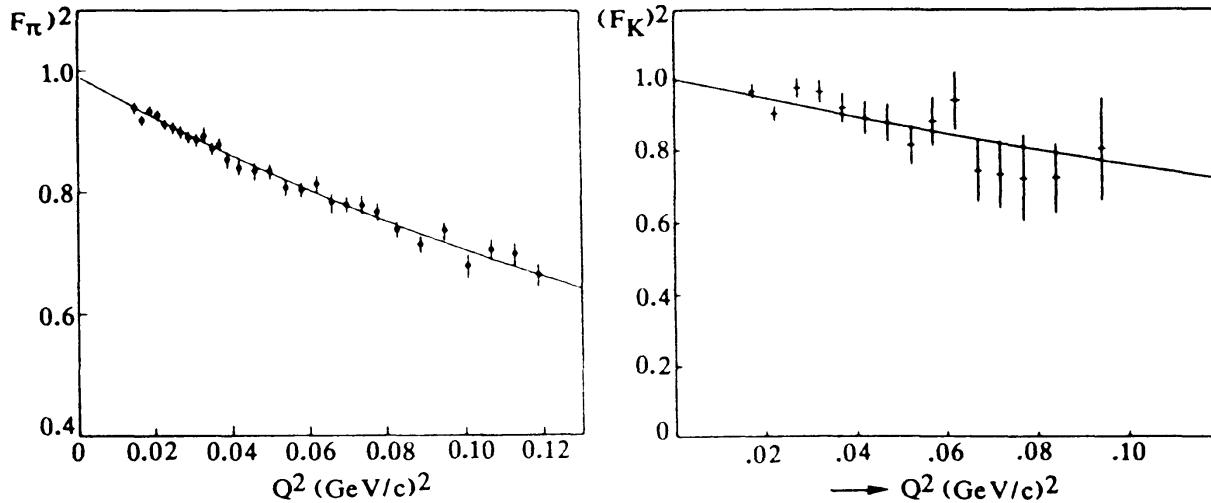
$$-q^2 = Q^2 = 2m_e c^2 E_e$$

Aus der Messung des Wirkungsquerschnittes  $d\sigma/d\Omega$  lässt sich der Formfaktor bestimmen. Aus der Steigung des Formfaktors bei  $q^2 = 0$  ist der mittlere quadratische Radius  $\langle r^2 \rangle$  bestimmbar.

$$\langle r^2 \rangle = -6 \left. \frac{dF(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0}$$

Da die Masse des Pions wesentlich größer ist als die Masse des Elektrons ( $m_\pi c^2 \gg m_e c^2$ ) ist der Impulsübertrag nur sehr klein.

$$Q^2_{\max} = 4m_e^2 c^2 \frac{E_{\pi,K}^2}{M_{\pi,K}^2 c^4 + 2m_e c^2 E_{\pi,K}}$$

**Abb. 3.24:** Formfaktoren von Pionen und Kaonen (aus [Po96])für  $E_{\text{Strahl}} = 300 \text{ GeV}$ :

	M [MeV]	$Q^2_{\max} [\text{GeV}]$
$\pi^\pm$	139	0.318
$K^\pm$	493	0.166
$\Sigma^-$	1196	0.064

Somit ergibt ich für den mittleren Radius  $\langle r^2 \rangle$ :

$$\begin{aligned}\langle r^2 \rangle_\pi &= 0,49 \pm 0,02 \text{ fm}^2 \Rightarrow \sqrt{\langle r^2 \rangle_\pi} = 0,67 \pm 0,02 \text{ fm} \\ \langle r^2 \rangle_K &= 0,34 \pm 0,05 \text{ fm}^2 \Rightarrow \sqrt{\langle r^2 \rangle_K} = 0,58 \pm 0,04 \text{ fm}\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich zwei Schlussfolgerungen:

1. Beim Pion ist die Ladung anders verteilt als beim Kaon.
2. Pionen und Kaonen sind keine Elementarteilchen, da ihr Radius größer Null ist.

## Übungen zu Kapitel 3

**Übung 3.1:** Bei der Streuung zweier Teilchen endlicher Masse muß beachtet werden, daß das Projektilteilchen A Impuls auf das Targetteilchen B überträgt. Die Berücksichtigung dieses Effekts wird sehr einfach, wenn man in das Schwerpunktsystem mit  $\vec{P}_A = -\vec{P}_B$  übergeht.

- a) Berechnen Sie mit Hilfe der Energie- und Impulserhaltung nichtrelativistisch Impuls und kinetische Energie  $T$  der Teilchen im Schwerpunktsystem für die elastische Streuung ( $T_A + T_B = T'_A + T'_B$ ), wenn die Energie im Laborsystem gegeben ist. Wie groß ist die kinetische Energie des Schwerpunktes, die beim Stoß der Teilchen nicht dem Reaktionsmechanismus zur Verfügung steht?

- b) Bei Streuvorgängen der Form  $A + B \rightarrow C + D$  werden oft die lorentzinvarianten Größen  $s$ ,  $t$  und  $u$ , die sogenannten Mandelstam-Variablen, zur Beschreibung des Streuprozesses verwendet, die als folgende 4-Impuls-Quadrate definiert sind:

$$s = (p_A + p_B)^2 \quad t = (p_A - p_C)^2 \quad u = (p_A - p_D)^2$$

Berechnen Sie  $s$ ,  $t$  und  $u$  im Labor- und im Schwerpunktssystem. Zeigen Sie, daß nur zwei der drei Mandelstam-Variablen unabhängig sind, da

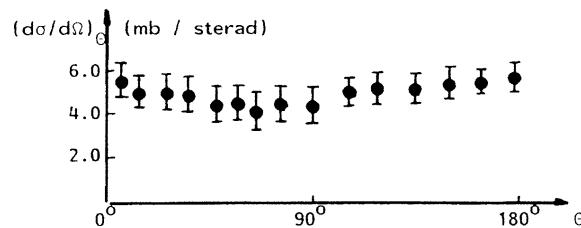
$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2$$

- c) Der Wirkungsquerschnitt wird teilweise in der lorentzinvarianten Form  $d\sigma/dt$  angegeben. Wie hängt er mit dem Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktssystem  $d^2\sigma/d\Omega$  zusammen?

**Übung 3.2: Streuwinkel im Laborsystem und im CM-System.** Zirkular polarisierte Photonen aus einem YAG-Laser ( $\lambda = 532$  nm) treffen in einem Speicherring frontal auf Elektronen mit einem Impuls von  $E_e = 27$  GeV/c.

- a) Welche Energie hat das einlaufende Photon im Ruhesystem des Elektrons?
- b) Betrachten Sie die Streuung des Photons um  $90^\circ$  und  $180^\circ$  im Ruhesystem des Elektrons. Welche Energie hat das gestreute Photon in beiden Fällen? Wie groß sind die Energien und Streuwinkel im Laborsystem?
- c) Wie gut muß die Ortsauflösung eines Kalorimeters in 50m Abstand sein, damit diese Photonen räumlich getrennt werden können?

**Übung 3.3:** Der gemessene differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung langsamer Neutronen am Proton hat im Schwerpunktssystem folgende Form:



- a) Zeigen Sie, daß das Wechselwirkungspotential  $V(r)$  zwischen Neutron und Proton nicht vom Coulomb-Typ  $V(r) = \text{const.}/r$  sein kann.
- b) Man schätzt die Reichweite  $R$  der Neutron-Proton-Wechselwirkung ab, unter der Annahme, daß diese durch ein Potential

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{für } r < R \\ 0 & \text{für } r \geq R \end{cases} \quad \text{Streuung an einer „harten Kugel“}$$

dargestellt wird. Kommentieren Sie das Ergebnis.

- c) Die gemessenen differentiellen Wirkungsquerschnitte für Proton-Neutron- und Neutron-Neutron-Streuung sind nahezu identisch. Welche Folgerungen ziehen Sie daraus?
- d) Überlegen Sie sich qualitativ, wie sich der differentielle Wirkungsquerschnitt bei höheren Energien verändert.

Hinweis: Einheiten des Wirkungsquerschnitts:  $1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$ ,  $1 \text{ mbarn} = 10^{-27} \text{ cm}^2 = 0.1 \text{ fm}^2$

# Kapitel 4

## Elektromagnetische Wechselwirkung

Die elektromagnetische Wechselwirkung ist die Wechselwirkung, die in den Größenbereichen des täglichen Lebens dominiert. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit ihrer Theorie, der Quantenelektrodynamik. Diese ist die derzeit am genauesten überprüfte physikalische Theorie, wie die im letzten Abschnitt vorgestellten Präzisionstests belegen.

### 4.1 Relativistische Wellengleichungen

Zunächst betrachten wir zwei relativistische Verallgemeinerungen der Schrödinger-Gleichung, die ja in der relativistischen Behandlung von Problemen ihre Gültigkeit verliert.

#### 4.1.1 Klein-Gordon-Gleichung für Spin-0-Teilchen

Wir erinnern uns zunächst, wie man zur zeitabhängigen Schrödingergleichung,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \mathcal{H}_S \psi = -\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}^2 \psi, \quad (4.1)$$

gelangt. Und zwar geht man von der nichtrelativistischen Energie-Impuls-Beziehung aus und ersetzt in dieser Energie und Impuls durch Differentialoperatoren:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\vec{p}^2}{2M} \\ E &\longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \longrightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \quad \text{„Quantisierungsvorschrift“} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho = \psi^* \psi = |\psi|^2 > 0$$

und der Wahrscheinlichkeitsstrom

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2M} \left( \psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right)$$

erfüllen die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Die Schrödinger-Gleichung (4.1) ist offensichtlich nicht lorentzinvariant, da sie erster Ordnung in der Zeit, aber zweiter Ordnung in den Raumdimensionen ist.

Um zu einer relativistischen Wellengleichung zu kommen, gehen wir von den Zeit-Orts-Vierervektoren aus:

$$x^\mu = (ct, \vec{r}) \quad x_\mu = (ct, -\vec{r})$$

Wir definieren entsprechend die ko- und kontravarianten Ableitungen, die auch Vierergradient genannt werden

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right),$$

und ordnen dem Viererimpuls analog zur Schrödinger-Gleichung folgenden Differentialoperator zu:

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) \longrightarrow i\hbar \partial^\mu \quad (4.2)$$

Die relativistische Energie-Impulsbeziehung  $p_\mu p^\mu = m^2 c^2$  führt dann auf die *Klein-Gordon-Gleichung*:

$$\left( \hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2 c^2 \right) \phi(x) = 0$$

Mit dem d'Alembert-Operator  $\square = \partial_\mu \partial^\mu = 1/c^2 \partial^2/\partial t^2 - \vec{\nabla}^2$  erhält man die kompakte Form:

$$\left( \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \phi(x) = 0 \quad (4.3)$$

Es ergibt sich ein erhaltenes 4-Strom:

$$j^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad \text{mit} \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (4.4)$$

Dabei ist jedoch ein Problem, daß die 0-Komponente,

$$\rho = j^0 = i(\phi^* \dot{\phi} - \phi \dot{\phi}^*),$$

zwar reell aber nicht positiv definit ist. Folglich ist eine Interpretation von  $\rho$  als Wahrscheinlichkeitsdichte nicht möglich!

Gelöst wird die Klein-Gordon-Gleichung durch ebene Wellen:

$$\phi(x) = N e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar}$$

$$p_\mu p^\mu = m^2 c^2, \quad E = p^0 c = \pm \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$$

Etwas überraschend ist zunächst die Existenz von Lösungen mit negativer Energie, was auch einer der Gründe für Dirac war, nach einer alternativen Wellengleichung zu suchen. Für die Energie ergibt sich  $E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$  und somit für den Hamiltonoperator die Gleichung  $H = \sqrt{-\hbar^2 \vec{\nabla}^2 c^2 + m^2 c^4}$ . Probleme macht hierbei die Wurzel der Ableitung, da diese mathematisch nicht definiert ist.

In der Quantenfeldtheorie interpretiert man die Lösungen als Feldoperatoren. (Wir verwenden ab jetzt die rationalisierten Einheiten mit  $c = \hbar = 1$ , siehe auch den Hinweis am Anfang von Kapitel 4.2.)

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p_0} \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ a(\vec{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + b^\dagger(\vec{p}) e^{+ip_\mu x^\mu} \end{array} \right) \quad \text{mit} \quad p_0 = +\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$$

↑  
Teilchen-vermischer  
Anteilchen-erzeuger

Die Klein-Gordon-Gleichung und -Felder beschreiben freie Spin-0-Teilchen. Für halbzahligen Spin verwendet man die Dirac-Gleichung.

### 4.1.2 Dirac-Gleichung für Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen

Dirac versuchte 1928 eine „Schrödinger-Gleichung“ zu finden, bei der der Hamiltonoperator linear in den Ortsableitungen ist, um die negativen Energien bei der Lösung zu eliminieren (was ihm letztendlich misslang). Er wählte als Ansatz für den Hamiltonoperator eine Linearkombination des Impulses und der Masse.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \mathcal{H}_D \psi \quad \text{mit} \quad \mathcal{H}_D = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m = -i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta M$$

$$\Rightarrow i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i \left( \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \psi + \beta m \psi$$

Da die Teilchen die relativistische Energie-Impuls-Beziehung erfüllen, soll sich durch zweimaliges Anwenden genau diese ergeben:

$$\underbrace{-\frac{\partial^2}{\partial t^2}}_{\cong E^2} \psi = \mathcal{H}_D \mathcal{H}_D \psi = \underbrace{\left( -(\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla})^2 - iM(\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \beta + \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) + \beta^2 M^2 \right)}_{\stackrel{!}{=} -\vec{\nabla}^2 + M^2 \cong \vec{p}^2 + M^2} \psi$$

Daraus ergibt sich, daß die  $\alpha_i$  und  $\beta$  keine Zahlen sein können, sondern Matrizen sein müssen, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned}\beta^2 &= \mathbb{1}_{4 \times 4}, \quad \alpha_i^2 = \mathbb{1}_{4 \times 4}, \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0, \\ \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 2\delta_{ij}\end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß die Matrizen mindestens die Größe  $4 \times 4$  haben müssen. Eine mögliche Lösung ist:

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbb{1}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Pauli-Spin-Matrizen

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_i \sigma_j &= \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k\end{aligned}$$

Die Wellenfunktion  $\psi(x)$  besitzt 4 Komponenten. Man bezeichnet diese Struktur als Dirac-Spinor, nicht als Vierervektor!

In der Praxis ist es sinnvoll, statt den  $\alpha_i$  und  $\beta$  die Dirac'schen  $\gamma$ -Matrizen einzuführen.

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_0 = \gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \\ \vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) \\ \gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu = (\gamma^0, -\vec{\gamma}) \end{array}$$

Diese erfüllen folgende fundamentale Antikommutatorbeziehung:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_+ = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (4.5)$$

Damit ergibt sich die Lorentz-kovariante Form der Dirac-Gleichung:

$$\beta \cdot \left[ i \frac{\partial}{\partial t} \psi - (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta M) \psi \right]$$

$$(i \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} \psi + i \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - M) \psi = 0$$

$$\boxed{(i \gamma^\mu \partial_\mu - M \cdot \mathbb{1}_{4 \times 4}) \psi = 0} \quad (4.6)$$

oder

$$(i \not{\partial} - M) \psi = 0 \quad (4.7)$$

wobei hier die Feynman Notation  $\not{a} = \gamma_\mu a^\mu$  benutzt wurde.

Außerdem führt man den adjungierten Dirac-Spinor ein:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*) \quad (4.8)$$

Der Viererstrom ist erhalten und erfüllt die Kontinuitätsgleichung:

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (4.9)$$

Teilchendichte:  $\rho = j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi > 0$

Stromdichte:  $\vec{j} = \bar{\psi} \vec{\gamma} \psi = \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi$

$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  transformiert sich unter Lorentztransformationen wie ein 4-Vektor.  $\bar{\psi} \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi$  ist ein Lorentzskalar, d.h. eine lorentzinvariante Größe.

Zu den Lösungen der freien Dirac-Gleichung (4.6) gelangt man mit dem Ansatz ebener Wellen:

$$\psi(x) = u(p) e^{-ip_\mu x^\mu}$$

Die Dirac-Gleichung wird damit zu

$$(\gamma_\mu p^\mu - M) u(p) = 0 \quad u(p) = \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{"große" Komponente} \\ \leftarrow \text{"kleine" Komponente} \end{array}$$

In Matrixschreibweise erhält man

$$\begin{pmatrix} E - M & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E - M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus sich

$$\varphi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M} \chi$$

ergibt. Mit  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2$  kommt man auf die, wegen  $E^2 - M^2 = \vec{p}^2$  stets erfüllte, Gleichung

$$\left( E - M - \frac{\vec{p}^2}{E + M} \right) \chi = 0$$

$\chi$  ist ein 2-komponentiger (Pauli-)Spinor. Bezüglich der 3-Richtung entsprechen dabei die folgenden  $\chi$  den verschiedenen Spinzuständen:

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{spin-up}, \quad \chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{spin-down} \quad \text{bzgl. } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eine gute Quantenzahl des freien Dirac-Teilchens ist die sog. Helizität, d.h. die Projektion des Spins auf die Impulsrichtung.

$$h = \vec{\Sigma} \cdot \hat{p} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix}, \quad h^2 = \mathbb{1}_{4 \times 4}$$

wobei  $\Sigma$  der wie folgt definierte Spin- Operator ist:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von  $h$  sind  $\pm 1$  und es gilt:

$$[\mathcal{H}_D, h] = [\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta M, \vec{\Sigma} \cdot \hat{p}] = 0$$

Für massive Dirac-Teilchen ist die Helizität allerdings *keine Lorentz-Invariante*, da sich immer ein Bezugssystem finden lässt, in dem sich die Impulsrichtung umkehrt.

Mit der Normierung  $\bar{u}(p, s)u(p, s') = 2M\delta_{ss'}$  ergibt sich für  $u$  (in abkürzender Schreibweise,  $u$  ist natürlich ein Vierer-Spinor):

$$u(p, s) = \sqrt{E + M} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+M} \end{pmatrix} \chi_s \quad E = +\sqrt{M^2 + \vec{p}^2}$$

Die Antiteilchen-Lösungen (mit formal negativer Energie) sind:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= v(p, s)e^{ip_\mu x^\mu} & p_0 &= +\sqrt{M^2 + \vec{p}^2} = E & i\frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow -p_0 \\ v(p, s) &= \sqrt{E + M} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+M} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_s \end{aligned}$$

Das heißt:

$$u(p, s) \Leftrightarrow \text{Teilchen} \quad v(p, s) \Leftrightarrow \text{Antiteilchen}$$

In der Quantenfeldtheorie wird  $\psi(x)$  wie das Klein-Gordon-Feld als Feldoperator interpretiert:

$$\psi(x) = \sum_{s=\pm 1/2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p_0} \left( \begin{array}{c} b(p, s)u(p, s)e^{-ip_\mu x^\mu} \\ \uparrow \text{vernichtet Elektron} \\ d^\dagger(p, s)v(p, s)e^{+ip_\mu x^\mu} \\ \uparrow \text{erzeugt Positron} \end{array} \right)$$

$\bar{\psi}(x)$  macht genau das Umgekehrte.

### 4.1.3 Lösungen der freien Dirac-Gleichung

(a) Teilchen in Ruhe ( $\vec{p} = 0$  und  $E = \pm m$ )<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} E > 0 \quad \Psi_+^> &= \mathcal{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \quad \Psi_-^> = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \\ E < 0 \quad \Psi_+^< &= \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+imt} \quad \Psi_-^< = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+imt} \end{aligned}$$

Diese Lösungen sind Eigenfunktionen des Spinoperators  $\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$  zum Eigenwert  $1/2$ .

$$\Sigma_3 \Psi_{\pm} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \Psi_{\pm} = \pm \Psi_{\pm} \left\{ \begin{array}{l} \uparrow \text{"spin up"} (s_z = +1/2) \\ \downarrow \text{"spin down"} (s_z = -1/2) \end{array} \right\} \text{Spin } 1/2$$

Dirac-Teilchen tragen den Spin  $1/2$ , sie sind also Fermionen.

(b) Teilchen mit beliebigen Impuls  $\vec{p}$

$$\Psi^> = \mathcal{N} u_S(p) e^{-ip \cdot x} \quad \Psi^< = \mathcal{N} v_{-S}(p) e^{ip \cdot x}$$

mit den Dirac-Spinoren ( $E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ ):

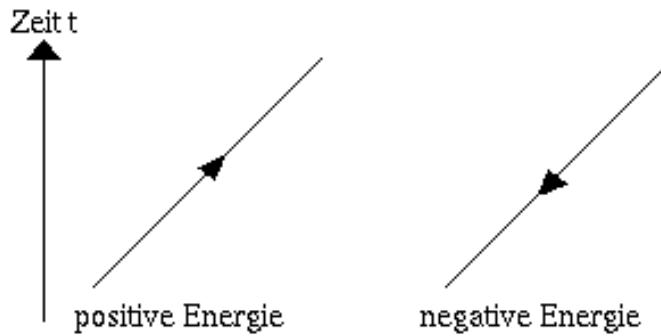
$$u_S(p) = \begin{pmatrix} \chi_S \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \chi_S \end{pmatrix} \quad v_{-S}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \chi_S \\ \chi_S \end{pmatrix} \quad \text{mit } \chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hierbei steht  $u_S(p)$  für das Teilchen und  $v_S(p)$  beschreibt das Antiteilchen. Mathematisch laufen Teilchen vorwärts in der Zeit, wogegen Antiteilchen rückwärts laufen. Diese Konvention ist vor allem beim Erstellen und Auswerten von Feynman-Diagrammen zu beachten.

$$(\gamma_\mu p^\mu - m) u_S(p) = 0 \quad (\gamma_\mu p^\mu + m) v_S(p) = 0$$

---

<sup>1</sup> $\mathcal{N}$  ist die Normierungskonstante



**Abb. 4.1:** Feynmandiagramm für Teilchen und Antiteilchen

## 4.2 Grundzüge der QED

*Hinweis: Im folgenden benutzen wir sog. „rationalisierte“ bzw. „natürliche“ Einheiten mit  $c = 1$  und  $\hbar = 1$ . Diese sind sehr nützlich und weit verbreitet (im Gegensatz zu den „Weißkopfeinheiten“ mit zusätzlich  $\pi = 1$  oder gar den „supernatürlichen“ Einheiten mit außerdem  $2 = 1$ ).*

Das elektromagnetische Feld wird beschrieben durch das skalare Potential  $\phi(\vec{r}, t)$  und das Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ . Diese beiden Potentiale werden im Viererpotential  $A^\mu(x) = (\phi(x), \vec{A}(x))$  mit  $(x = (t, \vec{r}))$  zusammengefasst.

Die Maxwellgleichung für ein freies elektromagnetisches Feld (in der Lorentz-Eichung mit  $\partial_\mu A^\mu = 0$ ) lauten:

$$\square A^\mu = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) A^\mu(\vec{r}, t) = 0 \quad (4.10)$$

Ladungs- und Stromquellen sind über die nachfolgenden Gleichungen mit den Potentialen verknüpft. Die Viererstromdichte ist eine Zusammenfassung der beiden Quellen zu einem Vierervektor  $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial_t^2 \phi(x)}{\vec{\nabla}^2 \vec{A}(x)} &= \rho(x) && \text{(Ladungsdichte)} \\ &= \vec{j}(x) && \text{(Stromdichte)} \end{aligned} \right\} \quad \square A^\mu(x) = j^\mu(x) \quad (4.11)$$

Die Kontinuitätsgleichung für die Ströme lautet:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (4.12)$$

Für Diracteilchen (relativistische Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen; z. B. e,  $\mu$ ,  $\tau$ ) gelten die Beziehungen:

$$\rho(\vec{r}, t) = e \psi^\dagger(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) = e \bar{\psi} \gamma^0 \psi$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = e \psi^\dagger(\vec{r}, t) \vec{\alpha} \psi(\vec{r}, t) = e \bar{\psi} \vec{\gamma} \psi$$

mit  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$ ;  $\gamma_0^2 = \mathbb{1}_{4 \times 4}$ ;  $\vec{\gamma} = \gamma_0 \vec{\alpha}$ . Im Vierervektorschreibweise ergibt sich die Dirac-Stromdichte.

$$j^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

Die Matrix  $\gamma^\mu$  ist über die Pauli-Spin-Matrizen definiert:

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

Die freie Dirac-Gleichung in der hamiltonschen Form ergibt sich zu:

$$\left( -i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right) \psi = E \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

(4.13)

Mit der relativistischen Energie  $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$  und dem Impulsoperator  $\vec{p} = -i \vec{\nabla}$ , sowie dem Gesamtenergieoperator  $E = i \frac{\partial}{\partial t}$ . In kovarianter Form vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$(\gamma_\mu p^\mu - m) \psi = 0 \quad (4.14)$$

Für die minimale (eichinvariante) Kopplung von geladenen Teilchen an das elektromagnetische Feld gilt:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E - e \phi(\vec{r}, t) \\ \vec{p} &\rightarrow \vec{p} - e \vec{A}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad \Rightarrow p^\mu \rightarrow p^\mu - e A^\mu$$

Um den Überblick zu behalten sind hier noch einmal die wichtigsten Gleichungen der QED zusammengefasst:

$$\square A^\mu(x) = e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \quad (4.15)$$

(4.15)

$$(\gamma_\mu (p^\mu - e A^\mu(x)) - m) \psi(x) = 0 \quad (4.16)$$

(4.16)

Als Wechselwirkungsterm (Hamiltondichte) zwischen einer Ladungsverteilung bzw. einem Strom und einem Viererpotential  $A^\mu(x)$  ergibt sich Gl. 4.17. Die Wechselwirkungsenergie berechnet sich aus Gl. 4.18.

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \rho(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) - \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = j_\mu(x) A^\mu(x) = e \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A^\mu(x) \quad (4.17)$$

$$W = \int dt \int d^3r \mathcal{H}_{\text{int}} = e \int dt \int d^3r \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A^\mu(x) \quad (4.18)$$

Die Lösungen der QED-Gleichungen lassen sich störungstheoretisch nach Potenzen der *Feinstruktur-Konstante*  $\alpha = e^2/4\pi = \frac{1}{137}$ , ausgehend von den Lösungen für freie Teilchen, entwickeln.

**Beispiel:** Wechselwirkung zwischen zwei Elektronen (siehe Abb. 4.2)

Der Viererstrom von Elektron 2 ( $j_\mu(x') = e\bar{\Psi}(y)\gamma^\mu\Psi(y)$ ) erzeugt ein Viererpotential  $A^\mu(x)$ . Die Lösung der Maxwellgleichung  $\square A^\mu(x) = j^\mu(x)$  erfolgt mittels der zugehörigen Green-Funktion:

$$\square D(x - x') = \delta^4(x - x') = \delta(t - t')\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Für das Viererpotential ergibt sich somit:

$$A^\mu(x) = \int d^4x' D^{\mu\nu}(x - x') j_\nu(x') = e \int d^4x' D(x - x') \bar{\psi}(x') \gamma^\mu \psi(x')$$

Für den statischen Grenzfall gilt:

$$D_{\mu\nu}(x - x') = \frac{\delta(t - t')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} g_{\mu\nu}$$

Der Viererstrom von Elektron 1 ( $j^\mu(x)$ ) koppelt an dieses 4-Potential und man erhält nach Gl. 4.18 die Wechselwirkungsenergie.

$$W = e^2 \int d^4x \int d^4y \underbrace{\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)}_{\text{Strom 1}} \underbrace{D_{\mu\nu}(x - y)}_{\text{Propagator}} \underbrace{\bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y)}_{\text{Strom 2}}$$

Quantenmechanisch lässt sich diese Gleichung als zweite Ordnung Störungstheorie in der Wechselwirkungsdichte  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  beschreiben:

$$\mathcal{H}_{\text{int}}(x)\mathcal{H}_{\text{int}}(y) = e^2 \bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu A_\nu(y) \psi(y) \quad (4.19)$$

Elektron 1 vernichtet  
 ↓  
 virtuelles Photon erzeugt/  
 vernichtet  
 ↑  
 Elektron 1 erzeugt  
 ↓  
 Elektron 2 erzeugt  
 ↓  
 virtuelles Photon erzeugt/  
 vernichtet  
 ↑  
 Elektron 2 vernichtet  
 ↓  
 zugehörige Amplitude = Photonpropagator

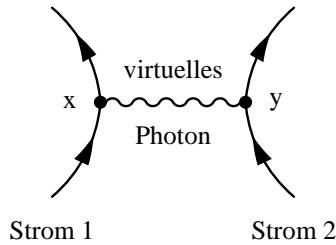


Abb. 4.2: Austausch eines Photons zwischen den Elektronen

Diese Wechselwirkung lässt sich als Austausch eines Photons zwischen den beiden Elektronen deuten. Von den Zuordnungen in (4.19) kommt man zu den Feynmanregeln, in welche wir hier eine kurze Einführung geben wollen (dazu später mehr):

### Feynmanregeln der QED

Elektron im Anfangszustand:		$u(p, s)$	im Endzustand:		$\bar{u}(p, s)$
Positron im Anfangszustand:		$\bar{v}(p, s)$	im Endzustand:		$v(p, s)$
Photon im Anfangszustand:		$\epsilon^\mu(k)$	im Endzustand:		$\epsilon^{\mu*}(k)$
Wechselwirkungsvertex:		$\mu$		$-ie\gamma^\mu$	
Photon-Propagator:		$\mu$ $k$ $\nu$		$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \sim \square^{-1}$	im Impulsraum
Elektron-Positron-Propagator:		$p$		$\frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m + i\epsilon}$	
				$\sim (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)^{-1}$	im Impulsraum
An jedem Vertex gilt 4-Impulserhaltung:		$p$	$\leftarrow k = p' - p$	$p'$	

Das Matrixelement  $T_{fi}$  im Impulsraum (z.B. für Elektron-Myon-Streuung) ist in Gl. 4.20 dargestellt. Der Impulsübertrag ist  $q^2 = (\Delta E)^2 - \vec{q}^2$  ist kleiner Null und somit raumartig. Der Wirkungsquerschnitt berechnet sich dann nach der Formel  $d\sigma/d\Omega \propto |T_{fi}|^2$ .

$$T_{fi} = -e^2 \bar{u}(p')\gamma_\mu u(p) \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(k')\gamma_\nu u(k) \quad \text{mit } \bar{u} = u^\dagger \gamma^0 \text{ und } q^\mu = (p' - p)^\mu = (k - k')^\mu \quad (4.20)$$

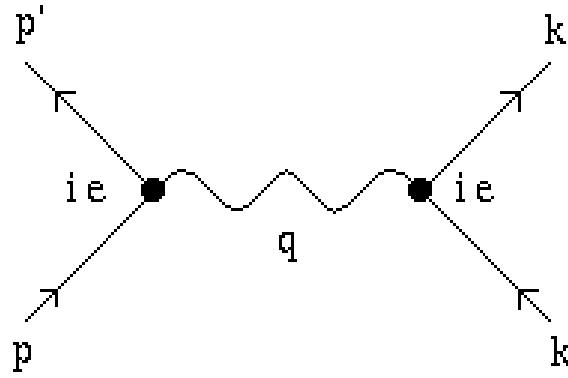


Abb. 4.3: Elektron- Myon Streuung

#### 4.2.1 Berechnung von Wirkungsquerschnitten

Es soll nun gezeigt werden, wie man aus einem Feynman- Diagramm auf das Wechselwirkungsmatrixelement der streuenden Teilchen schließen kann und wie dieses Matrixelement in den differentiellen Wirkungsquerschnitt des Streuvorganges eingeht.

Zunächst betrachten wir hierzu einen beliebigen Streuprozess zweier Teilchen 1 und 2, welcher als Produkt Teilchen 3 und 4 liefert. Es gilt somit:

$$\text{Teilchen 1} + \text{Teilchen 2} \rightarrow \text{Teilchen 3} + \text{Teilchen 4}$$

Ganz allgemein definiert man zur Beschreibung eines Streuvorganges die sogenannten *Mandelstam-Variablen*:

$$s = (p_1 + p_2)^2 \quad t = (p_1 - p_3)^2 \quad u = (p_1 - p_4)^2 \quad (4.21)$$

Hierbei sind die  $p_i$  Vierer- Impulse. Daher handelt es bei den Mandelstamvariablen, da sie quadrierte Linearkombinationen aus Vierer-Vektoren sind, um lorentzinvariante Größen. Wie man leicht aus der obigen Definition entnehmen kann, beschreibt  $t$  den Vierer-Impulsübertrag und  $s$  die Schwerpunktsenergie (es gilt also  $W^2 = s$ ). Weiterhin kann man durch einfache Rechnung zeigen, daß lediglich zwei der drei Variablen unabhängig voneinander sind; es gilt:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (\text{wobei hier } m_i \text{ die Masse des i-ten Teilchens ist})$$

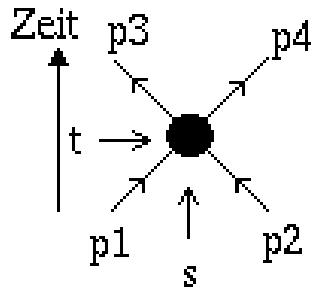
Kommen wir nun zum eigentlichen Thema:

- Berechnung von Wirkungsquerschnitten:

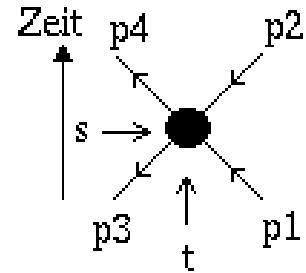
Es gilt für den Zusammenhang zwischen differentiellem Wirkungsquerschnitt und Wechselwirkungsmatrixelement im Schwerpunktsystem ( $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ ):

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2 \cdot s} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} \cdot |\mathcal{M}_{fi}|^2} \quad (4.22)$$

Betrachtet man nun die Feynman-Diagramme für Teilchen-Teilchen- (Abb. 4.4), sowie für Teilchen-Antiteilchen-Streuung (Abb. 4.5), so sieht man, daß die Mandelstam-Variablen jeweils als „Koordinatenachsen“ im Graphen interpretiert werden können. Geht man nun von der Streuung an einem Teilchen zur Streuung an einem Antiteilchen über, so tauschen  $s$  und  $t$  ihre Rollen (entspricht einer Drehung des Feynman-Graphen um  $90^\circ$ ) Diese Vertauschung von  $s$  und  $t$  beim Übergang Teilchen → Antiteilchen nennt man *Crossing-Symmetrie*.

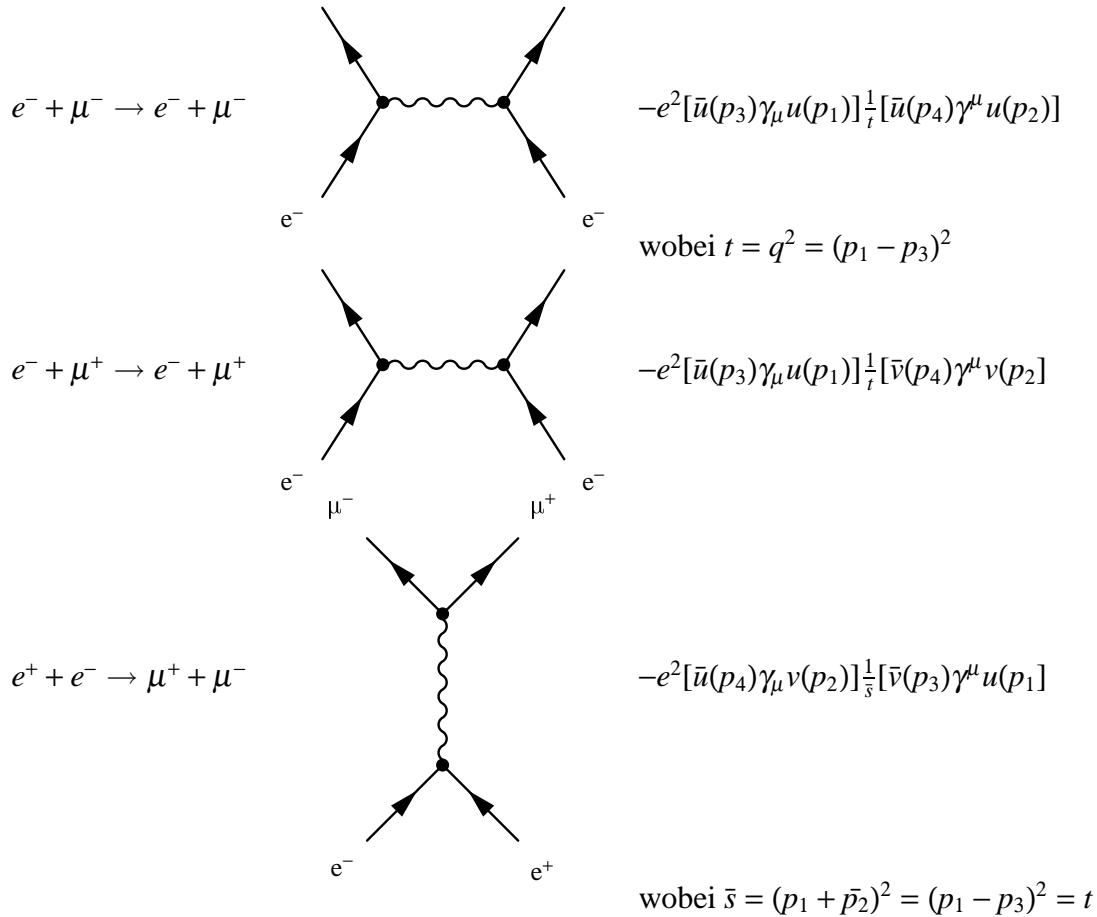


**Abb. 4.4:** Teilchen- Teilchen- Streuung



**Abb. 4.5:** Teilchen- Antiteilchen- Streuung

- QED-Matrixelemente und Feynman-Regeln: Man erhält die Matrixelemente der QED über  $\mathcal{M}_{fi} = -iT_{fi}$ . Unter Beachtung der bereits oben dargestellten *Feynman-Regeln* ist das Matrixelement direkt aus einem Feynman-Graphen berechenbar. Dies wird nun für einige Beispiele illustriert. Hierbei ist zu beachten, dass für jeden Wechselwirkungsvertex stets ein Faktor  $\sqrt{\alpha}$  im Matrixelement  $\mathcal{M}_{fi}$  auftaucht.



## 4.3 Elementare Prozesse der QED

### 4.3.1 Streuung von relativistischen Elektronen an einer Punktladung ohne Spin (Mott-Streuung)

Hier: Berücksichtigung des Elektron-Spins durch Spinmittelung im Anfangszustand und Spinsummation im Endzustand

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \propto |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} \left| p', s_f = \pm \frac{1}{2} \atop p, s_i = \pm \frac{1}{2} \right|^2$$

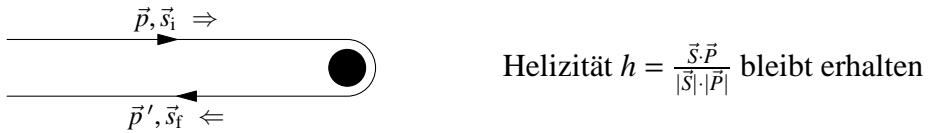
The diagram shows an incoming electron line with spin  $s_i = \pm \frac{1}{2}$  interacting with a virtual photon line. The outgoing particles are an electron and a positron, both with spin  $s_f = \pm \frac{1}{2}$ . The total momentum  $P'$  is conserved.

$$q^2 = (p - p')^2 = 2m_e^2 - 2(EE' - |\vec{p}||\vec{p}'|\cos\theta) \approx -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (4.23)$$

Ergebnis (im Laborsystem):

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \frac{\alpha^2 Z^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{E'}{E} \cdot \left( 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \stackrel{\beta \approx 1}{=} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} \cdot \frac{E'}{E} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (4.24)$$

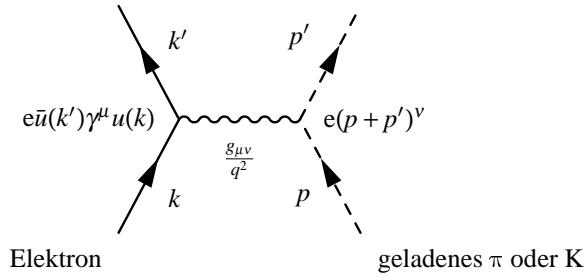
Interpretation am Beispiel der Rückwärtsstreuung am spinlosen Target: Der  $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ -Faktor verbietet Rückwärtsstreuung. Für relativistische Elektronen ( $\beta = 1$ ) bleibt in der elektromagnetischen Wechselwirkung die Helizität erhalten. Ein spinloses Teilchen kann den Drehimpulsübergang  $\Delta l = 1$ , welcher zur Helizitätserhaltung nötig ist, nicht aufnehmen – es wäre ein Spin-Flip nötig (siehe auch Anhang A.2). Daher wird die Rückwärtsstreuung ohne Spin-Flip stark unterdrückt:



**Abb. 4.6:** Am spinlosen Target ist die Rückwärtsstreuung ohne Spin-Flip unterdrückt

### 4.3.2 Elektronenstreuung an (punktformigen) Spin-0- und Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen

#### 4.3.2.1 Spin-0-Boson



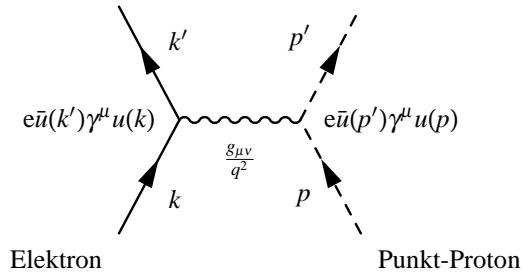
Strom des Klein-Gordon-Feldes:  $j^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}}^{\text{e-Spin-0}} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}$$

Aber: Ein reales Pion/Kaon hat eine innere Struktur:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}}^{\text{e-}\pi/\text{K}} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left| F_{\pi/\text{K}}(q^2) \right|^2_{\substack{\text{Pion/Kaon-} \\ \text{Ladungs-} \\ \text{formfaktor}}}$$

### 4.3.2.2 Spin- $\frac{1}{2}$ -Dirac-Teilchen



$$\begin{aligned} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}}^{\text{e-Spin-}\frac{1}{2}} &= \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \cdot \left( 1 - \frac{q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) = \\ &= \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{E'}{E} \cdot \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} + \underbrace{\frac{|q|^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}_{\text{magnetische Streuung}} \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Die magnetische Wechselwirkung  $\vec{\sigma} \times \vec{q}$  erlaubt einen Spinflip, so daß auch Rückwärtsstreuung erlaubt ist.

- Ein reales Proton hat aber eine innere Struktur (siehe (5.11)):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{lab}}^{\text{ep}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \left[ \frac{G_E^2(q^2) - \frac{q^2}{4M^2} G_M^2(q^2)}{1 - \frac{q^2}{4M^2}} - \frac{q^2}{2M^2} G_M^2(q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

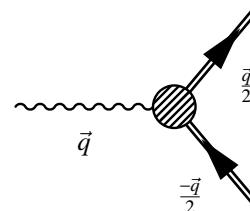
- Im Breit-System, in dem keine Energie vom virtuellen Photon übertragen wird ( $q_0 = 0$ ), lassen sich die Formfaktoren folgendermaßen interpretieren:

- elektrischer Formfaktor  $\leftrightarrow$  Ladungsverteilung

$$\left\langle P\left(+\frac{\vec{q}}{2}\right) \middle| \rho \middle| P\left(-\frac{\vec{q}}{2}\right) \right\rangle = G_E(-\vec{q}^2)$$

- magnetischer Formfaktor  $\leftrightarrow$  Stromverteilung

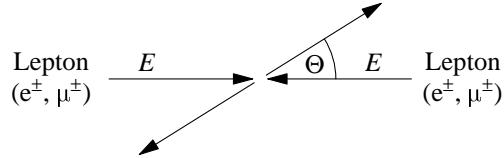
$$\left\langle P\left(+\frac{\vec{q}}{2}\right) \left| \vec{j} \right| P\left(-\frac{\vec{q}}{2}\right) \right\rangle = \frac{i}{2M} \vec{\sigma} \times \vec{q} \ G_M(-\vec{q}^2)$$



**Abb. 4.7:** Der im Breitsystem übertragene Impuls

### 4.3.3 Streuung geladener Leptonen

- im Schwerpunktsystem:



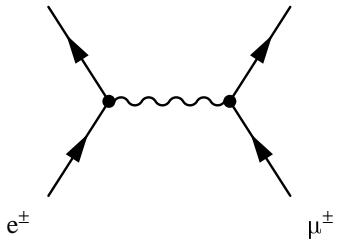
**Abb. 4.8:** Streuung geladener Leptonen

- QED-Rechnung ergibt im CM-System für die Wirkungsquerschnitte:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s} F(\theta), \quad s = W^2 = 4E^2 \quad (4.26)$$

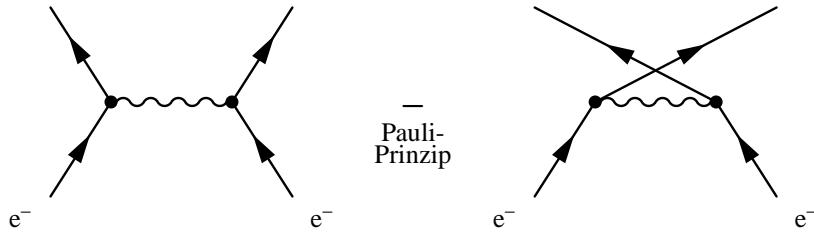
- Beispiele:

- Elektron-Myon-Streuung



$$F(\theta) = \frac{1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (4.27)$$

- Elektron-Elektron-Streuung (Møller-Streuung)



$$F(\theta) = \frac{1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{2}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{1 + \sin^4 \frac{\theta}{2}}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} \quad (4.28)$$

Interferenz-term

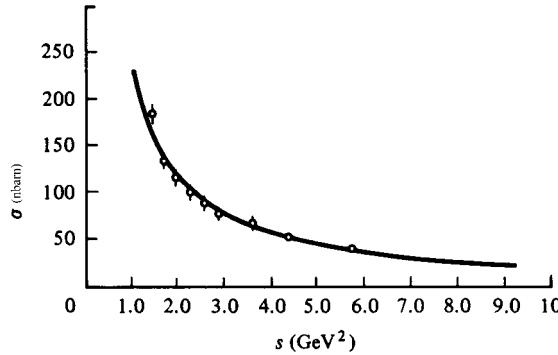
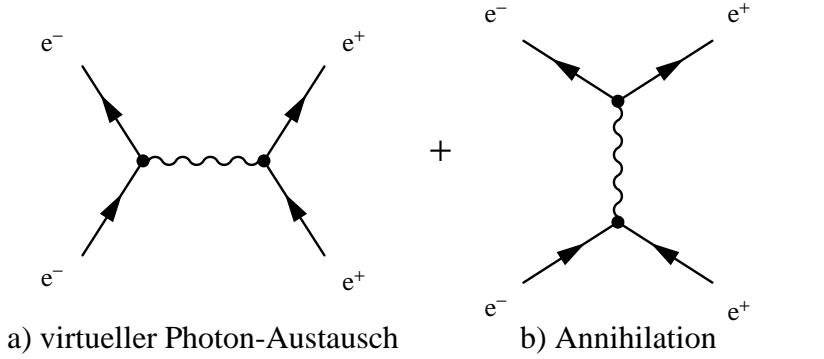


Abb. 4.9: Wirkungsquerschnitt für Bhabha-Streuung (aus [It85])

- Elektron-Positron-Streuung (Bhabha-Streuung, siehe auch Abb. 4.9)



$$F(\theta) = \frac{1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{2 \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \quad (4.29)$$

a)                          Interferenz                  b)

- $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  (siehe auch Abb. 4.10, 4.11 und 4.12)

$$F(\theta) = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \quad (4.30)$$

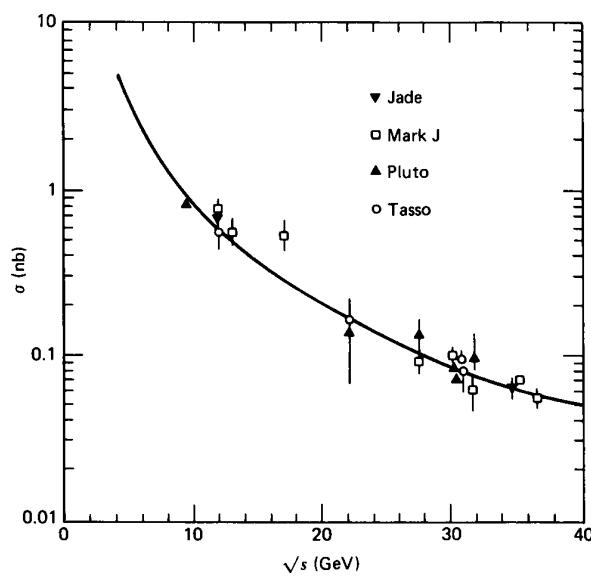
$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (4.31)$$

Bemerkung: Wenn bei der Streuung mehrere Prozesse gleichzeitig ablaufen, das heißt mehrere verschiedene Feynman- Graphen relevant sind, so ergibt sich das Wechselwirkungsmatrixelement des Vorganges als kohärente Summe der einzelnen Diagramme.

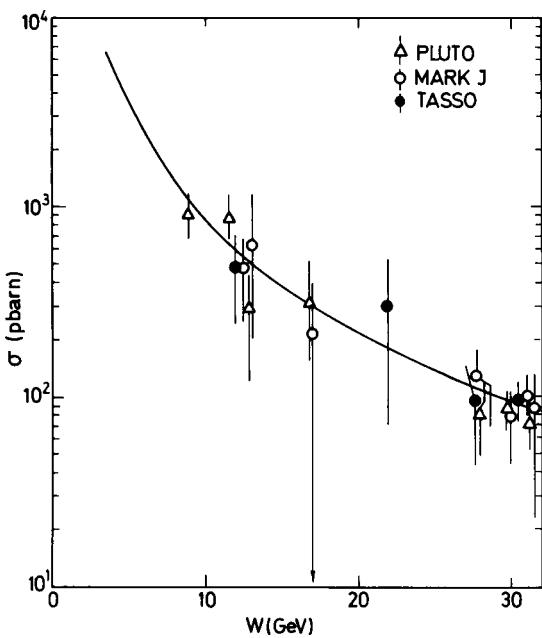
#### 4.3.4 Paarvernichtung in Photonen

- Feynman-Diagramm:

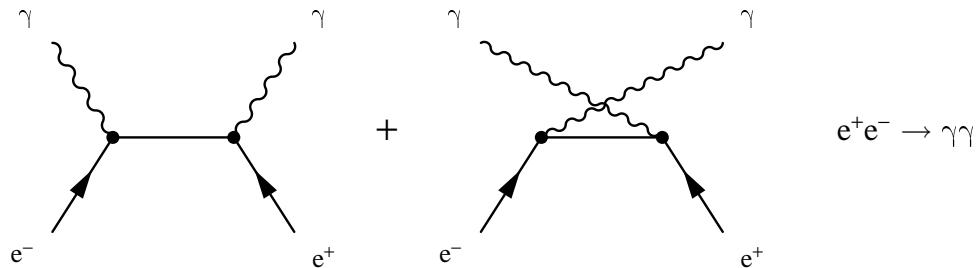
## 4.3 Elementare Prozesse der QED



**Abb. 4.10:** Wirkungsquerschnitt für  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Die durchgezogene Linie entspricht Gl. (4.31) (aus [Ha84]).



**Abb. 4.11:** Wirkungsquerschnitt für  $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$  (aus [Lo86])



- Der differentielle Wirkungsquerschnitt (s. Abb. 4.13) ist im Schwerpunktsystem für hochenergetische Elektronen/Positronen mit  $E \gg m$ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2E^2} \cdot \frac{\cos^4 \frac{\theta}{2} + \sin^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \theta} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \cdot \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \quad (4.32)$$

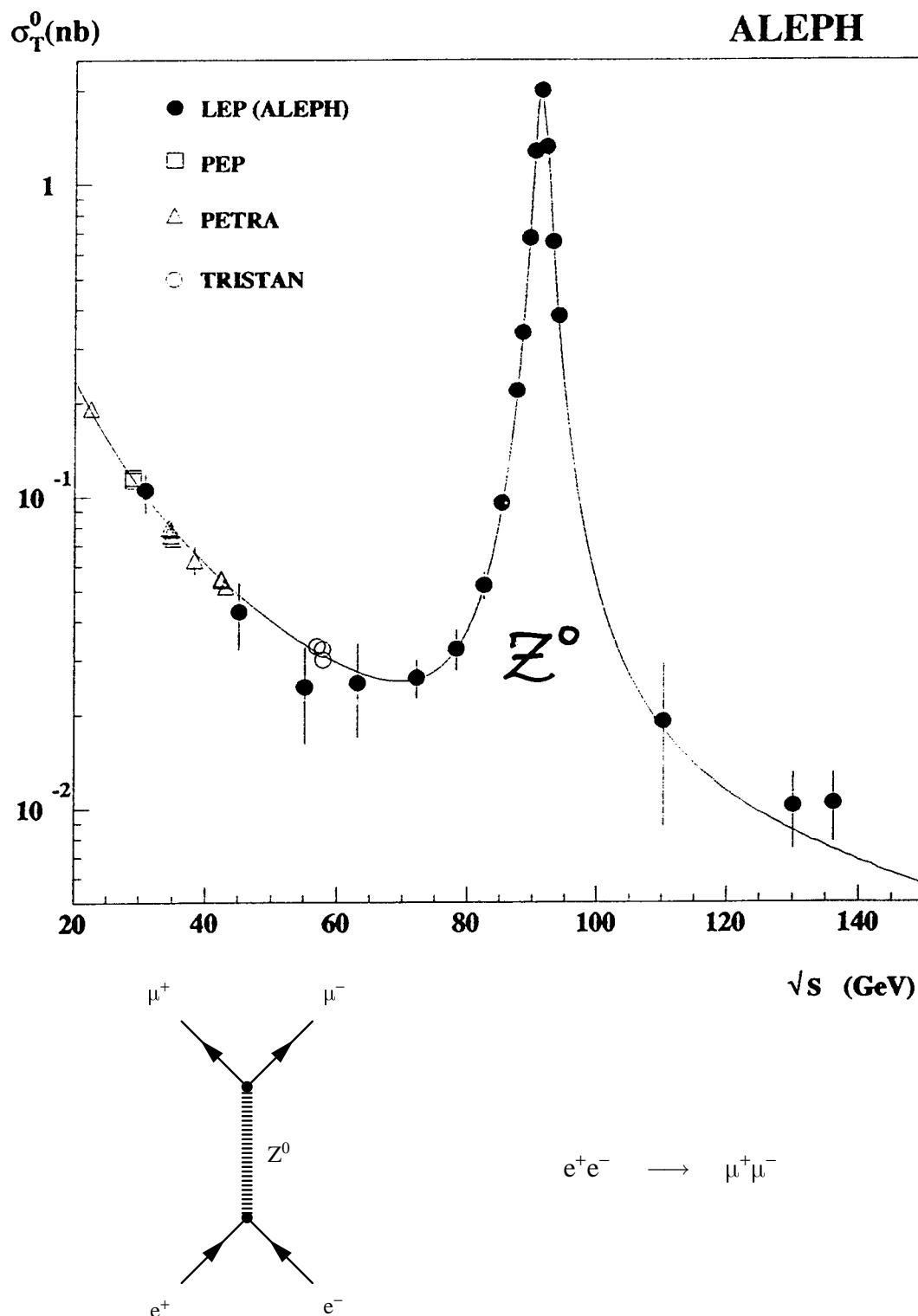
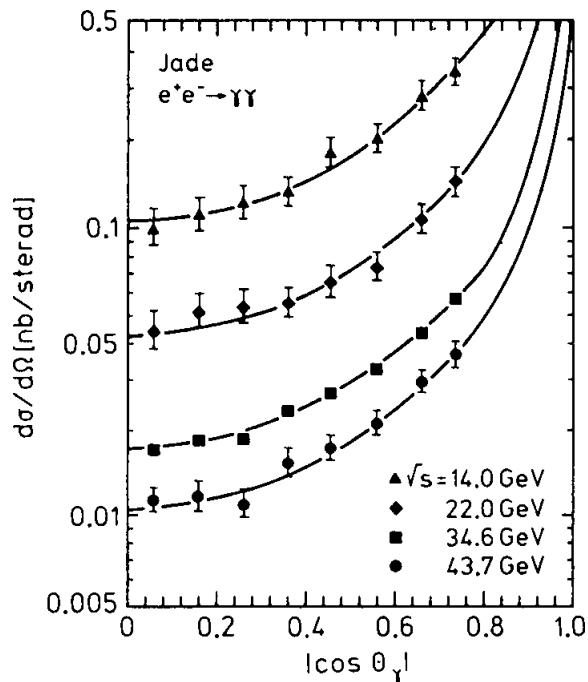


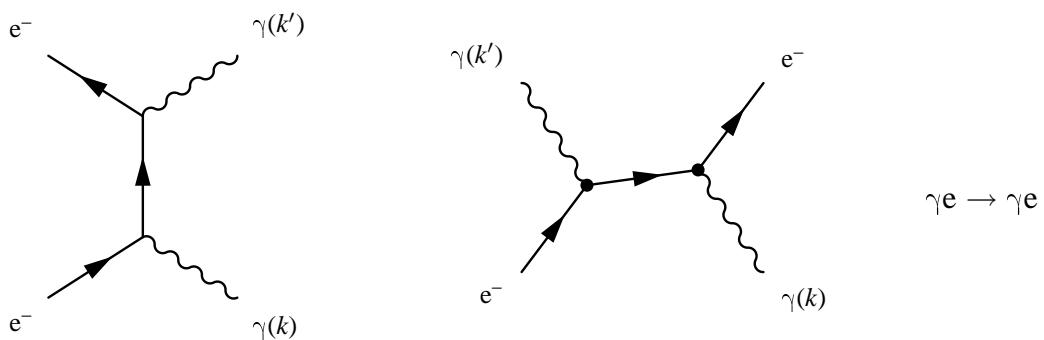
Abb. 4.12: Wirkungsquerschnitte bei Myon-Paar-Produktion in der Nähe der  $Z^0$ -Resonanz



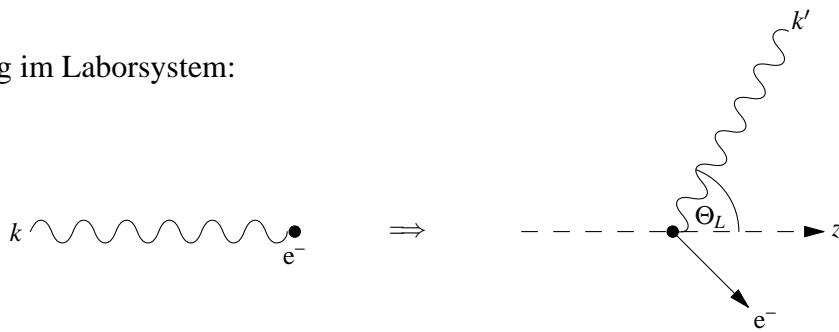
**Abb. 4.13:** Differentieller Wirkungsquerschnitt für  $e^+e^-$ -Vernichtung in zwei Photonen (aus [Be92])

### 4.3.5 Compton-Streuung

- Feynman-Diagramme:



- Beschreibung im Laborsystem:



**Abb. 4.14:** Compton-Streuung

$$k = (\omega, \vec{k}), \quad k' = (\omega', \vec{k}')$$

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m_e}(1 - \cos \theta_{\text{Lab}})}$$

- Klein-Nishina-Formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta_{\text{Lab}} \right) \quad (4.33)$$

mit dem klassischen Elektronenradius  $r_0$ :

$$r_0 = \alpha \frac{\hbar}{m_e c} \approx 2.82 \text{ fm} \quad (4.34)$$

## 4.4 Präzisionstests der QED

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine experimentelle Überprüfung der soeben dargestellten Theorie der Quantenelektrodynamik anzugehen. Eine Möglichkeit bietet hierzu der Elektronen g-Faktor. Wie im Folgenden gezeigt wird, kann dieser Wert sehr genau gemessen werden; er stellt in der Tat eine der am besten bekannten Messgrößen der Physik dar. Ein anschließender Vergleich mit der Theorie wird aufzeigen, daß Experiment und theoretische Vorhersage bis auf 11 Kommastellen miteinander übereinstimmen. Dies wiederum macht die QED zu der genauesten und bestüberprüften Theorie der gesamten Physik.

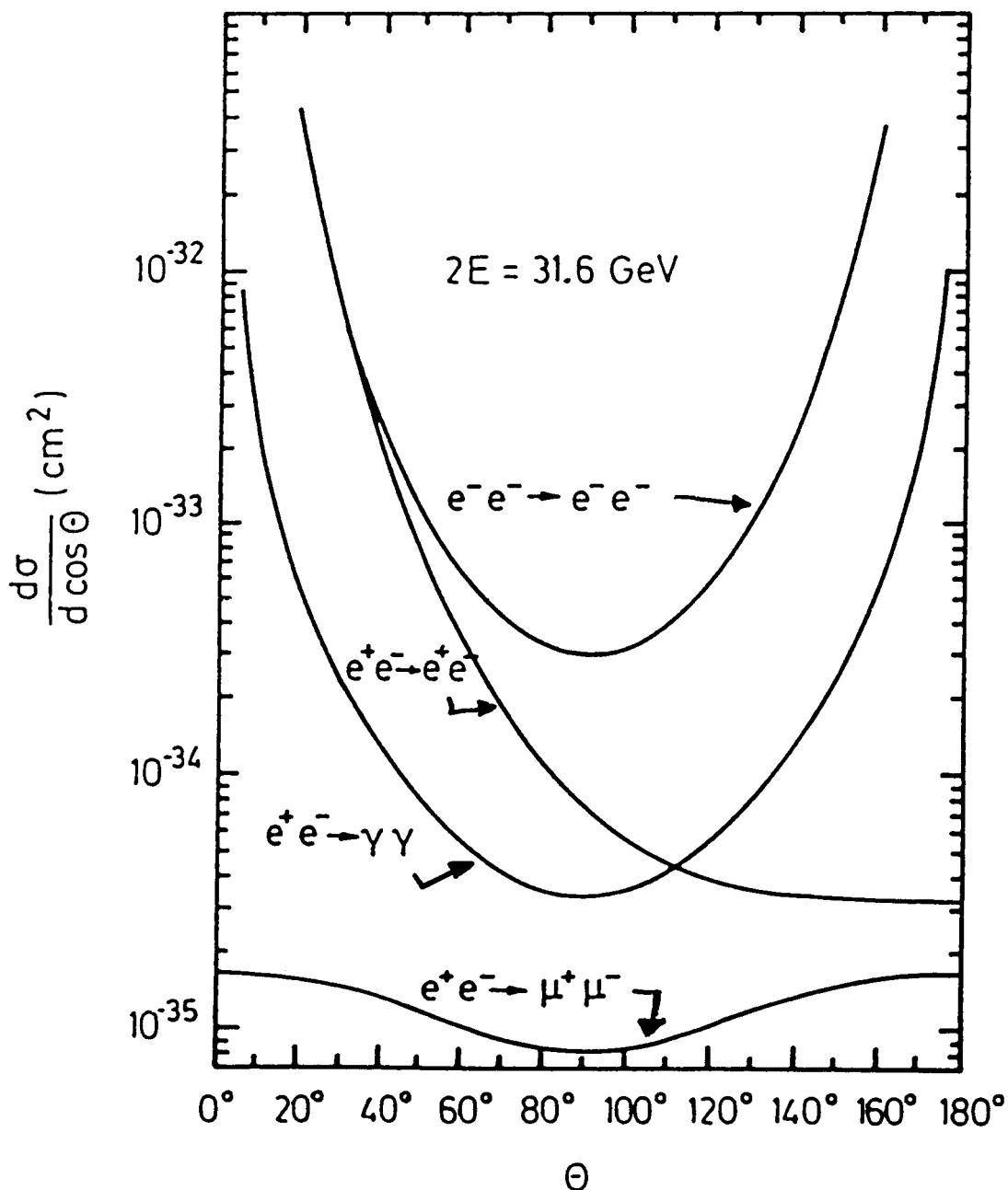
### 4.4.1 Magnetische Momente

Die allgemeine, klassische Definition für ein magnetisches Moment lautet:

$$\mu = \frac{1}{c} (\text{Strom} \times \text{Fläche}) \quad \text{Fläche} = r^2 \pi, \quad \text{Strom} = \frac{qV}{2\pi r} .$$

Somit gilt für den rein klassischen Fall:

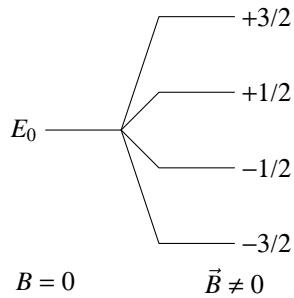
$$\vec{\mu} = \frac{q}{2mc} \vec{L} \quad \vec{L} = \vec{p} \times \vec{r} = m \vec{V} \times \vec{r} .$$



Ergebnis der Beobachtungen: Elektron und Myon sind punktförmig, bzw.

$$r_e < 10^{-3} \text{ fm} = 10^{-18} \text{ m}$$

Abb. 4.15: Winkelabhängigkeit der wichtigsten Prozesse der Elektronenstreuung

**Abb. 4.16:** Aufspaltung im Magnetfeld

In der QED hingegen gilt ( $\vec{J}$  in Einheiten von  $\hbar$ ):

$$\vec{\mu} = g \cdot \frac{e}{2mc} \vec{J} = g \cdot \frac{e\hbar}{2mc} \cdot \frac{\vec{J}}{\hbar} = g \cdot \mu_0 \cdot \frac{\vec{J}}{\hbar} \quad (4.35)$$

$$\left( \frac{e\hbar}{2mc} = \mu_0 = \text{Magneton} \right)$$

**Bohrsches Magneton:**  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 5.788 \cdot 10^{-15} \frac{\text{MeV}}{\text{Gauß}}$  (für Elektron)

**Kernmagneton:**  $\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 3.1525 \cdot 10^{-18} \frac{\text{MeV}}{\text{Gauß}}$

Die Information über die Struktur des „Kreisstroms“ steckt in  $g$ . Der Hamiltonoperator für die Wechselwirkung von  $\mu$  mit einem Magnetfeld lautet (analog zur Zeeman-Aufspaltung beim Atom im Magnetfeld):

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -g\mu_0 \vec{J} \cdot \vec{B}/\hbar \quad (4.36)$$

Ist etwa  $g < 0$ , so ergibt sich eine Energieaufspaltung der folgenden Art:

Die Entartung ist also im  $B$ -Feld aufgehoben, wodurch  $\vec{J}$  entlang des  $\vec{B}$ -Feldes quantisiert wird (Quantenzahl  $m$ ). Für die Aufspaltung zwischen zwei Niveaus gilt:

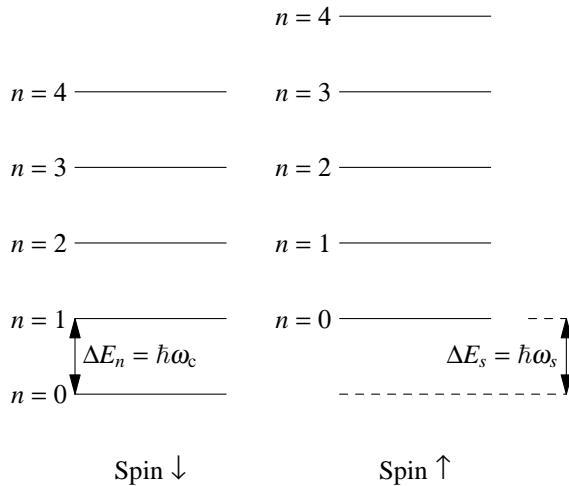
$$\Delta E = g\mu_B \cdot B$$

Die Gesamtaufspaltung (für alle Niveaus) ist

$$\Delta E_{\text{total}} = 2\mu B = 2g\mu_B \cdot J \cdot B/\hbar$$

Für ein Elektron  $e^-$  ist die minimale Energie bei minimalen Hamiltonoperator  $\hat{H}_{\min}$  realisiert. Dieser ist erreicht, wenn das magnetische Moment  $\vec{\mu}$  und das magnetische Feld  $\vec{B}$  parallel steh-ten. Also stehen der Spin des Elektrons  $\vec{s}$  und das Magnetfeld  $\vec{B}$  nach Gl. 4.35 antiparallel.

$$E_{\min} \Rightarrow \hat{H}_{\min} \quad \text{bei} \quad \vec{\mu} \parallel \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{s} \Leftrightarrow \uparrow \quad \vec{B} \Leftrightarrow \downarrow$$



**Abb. 4.17:** Aufspaltung im Magnetfeld und Berücksichtigung des Spins

#### 4.4.1.1 Bewegung eines geladenen Teilchens in einer Falle und die Messung von $g - 2$

**Bewegung in einem homogenen Magnetfeld:** Hier bewegt sich das Elektron auf einer Kreisbahn mit der Umlauffrequenz  $\omega_c$ . Nach der Quantenmechanik hat das Elektron aber nur diskrete Energiezustände, d.h. Vielfache von  $\hbar\omega_c$ . Es ergibt sich eine Energieleiter (vgl. Abb. 4.17) mit einem Energieunterschied zwischen den Stufen von:

$$\Delta E_n = \hbar \cdot \omega_c = 2 \cdot \mu_B \cdot B \quad \omega_c = \frac{eB}{mc}$$

$\Delta E_n$  hängt nur vom Magnetfeld  $B$  und Naturkonstanten ab.

#### Berücksichtigung des Spins $\vec{s}$ :

Der Elektronenspin hat zwei unterschiedliche Ausrichtungen und damit auch zwei unterschiedliche Energien. Hier ist die Aufspaltung der einzelnen Niveaus

$$\Delta E_s = g \cdot \mu_B \cdot B$$

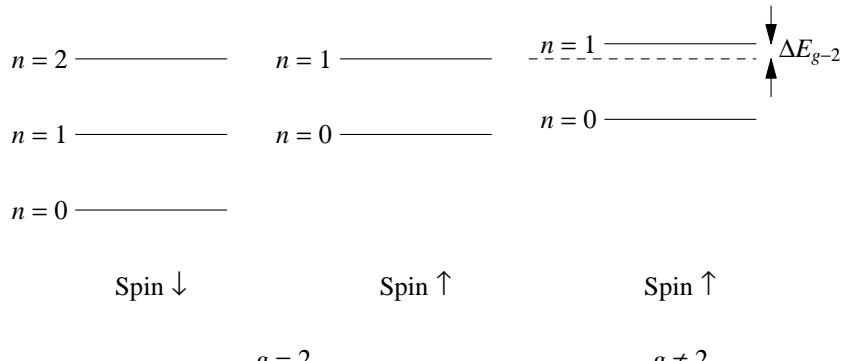
wobei  $g \approx 2$  gilt (siehe Abb. 4.17). Auch hier hängt die Aufspaltung nur von dem Magnetfeld  $B$  ab.

Die beiden Aufspaltungen  $\Delta E_n$  und  $\Delta E_s$  können in derselben Anordnung (d.h. im selben Magnetfeld  $B$ ) unabhängig voneinander bestimmt werden. Bestimmt man nun das Verhältniss von

$$\frac{\Delta E_s}{\Delta E_n} = \frac{g}{2}$$

erhält man einen Wert für  $g$  unabhängig vom Magnetfeld  $B$ .

Es sind aber noch weitere Verbesserungen möglich. Wenn man die beiden Energieleitern für die Aufspaltung nach Spin sortiert erkennt man einen kleinen Unterschied der Energieniveaus (siehe Abb. 4.18).

**Abb. 4.18:** Aufspaltung mit Spin

Man erkennt:

- Für  $g = 2$  sind beide Leitern genau um  $\Delta n = 1$  versetzt. Ein Übergang von  $\Delta s = 1$  entspricht einem Übergang von  $\Delta n = 1$ .
- Für  $g \neq 2$  sind die Leitern aber um etwas mehr als  $\Delta n = 1$  versetzt.

Wir betrachten nun den Übergang  $\Delta n = -1$ ,  $\Delta s = +1$ . Für die Energien ergibt sich:

$$\Delta E_{g-2} = -\Delta E_n + \Delta E_s = -2 \cdot \mu_B \cdot B + g \cdot \mu_B \cdot B = (g - 2) \mu_B \cdot B$$

Um das Magnetfeld nicht bestimmen zu müssen, bestimmen wir wieder ein Verhältnis:

$$\frac{\Delta E_{g-2}}{\Delta E_n} = \frac{g - 2}{2}$$

- Somit bestimmen wir direkt die Abweichung von  $g$  von dem Wert 2 ( $g - 2 \approx 10^{-3}$ ) und erhöhen gleichzeitig, bei gleichem Fehler  $\Delta V$  in der Frequenzmessung unsere Genauigkeit um den Faktor 1000.
- Des Weiteren muss das Magnetfeld nicht bestimmt werden, ebenso wie:
- Die nicht exakte Kenntnis von  $\mu_B$  nicht in die Messung eingeht.

Durch Bestrahlung mit  $\hbar\omega_{HF}$  lassen sich nun  $\hbar\omega_c$  und  $\hbar\omega_g$  messen. Idealerweise würde diese Messung über Resonanzabsorption erfolgen. Dies geht aber nur theoretisch, da in der Falle lediglich ein einzelnes Elektron gespeichert wird, weil mehrere Elektronen sich gegenseitig beeinflussen würden. In der Praxis wird also ein anderes Verfahren verwendet.

**Die Penning-Falle:** Der prinzipielle Aufbau einer Penningfalle ist in Abb. 4.19 dargestellt. In dem zylindersymmetrischen Aufbau werden magnetische und elektrische Felder überlagert. Es wird ein elektrischer Quadrupol und ein magnetischer Dipol verwendet.

Die Elektronen werden von den negativen Polschuhen in vertikaler Richtung zum Zentrum (der zentralen Ebene) zurückgestoßen. Daraus ergibt sich die axiale Oszillation.

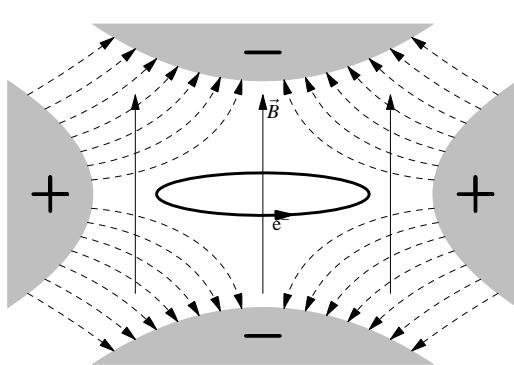


Abb. 4.19: Feld einer Penning-Falle

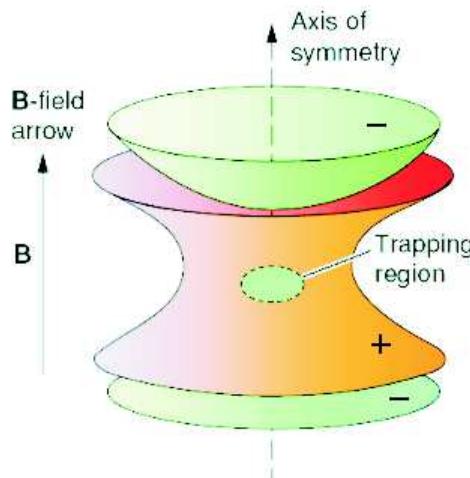


Abb. 4.20: 3D Ansicht

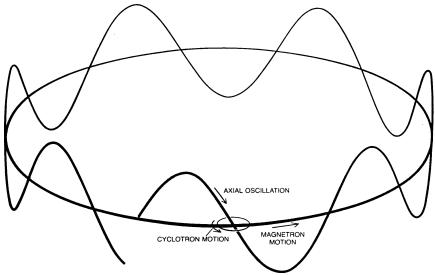


Abb. 4.21: Komponenten der Bewegung

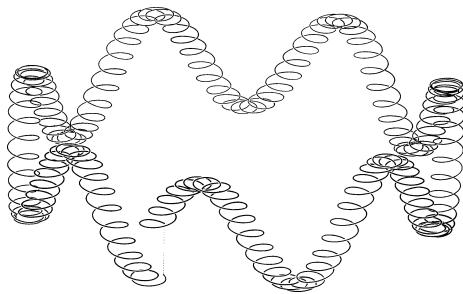


Abb. 4.22: Gesamtbewegung

In der zentralen Ebene werden die Elektronen zu den positiven Polschuhen hin beschleunigt. Daraus ergibt sich eine Geschwindigkeit  $\vec{V}_r$ . Da diese Geschwindigkeit senkrecht zu dem angelegten Magnetfeld steht werden die Elektronen auf eine Kreisbahn gezwungen, die Magnetronbahn.

Diese Bewegung überlagern sich mit der Zyklotronbewegung. Die beiden Bewegungen sind in Abb. 4.22 abgebildet. Typische Werte für das angelegte Magnetfeld sind  $B = 5\text{T}$  und für die Spannung  $U = 10\text{V}$ . Für die verschiedenen Frequenzen ergeben sich dann folgende Werte:

Frequenz	Axial	Magnetron	Zyklotron
Wert	$v_A = 60\text{MHz}$	$v_M = 35\text{kHz}$	$v_Z = 50\text{GHz}$

Die zu bestimmende Frequenz  $v_{g-2}$  lässt sich auf etwa 1kHz genau messen und liegt in der Größenordnung von  $10^{-3}v_n$ . Die Messung von  $g-2$  ist dann auf  $10^{-9}$  genau. Für  $g$  selber ergibt sich eine Genauigkeit von  $10^{-12}$ .

Das gesamte System wirkt wie ein künstliches Atom, auch Geonium genannt. Die axialen Schwingungen sind über einen hochempfindlichen Schwingkreis nachweisbar. Das schwingende Elektron wirkt hierbei sowohl als Kapazität, wie auch aufgrund seiner Trägheit als Induktivität; also letztendlich wie ein Resonanzschwingkreis. Das Einspeisen der Resonanzfrequenz erhöht die Amplitude der axialen Schwingung, bis ein Elektron eine Anode trifft und damit aus

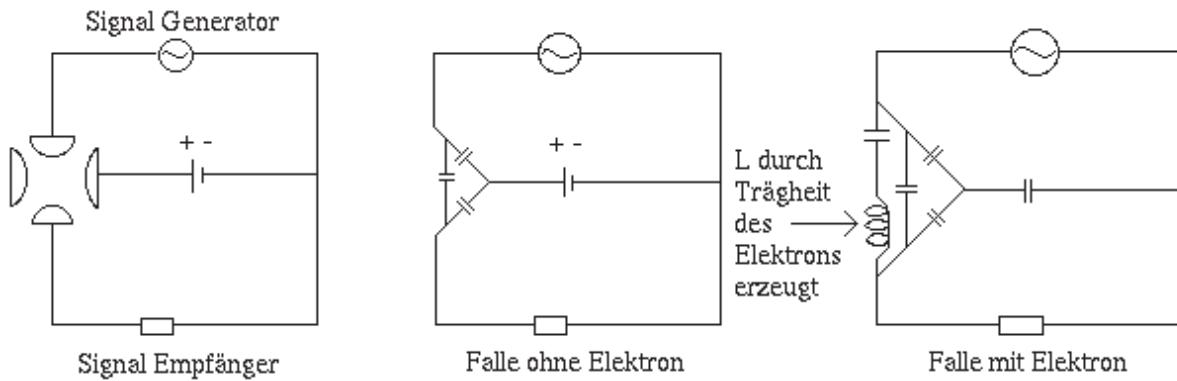


Abb. 4.23: Ersatzschaltkreise für die Penningfalle mit und ohne Elektron in der Falle.

der Falle entfernt ist. So lässt sich die Anzahl der Elektronen bis auf ein einzelnes Elektron reduzieren. In Abb. 4.23 sind Ersatzschaltbilder für die Falle mit und ohne Elektron gezeigt. Aus den Daten lässt sich die Anzahl der Elektronen in der Falle bestimmen. Hierbei ist besonders das “rauschfreie Arbeiten“ wichtig.

Durch eine Verformung der Magnetfeldlinien in der Falle ( $B_r \neq 0$ ) lassen sich Kreis- und axiale Bewegung koppeln. So lässt sich die Zyklotronbewegung sichtbar machen.

$$\text{Experiment: } \frac{|g| - 2}{2} = 1159652187.9(\pm 4.3) \cdot 10^{-12}$$

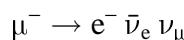
$$\text{Theorie: } \frac{|g| - 2}{2} = 1159652133(\pm 29) \cdot 10^{-12}$$

*Das Meßergebnis stimmt bis auf  $10^{-11}$  mit der Theorie überein. Zur Zeit ist das Experiment genauer – die Unsicherheiten in der Theorie ergeben sich aus der QCD, denn hier müssen ab 5. Ordnung neben den Effekten der QED auch noch diejenigen der, nun gleichwahrscheinlichen, starken Wechselwirkung berücksichtigt werden. Dies bewirkt eine enorme Zunahme an relevanten Feynman-Graphen, weshalb bis dato noch keine exakte Berechnung in 5. Ordnung existiert. Jedoch wurde allgemein bewiesen, dass die relevanten Wechselwirkungsmaatrixelemente bis in 14. Ordnung konvergent sind. Da die QED-Rechnung unter der Annahme eines punktförmigen Elektrons gemacht wurde, ergibt sich eine obere Grenze für den Radius des Elektrons von*

$$r_e < 10^{-18} \text{ m.}$$

#### 4.4.1.2 Myonen und der $g$ -Faktor

Für das Myon, das praktisch ein schwereres Elektron ist, lässt sich ein ganz ähnliches Experiment durchführen. Die Masse des Myons ist  $m_\mu = 105,7 \text{ MeV}/c^2$ . Des Weiteren zerfällt das Myon mit einer Halbwertszeit von  $\tau \approx 10^{-6} \text{ s}$  in der Reaktion:



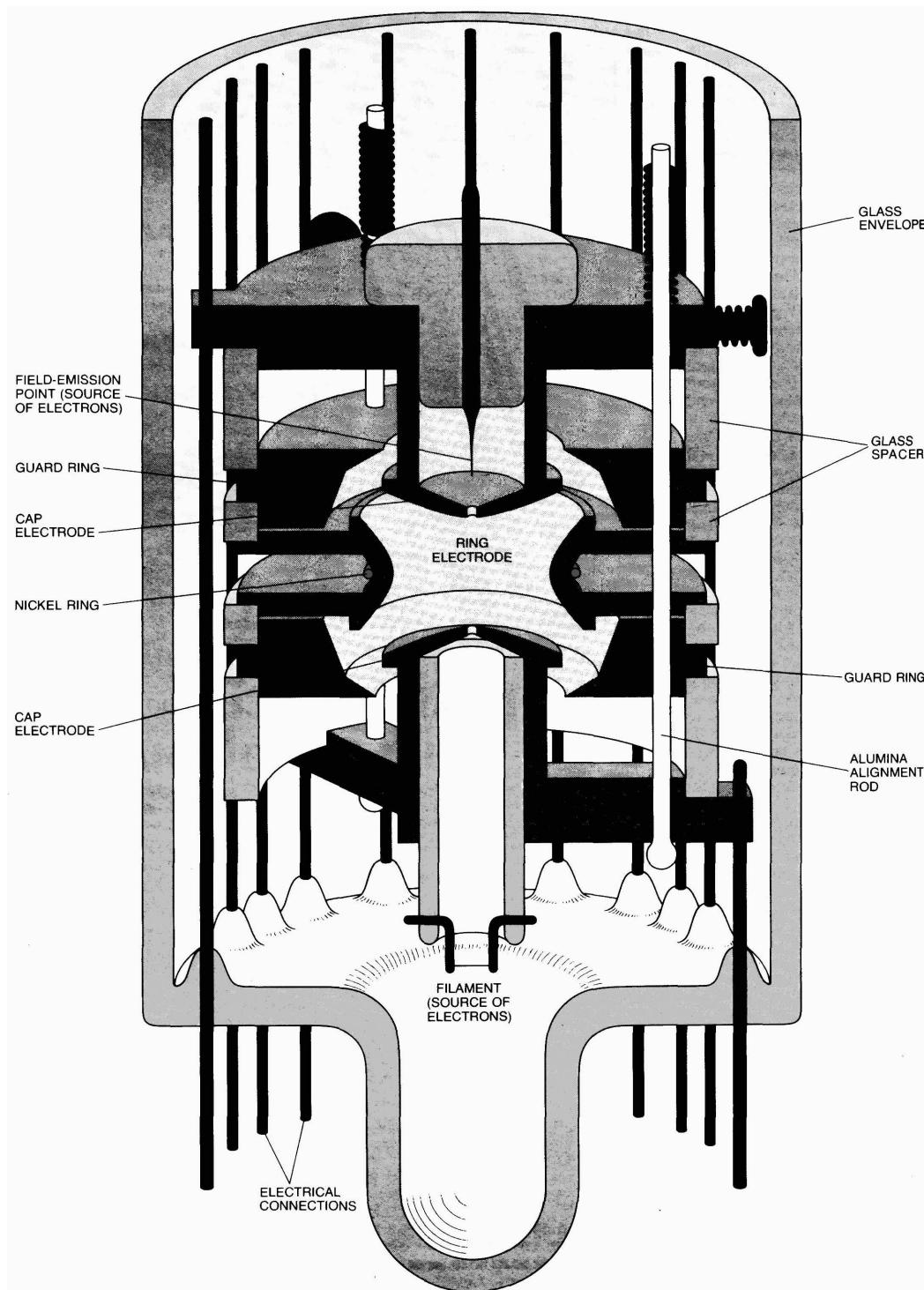


Abb. 4.24: Prinzip von Dehmels Apparatur (Nobelpreis<sup>a</sup> 1989)

<sup>a</sup><http://www.nobel.se/laureates/physics-1989.html>

Der Zerfall verläuft über die schwache Wechselwirkung (siehe Kapitel 7), die bewirkt, dass das Elektron vornehmlich entgegen der Richtung des Myonenspins emittiert wird.

In Brookhaven (USA) wurden Messungen im magnetischen Myonenspeicherringen durchgeführt. Die Umlauffrequenz  $\omega_c$  entspricht der Präzessionsfrequenz des Myonen-Spins nur, wenn  $g_\mu = 2$  ist. Die Präzessionsfrequenz der Myonen im magnetischen Haltefeld wurde über die Modulation der Emissionrichtung der Elektronen entlang des Speicherrings beobachtet.

Das Ergebnis aus dem Jahr 2004 ist:

$$a_\mu = \frac{g_\mu - 2}{2} = 11659235 \cdot 10^{-10}$$

Die Theorie sagt jedoch einen Wert von

$$a_\mu = 11659181 \cdot 10^{-10}$$

voraus. Dies ist eine Abweichung um  $3\sigma$ . Hierfür gibt es verschiedene Erklärungsansätze:

- Ist die Abweichung ein Hinweis auf eine “neue“ Physik?
- Gibt es statistische Fluktuationen des Messergebnisses?
- Ist die Rechengenauigkeit der theoretischen Physik noch nicht groß genug?
- ...

#### 4.4.1.3 Magnetisches Moment des Elektrons

Das magnetische Moment des Elektrons ist definiert als ( $\vec{l}$  ist der Drehimpuls):

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m_e} \vec{l}$$

Berücksichtigt man den Elektronen-Spin ergibt sich:

$$\vec{\mu}_s = g \frac{e}{2m_e} \frac{\vec{\sigma}}{2}$$

Nach der Dirac-Theorie ist  $g = 2$ . Messungen zeigen allerdings (siehe oben) eine  $(g - 2)$ -Anomalie:

$$a_e = \frac{g - 2}{2} \neq 0$$

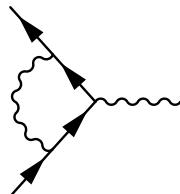
Aus dem Experiment ergibt sich der Wert:

$$a_e^{\text{exp}} = 1159652188.4(\pm 4.3) \cdot 10^{-12}$$

## 4.4 Präzisionstests der QED

Betrachten wir also auch Prozesse höherer Ordnungen in Feynman-Diagrammen bei der theoretischen Berechnung von  $a_e$ , wobei man hierbei sieht, wie sich  $a_e^{theor}$  immer stärker dem experimentellen Wert annähert:

- 1-Loop (J. Schwinger<sup>2</sup> 1947)



$$a_e(1\text{-loop}) = \frac{\alpha}{2\pi} = 1161.41 \cdot 10^{-6}$$

- 2-loop  $(\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3})$

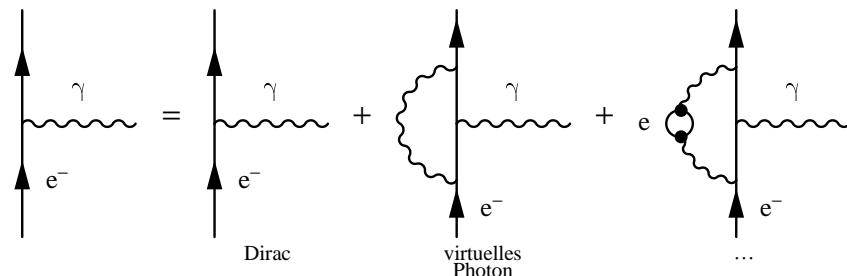
$$a_e(2\text{-loop}) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left( \frac{197}{144} + \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + \frac{3}{4} \zeta(3) \right) = -1.77231 \cdot 10^{-6}$$

- 3-loop (analytischer Ausdruck, Ettore Rimidi 1999)

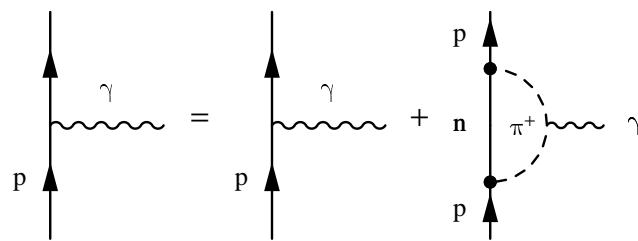
$$a_e(3\text{-loop}) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \cdot 1.181241456 \dots$$

#### 4.4.1.4 Vergleich mit dem Proton

Beim Elektron wird der  $g$ -Faktor durch die QED modifiziert (heisst: Wechselwirkungsprozesse/Feynman-Diagramme höherer Ordnung sind zu berücksichtigen):



Beim Proton spielt jedoch auch die starke Wechselwirkung eine Rolle:



Die Effekte der QCD sind größer ( $g_{Proton} \approx 5.59$ ) aber nicht so gut bekannt wie die der QED.

<sup>2</sup><http://www.nobel.se/laureates/physics-1965.html>

#### 4.4.2 Lamb-Shift

Der Lamb-Shift (Nobelpreis<sup>3</sup> 1955 für W. E. Lamb) ist eine Aufspaltung der  $2s_{\frac{1}{2}}\text{-}2p_{\frac{1}{2}}$ -Entartung im Wasserstoff-Atom. Die s-Welle hat – im Gegensatz zur p-Welle – eine nicht verschwindende Aufenthaltswahrscheinlichkeit bei  $r = 0$ . Hierdurch „sieht“ die s-Welle mehr von den Quantenfluktuationen als die p-Welle, was zu einer Energieaufspaltung führt.

Die Aufspaltung beträgt  $4.4 \cdot 10^{-4}\text{eV}$  (zum Vergleich:  $2p_{\frac{1}{2}}\text{-}1s_{\frac{1}{2}}$ -Übergang  $\approx 10\text{eV}$ ).

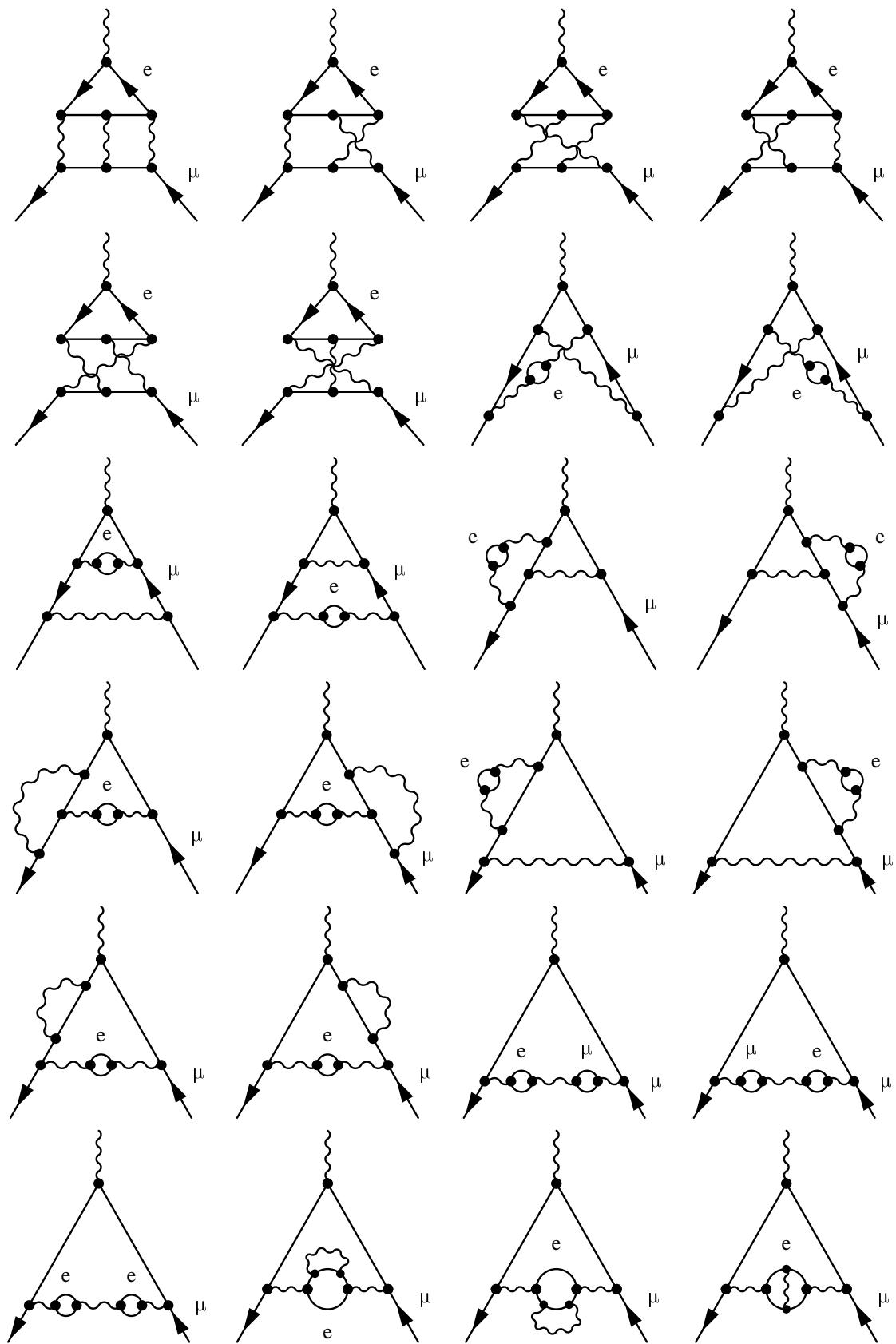
Die Messung des Übergangs erfolgt mit Mikrowellenstrahlung für verschiedene  $B$ -Felder (Rabi-Diagramm). Die Messwerte können dann gegen  $B = 0$  extrapoliert werden.

Siehe hierzu auch Experimentalphysik 4 (z.B. Vorlesungsskrpit von Prof. R. Groß, Walther Meissner Institut für Tieftemperaturforschung in Garching)

---

<sup>3</sup><http://mirror.nobel.ki.se/laureates/physics-1955.html>

## 4.4 Präzisionstests der QED



**Tab. 4.1:** Beiträge der Ordnung  $e(\frac{\alpha}{\pi})^3$  zum anomalen magnetischen Moment des Myons

## Übungen zu Kapitel 4

### Übung 4.1: Eigenschaften des Myons.

- Die mittlere Lebensdauer des Myons beträgt  $\tau = 2.19 \mu\text{s}$ . Welche Strecke legen Myonen der kosmischen Strahlung mit einem Impuls von  $100 \text{ GeV}/c$  in der Atmosphäre im Mittel zurück?
- Beschreiben Sie, wie sich Myonen in ihrer Wechselwirkung mit Materie von Pionen und Elektronen unterscheiden. Welche Auswirkungen hat dies auf den Nachweis von Myonen im Experiment?
- Das *Higgs-Boson* ist ein vom Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung vorhergesagtes Teilchen, dessen Masse im Bereich von  $52 \dots 770 \text{ GeV}/c^2$  erwartet wird. Warum erwägt man zur Erzeugung dieses Teilchens ein so exotisches Instrument wie einen Myonen-Collider mit Energien im TeV-Bereich? Wieviele Umläufe kann ein Myon im Mittel in einem Synchrotron mit 6 km Umfang bei einem Impuls von  $1 \text{ TeV}/c$  machen, bevor es zerfällt?

Hinweis:  $m_\mu = 105.658 \text{ MeV}/c^2$

**Übung 4.2: Bornsche Näherung beim Coulombpotential.** Die Amplitude in Bornscher Näherung für die Streuung eines Teilchens der Ladung  $Z'e$  und der Masse  $m$  an einer Ladungsverteilung  $e\rho(\vec{r})$  mit  $\int d^3r\rho(\vec{r}) = Z$  lautet:

$$f(\theta, E) = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2} \int d^3r e^{-i\vec{k}'\vec{r}} V(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

wobei

$$V(\vec{r}) = \frac{Z'e^2}{4\pi} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

und

$$\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}', \quad q = |\vec{q}| = 2|\vec{k}|\sin\frac{\theta}{2}, \quad E = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$$

- Zeigen Sie, daß für eine Punktladung mit  $\rho(\vec{r}) = Z\delta^3(\vec{r})$  der Rutherford'sche Streuquerschnitt folgt:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Punkt}} = \left( \frac{2mZZ'\alpha\hbar c}{\hbar^2 q^2} \right)^2 \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

b) Zeigen Sie, daß für eine ausgedehnte Ladungsverteilung gilt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Punkt}} |F(\vec{q})|^2$$

mit dem Formfaktor:

$$F(\vec{q}) = \frac{1}{Z} \int d^3r e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r})$$

Hinweis:

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \frac{1}{\vec{q}^2} = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}; \quad \int d^3r e^{-i(\vec{q}-\vec{q}')\cdot\vec{r}} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{q}-\vec{q}')$$

**Übung 4.3: Ladungsradien von Kernen.** Die Ladungsdichteverteilungen  $\rho(r)$  für leichte Kerne werden in guter Näherung durch Gaußfunktionen  $\rho(r) = n \exp(-r^2/\alpha^2)$  dargestellt.

- a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante  $n$  gemäß  $\int d^3r \rho(r) = Z$  (Kernladungszahl).
- b) Drücken Sie den mittleren quadratischen Radius  $\langle r^2 \rangle = Z^{-1} \int d^3r r^2 \rho(r)$  durch den Parameter  $\alpha$  aus.
- c) Berechnen Sie den Ladungsformfaktor  $F(\vec{q}^2) = \frac{1}{Z} \int d^3r e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(r)$ . Zeigen Sie die ferner Gültigkeit von (3.12).
- d) Schätzen Sie die Ladungsradien  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  der Kerne  ${}^4\text{He}$  und  ${}^6\text{Li}$  aus den gemessenen Formfaktoren ab (s. Abb. 4.25).

**Übung 4.4: Optisches Theorem.** Die Partialwellenentwicklung der Streuamplitude für die elastische Streuung spinloser Teilchen ist gegeben durch:

$$f(\theta, E) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) a_\ell(E) P_\ell(\cos \theta)$$

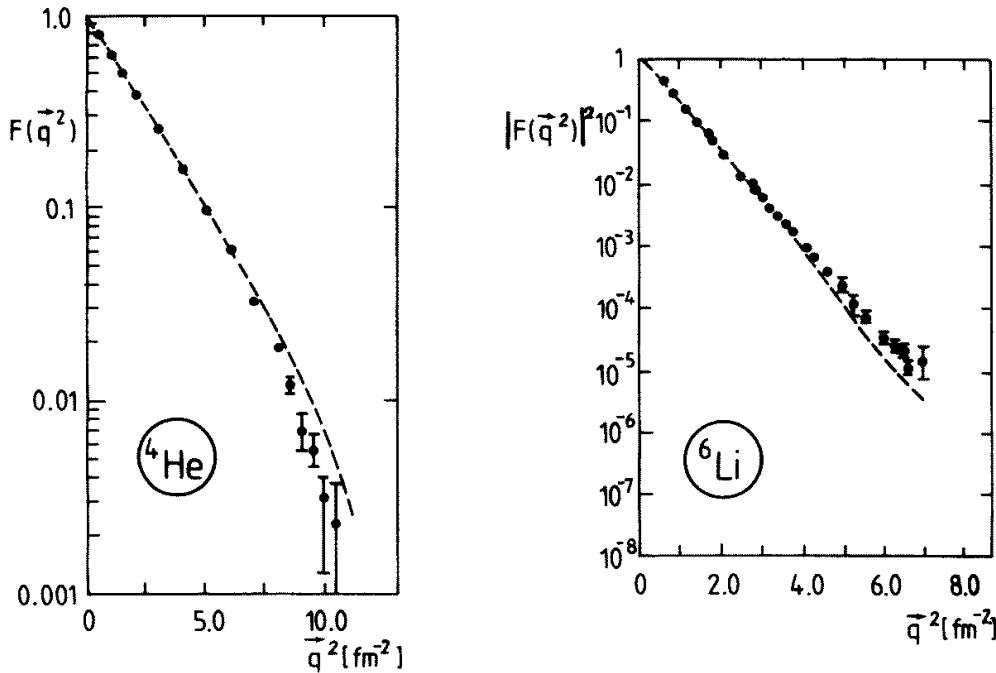
wobei

$$a_\ell(E) = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_\ell(E)} - 1).$$

Dabei ist  $\hbar k$  der Impuls,  $E$  die Energie und  $\theta$  der Streuwinkel im Schwerpunktsystem. Leiten Sie daraus das optische Theorem für den totalen Wirkungsquerschnitt her:

$$\sigma_{\text{tot}}(E) = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(\theta = 0, E)$$

Für welche Werte der Streuphase  $\delta_\ell$  besitzt  $\sigma_{\text{tot}}$  Maxima?

Abb. 4.25: Gemessene Formfaktoren von  ${}^4\text{He}$  und  ${}^6\text{Li}$ 

**Übung 4.5: Resonanz in  $\gamma p$ -Streuung.** Der totale Wirkungsquerschnitt  $\sigma(\omega)$  für die Streuung von Photonen am Proton hat im Bereich von Photonenergien  $\omega < 600 \text{ MeV}$  die in Abb. 4.26 gezeigte Resonanzstruktur, die  $\Delta$ -Resonanz mit Spin  $J = 3/2$ .

- a) Nähern Sie die  $\gamma p$ -Vorwärtsstreuamplitude durch die Breit-Wigner-Form an:

$$F(\omega) = \frac{2J+1}{(2S_1+1)(2S_2+1)} \left( \frac{K}{q} \right) \frac{\Gamma/2}{\omega - E_R - i\Gamma/2}$$

Hierbei ist  $S_{1,2}$  der Spin des Photons bzw. des Protons,  $q$  der Impuls des Photons und  $K$  eine Konstante. Berechnen Sie den totalen  $\gamma p$ -Wirkungsquerschnitt nach dem optischen Theorem.

- b) Bestimmen Sie die invariante Masse  $m_\Delta = \sqrt{s}$ , die Anregungsenergie  $E_R$  und die Zerfallsbreite  $\Gamma$  der  $\Delta$ -Resonanz. Welche Lebensdauer  $\tau = 1/\Gamma$  besitzt die  $\Delta$ -Resonanz? Entnehmen Sie die dafür notwendigen Daten der Abbildung. Warum kann man  $m_\Delta$  nicht direkt im obigen Spektrum aus der Photonenergie im Maximum ablesen?
- c) Schätzen Sie die Konstante  $K$  durch Vergleich mit den Daten der Abbildung ab und vergleichen Sie das Ergebnis mit der typischen Größenordnung  $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$  der Kopplungskonstanten in der elektromagnetischen Wechselwirkung.

Hinweis: In dieser Aufgabe werden die in Abschn. 1.1 besprochenen „rationalisierten“ Einheiten verwendet, bei denen  $\hbar = 1$  und  $c = 1$  gesetzt wird. Für die Umrechnung sind folgende Werte nützlich:  $\hbar c \approx 0.197 \text{ GeV fm}$ ;  $c \approx 3 \cdot 10^{23} \text{ fm s}^{-1}$ .

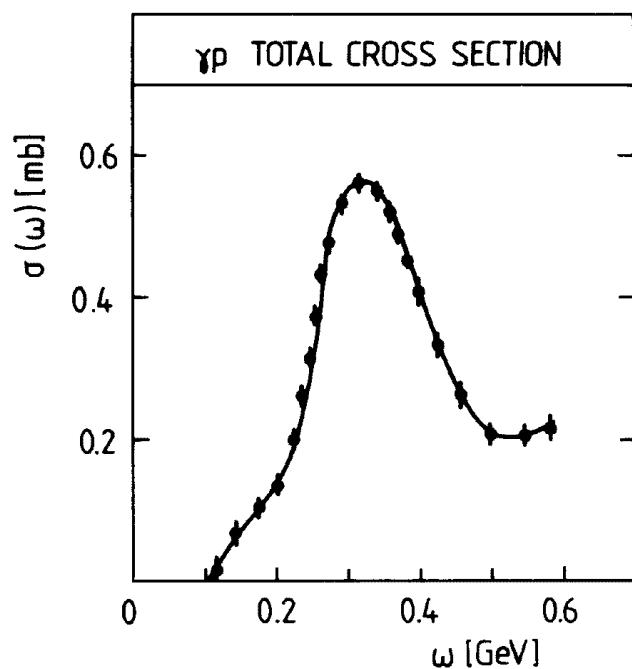


Abb. 4.26: Totaler Wirkungsquerschnitt für Photon-Proton-Streuung aus [Er88])



# Kapitel 5

## Struktur des Nukleons

Wie groß sind Atomkerne? Welche Struktur besitzen sie? Mit diesen und anderen, die Geometrie der Nukleonen betreffenden Fragen wollen wir uns im folgenden beschäftigen. Wir werden durch elastische Elektronenstreuung Informationen über Proton und Nukleon gewinnen, wobei wir Spin und Asymmetrien beim Streuprozeß beachten. Neben den Maxima der elastischen Streuung treten auch solche der inelsatischen Streuung auf, die von Anregungen des Nukleons stammen. Wir werden die Ergebnisse dahin gehender Untersuchungen auswerten, das Partonmodell einführen und erste Eigenschaften der Nukleon-Konstituenten, der Quarks, studieren. Informationen über diese Nukleonbestandteile erhalten wir aus der sogenannten tiefinelastischen Streuung.

### 5.1 Elektromagnetische Formfaktoren des Nukleons

#### 5.1.1 Magnetische und elektrische Formfaktoren des Protons

Wir wollen uns mit der elektromagnetischen Streuung von Elektronen ( $e^-$ , mit Masse  $m_e$ ) am Nukleon N (Masse  $M$ ) beschäftigen. Hierzu betrachten wir die aus der Atomphysik bekannten Zusammenhänge für gebundene Zustände im Wasserstoffatom, und gehen zunächst davon aus,

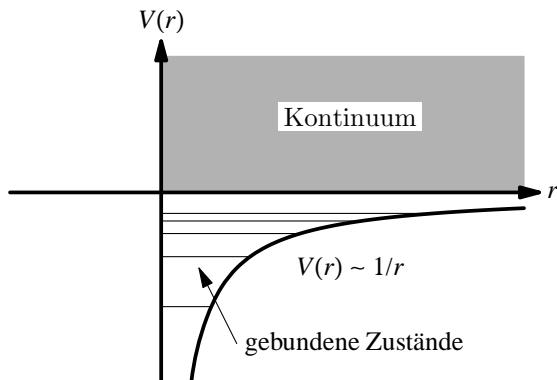


Abb. 5.1: Coulombpotential im Wasserstoffatom

dass weder Elektron noch Proton spinbehaftet sind. Dann sind die Energieniveaus im Atom wie in Abb. 5.1 gegeben:

$$E \propto \alpha^2 \mu \frac{1}{n^2} \quad \text{mit } \mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \equiv \text{reduzierte Masse} \quad (5.1)$$

Entsprechend kennen wir für die Streuung (Kontiumszustände) den Zusammenhang

$$\frac{d\sigma}{dq^2} \propto \frac{\alpha^2}{q^4} \quad \text{mit } q^2 = (\vec{p} - \vec{p}')^2 \quad (\text{Dreierimpulsübertrag}), \quad (5.2)$$

welcher die *Rutherfordstreuung* spinloser Teilchen charakterisiert. Jetzt modifizieren wir (5.1) und (5.2), indem wir den Spin des Elektrons berücksichtigen.

Bisher betrachteten wir den Impulsübertrag  $q^2 = (\vec{p} - \vec{p}')^2$ . Dies ist aber nur dann richtig, wenn wir keinen Rückstoß vorliegen haben, also beim elastischen Stoß im CM-System. Besser ist es, Viererimpulse zu betrachten:  $q^2 = (p - p')^2 < 0$ . Dazu definieren wir uns noch  $Q^2 = -q^2$ , um mit positiven Größen arbeiten zu können. Unter Berücksichtigung des Rückstoßes modifiziert sich der Wirkungsquerschnitt gemäß<sup>1</sup>:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth.}} = \underbrace{\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^*_{\text{Ruth.}}}_{\text{Streuung an Masse } M=\infty \text{ wegen Rückstoß: } E' \neq E \text{ im Labor}} \underbrace{\frac{E'}{E}}_{\substack{\text{Phasenraumkorrektur} \\ \text{wegen Rückstoß: } E' \neq E \text{ im Labor}}} \quad (5.3)$$

Die Spin-Bahn-Kopplung ( $\vec{\ell}$ - $\vec{s}$ -Kopplung) führt beim Wasserstoffatom zur Feinstrukturaufspaltung in den gebundenen Zuständen. In der Nukleonstreuung erhalten wir eine Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie (*Mott-Streuung*): für  $\beta \rightarrow 1$ :

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \left( \frac{d\sigma}{dQ^2} \right)_{\text{Ruth.}} \cdot \left( 1 - \beta^2 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) = \left( \frac{d\sigma}{dQ^2} \right)_{\text{Ruth.}} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (5.4)$$

Die Helizität eines Teilchens ist über den Spin und den Impuls definiert:

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{\sigma}| |\vec{p}|} \quad (5.5)$$

Für ein Teilchen mit Spin  $s = 1/2$  ergibt sich eine Heilizität von  $\mathcal{H} = \pm 1$ . Nach der QED wird die Helizität bei einer Wechselwirkung zwischen Teilchen nicht geändert und für  $\beta = V/c \approx 1$  ist die Helizität eine Erhaltungsgröße.

Für ein masseloses Teilchen findet man kein Bezugssystem, in dem sich die Richtung von  $\vec{p}$  ändert, zumal sich solche Teilchen mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  fortbewegen. Also ist auch hier die Helizität erhalten.

<sup>1</sup>

$$(p - p')^2 = 2m_e c^2 - 2 \left( \frac{EE'}{c^2} - |\vec{p}||\vec{p}'| \cos \vartheta \right) \approx -\frac{4EE'}{c^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \quad \text{mit } |\vec{p}| \approx E$$

## 5.1 Elektromagnetische Formfaktoren des Nukleons

$$\begin{array}{ccc}
 \xrightarrow{\quad} & \rightarrow \vec{p}_e & \leftarrow \xrightarrow{\quad} \\
 \text{Laborsystem} & & \text{Bezugssystem} \\
 & & \text{mit } V_{\text{System}} = c \\
 \mathcal{H} = +1 & & \mathcal{H} = -1 \\
 V_e < c, \text{ da } m_e \neq 0 & &
 \end{array}$$

**Abb. 5.2:** Bezugssysteme und Helizität

Für ein massebehaftetes Teilchen ändert sich aber in einem Bezugssystem mit größerer Geschwindigkeit als der des Teilchen ( $V_{\text{System}} > V_{\text{Teilchen}}$ ) die Richtung des Impulses und damit auch das Vorzeichen der Helizität. Sie ist somit nicht mehr erhalten (Abb. 5.2).

Bei der Rückwärtsstreuung wechselt also die Helizität ihr Vorzeichen. Wegen der Drehimpulserhaltung kann der Spin aber nicht seine Richtung ändern und wegen  $\vec{L}_{\text{Bahn}} \perp \vec{s}$  ist keine Kopplung möglich. Somit ist die Rückwärtsstreuung wegen der Helizitätserhaltung verboten (im Laborsystem gilt:  $\cos^2 \frac{\theta}{2} = 0$  für  $\theta = 180^\circ$ , Abb. 5.3, vgl. Abschn. A.2).

Nun gestehen wir auch dem Proton einen Spin zu: In den gebundenen Zuständen führt die  $\vec{I}$ - $\vec{J}$ -Kopplung zur Hyperfeinstrukturaufspaltung. In den Streuzuständen müssen wir entsprechend die kurzreichweite Spin-Spin-Wechselwirkung berücksichtigen ( $\propto 1/r^3$ ), welche durch einen  $\sin^2 \theta$ -Term zum Ausdruck kommt (immer noch für  $\beta \rightarrow 1$ ):

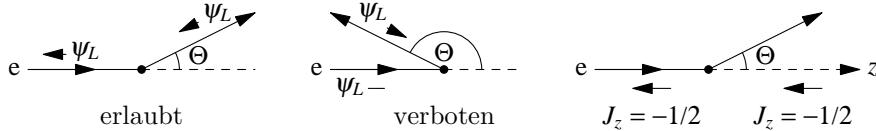
$$\begin{aligned}
 \left( \frac{d\sigma}{dQ^2} \right)^{\text{Lab}} &= \left( \frac{d\sigma}{dQ^2} \right)^{\text{Lab}}_{\text{Ruth.}} \cdot \left( \underbrace{\cos^2 \frac{\theta}{2}}_{\text{Mott}} - \underbrace{\frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}_{\text{Spin-Flip}} \right) \\
 &= \left( \frac{d\sigma}{dQ^2} \right)^{\text{Lab}}_{\text{Mott}} \cdot \left( 1 - \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Ein Spin-Flip des Elektrons kann nun durch einen Spin-Flip des Kerns kompensiert werden. Der Faktor  $Q^2/M^2$  für die erlaubte Rückwärtsstreuung lässt sich über die Spinwechselwirkung erklären:

$$V = -\mu \int \nabla B \cdot dl \quad \text{mit } \mu = g \frac{e}{2M} \frac{\hbar}{2} \propto \frac{1}{M}$$

Auch wächst  $B(r)$  mit der Eindringtiefe und damit auch mit  $Q$ . Da für den Wirkungsquerschnitt  $\sigma \propto |V|^2 \propto \frac{Q^2}{M^2}$  gilt, erklärt sich der Faktor  $\propto \frac{Q^2}{M^2}$ .

Am  $\sin^2 \theta/2$ -Term lässt sich erkennen, daß bestimmte Streuwinkel (z. B.  $\theta = 0$ ) unterdrückt werden; magnetische Wechselwirkung bedeutet immer Spin-Flip: Der Spin-Flip müßte durch einen Drehimpulsübertrag kompensiert werden. Da  $\ell = 0$  bei  $\theta = 0$ , ist dies aber nicht möglich, weswegen der differentielle Wirkungsquerschnitt für diesen Winkel verschwindet. Rückwärtsstreuung ist nur mit magnetischem Spin-Flip möglich.



**Abb. 5.3:** Erlaubte und unterdrückte Streuwinkel bei Berücksichtigung des Spins

Das Nukleon  $N$  ist nicht punktförmig, es besitzt eine endliche Ausdehnung: In den gebundenen Zuständen beobachten wir daher eine Isotopieverschiebung der untersten Niveaus (in der Hyperfeinstruktur), bei Streuzuständen wird der Wirkungsquerschnitt bei kleinen Abständen (hohen  $Q^2$ ) modifiziert: Wir ergänzen daher (5.6) um den *Formfaktor*  $F(Q^2)$ , der die Verteilung der elektrischen Ladung im Nukleon beschreibt. Diese Beschreibung ist allerdings nur im Breit-System möglich:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \begin{cases} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} F(Q^2) & (\text{Spin}=0) \\ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \left(A(Q^2) - B(Q^2) \frac{Q^2}{M^2} \tan^2 \frac{\theta}{2}\right) & (\text{Spin}=\frac{1}{2}) \end{cases} \quad (5.7)$$

Zusätzlich zur Wechselwirkung zwischen der Ladung des Elektrons und der des Kerns muß auch die Wechselwirkung zwischen dem Strom des Elektrons und dem magnetischen Moment des Nukleons berücksichtigt werden. Aus diesem Grund haben wir es hier mit zwei Formfaktoren  $A$  und  $B$  zu tun. Der Faktor  $F(Q^2)$  gibt Aufschluss über die Verteilung der elektrischen Ladung im Nukelon und wird daher elektrischer Formfaktor genannt. Der Faktor  $B(Q^2)$  heißt *magnetischer Formfaktor* und gibt Aufschluss über die Verteilung des magnetischen Momentes.

Die Auswirkungen von Spin und Spin-Bahn-Kopplung bei der Streuung von Elektronen an Wasserstoff illustriert abschließend nochmals Abb. 5.4. Die Gestalt des magnetischen Formfaktors  $G_M$  des Protons, den wir im folgenden Kapitel einführen und genauer betrachten werden, zeigt Abb. 5.5.

### 5.1.2 Messung der Formfaktoren des Protons

Der Streuquerschnitt lässt sich aus der QED herleiten. Dabei sind die Formfaktoren in den Amplituden zu berücksichtigen, woraus sich Interferenzen ergeben. Es ergibt sich:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \left( \frac{d\sigma}{dQ^2} \right)_{\text{Ruth}} \left[ \left( F_1^2 + \frac{\chi^2 Q^2}{4M^2} F_2^2 \right) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \frac{Q^2}{2M^2} (F_1 + \chi F_2)^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right] \quad (5.8)$$

Mit den Dirac-Formfaktoren und dem anomalen magnetischen Moment  $\chi \sim \frac{g-2}{2}$ . Für ein punktförmiges Teilchen ist  $\chi = 0$ . Durch die Interferenzen ergibt sich eine "unschöne" Schreibweise mit Mischtermen aus  $F_1$  und  $F_2$ . Durch die Einführung neuer Formfaktoren als Linearkombinationen von  $F_1$  und  $F_2$  kann dies umgangen werden:

$$G_E \equiv F_1 - \frac{\chi^2 Q^2}{4M^2} F_2 \quad \text{elektrischer Formfaktor} \quad (5.9)$$

$$G_M \equiv F_1 + \chi F_2 \quad \text{magnetischer Formfaktor} \quad (5.10)$$

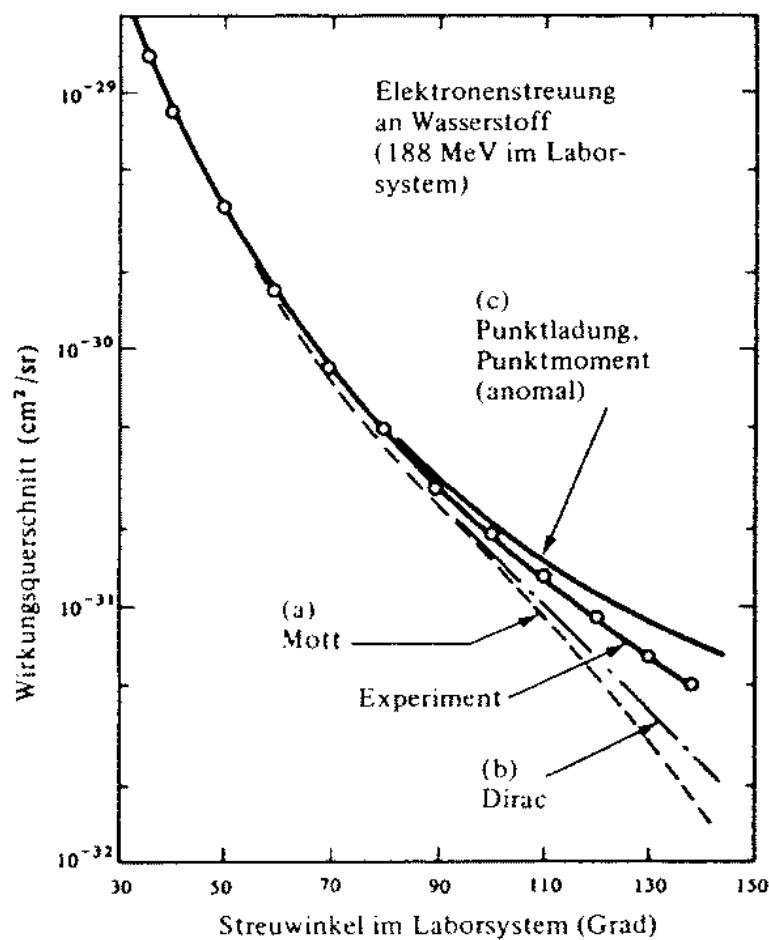


Abb. 5.4: Elektronenstreuung am Wasserstoff (aus [Fr91])

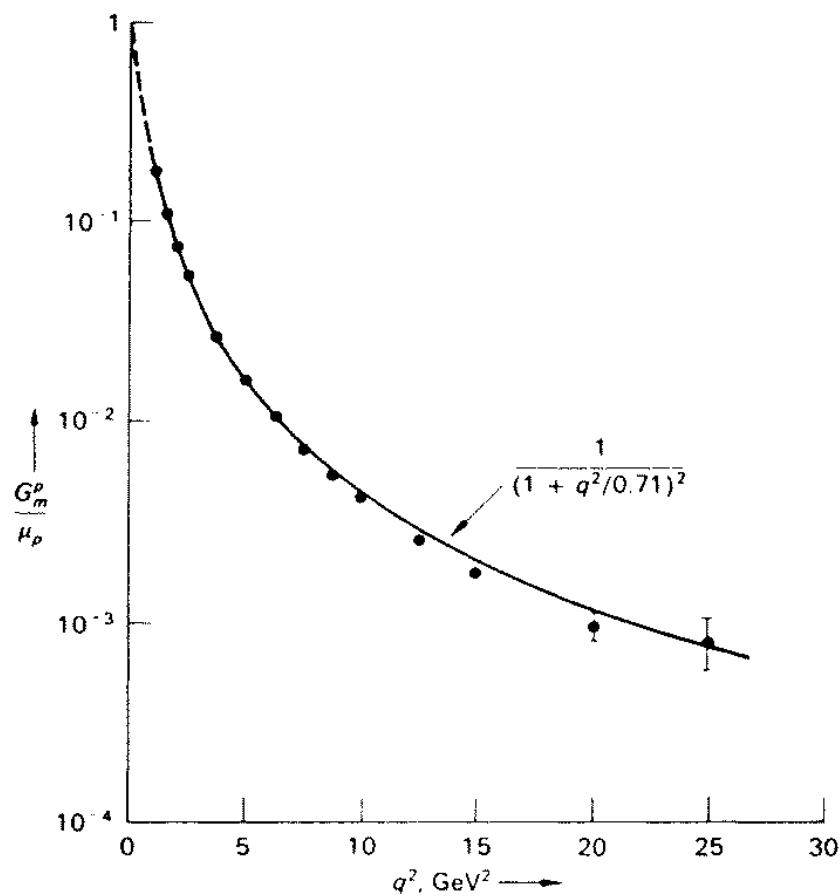


Abb. 5.5: Beispiel: Magnetischer Formfaktor des Protons (aus [Pe87])

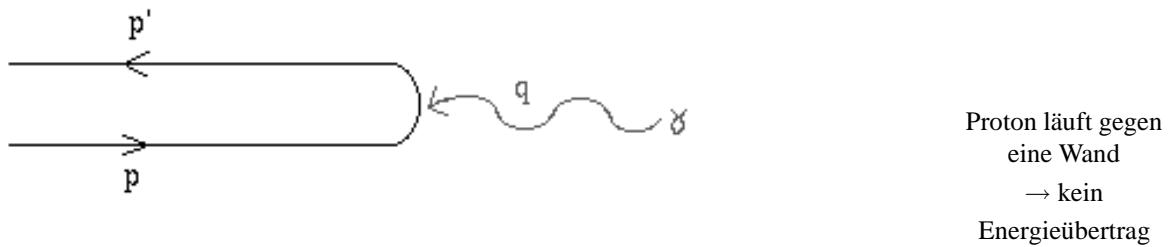


Abb. 5.6: Proton im Breitsystem

Mit diesen neuen Formfaktoren ergibt sich der Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{dQ^2} \right)_{\text{Mott}} \left[ \frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (5.11)$$

wobei

$$\left( \frac{d\sigma}{dQ^2} \right)_{\text{Mott}}^{\text{Lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\frac{\theta}{2})} \cdot \frac{E'}{E} \cdot \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

mit  $\tau = \frac{Q^2}{(4M^2c^2)}$  und dem positiv definierten Vierer-Impulsübertrag (zum Quadrat) bei der Streuung  $Q^2 \equiv -q^2$  (hier).  $G_E$  und  $G_M$  sind die elektrischen und magnetischen Formfaktoren (relativistische Generalisierungen der nichtrelativistischen Formfaktoren), die aber keine direkte Interpretation im Laborsystem haben. Wechselt man dagegen ins Breitsystem (siehe Abb. 5.6), so werden sie zu den sogenannten *Sachs*-Formfaktoren. Dann gibt  $G_E$  die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung und  $G_M$  die Fouriertransformierte der Stromverteilung an.

Für kleine  $Q^2$  (große Wellenlängen,  $\lambda \sim \frac{1}{|p|}$ ) ergibt sich die natürliche Normierung der Formfaktoren:

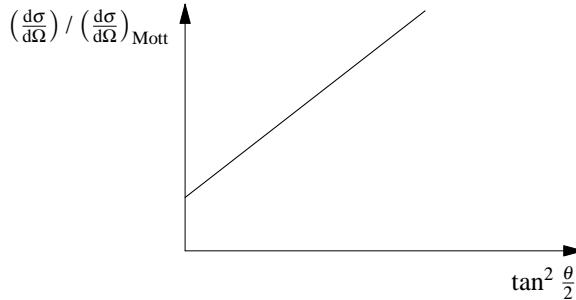
$$\begin{aligned} G_E^N(Q^2 = 0) &= q && \text{Normierung auf gesamte Ladung} \\ G_M^N(Q^2 = 0) &= \mu_N && \text{Normierung auf gesamtes magnetisches Moment} \end{aligned}$$

Für solch kleine  $Q^2$  ergibt sich aber eine unendliche Wellenlänge. Folglich lässt sich die Struktur des Nukelons nicht mehr auflösen. Die Werte für  $Q^2 = 0$  müssen also anderweitig bestimmt werden.

Man kann die Formfaktoren sehr einfach mit Hilfe der *Rosenbluth-Methode* bestimmen (Abb. 5.7). Wie verteilen sich Ladungen und Ströme im Nukleon ( $Q^2$ -Verhalten der Formfaktoren)?

Mißt man den gemessenen Wirkungsquerschnitt bei verschiedenen, jeweils festen Werten von  $Q^2$ , dividiert ihn durch den Mott-Streuquerschnitt, und trägt die Resultate gegen  $\tan^2(\theta/2)$  auf, so ergibt sich nach (5.11) eine Gerade, aus der sich die Sachs-Formfaktoren direkt ablesen lassen: Aus der Steigung erhält man  $G_M^2(Q^2)$ , aus dem Achsenabschnitt lässt sich  $G_E^2(Q^2)$  bestimmen.

Jedoch ist zu beachten, daß  $Q^2$  eine Funktion des Winkels  $\theta$  ist (aus 3er Impulsübertrag); daher muß bei einer Variation von  $\theta$  zugleich mit einer Änderung der Strahlenergie kombiniert werden, um  $Q^2$  konstant zu halten.



**Abb. 5.7:** Für konstantes  $Q^2$  ergibt sich im  $\tan^2 \frac{\theta}{2} - (\frac{d\sigma}{d\Omega}) / (\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{Mott}}$ -Diagramm eine Gerade

**Funktionale Form der Formfaktoren:** Im folgenden geben wir die experimentell bestimmte Form der Sachs-Formfaktoren für Protonen (p) und Neutronen (n) an. Die Streuung an Protonen ist leicht zu realisieren; auf Grund der Instabilität von Neutronen ist hier die Streuung wesentlich schwieriger. Kennt man allerdings alle Parameter des Protons, so lassen sich aus der Streuung an Deuterium die Parameter des Neutrons bestimmen. Für das Proton findet man:

$$G_E(q^2) = \left(1 + \frac{q^2}{M_V^2}\right)^{-2} \text{ „Dipolform“} \quad (5.12)$$

mit  $M_V^2 = (0.84 \text{ GeV})^2$ . Experimentell findet man:

$$\begin{aligned} G_E^p(q^2) &= G_M^p(q^2) \frac{1}{\mu_p} \\ &= G_M^n(q^2) \frac{1}{\mu_n} = G(Q^2) \\ G_E^n(q^2) &\equiv 0 \end{aligned}$$

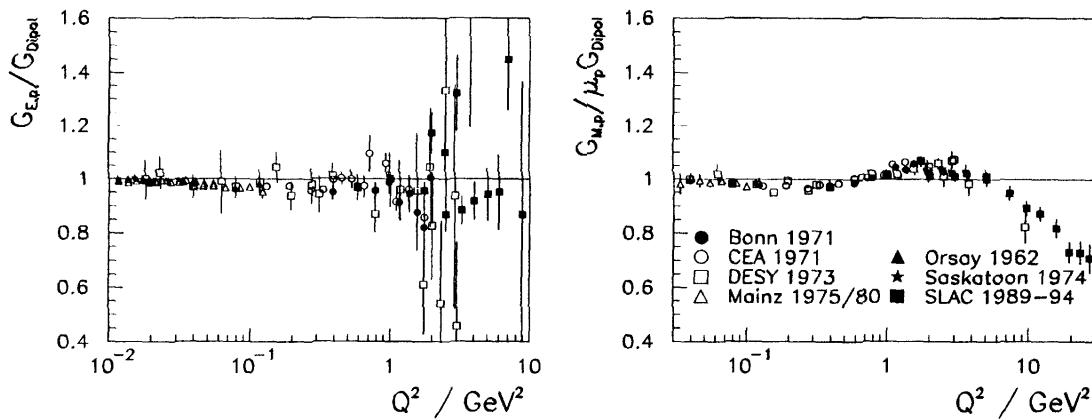
mit  $\mu_p = 2.79$ ,  $\mu_n = -1.91$ . Diese magnetischen Momente werden in Einheiten des Kernmagnetons  $\mu_N = e\hbar/(2M_p)$  skaliert. Die Formfaktoren haben universelle Form ( $Q^2$ -Abhängigkeit). Abb. 5.8 zeigt gemessene Formfaktoren. Die Graphen stellen jeweils nur den Quotienten zur Dipolform (5.12) dar. Im allgemeinen beobachtet man nur kleine Abweichungen davon.

**Interpretation der Formfaktoren:** Eine Interpretation der Formfaktoren kann im Breit-System erfolgen, wo sie die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung darstellen. Man hat also etwas wie

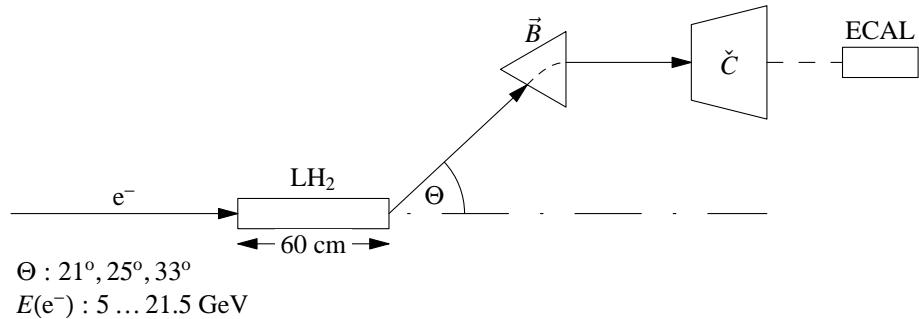
$$\rho(r) = \rho(0)e^{-ar} \quad \text{mit} \quad a = 4.27 \text{ fm.}$$

Diese exponentiell abfallende Ladungsverteilung zeigt uns also deutlich, daß Nukleonen diffuse Gebilde sind. Erste Messungen der Formfaktoren wurden von D. R. Hofstader in Stanford mittels eines Elektronenbeschleunigers durchgeführt, dessen Prinzip in Abb. 5.11 gezeigt ist (Nobelpreis<sup>2</sup> 1961).

<sup>2</sup><http://www.nobel.se/laureates/physics-1961.html>



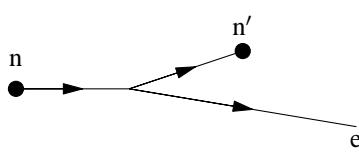
**Abb. 5.8:** Elastische Proton-Formfaktoren  $G_E$  (links) und  $G_M$  (rechts). Dargestellt sind nur Abweichungen von der Dipolform (5.12)



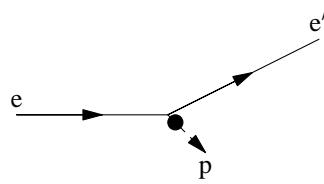
**Abb. 5.9:** Aufbau zur Messung der elastischen e-p-Streuung:  $\text{LH}_2$ -Target (flüssiger Wasserstoff  $H_2$ ), 25 cm lang, bzw. 65 cm lang für Messungen mit hohem Impulsübertrag  $Q^2$ ; Schwellenčerenkovzähler zur Elektronenidentifikation; 10 Ebenen Drahtkammern; Pb-Glas-Schauerzähler (Elektronen im Trigger; totale Pionen-Verwerfung:  $10^4$ )

**Messung der elastischen e-p-Streuung bei hohem Impulsübertrag  $Q^2$  (1986):** Am SLAC steht ein Elektronenstrahl mit  $E_{\max} = 50 \text{ GeV}$  zur Verfügung, welcher bei  $E_e = 5 \text{ GeV}$  bzw.  $E_e = 21.5 \text{ GeV}$  verwendet wird, wobei wegen des kleinen Wirkungsquerschnittes hohe Strahlintensitäten von Nötien sind ( $4 \cdot 10^{11}$  Elektronen pro Puls, Pulsdauer  $1.6 \mu\text{s}$ , Wiederholfrequenz  $180 \text{ Hz}$ ,  $\Delta E = 0.2\%$ ). Der Versuchsaufbau ist in Abb. 5.9 skizziert.

Der Impuls der gestreuten Elektronen wird mittels eines  $\vec{B}$ -Feldes bestimmt, ein Schwellenčerenkovzähler dient zur Diskriminierung anderer erzeugter Teilchen (z. B. Pionen), zumal bei solch hohen Elektronenenergien elastische Streuung nur einen von vielen möglichen Prozessen darstellt. Schließlich wird die Teilchenenergie mit einem ECAL (Abschn. 2.2.9) gemessen und mit dem Impuls verglichen, um eine weitere Pionenunterdrückung zu erhalten. Gestreute Elektronen wurden unter  $21^\circ$ ,  $25^\circ$  und  $33^\circ$  detektiert.



**Abb. 5.10:** Inverse Kinematik: fast ruhendes Hülle-nelektron; Neutronen aus Reaktor



**Abb. 5.11:** Elektronenbeschleuniger (Hofstaders Experiment)

### 5.1.3 Messung der Formfaktoren des Neutrons

**Ladungsradius des Neutrons – kleine  $Q^2$ :** Man streut Neutronen an Elektronen. Diese Umkehr der Streukinematik erreicht man mit einem „Elektronentarget“, welches einfach durch ein Material mit hoher Elektronenanzahl  $Z$  realisieren werden kann (Abb. 5.10) – die Streuung findet an den atomaren Elektronen statt. Den benötigten Neutronenstrahl erhält man beispielsweise einfach aus einem Reaktor.

Alternativ kann man sich auch des von D. R. Hofstader vorgeschlagenen Elektronenbeschleunigers bedienen, den wir im letzten Abschnitt bereits angesprochen haben.

Bei der Messung des Ladungsradius sind nur kleine Impulsüberträge möglich: Man mißt die Verteilung der auslaufenden Neutronen, und erhält die Formfaktoren der Neutronen für  $Q^2 \approx 0$ . Die Streulänge der starken Wechselwirkung, modifiziert mit dem elektromagnetischen Effekt des elektrischen Ladungsradius, ist definiert durch:

$$-6\hbar^2 \frac{dG_E^n(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0} = \underbrace{\frac{3}{2} \frac{\mu_n}{\mu_N} \left( \frac{\hbar}{m_n c} \right)^2}_{\text{Foldy-Term}} + \langle r_{E,n}^2 \rangle \quad (5.13)$$

Der *Foldy-Term* berücksichtigt die Wechselwirkung des Neutron-Spins mit dem Coulombfeld des Kerns. 1971 schließlich wurde  $\langle r_n^2 \rangle$  wie folgt bestimmt:

$$\langle r_n^2 \rangle = -6\hbar^2 \frac{dG_E^n(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0} = (-0.117 \pm 0.002) \text{ fm}^2 \quad (5.14)$$

Warum ergibt sich hier ein *negatives* mittleres Quadrat des Nukleonenradius  $\langle r_n^2 \rangle$ ? Nun, das magnetische Moment des Neutrons wechselwirkt mit dem Coulombfeld der Elektronen. Dieser Effekt ist größer als die „Ladung des Neutrons“ und findet Ausdruck im Foldy-Term. Da die magnetischen Komponenten nicht lorentzinvariant von den Ladungskomponenten getrennt werden können, tritt dieser Term stets auf. Wird er subtrahiert ( $= -0.127 \text{ fm}^2$ ), so erhält man:

$$\sqrt{\langle r_n^2 \rangle} = (0.1 \pm 0.01) \text{ fm}$$

Die Untersuchungen wurden 1976 am Physik-Department der Technischen Universität München durchgeführt.

Wir erinnern uns an die Herleitung des Ausdrucks zur Bestimmung von Kernradien bei der Besprechung von Formfaktoren und deren Eigenschaften in Abschn. 3.7.2.

Als Ergebnis erhalten wir: Neutronen sind nach außen neutral, sie setzen sich aber offensichtlich aus geladenen Teilchen zusammen. Zum Vergleich bringen wir noch das mittlere Radiusquadrat  $\langle r_p^2 \rangle$  des Protons:

$$\langle r_p^2 \rangle = -6\hbar^2 \frac{dG_E^p(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0} = 0.66 \text{ fm}^2 \Rightarrow \sqrt{\langle r_p^2 \rangle} = 0.862 \text{ fm}$$

Interessanterweise stimmen diese Werte aus der Elektronenstreuung nicht mit neuen Erkenntnissen aus der Präzissionsspektroskopie von Wasserstoff überein. Diese wurden von Professor Hänsch am Max-Plack-Institut für Quantenoptik in Garching durchgeführt.

**Formfaktoren des Neutrons – höhere  $Q^2$ :** Hier werden Elektronen an gebundenen Neutronen im Kern gestreut, da keine Targets mit freien Neutronen verfügbar sind. Somit werden Korrekturen durch Bindungseffekte notwendig, weswegen man gerne zu Kernen mit kleinen Bindungsenergien ( ${}^2\text{H}$ ,  ${}^3\text{He}$ ) greift, sodaß dann quasifreie Streuung am Neutron vorliegt. Allerdings limitieren immer noch theoretische Unsicherheiten bezüglich der Wellenfunktionen der Kerne (kohärente Überlagerung der Streuung an Neutron und Proton: Wellenfunktion muß bekannt sein) die absolute Genauigkeit der Messung, vor allem bei niedrigen  $Q^2 < 1 \text{ (GeV/c)}^2$ .

Bei neueren Messungen des magnetischen Formfaktors  $G_M^n$  (bestimmt durch  $\mu_n$ ) mißt man beispielsweise am  ${}^2\text{H}$  das Verhältnis der Formfaktoren von Proton  $G_M^p(Q^2)$  und Neutron  $G_M^n(Q^2)$ . Somit heben sich zunächst die Korrekturen heraus. Durch Nachweis des Rückstoßkerns kann man feststellen, ob man an einem Proton oder Neutron gestreut hat. Durch den Vergleich mit den absoluten Messungen von  $G_{M, \text{frei}}^p(Q^2)$  kann man  $G_{M, \text{frei}}^n(Q^2)$  gut bestimmen (Abb. 5.12).

Praktisch könnte man die Neutronen-Formfaktoren nach der Rosenbluth-Methode (Abschn. 5.1.2) bestimmen, wenn nicht in (5.11) der Ladungs-Formfaktor  $G_E^n \equiv 0$  wäre. Weiterhin ist die Messung des Ladungsradius empfindlich gegen induzierte magnetische Effekte, wie beispielsweise gegen die Wechselwirkung von  $\mu_N$  mit dem induzierten  $\vec{B}$ -Feld bei der Neutron-Elektron-Streuung (siehe Foldy- Term).

Als Lösung bietet sich hier die Nutzung von polarisierten Photonen an (siehe Abb. 5.13). Wegen der kohärente Überlagerung der “elektrischen” und “magnetischen” Streuung bekommt man Interferenzen.

$$\text{Messeffekt} \propto \underbrace{G_M^n}_\text{bekannt}^2 + \underbrace{G_E^n}_\text{klein, \approx 0}^2 + \overbrace{G_M^n \cdot G_E^n}^\text{Verstärkungsfaktoren} \quad (5.15)$$

Im Experiment streut man nun polarisierte Elektronen am Deuteron. Hier sind die Austauschphotonen auch polarisiert, je nach Streukinematik longitudinal oder transversal. Gemessen wird nun die Polarisation des auslaufenden Neutrons.

$$Vecp_n \sim G_E^n G_M^n + (G_M^n)^2$$

Diese lässt sich über eine weitere Streuung an Protonen (meist  ${}^{12}\text{C}$ ) bestimmen. Wegen der starken Wechselwirkung gibt es eine longitudinal/transversal Asymmetrie des Streuungsquerschnitts (siehe Abb. 5.14). Als Ergebnis erhält man:

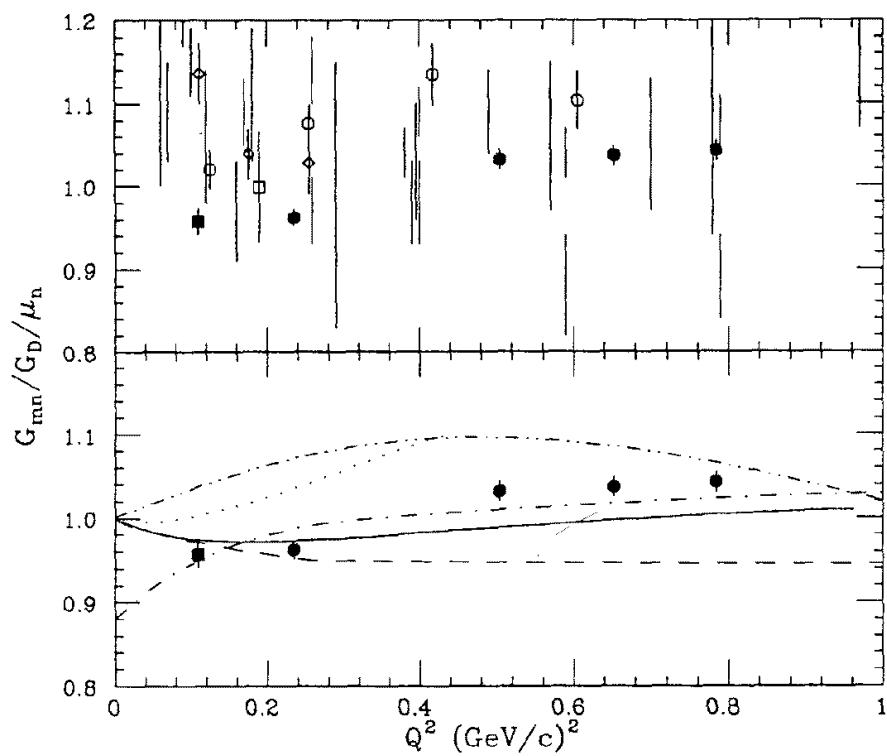
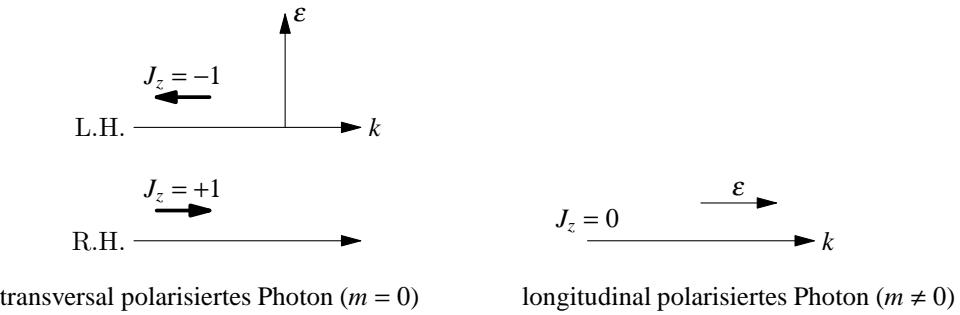
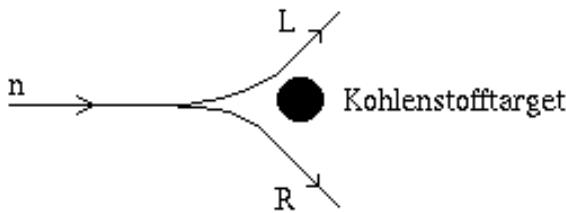


Abb. 5.12:  $G_M^n$ , Dipolfit,  $\mu_n$



**Abb. 5.13:** Polarisierte Photonen aus Streuung. Links ein reelles, rechts ein virtuelles Photon. Die Photonen weisen eine Polarisationsrichtung entsprechend der Magnetfeldrichtung auf.



**Abb. 5.14:** Streuung von Neutronen an Protonen in einem Kohlenstofftarget. Die Polarisationsachse steht senkrecht zu Streuebene.

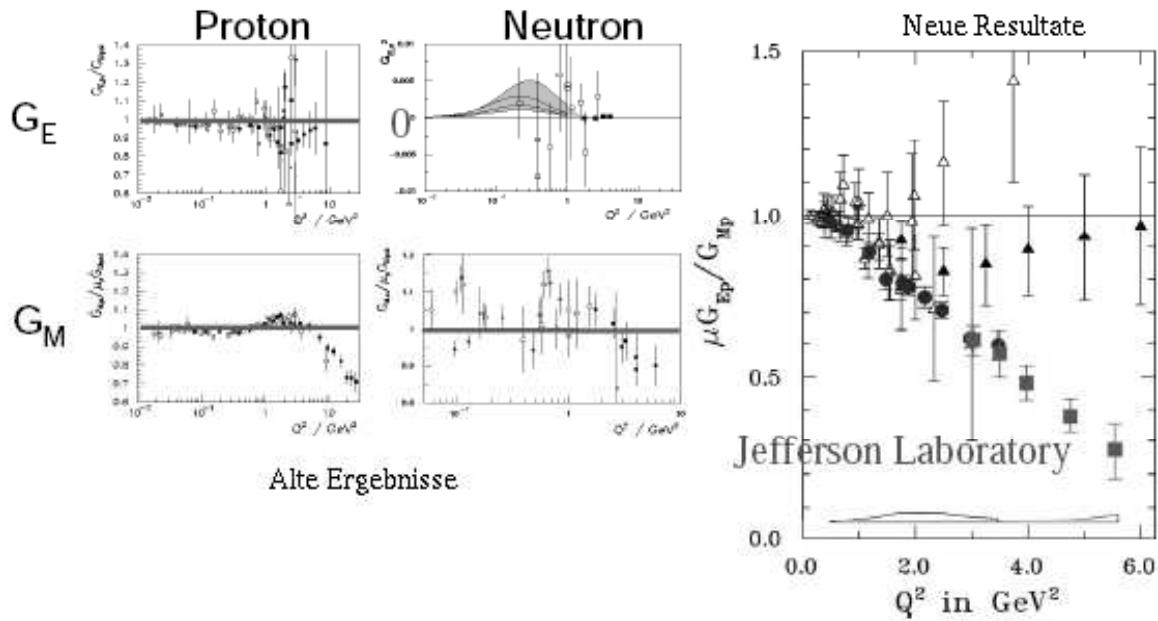
$$G_E^n(Q^2) \neq 0$$

Man sieht also, dass man hierdurch eine Verstärkung des sehr kleinen elektrischen Formfaktors  $G_E^n$  erhält.

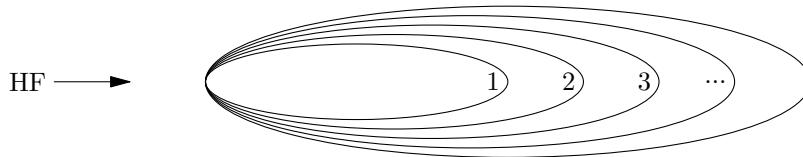
Diese sehr empfindliche Methode kann man auch verwenden um alle magnetischen und elektrischen Formfaktoren von Neutronen und Protonen zu bestimmen, als Alternative zu der Rosenbluth-Methode. Möglich wurde diese Messung durch die Bereitstellung von sehr intensiven polarisierten Elektronenstrahlen, z.B. am MAMI in Mainz oder JLAB in den USA. Wie man in Abb. 5.15 sieht, unterscheiden sich allerdings die Ergebnisse.

Zur Erklärung der Unterschiede ist die Theorie gefragt. Eine Annahme ist, dass bei der unpolarisierten Streuung der 2-Photonen-Austausch wichtiger ist, als bisher angenommen. Aus diesen Überlegungen ergeben sich Korrekturen zu der Rosenbluth-Formel.

**Neueste Elektronenbeschleuniger für Messungen am Neutron:** Beim Mainzer Mikrotron (MAMI), das wir hier exemplarisch besprechen wollen, handelt es sich um einen Elektronenbeschleuniger mit *racetrack*. Seine Besonderheit besteht darin, daß er nur eine HF-Strecke enthält:



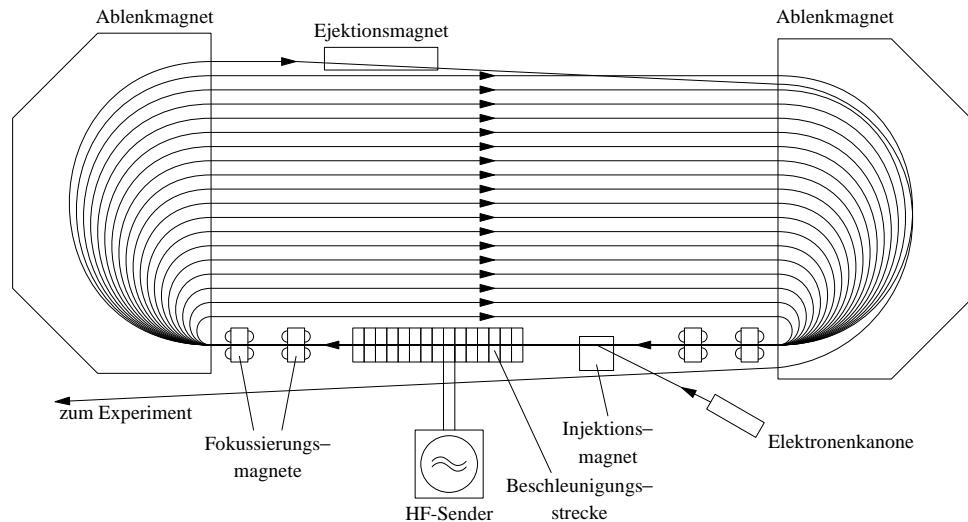
**Abb. 5.15:** Vergleich der Messung nach der Polarisations-Methode und nach der Rosenbluth-Methode



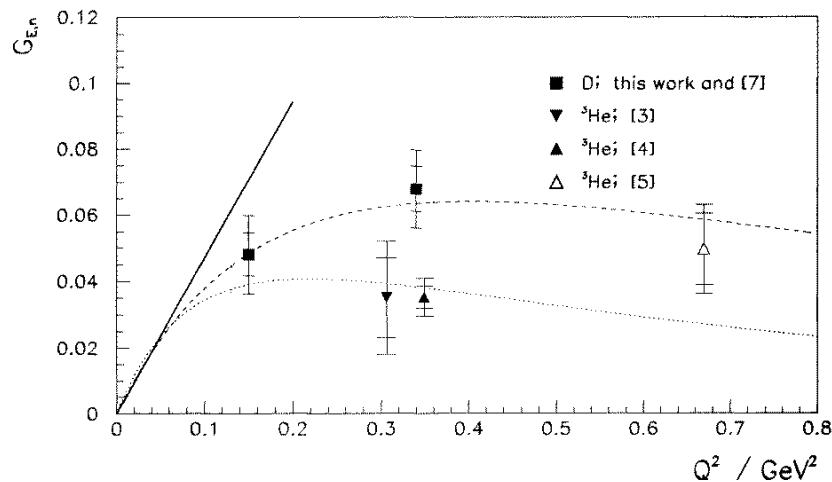
**Abb. 5.16:** Räumliche Trennung der Teilchenbahnen bei MAMI

Die Bahnen von Teilchen nach  $n$  bzw.  $n + 1$  Durchläufen der HF-Strecke werden so räumlich getrennt (Abb. 5.16).

Für jede Bahn existiert ein separates Strahlrohr sowie eine separate Magnetführung. Man erhält so eine wohldefinierte Fokussierung, die sehr gute Strahleigenschaften liefert: Mit MAMI erreicht man eine Energieschärfe von 50 keV bei  $E = 850$  MeV, ferner eine Intensität von  $100 \mu\text{A}$ . In Mainz werden drei Mikrotrons in Serie betrieben. Nachteilig wirkt sich neben dem aufwendigen Aufbau eines solchen Mikrotrons aus, daß die Variation des Bahnradius die Größe des Magneten vorgibt, welche ihrerseits technisch limitiert ist. So begrenzt Synchrotronstrahlung das maximal erreichbare  $E_{\max}$  auf relativ niedrige Energien. Der schematische Aufbau des Mainzer Mikrotrons ist in Abb. 5.17 skizziert.



**Abb. 5.17:** Schematischer Aufbau des Mainzer Mikrotrons.



**Abb. 5.18:** Messungen des elektrischen Formfaktors des Neutrons bei MAMI gemäß (5.15). Die Signaturen geben die verwendeten leichten Target-Atome (mit niedrigen Bindungsenergien) an.

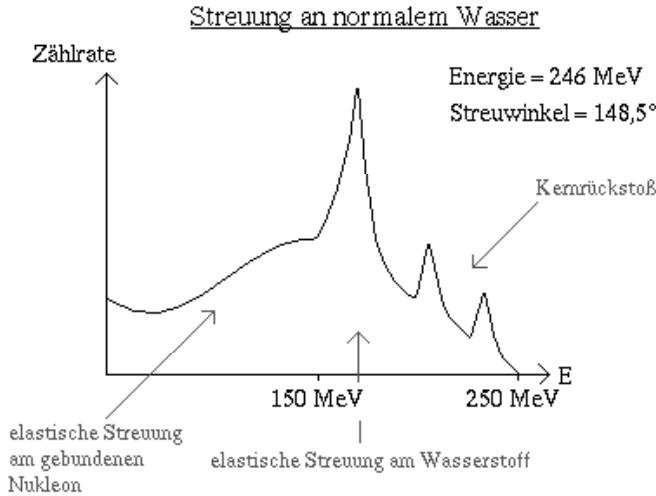


Abb. 5.19: Streuung von Elektronen an einem Kern

## 5.2 Quasielastische und inelastische Elektronenstreuung

### 5.2.1 Quasielastische Streuung

Für eine reine Streuung an einem Punktteilchen gilt für die gestreuten Elektronen

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2}(1 - \cos \vartheta)}$$

also eine direkte Korrelation zwischen der Energie und dem Streuwinkel. Bei der Streuung an Wasser ( $H_2O$ ) werden aber auch Elektronen am Sauerstoff gestreut, also auch an, im Kern gebundenen, Nukleonen. Damit ist der Energieübertrag (Rückstoß) eines solchen gebundenen Teilchens nicht mehr wohldefiniert (siehe Abb. 5.19).

Das gebundene Nukleon hat eine effektive Masse  $m_N^* > m_N$ . Es muss Arbeit aufgewendet werden, um das Nukleon aus dem Kernverband zu lösen. Folglich ist das Maximum des Streuquerschnitts verschoben.

Desweitern ruht ein gebundenes Nukleon nicht und es gilt die Heisenberg'sche Unschärferelation  $\Delta x \cdot \Delta p > \hbar$ . Folglich ist die Anfangskinematik nicht exakt bestimmbar, woraus sich eine Verbreiterung des elatischen Maximums ergibt.

Wir bezeichnen den Energieverlust des Elektrons mit  $v$ .

$$v = E - E'$$

Aus der Energiedifferenz  $v$  lassen sich nun Aussagen über das Austauschteilchen treffen:

$$v = \frac{Q^2}{2m_A} \quad Q^2 = (P - P')^2 = \frac{v^2}{c^2} - (\vec{p}_e - \vec{p}'_e)^2 = \frac{v^2}{c^2} - \vec{p}'_N^2$$

wobei  $m_A$  die Masse des Rückstoßpartners bezeichnet.

Für ein gebundenes Nukleon mit der Bindungsenergie  $E_B = -S$  gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} v &= E - E' = \left( Mc^2 + \frac{\vec{p}'^2}{2M} \right) - \left( Mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2M} - S \right) = \\ &= E'_p - E_p = \underbrace{\frac{(\vec{p} + \vec{q})^2}{2M}}_{\vec{p}'} - \frac{\vec{p}^2}{2M} + S = \frac{\vec{q}^2}{2M} + S + \frac{2|\vec{q}||\vec{p}|\cos\alpha}{2M} \end{aligned}$$

wobei  $\alpha$  der Winkel zwischen dem einlaufenden Impuls  $\vec{p}$  und dem ausgetauschten Impuls  $\vec{q}$  ist. Das gebundene Nukleon ruht auch nicht, sondern besitzt eine Impulsverteilung, welche der Bindungsenergie entspricht. Unter der Annahme, dass die Bewegung der Nukleonen im Kern kugelsymmetrisch ist, gilt:

$$\int_0^\pi \cos\alpha \, d\alpha = 0$$

Es ergibt sich ein mittleres  $v$  mit:

$$\bar{v} = v_0 = \frac{\vec{q}^2}{2M} + S$$

Aus der Verschiebung der Maxima im Vergleich zum freien Nukleon lässt sich  $S = -E_B$  bestimmen.

**Verschmierung von  $v$ :** Für die Varianz von  $v$  gilt:

$$\sigma_v = \sqrt{\langle(v - v_0)^2\rangle}$$

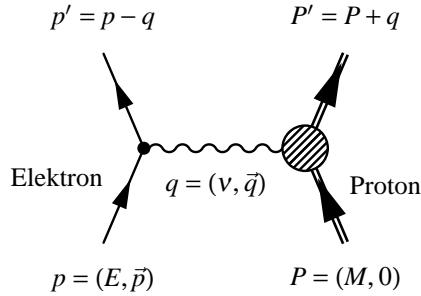
Mit  $\sigma^2 = \int(v - v_0)^2 f(v) dv$  und dem durch die Streukinematik bestimmten  $\vec{q}$  ergibt sich:

$$\sigma_v = \frac{|\vec{q}|}{M} \sqrt{\langle \vec{p}^2 \cdot \cos^2 \alpha \rangle} = \frac{|\vec{q}|}{M} \sqrt{\frac{1}{3} \langle \vec{p}^2 \cdot \rangle}$$

Aus der Breite der Verteilung lässt sich nun der mittlere Impuls der Nukleonen  $\sqrt{\langle \vec{p}^2 \rangle}$  bestimmen. Dieser Impuls wird auch Fermiimpuls genannt (zumal ein Kern als Fermi-Gas beschrieben werden kann). Aus dem Experiment erhält man:

$$\sqrt{\langle \vec{p}^2 \rangle} \approx 150 \text{ MeV/c}$$

Der genaue Wert ist abhängig von der Massenzahl des Kernes, da hier die Bindungsenergie eingeht.



**Abb. 5.20:** Inelastische Streuung am Nukleon im Feynmandiagramm. Es bedeuten:  $M$  Masse des Nukleons,  $v = E - E'$  übertragene Energie,  $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$  übertragener Impuls,  $Q^2 = -q^2 = \vec{q}^2 - v^2$

$$\frac{\sqrt{\langle \vec{p}^2 \rangle_{\text{Pb}}}}{\sqrt{\langle \vec{p}^2 \rangle_{^6\text{Li}}}} \approx 1,6 \quad \frac{S_{\text{Pb}}}{S_{^6\text{Li}}} \approx 2,6$$

### 5.2.2 Inelastische Streuung

Bisher haben wir nur elastische Streuung am Nukleon betrachtet: Das Nukleon blieb beim Streuprozess immer im Grundzustand, und die vom ausgetauschten Photon übertragene Energie ging in die Rückstoßbewegung des Nukleons.

Bei den nun betrachteten Prozessen wird das Nukleon durch Übertragung von Energie und Impuls in einen angeregten Zustand versetzt (Abb. 5.20). Auch die Masse des nun angeregten Teilchens ändert sich.

Für die invariante Masse  $W$  des angeregten Zustands gilt:

$$W^2 = P'^2 = (P + q)^2 = M^2 + 2P \cdot Q - Q^2$$

Im Laborsystem ( $\vec{p}_N = 0; P = (M_N, 0); q = (E - E', \vec{q})$ ) gilt außerdem:

$$P \cdot Q = vM \quad \Rightarrow \quad W^2 = M^2 - Q^2 + 2Mv$$

Für  $v = E - E'$  ergibt sich für die, vom virtuellen Photon übertragene, Energie  $E'_K$ :

$$E'_K = v + m$$

- Für die elstatische Streuung gilt:  $W = M$

$$v = \frac{Q^2}{2M} \quad (\text{elastische Streuung})$$

(5.16)

- Für die inelastische Streuung gilt:  $W > M$

$$2Mv - Q^2 > 0 \quad (\text{inelastische Streuung}) \quad (5.17)$$

**Differentieller Wirkungsquerschnitt:** Zur Erinnerung: Für die elastische Streuung am punktförmigen Proton fanden wir in (5.6):

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ 1 + \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta \left( v - \frac{Q^2}{2M} \right) \quad (5.18)$$

mit  $v = E - E'$ . Um  $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{Mott}}$  aus (5.6) zurückzuerhalten, integriere (5.18) einfach über  $E'$ .

Für die inelastische Streuung gilt nun:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \underbrace{\left[ W_2(v, Q^2) + 2W_1(v, Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right]}_{\text{„Strukturfunktionen“ des Nukleons}} \quad (5.19)$$

Die Strukturfunktionen  $W_1(v, Q^2)$  und  $W_2(v, Q^2)$  reduzieren sich im Fall der elastischen Streuung auf die Formfaktoren, die nur noch von  $Q^2$  abhängen. Sie lassen sich – wie die Formfaktoren – durch das Rosenbluth-Verfahren (Abschn. 5.1.2) bestimmen.

## 5.3 Angeregte Zustände des Nukleons

Beobachtung von Resonanzerscheinungen in der inelastischen Elektronenstreuung am Proton. Der Wirkungsquerschnitt für inelastische Elektron-Proton-Streuung im Resonanzbereich ist in Abb. 5.21 gezeigt.

Wichtig ist der erste angeregte Zustand im Nukleon, die  $\Delta$ -Resonanz (erhöhter Peak auf rechter Seite, d.h. bei niedrigem  $W$ , in Abb. 5.21). Die Masse dieses angeregten Zustandes ist  $M_\Delta = 1232 \text{ MeV}/c^2$  (auch  $\Delta(1232)$  geschrieben). Dieser kommt in vier Ladungszuständen vor:

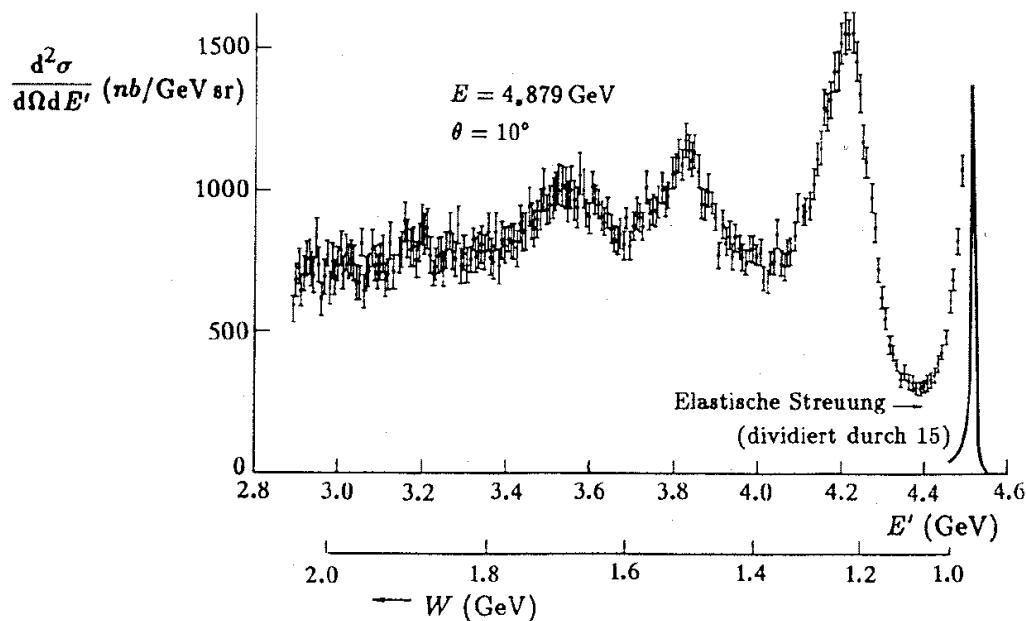
$$\Delta^- \quad \Delta^0 \quad \Delta^+ \quad \Delta^{++}$$

Für eine genauere Beschreibung (auf Quark- Niveau) der  $\Delta$ - Teilchen sei hier auf Kapitel 6 verwiesen.

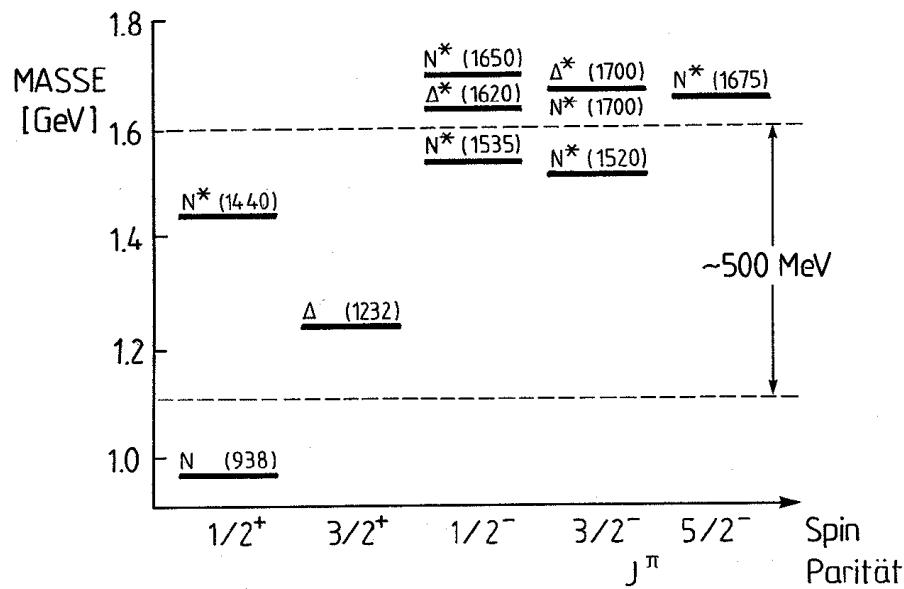
Die Breite dieser Erhöhung (des Resonanzpeaks) im Wirkungsquerschnitt ist größer als die experimentelle Auflösung. Der  $\Delta$ -Zustand ist also energieunscharf ( $\Delta E = \Gamma$ ).

Mit  $\Delta E \cdot \Delta t = \hbar$  gilt:

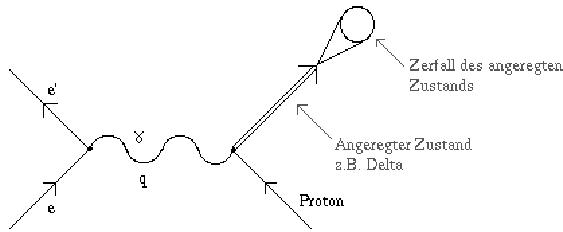
$$\Delta t = \tau = \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\hbar}{\Gamma}$$



**Abb. 5.21:** Differentieller Wirkungsquerschnitt für die inelastische Elektron-Proton-Streuung im Resonanzbereich – Spektrum der gestreuten Elektronen bei Elektron-Proton-Streuung, aufgenommen bei einer Elektronenenergie  $E = 4.9 \text{ GeV}$  unter einem Streuwinkel von  $\vartheta = 10^\circ$  (aus [Ba68]).



**Abb. 5.22:** Angeregte Zustände des Nukleons. Resonanzen, die in der Pion-Nukleon- und Photon-Nukleon-Streuung beobachtet werden, geordnet nach ihrem Spin (Gesamtdrehimpuls) und ihrer Parität (Eigenschaften des Zustands unter einer Raumspiegelung).



**Abb. 5.23:** Erzeugung und Zerfall eines  $\Delta$ -Zusatandes, hier  $\Delta^+$

Für den  $\Delta$ -Zustand misst man:  $\Gamma_\Delta \approx 120\text{MeV}$ . Somit ergibt sich eine Halbwertszeit von  $\tau = 5,5 \cdot 10^{-24}\text{s}$ , also ein sehr schneller Zerfall. Der Zustand zerfällt über die starke Wechselwirkung (siehe Abb. 5.23), wobei Prozesse auf solchen Zeitskalen charakteristisch für diese Wechselwirkung sind:

$$\begin{aligned}\Delta^+ &\rightarrow p + \pi^0 \\ \Delta^+ &\rightarrow n + \pi^+\end{aligned}$$

Es gibt viele Nukelonresonanzen, auf die wir später noch genauer eingehen werden. Allgemein lässt sich aber sagen:

- Die Breite der Resonanzen wächst mit ihrer Masse  $W = M_{Res}$ .
- Bei großen Massen  $W$  überlappen sich die Resonanzen.
- Einzelne Resonanzen sind für Massen größer als 2,5 GeV kaum noch erkennbar, sie verschmieren zu einem Kontinuum.

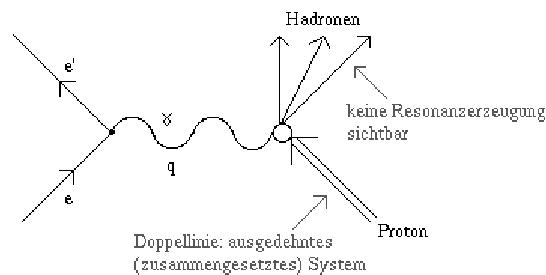
## 5.4 Tiefinelastische Streuung

Bei der tiefinelastischen Streuung werden keine Resonanzen erzeugt, sondern, wie in Abb. 5.24 gezeigt, direkt viele Hadronen.

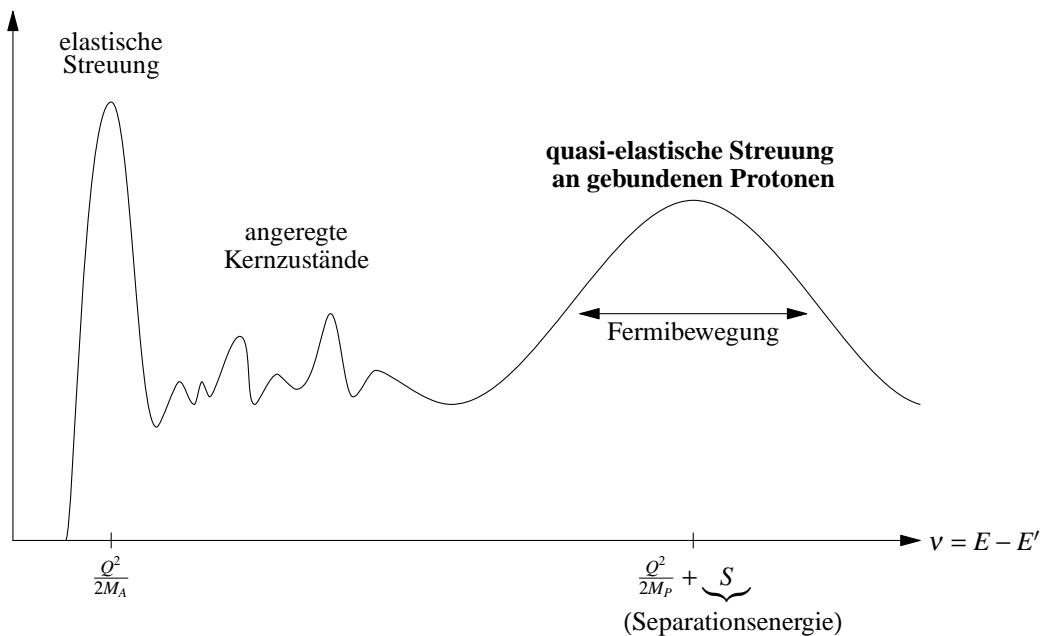
Die Bedeutung des Kontinuums wächst mit der Einschussenergie  $E_e$  (siehe Abb. 5.25):

**Kleine Energien  $E_e$  (kleine  $Q^2$ ):** Für Werte von  $Q^2 \approx 0,09\text{ GeV}^2$  ergibt sich eine Wellenlänge von  $\lambda_\gamma \approx 0,6\text{ fm}$ . Bei einem Radius des Protons von etwa 0,8 fm wird die Struktur des Nukelons kaum aufgelöst. Hier werden Kernresonanzen angeregt (Resonanzregion).

**Große Energien  $E_e$  (große  $Q^2$ ):** Für Werte von  $Q^2 \approx 4\text{ GeV}^2$  ergibt sich eine Wellenlänge von etwa 0,1 fm. In dieser Größenordnung lässt sich die Struktur des Nukelons gut auflösen, und Einzelteile des Nukleons können sichtbar gemacht werden.



**Abb. 5.24:** Tiefinelastische Streuung von Elektronen an einem Proton



**Abb. 5.25:** Spektrum der gestreuten Elektronen am Kern

Wir vergleichen nun den Wirkungsquerschnitt einer solchen hochenergetischen Streuung mit dem schon bekannten Mott-Wirkungsquerschnitt bei Streuung an punktförmigen Teilchen, wie bei der Extraktion der Formfaktoren.

$$R \equiv \frac{\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}}$$

Der Vergleich ist nur für feste Werte von  $W$  sinnvoll.

$$W^2 = M^2 + 2M(E - E') - Q^2$$

Aus Abb. 5.26 erkennt man, dass sich der Wirkungsquerschnitt immer mehr an den Mott-Wirkungsquerschnitt annähert, je größer  $W$  wird. Ab  $W > 3,5 \text{ GeV}$  wird der Streuungsquerschnitt mottartig und damit unabhängig von  $Q^2$ .

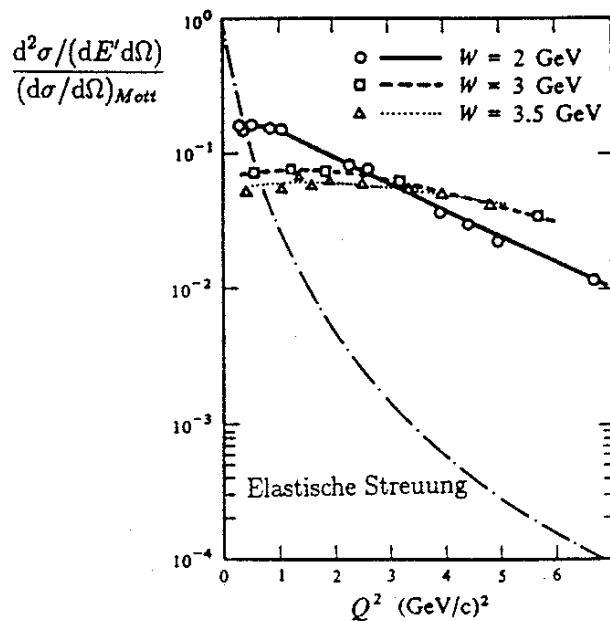


Abb. 5.26:  $Q^2$ -Abhängigkeit des Elektron-Proton-Streuquerschnitts (aus [Br69])

Wie schon früher festgestellt, bedeutet ein Streuungsquerschnitt unabhängig von  $Q^2$ , dass an punktförmigen Teilchen gestreut wurde. Wir streuen also elastisch an punktförmigen „Partonen“ im Nukleon und  $W_1(v, Q^2)$  und  $W_2(v, Q^2)$  werden unabhängig von  $Q^2$ . Hier ist ein Wechsel zu den sogenannten Bjorken-Skalenvariablen sinnvoll.

Für die weitere Diskussion wollen wir diese *Bjorkenschen-Skalenvariable* einführen:

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} = \frac{Q^2}{2Mv}$$

Diese Variablen gelten in jedem Bezugssystem und sind daher lorentzinvariant. Man beachten, dass das Bjorken x für höhere Energieüberträge kleiner wird. Für elastische Streuung gilt folglich  $x = 1$ , für inelastische Streuung  $0 < x < 1$  (eine Deutung dieser SkalenvARIABLE werden wir in Abschn. 5.5 vornehmen). Mit Hilfe der Bjorken-SkalenvARIABLE können wir nun dimensionslose Strukturfunktionen einführen:

$$\begin{aligned} F_1(x, Q^2) &= M W_1(v, Q^2) \\ F_2(x, Q^2) &= v W_2(v, Q^2) \end{aligned}$$

Betrachten wir als Beispiel die elastische Streuung am punktförmigen Nukleon (aus Vergleich mit dem Mott-Streuquerschnitt):

$$W_1^{\text{el}}(v, Q^2) = \frac{Q^2}{4M^2} \delta\left(v - \frac{Q^2}{2M}\right) = \frac{x}{2M} \delta(1-x), \quad (5.20)$$

$$W_2^{\text{el}}(v, Q^2) = \delta\left(v - \frac{Q^2}{2M}\right) = \frac{1}{v} \delta(1-x), \quad (5.21)$$

also:

$$F_1^{\text{el}} = \frac{x}{2} \delta(1-x), \quad (5.22)$$

$$F_2^{\text{el}} = \delta(1-x) \quad (5.23)$$

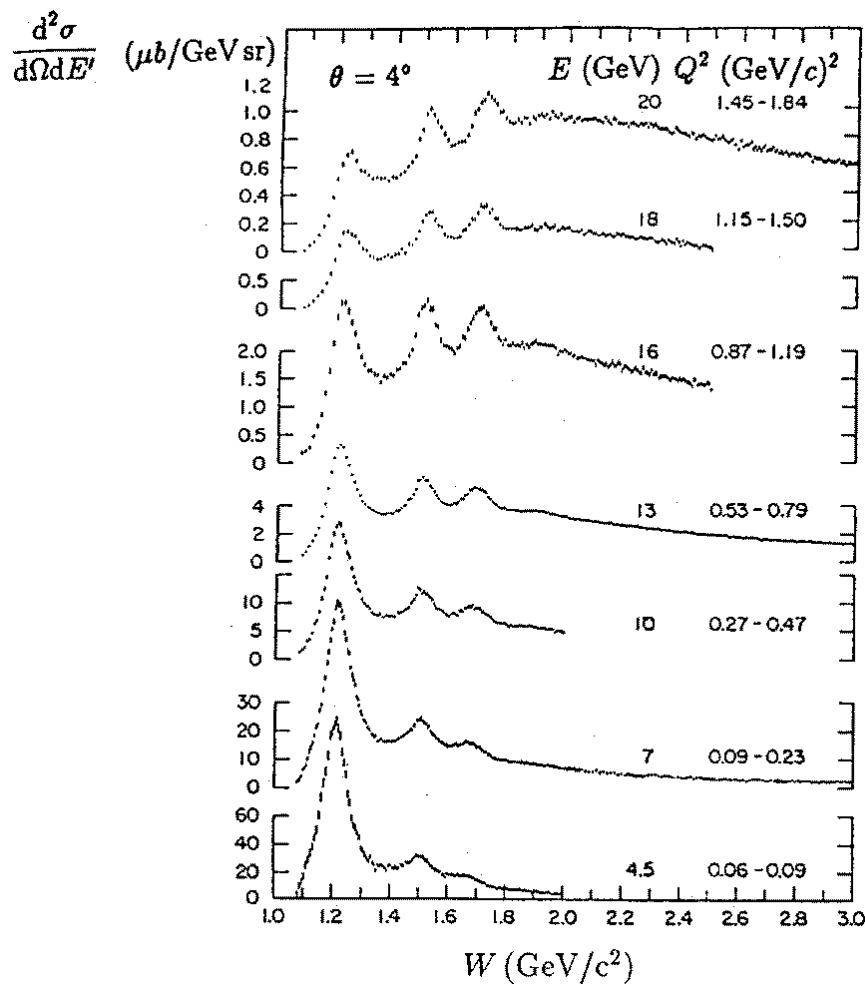
Man beachte: Es gibt keine  $Q^2$ -Abhängigkeit für die Streuung an punktförmigen Teilchen. Typische Spektren zeigt Abb. 5.27. Ein Vorteil die Strukturfunktionen in Abhängigkeit von x zu formulieren liegt in deren Lorentzinviananz begründet. Waren die Strukturfunktionen  $W_i(v, Q^2)$  an das jeweilige Bezugssystem gekoppelt, gelten die oben definierten „Strukturfunktionen“ da, wie wir später sehen werden, diese Strukturfunktionen als Formfaktoren der Quarks interpretiert werden können)  $F_i(x)$  in jedem beliebigen System, zumal diese nur von x abhängen und sich jene Eigenschaft von x vererbt.

Als Ergebnis können wir festhalten:

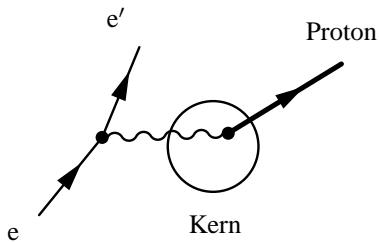
- Die Strukturfunktion zeigt Skalenverhalten, sogenanntes „Bjorken- Scaling“, im tiefinelastischen Bereich. Dort hängen  $F_1(x), F_2(x)$  nur noch von x ab (siehe Abb. 5.29). Dies bedeutet:
- Im Inneren des Nukleons befinden sich *punktförmige Konstituenten*.

## 5.5 Das Partonmodell

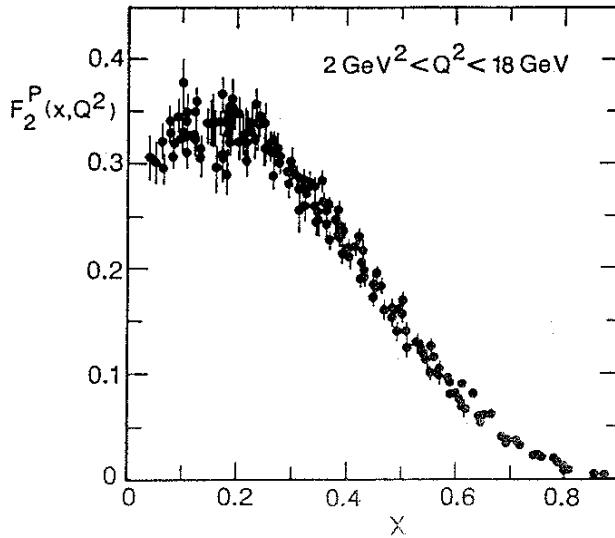
Man interpretiert die Daten zur tiefinelastischen Leptonstreuung am Proton im sogenannten *infinite momentum frame* (IMF). Dies ist dasjenige (hypothetische) Bezugssystem, in welchem sich das Proton so schnell bewegt, daß transversale Impulskomponenten und Massen vernachlässigbar sind (Abb. 5.30, 5.31, siehe auch die Diskussion zum Breit- System).



**Abb. 5.27:** Elektron-Proton-Streuung: gemessene Anregungsspektren in der tiefinelastischen Elektron-Nukleon-Streuung als Funktion der invarianten Masse  $W$ . Man beachte die unterschiedlichen Skalen an der Ordinatenachse. Die Messungen wurden bei einem festen Streuwinkel von  $\vartheta = 4^\circ$  durchgeführt. Mit zunehmender Einfallsenergie  $E$  wächst der mittlere  $Q^2$ -Bereich der Daten. Während insbesondere die erste Resonanz ( $W = 1.232 \text{ GeV}/c^2$ ) immer weniger ausgeprägt wird, nimmt das Kontinuum ( $W \gtrsim 2.5 \text{ GeV}/c^2$ ) nur geringfügig ab (aus [St75]).



**Abb. 5.28:** Quasi-elastische Elektronenstreuung an gebundenen Protonen



**Abb. 5.29:** Die Strukturfunktion  $F_2$  des Protons als Funktion von  $x$  bei  $Q^2$ -Werten zwischen  $2(\text{GeV}/c)^2$  und  $18(\text{GeV}/c)^2$  (aus [At82])

**Partonen:** Als Feynman Bjorkens Daten und Arbeit in die Hände bekam, „gab“ es die Quarks noch nicht, und niemandem war klar, was Bjorken da im Nukleon sah. Darum war Feynman so vorsichtig, diese punktförmigen Konstituenten im Nukleon zunächst als Partonen zu bezeichnen. Basierend auf literarischen Vorbildern wurden sie dann von Gell-Mann als „Quarks“ bezeichnet (nach James Joyce in „Finnegans Wake“: Three quarks for master Mark). Geladene Partonen werden heute landläufig mit *Quarks* identifiziert.

Wir betrachten nun ein einzelnes Parton im IMF, an dem ein hochenergetisches Elektron elasti sch streut. Das Parton besitze vor dem Stoß den Viererimpuls

$$p = \xi P$$

Anschaulich: Das Parton trägt den Bruchteil  $\xi$  des Proton-Impulses  $P$ . Nach dem Stoß ist der Partonimpuls  $p+q$ . Da wir die elastische Streuung am Parton betrachten, ist die invariante Masse vor und nach dem Stoß identisch:

$$p^2 = (p + q)^2$$

also:

$$p^2 = p^2 + 2p \cdot q + q^2 = p^2 + 2\xi P \cdot q - Q^2$$

oder:

$$2\xi P \cdot q - Q^2 = 0$$

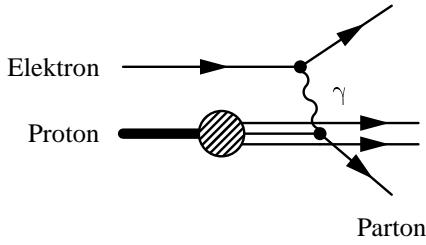
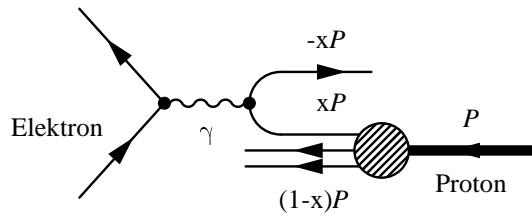


Abb. 5.30: Laborsystem

Abb. 5.31: *infinite momentum frame*

$$\Rightarrow \xi = \frac{Q^2}{2P \cdot q} \equiv x$$

Interpretation: Im IMF entspricht die Bjorken-Skalenvariable  $x$  dem Bruchteil des Protonimpulses, den das vom Photon getroffene Parton, trägt.

## 5.6 Callan-Gross-Relation

Bisher haben wir den Spin der Partonen nicht berücksichtigt. Das wollen wir nun nachholen: Betrachten wir dazu die elastische Streuung an einem punktförmigen Spin- $\frac{1}{2}$ -Parton, das im IMF einen Impulsbruchteil  $x$  des Protons trägt. Dem entspricht eine „Parton-, „Masse“  $\mu = xM$ . Nach (5.16) lautet die kinematische Bedingung für elastische Streuung  $Q^2 = 2\mu v = 2Mxv$ .

Nun vergleichen wir den differentiellen Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung am einzelnen Parton,

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left( 1 + \frac{Q^2}{2\mu^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \delta\left(v - \frac{Q^2}{2\mu}\right) \quad (5.24)$$

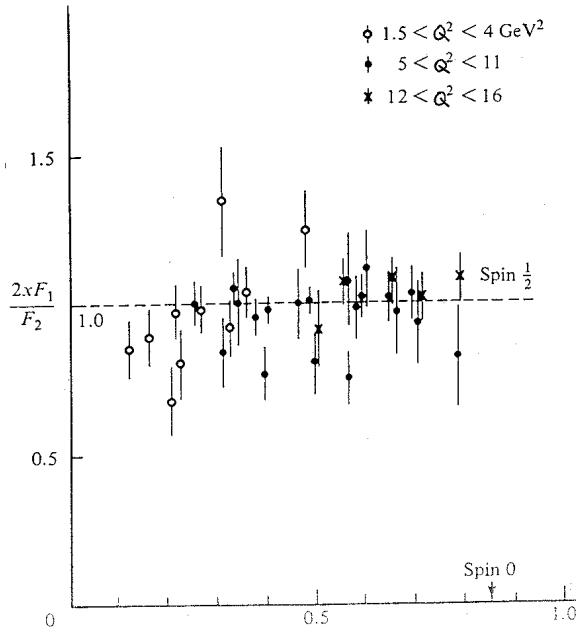
mit dem Wirkungsquerschnitt, der sich aus (5.20 – 5.23) sowie (5.7) zu

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left( \frac{F_2(x)}{v} + \frac{2F_1(x)}{M} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

ergibt, und erhalten daraus die *Callan-Gross-Relation*:

$$F_2(x) = 2xF_1(x).$$

Diese ist charakteristisch für punktförmige Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (Abb. 5.32). Für Spin-0-Partonen wäre  $F_1 = 0$ .



**Abb. 5.32:** Verhältnis der Strukturfunktionen  $2xF_1(x)$  und  $F_2(x)$ . Die Daten stammen aus Experimenten am SLAC. Wie man sieht, ist der Quotient etwa konstant Eins (aus [Po96]).

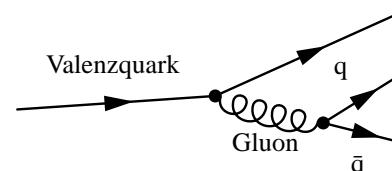
## 5.7 Quarkverteilungen im Nukleon

Die tiefinelastischen Lepton-Streuung am Proton liefert uns eine kohärente Superposition von elastischen Streuprozessen an punktförmigen Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, den Partonen. Identifizieren wir nun die (geladenen) Partonen mit Quarks! Es gibt zwei verschiedene Sorten von Quarks:

$$\begin{array}{c}
 p', s_f = \pm \frac{1}{2} \\
 \text{---} \\
 p, s_i = \pm \frac{1}{2}
 \end{array}
 \quad P' \quad P
 = \sum_i \int_0^1 d\xi z_i^2 \left( \begin{array}{c} p', s_f = \pm \frac{1}{2} \\ \text{---} \\ p, s_i = \pm \frac{1}{2} \end{array} \right) P' \quad P \quad (5.25)$$

**Valenzquarks:** Diese sind für die Quantenzahlen des Nukleons verantwortlich. Für die Ladung des u-Quarks finden wir  $z_u = 2/3$ , für die des d-Quarks  $z_d = -1/3$ . Somit können wir die Nukleonen wie folgt beschreiben:

Proton: Valenzquark-Inhalt uud, Ladung +1  
 Neutron: Valenzquark-Inhalt udd, Ladung 0



**See-Quarks:** Quark-Antiquark-Paare, welche zusätzlich zu den Valenzquarks durch starke Wechselwirkung im Nukleon existieren können (Abb. 5.33).

Abb. 5.33: See-Quarks

### Quark-Verteilungsfunktion im Partonmodell:

$q_i(x)$ : Wahrscheinlichkeitsdichte für Quarks der Sorte  $i$  ( $= u, d, s, \dots$ )  
 $\bar{q}_i(x)$ : Wahrscheinlichkeitsdichte für Antiquarks der Sorte  $i$

Mit der Definition:

$$q_i(x) dx := \text{Zahl der Quarks vom Typ } i \text{ mit Impulsbruchteil im Intervall } [x, x+dx]$$

**Strukturfunktionen:** Für die Untersuchung der Verteilung des Nukleonimpulses auf die Partonen schreiben wir gemäß (5.25):

$$\frac{1}{v} F_2(\xi) = \sum_{i=u, d, \dots} \int_0^1 d\xi z_i^2 [q_i(\xi) + \bar{q}_i(\xi)] \underbrace{\delta\left(v - \frac{Q^2}{2M\xi}\right)}_{\text{elastische Streuung am punktförmigen Parton}} \quad (5.26)$$

Nun benutzen wir noch

$$\delta\left(v - \frac{Q^2}{2M\xi}\right) = \frac{1}{v} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2Mv\xi}\right) = \frac{1}{v} \delta\left(1 - \frac{x}{\xi}\right) = \frac{\xi}{v} \delta(\xi - x) = \frac{x}{v} \delta(\xi - x)$$

und erhalten damit:

$$F_2(x) = x \sum_{i=u, d, \dots} z_i^2 [q_i(x) + \bar{q}_i(x)]. \quad (5.27)$$

Tiefinelastische Elektron- und Myonstreuung am Proton:

$$F_2^{\text{ep}}(x) = x \left[ \frac{4}{9} (u_p(x) + \bar{u}_p(x)) + \frac{1}{9} (d_p(x) + \bar{d}_p(x)) \right] + \dots$$

... am Neutron:

$$F_2^{\text{en}}(x) = x \left[ \frac{4}{9} (u_n(x) + \bar{u}_n(x)) + \frac{1}{9} (d_n(x) + \bar{d}_n(x)) \right] + \dots$$

Nutzen wir die Symmetrie unter Vertauschung von  $u \leftrightarrow d$ -Quarks,  $u_n(x) = d_p(x) \equiv d(x)$  und  $d_n(x) = u_p(x) \equiv u(x)$ , erhalten wir  $F_2^{\text{eN}}(x)$  gemittelt über Proton und Neutron:

$$F_2^{\text{eN}} = \frac{1}{2} [F_2^{\text{ep}}(x) + F_2^{\text{en}}(x)] = \frac{5}{18}x [u(x) + \bar{u}_x(x) + d(x) + \bar{d}_x(x)]$$

Konvention (Strukturfunktion des Nukleons):

$$F_2(x) = \frac{18}{5}F_2^{\text{eN}} = x \sum_i [q_i(x) + \bar{q}_i(x)]$$

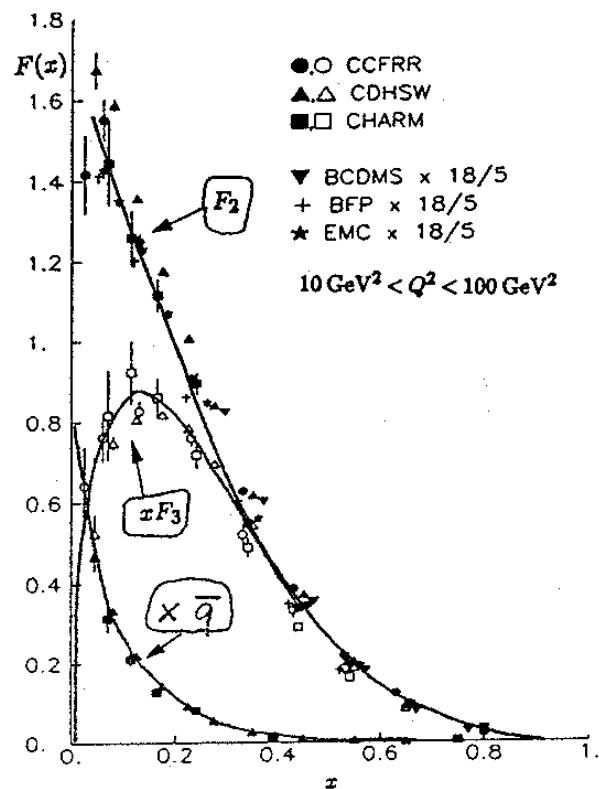
Die Valenzquarkverteilung

$$V(x) = \sum_i [q_i(x) - \bar{q}_i(x)] \equiv F_3(x)$$

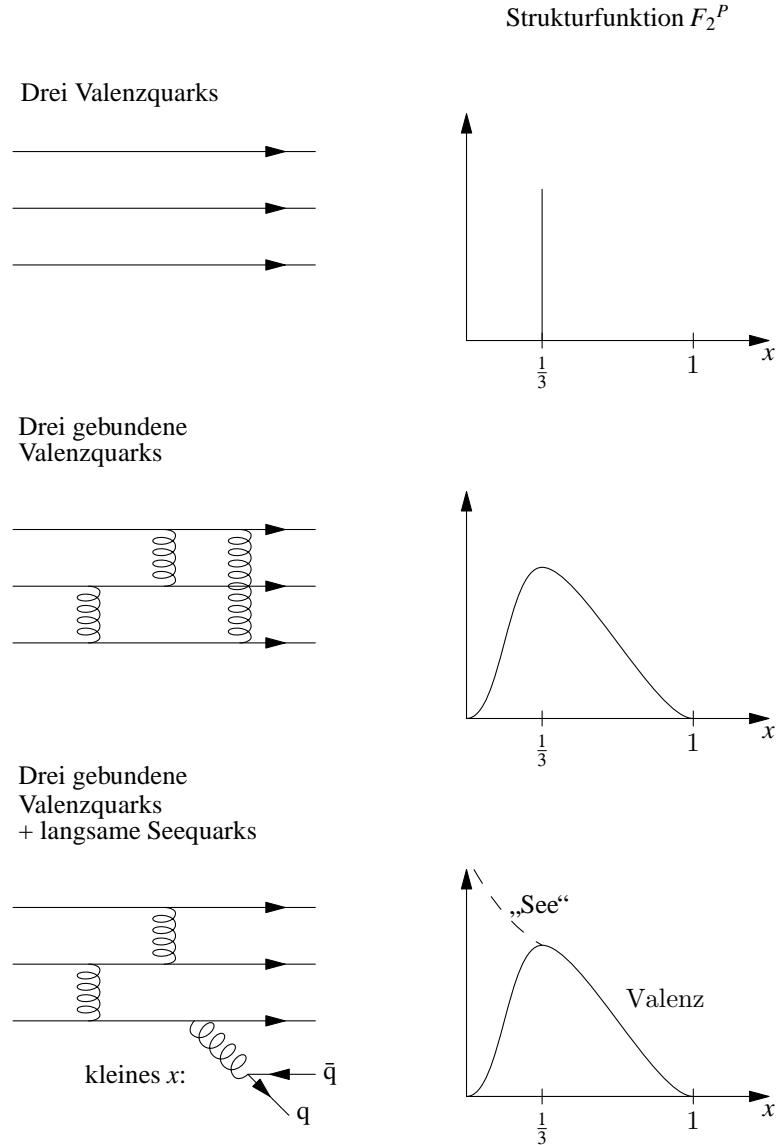
kann aus der Kombination von tiefinelastischer Elektron- (oder Myon-) Neutrinostreuung gewonnen werden:

$$\begin{aligned} q_i &= q_i^{\text{Val}} + q_i^{\text{See}}, \\ \bar{q}_i &= \bar{q}_i^{\text{See}} = q_i^{\text{See}} \\ \Rightarrow q_i - \bar{q}_i &= q_i^{\text{Val}} \end{aligned}$$

Ergebnisse werden in Abb. 5.34 gezeigt.



**Abb. 5.34:** Vergleich der Strukturfunktionen, die man bei der tiefinelastischen Streuung mit geladenen Leptonen und Neutrinos erhält. Neben der Strukturfunktion  $F_2$  sind die Verteilung der Antiquarks  $\bar{q}(x)$  (offene Symbole), aus der sich die Seequarkverteilung ergibt, und die Verteilung der Valenzquarks (hier mit  $xF_3(x)$  bezeichnet) angegeben (nach [PD94]).

**Abb. 5.35:** Schematische Darstellung der Strukturfunktion

## Übungen zu Kapitel 5

**Übung 5.1: Formfaktor einer homogenen Kugelladung.** Bestimmen Sie den Formfaktor, der aus der Ladungsverteilung einer homogen geladenen Kugel folgt:

$$f(r) = \frac{1}{Z} \rho(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} & \text{für } r \leq R, \\ 0 & \text{für } r > R. \end{cases}$$

In der elastischen Streuung von Elektronen an Kohlenstoff erhält man ein Minimum des differentiellen Wirkungsquerschnitts bei  $q \approx 1.8 \text{ fm}^{-1}$ . Bestimmen Sie daraus mit der obigen Ladungsverteilung den Radius des Kohlenstoffkerns.

**Übung 5.2: Zerfall des  $\pi^0$ -Mesons.** Ein  $\pi^0$ -Meson mit einem Impuls von  $135 \text{ MeV}/c$  zerfällt in zwei Photonen. Wie weit fliegt das Pion im Labor, bevor es zerfällt? Was ist der kleinste und größte Öffnungswinkel zwischen den Impulsen der beiden Photonen im Laborsystem? Hinweis:  $m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}/c^2$ ,  $\tau_{\pi^0} = 8.4 \cdot 10^{-17} \text{ s}$ .

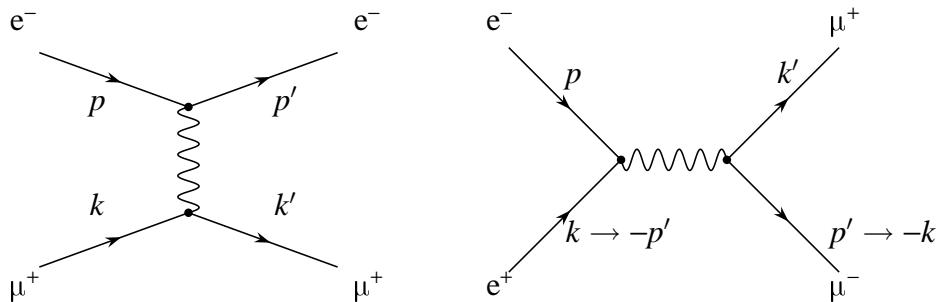
**Übung 5.3:  $\mu^+e^-$ - und  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ -Streuung.** Aus dem Wirkungsquerschnitt für die Elektron-Myon-Streuung, gegeben durch

$$\frac{d\sigma(\mu^+e^- \rightarrow \mu^+e^-)}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2W^2} \frac{1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

mit der totalen Schwerpunktsenergie  $W$  lässt sich unter Ausnutzung der „crossing“-Symmetrie, die dem Übergang zwischen  $s$ - und  $t$ -Kanal entspricht, der Wirkungsquerschnitt für die Reaktion  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  ableiten.

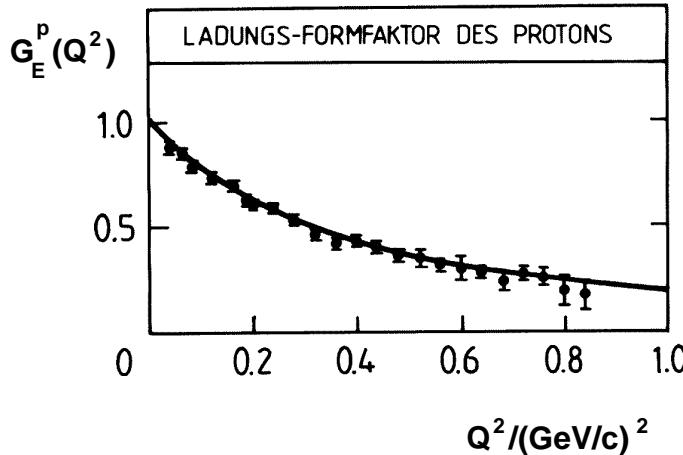
Drücken Sie hierzu zunächst den oben gegebenen Wirkungsquerschnitt mit Hilfe der Mandelstam-Variablen aus, die unter Vernachlässigung der Massen (d. h. bei hohen Impulsen) durch

$s = 2k \cdot p = 2k' \cdot p'$ ,  $t = -2p \cdot p' = -2k \cdot k'$  und  $u = -2k' \cdot p = -2k \cdot p'$  gegeben sind.



Leiten Sie hieraus den totalen Wirkungsquerschnitt für die  $e^+e^-$ -Annihilation in  $\mu^+\mu^-$  ab.

**Übung 5.4: Ladungsformfaktor des Protons.**



Der Formfaktor  $G_E(Q^2)$  des Protons (mit  $Q^2 = \vec{q}^2 - q_0^2$ ) wird experimentell bei der Streuung von hochenergetischen Elektronen an Protonen bestimmt

- a) Zeigen Sie, daß der gemessene Formfaktor durch den „Dipolfit“

$$G_E(Q^2) = \frac{1}{(1 + \frac{Q^2}{\Lambda^2})^2}$$

gut reproduziert werden kann. Bestimmen Sie  $\Lambda$  aus den Daten.

- b) Bestimmen Sie den mittleren quadratischen Radius  $\langle r^2 \rangle$ .  
 c) Wie lautet die räumliche Ladungsverteilung  $\rho(r)$ , die man durch Fouriertransformation von  $G_E(Q^2 = \vec{q}^2)$  im sog. Breit-System ( $q_0 = 0$ ) erhält?

### Übung 5.5: Compton-Streuung.

Man betrachte den Prozeß  $e + \gamma \rightarrow e + \gamma$ .

- a) Zeigen Sie, daß im Laborsystem (anfangs ruhendes Elektron) die Beziehung zwischen den Energien des ein- und auslaufenden Photons durch

$$\omega' = \frac{m_e \omega}{m_e + \omega(1 - \cos \theta)}$$

gegeben ist, wobei  $m_e$  die Masse des Elektrons,  $\theta$  der Streuwinkel, und  $\omega$  und  $\omega'$  die Energien des ein- bzw. auslaufenden Photons sind.

- b) Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Compton-Streuung an Elektronen im Laborsystem lautet

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Labor}} = \frac{1}{2} r_e^2 \left( \frac{\omega'^2}{\omega^2} \right) \left( \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2 \theta \right),$$

wobei  $r_e = e^2 / (3\pi m_e) = 2.82 \times 10^{-13}$  cm der klassische Elektronenradius ist.

- i. Skizzieren Sie den Verlauf von  $d\sigma/d\Omega$  als Funktion des Streuwinkels bei fester Energie  $\omega$  des einlaufenden Photons.

ii. Zeigen Sie, daß im Grenzfall  $\omega \gg m_e$  für den totalen Wirkungsquerschnitt gilt

$$\sigma_{\text{tot}} = \pi r_e^2 \left( \frac{m_e}{\omega} \right) \left( \ln \frac{2\omega}{m_e} + \frac{1}{2} \right),$$

und interpretieren Sie das Ergebnis.

**Übung 5.6: Tiefinelastische Elektron-Nukleon-Streuung.** Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die inelastische Streuung hochenergetischer Elektronen am Proton im Laborsystem ist:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ 2W_1(v, Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} + W_2(v, Q^2) \right]$$

mit den Strukturfunktionen  $W_1$  und  $W_2$ . Hierbei ist  $v = E' - E$  die übertragene Energie und  $Q^2 = (\vec{p}' - \vec{p})^2 - v^2$  das Quadrat des Viererimpulsübertrags.

- a) Nehmen Sie zunächst an, das Proton sei punktförmig und strukturlos. Dann ist nur rein elastische Streuung möglich. Zeigen Sie, daß in diesem Fall

$$E' = E + \frac{Q^2}{2M} \quad \text{mit } Q^2 \approx 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

wobei  $M$  die Protonenmasse ist.

- b) Der bekannte Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung an punktförmigen Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen ist

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[ 1 + \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad \text{mit} \quad \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \left( 1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}.$$

Zeigen Sie, daß daraus für die Strukturfunktion folgt:

$$W_1(v, Q^2) = \frac{Q^2}{4M^2} \delta \left( v - \frac{Q^2}{2M} \right), \quad W_2(v, Q^2) = \delta \left( v - \frac{Q^2}{2M} \right)$$

bzw.

$$2F_1(x, Q^2) = 2MW_1 = x\delta(1-x), \quad F_2(x, Q^2) = vW_2 = \delta(1-x)$$

d. h. sie hängen nur von der Bjorken-Skalenvariablen  $x = \frac{Q^2}{2Mv}$  ab.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die inelastische Streuung hochenergetischer Elektronen am Proton im Laborsystem ist:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ \frac{2F_1(x, Q^2)}{M} \tan^2 \frac{\theta}{2} + \frac{2MxF_2(x, Q^2)}{Q^2} \right]$$

mit den Strukturfunktionen  $F_1$  und  $F_2$ . Hierbei ist  $x = \frac{Q^2}{2Mv}$  die Bjorken-Skalenvariable,  $v = E - E'$  die übertragene Energie und  $Q^2 = (\vec{p}' - \vec{p})^2 - v^2$  das Quadrat des Viererimpulsübertrags.

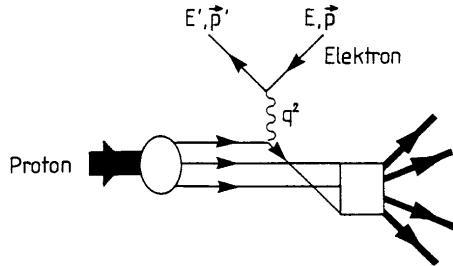


Abb. 5.36: Tiefinelastische eN-Streuung

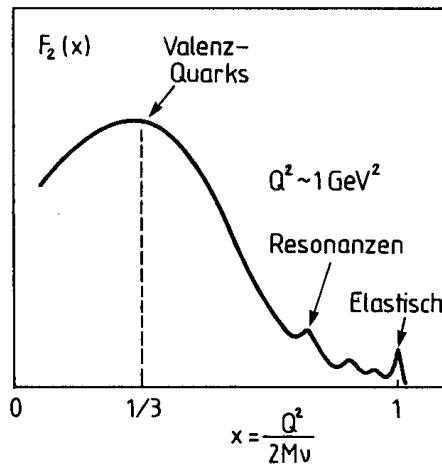


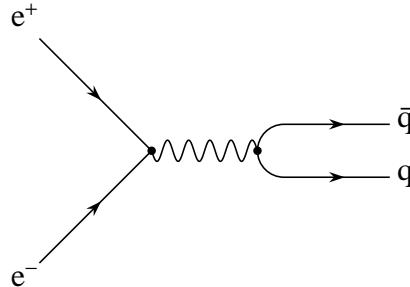
Abb. 5.37: Strukturfunktion des Protons

- c) Der Streuprozeß finde als elastische Streuung an drei quasifreien, punktförmigen Quarks statt, wie in Abb. 5.36 dargestellt. Jedes Quark besitze die effektive Masse  $m = M/3$ . Zeigen Sie, daß jetzt die Strukturfunktion  $F_2(x)$  ein Maximum bei  $x = 1/3$  besitzen sollte.
- d) Die experimentell bestimmte Strukturfunktion  $F_2(x)$  bei  $Q^2 \approx 1 \text{ GeV}^2$  hat den in Abb. 5.37 gezeigten Verlauf. Interpretieren Sie das Resultat. Wodurch erklärt sich (qualitativ) die Breite des quasi-elastischen Peaks bei  $x \approx 1/3$ ?

**Übung 5.7:  $e^+e^-$ -Vernichtung in Mesonen.** Die neutralen Vektormesonen ( $\rho$ ,  $\Omega$ ,  $\phi$ ,  $J/\psi$ ,  $\Upsilon$ ) lassen sich in  $e^+e^-$ -Speicherringen direkt erzeugen, falls die Strahlenergie entsprechend gewählt wird. Die erzeugten Mesonen zerfallen wieder in Leptonen und Hadronen. Für den Wirkungsquerschnitt gilt die *Breit-Wigner-Formel*:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow J/\psi \rightarrow f) = \frac{\pi(2J+1)}{W^2} \frac{4m^2\Gamma_{ee}\Gamma_f}{(W^2 - m^2)^2 + m^2\Gamma_{tot}^2}$$

wobei  $f$  den Endzustand (z. B.  $e^+e^-$  oder aus Hadronen) bezeichnet und  $W^2 = Q_\gamma^2 = 4E_{\text{Strahl}}^2$ .



Für die  $J/\psi$  Resonanz ist die totale Breite  $\Gamma_{tot} = \Gamma_{\text{Hadr.}} + \Gamma_{ee} + \Gamma_{\mu\mu} = 6.0 \text{ keV}$  und somit wesentlich kleiner als die Energieunschärfe von 1 MeV der gespeicherten Teilchenstrahlen. Die beobachtete Resonanzkurve ist also stark durch die Energieunschärfe verbreitert. Trotzdem kann

man die unbekannten partiellen Zerfallsbreiten und die Gesamtbreite bestimmen, wenn man die Breit-Wigner-Formel und die gemessenen Wirkungsquerschnitte (für die leptonischen und hadronischen Endzustände) über den Resonanzbereich integriert.

Zeigen Sie hierzu:

- a) Für  $\Gamma_{\text{tot}} \ll m$  in der Nähe der Resonanz ( $W \approx m$ ) kann man folgenden Ausdruck benutzen:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow J/\psi \rightarrow f) = \frac{\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{m^2((W-m)^2 + \Gamma_{\text{tot}}^2/4)}$$

- b) Mit dem durch

$$\sum_f = \int \sigma(e^+e^- \rightarrow J/\psi \rightarrow f) dW$$

definierten Integral des Wirkungsquerschnitts der  $e^+e^-$ -Vernichtung in einen Endzustand  $f$  gilt:

$$\Gamma_{ee} = \frac{m^2}{6\pi^2} \left( \sum_{\text{Hadr.}} + \sum_{ee} + \sum_{\mu\mu} \right) \quad \text{und} \quad \Gamma_{\text{tot}} = \frac{\sum_{\text{tot}}}{\sum_{ee}} \Gamma_{ee}$$



# Kapitel 6

## Starke Wechselwirkung

**Was wissen wir über Quarks?** In Abschnitt 5.4 erkannten wir mit Hilfe der tiefinelastischen Elektronenstreuung, daß Quarks Ladung tragen. Ferner besitzen sie Spin  $\frac{1}{2}$ , wie wir im Zusammenhang mit der Callan-Gross-Relation (Abschn. 5.6) sahen. Schließlich wissen wir, daß sich im Nukleon, oder allgemeiner: im *Baryonen*, 3 Valenzquarks befinden (im *Meson*: ein Quark sowie ein Antiquark, wie wir in Abschnitt 6.3 sehen werden). In der Einführung (Abschnitt 1.3.1) erfuhren wir zudem:

- Es gibt Quarks in verschiedenen Flavours,
- Quarks haben Masse.

Wie wir bald sehen werden, ist *Flavour* eine Eigenschaft der Quarks, welche nicht durch elektromagnetische und starke Wechselwirkung geändert werden kann. Quarks eines bestimmten Flavours können mit elektromagnetischer oder starker Wechselwirkung nur paarweise, als Quark-Antiquark-Paar, erzeugt werden. Der Erhaltungsgröße Flavour wird folglich eine Quantenzahl zugeordnet. Diese wird mit den Bezeichnungen “up”, “down”, “strange”, “charm”, “beauty” und “top” beschrieben.

Diese Charakteristika der Quarks bestimmen die Eigenschaften der Hadronen, welche aus den Quarks gebildet werden. Haben Quarks weitere Eigenschaften, welche wir bisher noch nicht bemerkt haben? Beginnen wir das Studium der Quarks damit, die Erzeugung von Hadronen in  $e^+e^-$ -Stößen zu betrachten!

### 6.1 Die Quarks bekennen Farbe

In der Quantenelektrodynamik, Abschnitt 4.3.3, betrachteten wir in (4.31) den Streuquerschnitt bei der Bhabha-Streuung, die in Abb. 6.1 nochmals skizziert ist.

$$\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2} \quad (4.31')$$

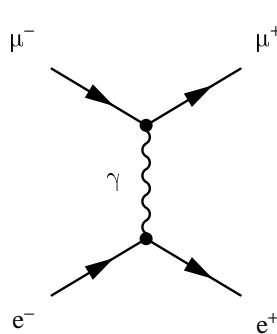


Abb. 6.1: Bhabha-Streuung

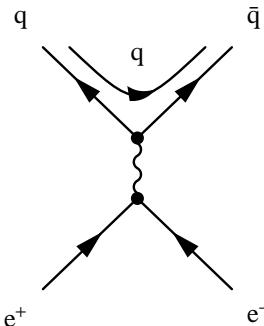


Abb. 6.2: Ersetzen wir die Elektronen durch Quarks!

Dieser elektromagnetische Prozeß ist nur empfindlich auf Ladungen. Betrachten wir nun einen analogen Prozeß, wie die in Abb. 6.2 skizzierte Quark-Antiquark-Erzeugung. Nur können hier keine einzelnen Quarks erzeugt werden.

$$\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow q_i\bar{q}_i) = Z_q^2 \sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$$

**Confinement:** Quarks werden immer paarweise erzeugt, was die Erhaltung der entsprechenden Quantenzahlen sicherstellt. Im Gegensatz zu Leptonen sind Quarks nicht frei beobachtbar. Dies ist ein experimenteller Befund: Man hat lange aber bisher vergeblich nach freien Quarks gesucht!

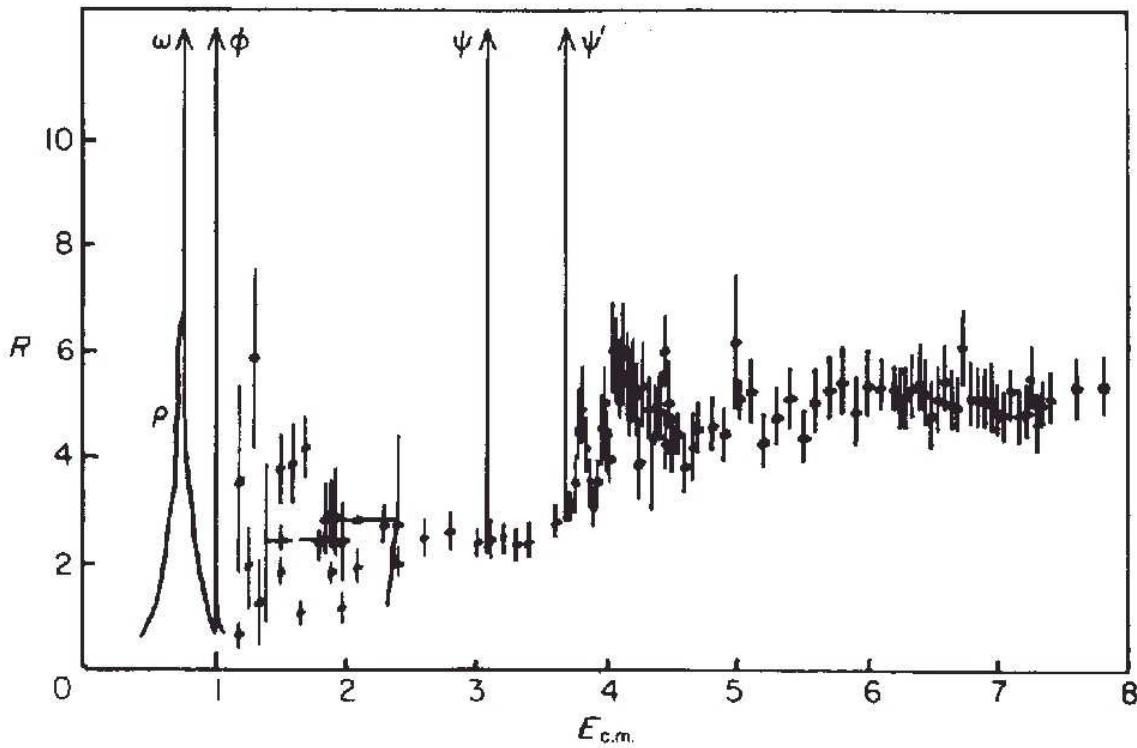
In der einfachsten vorstellbaren Messung vergleichen wir einfach die Myonen- und die Hadronenproduktion, wobei wir die einzelnen Hadronen nicht unterscheiden wollen. Ferner sind, wie wir gerade gesehen haben, nur Elektronen, Positronen und Hadronen sichtbar, nicht aber die Quarks selbst:

$$e^+e^- \longrightarrow \underbrace{q_i\bar{q}_i}_{\text{nicht beobachtbar}} \longrightarrow \text{Hadronen}$$

Messbar ist also:

$$R = \frac{\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \underbrace{\sum_{j=1}^{N_x} \frac{\sum_{i=1}^{N_{\text{Flavour}}} Z_{q_i}^2 \sigma_{\text{tot}}^{\mu^+\mu^-}}{\sigma_{\text{tot}}^{\mu^+\mu^-}}}_{\text{unbekannte Eigenschaften}} \quad (6.1)$$

Wir summieren hier also über hypothetische, uns bisher noch unbekannte Eigenschaften der Quarks. Würden sie derer keine besitzen, könnte man die Summe über  $j$  weglassen. Was also liegt näher, als  $N_{\text{Flavour}}$  und  $N_x$  durch ein Experiment zu bestimmen?



**Abb. 6.3:**  $R$ -Verhältnis aus Speicherringen

Durch Messung von  $R$  bei verschiedenen Schwerpunktsenergien  $\sqrt{s}$  erhält man dann:

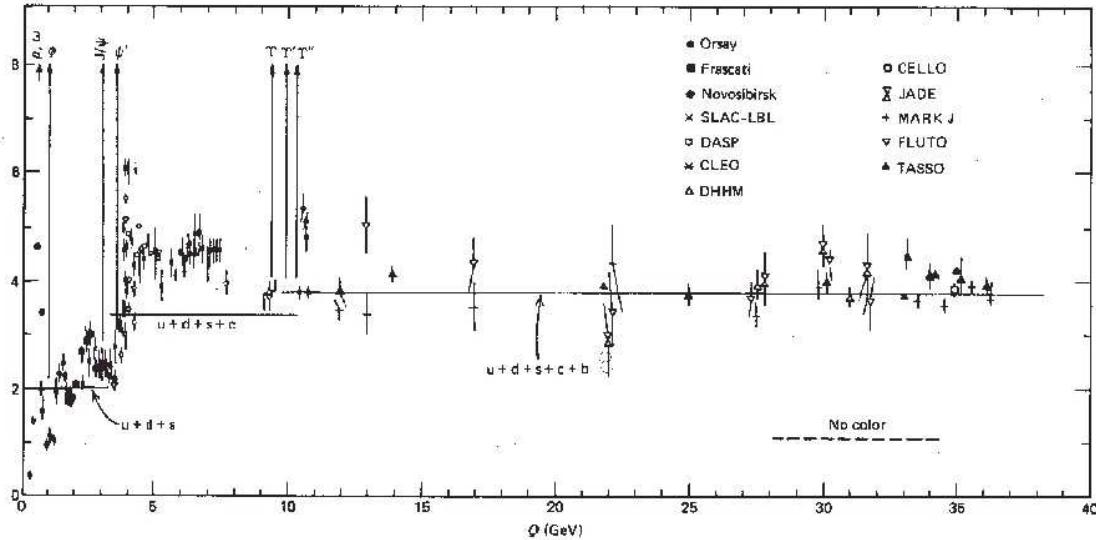
1. Die Anzahl der Quarks mit  $2M_q = M_q + M_{\bar{q}} < \sqrt{s}$
2.  $N_x$
3. Aus dem Anstieg von  $R$  bei gewissen Schwellenenergien, ab denen Quarks mit „neuen“ Flavours erzeugt werden, kann die Ladung der neuen Quarks bestimmt werden.

**Farbe:** Für  $\sqrt{s} < 3$  GeV können u-, d- und s-Quarks erzeugt werden:

$$\text{erwartet: } R = \sum_{i=1}^{N_x} \underbrace{\left( \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right)}_{Z_{qi}^2} = \sum_{i=1}^{N_x} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \Big|_{N_x=1} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \text{gemessen: } R &= 2 \\ \Rightarrow N_x &= 3 \end{aligned}$$

$R$  ist also um einen Faktor 3 zu groß, folglich muß hier eine versteckte, nach außen hin nicht sichtbare Eigenschaft der Quarks in einer 3-Symmetrie vorliegen. Man nennt sie *Farbe*. Hadronen sind farbneutrale Gebilde, und somit ist die Farbladung der erzeugten Quarks nicht beobachtbar. Wir messen daher:



**Abb. 6.4:**  $R$ -Verhältnis aus Speicherringen

$$\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}) = \sum_{i=1}^{N_{\text{Farben}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{Flavor}}} Z_{q_i}^2 \sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$$

mit  $N_{\text{Farben}} = 3$ :

$$R = 3 \sum_j Z_{q_j}^2 = 3 \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \right]$$

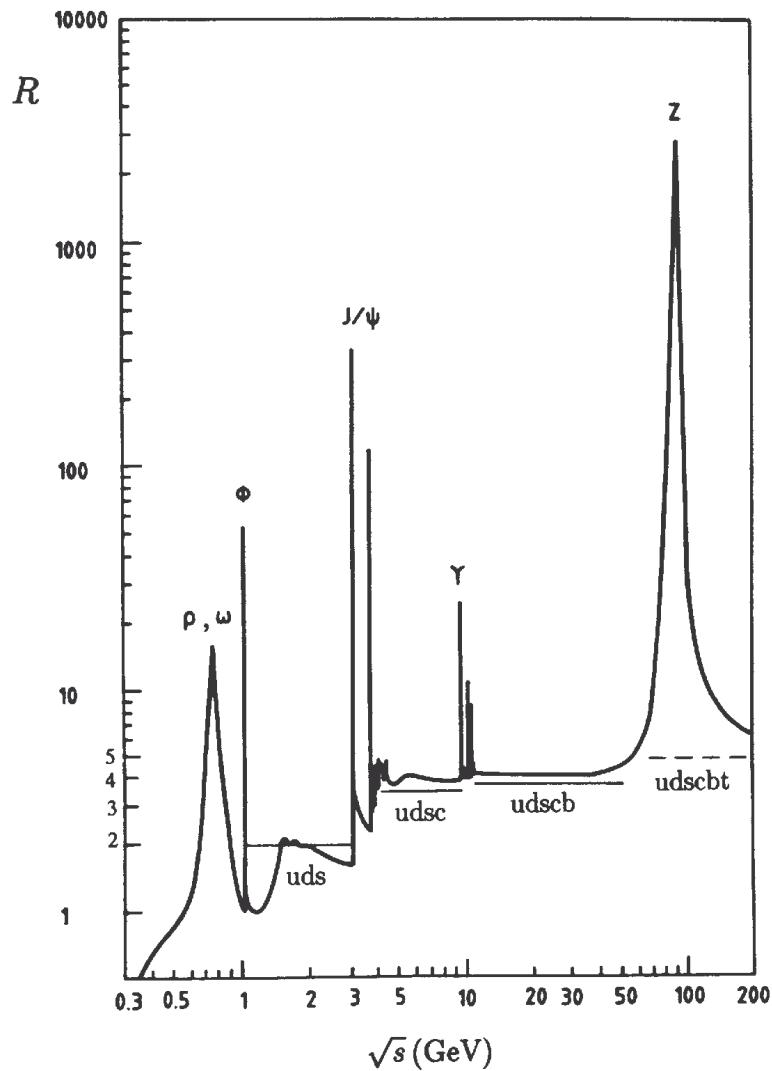
Wir beobachten Sprünge von  $R$  bei  $\sqrt{s} \approx 3,7 \text{ GeV}$  und bei  $\sqrt{s} \approx 5 \text{ GeV}$ . Dies sind Hinweise auf die Erzeugung neuer Quarksorten oder Flavors:

- Charm-Quark mit  $Z_{q_{\text{charm}}}^2 = \left(+\frac{2}{3}\right)^2$
- Beauty-Quark mit  $Z_{q_{\text{beauty}}}^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2$

Bei genauerer Betrachtung von  $R$  im Bereich um 4 GeV (Region des *Charm*-Quarks) stellt man eine Abweichung vom erwarteten Wert fest, wenn man die Ladung des Charm-Quarks zu  $\frac{2}{3}$  annimmt:

$$\begin{aligned} \text{erwartet: } R &= 3 \cdot \sum_{i=1}^{N_{\text{fl}}} Z_{q_i}^2 \approx 3 \\ \text{gemessen: } R &\approx 4 \end{aligned}$$

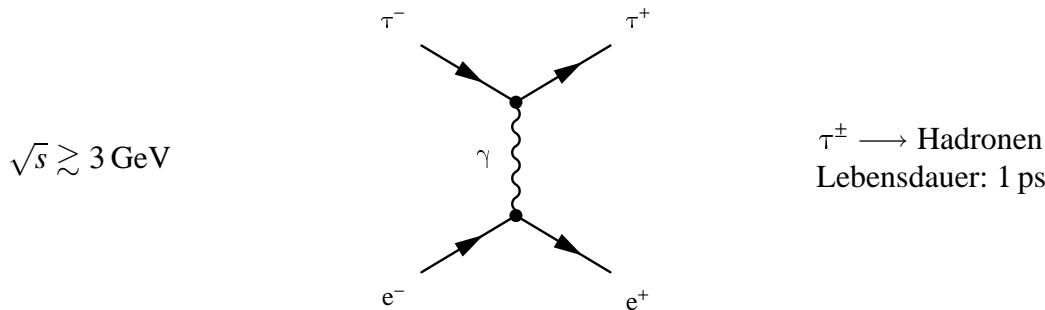
Grund ist ein konkurrierender, rein leptonischer Prozess:



**Abb. 6.5:** Wirkungsquerschnitt der Reaktion  $e^+e^- \rightarrow$  Hadronen, normiert auf den Prozess  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  als Funktion der Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$  (schematisch). Die horizontalen Linien entsprechen  $R = 6/3$ ,  $R = 10/3$  und  $R = 11/3$ , den Werten, die man aus (6.1) und (6.2) je nach Zahl der beteiligten Quarks erwartet. Wie man sieht, können ab bestimmten Schwellenenergien  $\sqrt{s}$  neben dem *up*-, *down*- und *strange*-Quark noch weitere Quarks erzeugt werden. Ferner erkennt man Resonanzen, an denen Mesonen wie das  $\rho$ , das  $\omega$  oder das  $J/\psi$  entstehen (siehe Abschnitt 6.7.1). Gestrichelt ist außerdem der Wert  $R = 15/3$  eingezeichnet, der sich bei Beteiligung des *top*-Quarks ergeben sollte (aus [Po96]).

$$e^+ + e^- \rightarrow \tau^+ + \tau^- \rightarrow \text{Hadronen},$$

wobei das  $\tau$  vor allem in Hadronen zerfällt. Zufällig entspricht die Masse des  $\tau$  etwa der des leichtesten Hadrons mit *charm*, des D-Mesons. Dieser Prozess addiert eine Einheit zu  $R$ :



Bei höheren Energien fällt jedoch sein Wirkungsquerschnitt stark ab, so dass er nicht mehr berücksichtigt werden muß. Entdeckt wurde das  $\tau$ -Lepton durch Martin Pearl (Nobelpreis<sup>1</sup> 1995) am SLAC<sup>2</sup> in den USA, in etwa zur selben Zeit, als auch  $R$  am DESY<sup>3</sup> und am SLAC gemessen wurde.

Für  $\sqrt{s} > 10 \text{ GeV}$  findet man auch das b-Quark. Hier steigt  $R$  nochmals um  $(-\frac{1}{3})^2$  an.

$$e^+ e^- \rightarrow \underbrace{b\bar{b}}_{\text{Quarks}} \rightarrow \underbrace{B\bar{B}}_{\text{Hadronen}}$$

$R$  ist auch zwischen den verschiedenen Stufen nicht konstant. Hierbei spielt die resonante Erzeugung von Mesonen, sowie Korrekturen bei der starken Wechselwirkung eine Rolle. Bei hohen Energieskalen ändert sich die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung  $\alpha_s$ .

Für den Energiebereich von  $\sqrt{s} > 55 \text{ GeV}$  steigt  $R$  stetig an und erreicht bei etwa 90 GeV ein Maximum. Hier wird das  $Z_0$ -Boson erzeugt.

$$Z_0 \rightarrow q_i \bar{q}_i$$

Hier ist aber die Kopplung anders als beim Photon, da hier die schwache Wechselwirkung beiträgt.

Man fragt sich nun, wo denn das top-Quark in dieser Aufstellung abgeblieben ist. Dies sei mit einer kleinen historischen Annektode erklärt: Der PETRA-Speicherring am DESY war ursprünglich für  $\sqrt{s}_{\text{Max}} \sim 17 \text{ GeV}$  konzipiert worden – Theoretiker sagten die Masse des top-Quarks in diesem Massenbereich voraus. Nachdem man aber zunächst nichts fand, wurde erheblicher Aufwand getrieben, die HF-Leistung des Synchrotrons sukzessive aufzustocken, um langsam bis  $\sqrt{s} \sim 46 \text{ GeV}$  zu gelangen. Viel Geld, Zeit und Frust wurde so auf der Suche nach dem t-Quark vergeudet: Erst etwa 20 Jahre später wurde es am Fermilab gefunden – bei einer Masse von etwa 180 GeV! Daher verschieben wir die Suche und den Beweis der Existenz des top-Quarks auf später.

<sup>1</sup><http://www.slac.stanford.edu/slac/hottomperl95/mperl95.html>

<sup>2</sup><http://www.slac.stanford.edu/>

<sup>3</sup><http://www.desy.de/>

## 6.2 Symmetrien und Erhaltungssätze

### 6.2.1 Noether-Theorem

Mechanische Systeme werden durch eine *Lagrangefunktion* beschrieben, die von den Teilchenkoordinaten  $x_j$ , deren Geschwindigkeiten  $\dot{x}_j$  sowie der Zeit  $t$  abhängt:

$$L(x_j, \dot{x}_j, t) \quad (6.3)$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich damit aus:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad (6.4)$$

Noether-Theorem: Jede Symmetrie impliziert eine Erhaltungsgröße.

- Invarianz unter Raumtranslationen:  $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \delta \vec{x} \Leftrightarrow$  Erhaltung des *Impulses*  $\vec{p}$
- Invarianz unter Zeittranslationen:  $t \rightarrow t + \delta t \Leftrightarrow$  Erhaltung der *Energie*  $E$  ( $\hat{=}$  Hamiltonfunktion)

Zusammenfassend: Invarianz unter Translationen im *Minkowski-Raum*:  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \Delta x^\mu \Leftrightarrow$  Erhaltung des Viererimpulses  $P^\mu = (E, \vec{p})$

- Invarianz unter Raum-Drehungen:  $\vec{x} \rightarrow D \cdot \vec{x} = \vec{x} + \delta \vec{\omega} \times \vec{x} + \dots$  Erhaltung des *Drehimpulses*  
 $\vec{J}$  einschließlich Spin  $\vec{S}$   
 $\uparrow$   
 Drehmatrix
- Invarianz unter Raum-Spiegelungen:  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x} \Leftrightarrow$  Erhaltung der *Parität*  $P = \pm 1$

Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen werden durch Felder  $\phi(x)$  beschrieben: Leptonfelder, Photon- und W- bzw. Z<sup>0</sup>-Felder, Quarkfelder, Gluonfelder. So gelangt man zur Quantenfeldtheorie. Die Dynamik dieser Felder kann von einer sogenannten Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (6.5)$$

abgeleitet werden, die Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen sein soll. Die Bewegungsgleichungen erhält man daraus analog zu (6.4):

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} = 0 \quad (6.6)$$

Wir geben einige wichtige Lagrangedichten an:

- Klein-Gordon-Feld:

$$\mathcal{L}_{\text{Klein-Gordon}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{m^2}{2} \phi^2(x)$$

ergibt

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi(x) = 0 \quad (\text{Klein-Gordon-Gleichung})$$

- Dirac-Feld:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(x) [\imath \gamma_\mu \partial^\mu - M] \psi(x)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Dirac}}}{\partial \bar{\psi}(x)} = 0 \quad (\text{Dirac-Gleichung}) \quad (\imath \gamma_\mu \partial^\mu - M) \psi(x) = 0$$

Unter dem Begriff *Symmetrien* faßt man alle Transformationen der Felder  $\phi(x)$  zusammen, unter denen die Lagragedichte invariant bleibt. Somit führen alle Symmetrien der Lagragedichte  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$  zu Erhaltungsgrößen, z. B. erhaltenen Strömen.

### 6.2.2 Symmetrien in der Quantenmechanik

Quantenmechanische Systeme werden durch einen Hamiltonoperator beschrieben:

$$\mathcal{H} \psi = E \psi.$$

Beispiel:

$$\mathcal{H} = -\frac{\vec{\nabla}^2}{2m} + V(r)$$

↑  
zentral-symmetrisches  
Potential

$\mathcal{H}$  ist rotationsinvariant, wir können also  $\psi(r)$  in Radial- und Winkelanteil aufspalten:

$$\psi(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Der Energieeigenwert  $E_{nl}$  ist bezüglich der magnetischen Quantenzahl  $m$  insgesamt  $(2\ell+1)$ -fach entartet.

- (kontinuierliche) Symmetrien des Hamiltonoperators führen zu Multipletts von energetisch entarteten Zuständen
- Erhaltungsgrößen kommutieren mit dem Hamiltonoperator, z. B.  $[\mathcal{H}, \vec{L}] = 0$  (Drehimpuls).
- bei diskreten Symmetrien, z. B. der Parität  $\mathcal{P} \psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$  gilt:  $[\mathcal{H}, \mathcal{P}] = 0 \Rightarrow$  Die Energieeigenzustände haben wohldefinierte Parität  $\mathcal{P} \psi(\vec{r}) = \pm \psi(-\vec{r})$

### 6.2.3 Innere Symmetrien

Diese sind mit den inneren Eigenschaften der Elementarteilchen verknüpft, welche unabhängig von deren Raum-Zeit-Verhalten sind.

Man beobachtet Gruppen von Teilchen mit verschiedener elektrischer Ladung und fast gleicher Masse (=Ruheenergie):

$$\begin{aligned} p : \quad & M_p = 938.27 \text{ MeV} \\ n : \quad & M_n = 939.56 \text{ MeV} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Nukleon: 2 Zustände} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \pi^\pm : \quad & M_{\pi^\pm} = 139.57 \text{ MeV} \\ \pi^0 : \quad & M_{\pi^0} = 134.97 \text{ MeV} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Pion: 3 Zustände} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} K^+ : \quad & M_{K^+} = 493.65 \text{ MeV} \\ K^0 : \quad & M_{K^0} = 497.67 \text{ MeV} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Kaon: 2 Zustände} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} K^- : \quad & M_{K^-} = 493.65 \text{ MeV} \\ \bar{K}^0 : \quad & M_{\bar{K}^0} = 497.67 \text{ MeV} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Anti-Kaon: 2 Zustände} \end{array} \right\}$$

und viele andere Beispiele. Dieser Massenentartung liegt eine innere Symmetrie zugrunde:

Isospin-Symmetrie  $\Leftrightarrow$  Gruppe SU(2)

Den tieferen Grund dieser Symmetrie stellt die Tatsache dar, dass Hadronen aus Quarks zusammengesetzte Systeme sind.

**Isospin der Quarks:** u- und d-Quarks sind bis auf eine geringe Massendifferenz identisch bezüglich ihrer starken Wechselwirkung. Proton (uud) und Neutron (udd) sind somit in ihren Eigenschaften diesbezüglich ununterscheidbar. Ebenso sind die drei Ladungszustände des Pions,  $\pi^+$  ( $u\bar{d}$ ),  $\pi^0$  ( $u\bar{u} - d\bar{d}$ ) und  $\pi^-$  ( $d\bar{u}$ ) in Bezug auf die starke Wechselwirkung ununterscheidbar. Man stellt deshalb die u- und die d-Quarks als Flavour-Dublett ( $N_f = 2$ ) dar:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

- Isospin-Symmetrie = Invarianz der Lagrangedichte der starken Wechselwirkung unter unitären Transformationen im Raum der u- und d-Quarks:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

mit speziellen unitären  $2 \times 2$ -Matrizen  $U$  ( $U^\dagger U = 1$ ,  $\det U = 1$ ,  $U \in \text{SU}(2)$ ), die wie folgt darstellbar sind:

$$U = \exp \left[ i \vec{\tau} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{2} \right] = 1 + \frac{i}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{\alpha} + \dots$$

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\alpha} = \tau_1 \alpha_1 + \tau_2 \alpha_2 + \tau_3 \alpha_3,$$

wobei  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  beliebige reelle Parameter sind. Die *Pauli-Matrizen*  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  und  $\tau_3$  (hermitesch, spurfrei) sind die Generatoren der Flavourgruppe  $SU(2)_f$ :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sie erfüllen die *Kommutatorrelationen*

$$[\tau_a, \tau_b] = 2i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Strukturkonstanten}}}{\epsilon_{abc}} \tau_c$$

- Isospin-Operator.  $\vec{I} = \frac{1}{2} \vec{\tau}$ , wobei gilt:

$$I_3 |u\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} |u\rangle$$

$$I_3 |d\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} |d\rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{I}^2 |u\rangle = I(I+1) |u\rangle \\ \vec{I}^2 |d\rangle = I(I+1) |d\rangle \end{array} \right\} \quad \text{mit} \quad I = \frac{1}{2}$$

u- und d-Quark bilden ein Isospin-Dublett mit Isospin  $I = \frac{1}{2}$ . Ein Isospinmultiplett mit Isospin  $I \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$  besteht aus  $2I+1$  Zuständen

$$|I, m\rangle, \quad m = \underbrace{-I, -I+1, \dots, I-1, I}_{\text{Werte von } I_3}$$

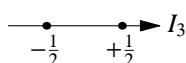
- Kopplung der Isospins. Genau wie die Kopplung von Drehimpulsen oder Spins:

$$\vec{I} = \vec{I}(1) + \vec{I}(2)$$

$$|IM\rangle = \sum_{m_1, m_2} |I^{(1)} m_1\rangle |I^{(2)} m_2\rangle \langle I^{(1)} m_1 I^{(2)} m_2 | IM \rangle$$

mit Clebsch-Gordan-Koeffizienten:  $\langle I^{(1)} m_1 I^{(2)} m_2 | IM \rangle$  (s. Abschn. A.1).

- Darstellung durch *Gewichtsdiagramme*, wie hier das Dublett  $I = \frac{1}{2}$ :



Kopplung von  $I^{(1)} = \frac{1}{2} \otimes I^{(2)} = \frac{1}{2}$ :

$$|IM\rangle = \sum_{m_1, m_2} \left| \frac{1}{2} m_1 \right\rangle \left| \frac{1}{2} m_2 \right\rangle \left\langle \frac{1}{2} m_1 \frac{1}{2} m_2 \middle| IM \right\rangle \quad (I = 0, 1)$$

Konkret bedeutet dies für  $I = 1$ :

$$\begin{aligned} |1, +1\rangle &= \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \right] \\ |1, -1\rangle &= \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

und für  $I = 0$ :

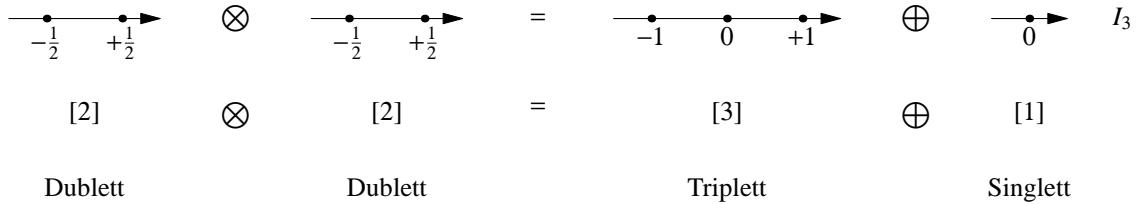
$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \right]$$

Hierbei gilt die Zuordnung:

$$\begin{aligned} |1, +1\rangle &\leftrightarrow |uu\rangle \\ |1, -1\rangle &\leftrightarrow |dd\rangle \\ |1, 0\rangle &\leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} |ud + du\rangle \\ |0, 0\rangle &\leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} |ud - du\rangle \end{aligned}$$

- „Multiplikation“ der Gewichtsdiagramme (*Stempelmethode*):

$$\left( I = \frac{1}{2} \right) \otimes \left( I = \frac{1}{2} \right) = (I = 1) \oplus (I = 0)$$



Allgemein gilt für SU(2)-Darstellungen:

$$I_1 \otimes I_2 = (I_1 + I_2) \oplus (I_1 + I_2 - 1) \oplus \cdots \oplus |I_1 - I_2|$$

$ijk$	123	147	156	246	257	345	367	458	678
$f_{ijk}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$f_{ikj} = -f_{ijk} = f_{jki}$$

**Tab. 6.1:** Total antisymmetrische Strukturkonstanten  $f_{ijk}$  der SU(3)

**Erweiterung auf u-, d- und s-Quarks – Quarks mit Strangeness:** Im Grenzfall gleicher Quarkmassen ist die Lagrangedichte der starken Wechselwirkung invariant unter unitären Transformationen:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$$

mit speziellen unitären  $3 \times 3$ -Matrizen  $U$  (Flavour-Gruppe SU(3)<sub>f</sub>:  $UU^\dagger = \mathbb{1}$ ,  $\det U = 1$ ). Darstellung:

$$U = \exp \left[ i \vec{\lambda} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{2} \right]$$

$$\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha} = \sum_{j=1}^8 \lambda_j \alpha_j \quad (8 \text{ reelle Parameter})$$

mit den *Gell-Mann-Matrizen*  $\lambda_1, \dots, \lambda_8$  als Generatoren der SU(3)-Flavour Gruppe:

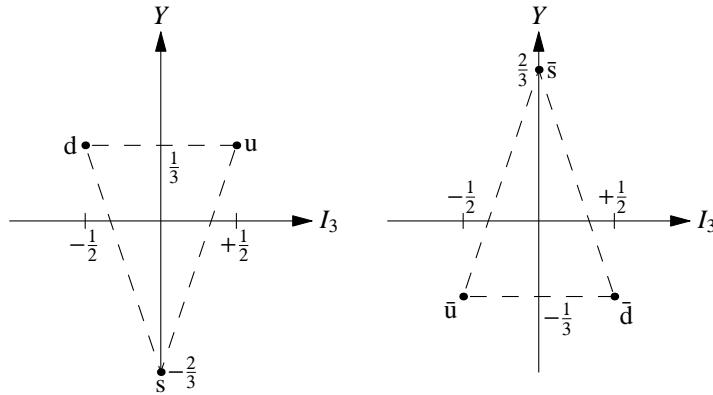
$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Kommator-Relationen:  $[\lambda_i, \lambda_j] = 2i f_{ijk} \lambda_k$ , mit den total antisymmetrischen Strukturkonstanten  $f_{ijk}$  der SU(3), wie sie in Tab. 6.1 angegeben sind.

- Dritte Komponente des Isospins:  $I_3 = \frac{1}{2} \lambda_3$



**Abb. 6.6:** Gewichtsdiagramme für die Quarks u, d, und s (Triplet [3], links), sowie für die Antiquarks  $\bar{u}$ ,  $\bar{d}$ , und  $\bar{s}$  (Anti-Triplett  $[\bar{3}]$ , rechts)

- Hyperladung:

$$Y = B + S = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

mit Baryonzahl  $B = \frac{1}{3}$  für alle Quarks ( $B = -\frac{1}{3}$  für Antiquarks) und Strangeness  $S = 0$  für u- und d-Quarks,  $S = -1$  sowie für das s-Quark bzw.  $S = +1$  für das Anti-Strange-Quark.

- Basis:

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Quark-Eigenzustände werden durch  $(I_3, Y)$  charakterisiert. Eine angemessene Darstellung stellen die Gewichtsdiagramme der Gruppe SU(3) dar, wie sie in Abb. 6.6 gezeigt sind.

- Regeln für Produkte von Triplet- und Antitriplet-Darstellungen (mit graphischer Veranschaulichung in Abb. 6.7):

$$\begin{aligned} - [3]_{\text{Triplet}} \otimes [\bar{3}]_{\text{Anti-Triplet}} &= [8]_{\text{Oktett}} \oplus [1]_{\text{Singulett}} \\ - [3]_{\text{Triplet}} \otimes [3]_{\text{Triplet}} &= [6]_{\text{Sextett}} \oplus [\bar{3}]_{\text{Anti-Triplet}} \\ - [3] \otimes [3] \otimes [3] &= ([6] \oplus [\bar{3}]) \otimes [3] = [10]_{\text{Dekuplett}} \oplus [8]_{\text{Oktett}} \oplus [8]_{\text{Oktett}} \oplus [1]_{\text{Singulett}} \end{aligned}$$

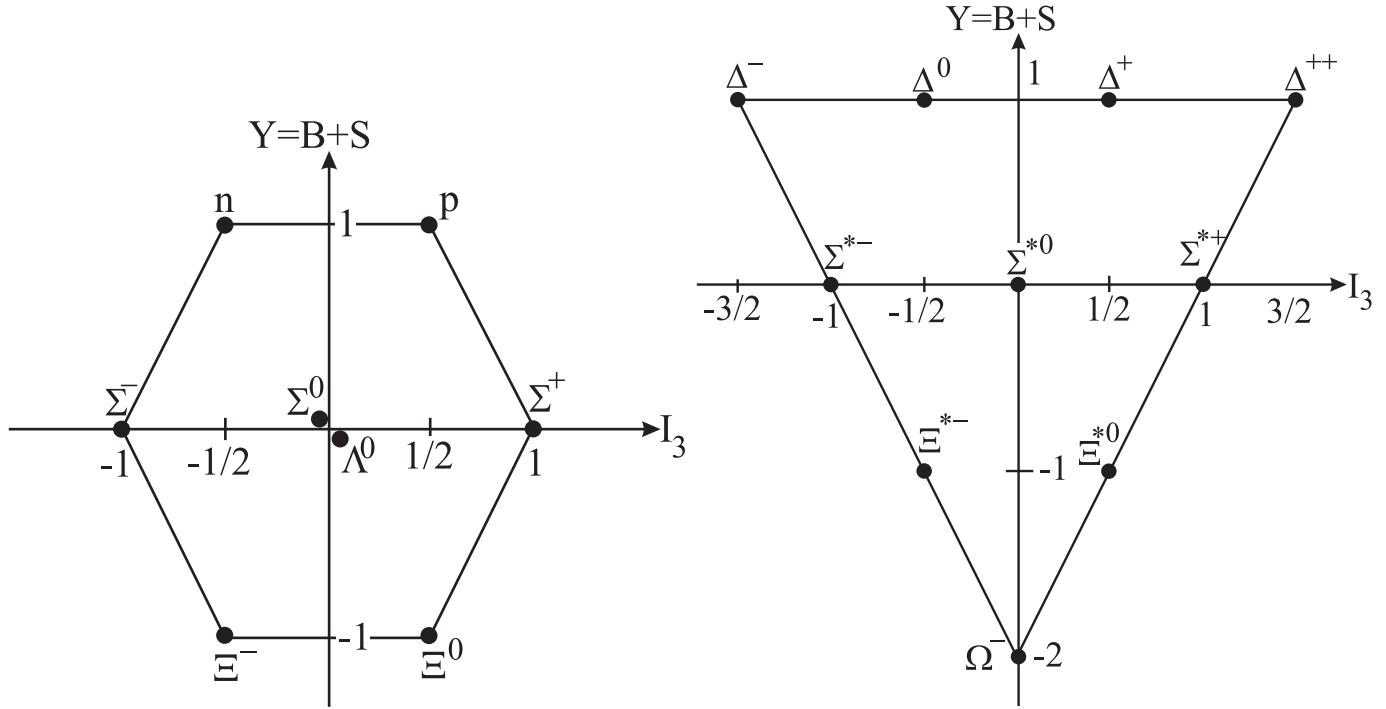


Abb. 6.7: Oktett (links) und Dekuplett (rechts)

	Ladung $Q = I_3 + Y/2$	Strangeness $S$	Hyperladung $Y = B + S$
u	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
d	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
s	$-\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$

Tab. 6.2: Ladung, Strangeness und Hyperladung der Quarks der Gruppe  $SU(3)_f$ .

### 6.3 Das Quarkmodell

Ziehen wir kurz Zwischenbilanz: Quarks als elementare Bausteine der Hadronen sind Fermionen mit Spin  $\frac{1}{2}$  und Baryonzahl  $B = \frac{1}{3}$ .

Die (u, d, s)-Quarks bilden die fundamentale Tripletts-[3]-Darstellung der Gruppe  $SU(3)_f$ ; entsprechend bilden die Antiquarks ( $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ ) die Antitriplets-[ $\bar{3}$ ]-Darstellung. Die innerhalb der  $SU(3)$  vorhandenen Quarks sind mit ihren Quantenzahlen in Tab. 6.2 zusammengefaßt. Die Antiquarks haben genau die entsprechenden negativen Quantenzahlen.

Alle aus u-, d- und s-Quarks zusammengesetzten Teilchen sind höhere Darstellungen der Gruppe  $SU(3)_f$ :

1. Mesonen: Quarkinhalt  $q\bar{q}$

$$[3] \otimes [\bar{3}] = [8] \underset{\text{Oktett}}{\oplus} [1] \underset{\text{Singulett}}{\oplus}$$

2. Baryonen: Quarkinhalt  $qqq$

## 6.4 Quark-Wellenfunktionen der Mesonen

$N^{2S+1}L_J$	$J^{PC}$	$u\bar{d}, u\bar{u}, d\bar{d}$ $I = 1$	$u\bar{u}, d\bar{d}, c\bar{c}$ $I = 0$	$c\bar{c}$ $I = 0$	$b\bar{b}$ $I = 0$	$\bar{s}u, \bar{s}d$ $I = \frac{1}{2}$	$c\bar{u}, c\bar{d}$ $I = \frac{1}{2}$	$c\bar{s}$ $I = 0$	$\bar{b}u, \bar{b}d$ $I = \frac{1}{2}$	$\bar{b}s$ $I = 0$	$\bar{b}c$ $I = 0$
$1^1S_0$	$0^{-+}$	$\pi$	$\eta, \eta'$	$\eta_c$		$K$	$D$	$D_s$	$B$	$B_s$	$B_c$
$1^3S_1$	$1^{--}$	$\rho$	$\omega, \phi$	$J/\psi(1S)$	$\Upsilon(1S)$	$K^*(892)$	$D^*(2010)$	$D_s^*$	$B^*$	$B_s^*$	
$1^1P_1$	$1^{+-}$	$b_1(1235)$	$h_1(1170), h_1(1380)$	$h_c(1P)$		$K_{1B}^\dagger$	$D_1(2420)$	$D_{s1}(2536)$			
$1^3P_0$	$0^{++}$	$a_0(1450)^*$	$f_0(1370)^*$	$\chi_{c0}(1P)$	$\chi_{b0}(1P)$	$K_0^*(1430)$					
$1^3P_1$	$1^{++}$	$a_1(1260)$	$f_1(1285), f_1(1420)$	$\chi_{c1}(1P)$	$\chi_{b1}(1P)$	$K_{1A}^\dagger$					
$1^3P_2$	$2^{++}$	$a_2(1320)$	$f_2(1270), f'_2(1525)$	$\chi_{c2}(1P)$	$\chi_{b2}(1P)$	$K_2^*(1430)$	$D_0^*(2460)$				
$1^1D_2$	$2^{+-}$	$\pi_2(1670)$	$\eta_2(1645), \eta_2(1870)$			$K_2(1770)$					
$1^3D_1$	$1^{--}$	$\rho(1700)$	$\omega(1600)$	$\psi(3770)$		$K^*(1680)^\ddagger$					
$1^3D_2$	$2^{--}$					$K_2(1820)$					
$1^3D_3$	$3^{--}$	$\rho_3(1690)$	$\omega_3(1670), \phi_3(1850)$			$K_3^*(1780)$					
$1^3F_4$	$4^{++}$	$a_4(2040)$	$f_4(2050), f_4(2220)$			$K_4^*(2045)$					
$2^1S_0$	$0^{+-}$	$\pi(1300)$	$\eta(1295), \eta(1440)$	$\eta_c(2S)$		$K(1460)$					
$2^3S_1$	$1^{--}$	$\rho(1450)$	$\omega(1420), \phi(1680)$	$\psi(2S)$	$\Upsilon(2S)$	$K^*(1410)^\ddagger$					
$2^3P_2$	$2^{++}$		$f_2(1810), f_2(2010)$		$\chi_{b2}(2P)$	$K_2^*(1980)$					
$3^1S_0$	$0^{+-}$	$\pi(1800)$				$K(1830)$					

Tab. 6.3: Bekannte Mesonen im Quarkmodell

$$[3] \otimes [3] \otimes [3] = [10] \underset{\text{Dekuplett}}{\oplus} [8] \underset{\text{Oktetts}}{\oplus} [8] \oplus [1]$$

Durch Erweiterung auf Flavour-SU(4) unter Einbeziehung der c-Quarks (*charm*) ergeben sich SU(4)<sub>f</sub>-Multipletts, wie sie in Abb. 6.8 gezeigt sind.

## 6.4 Quark-Wellenfunktionen der Mesonen

Wir betrachten im folgenden q̄q-Systeme mit

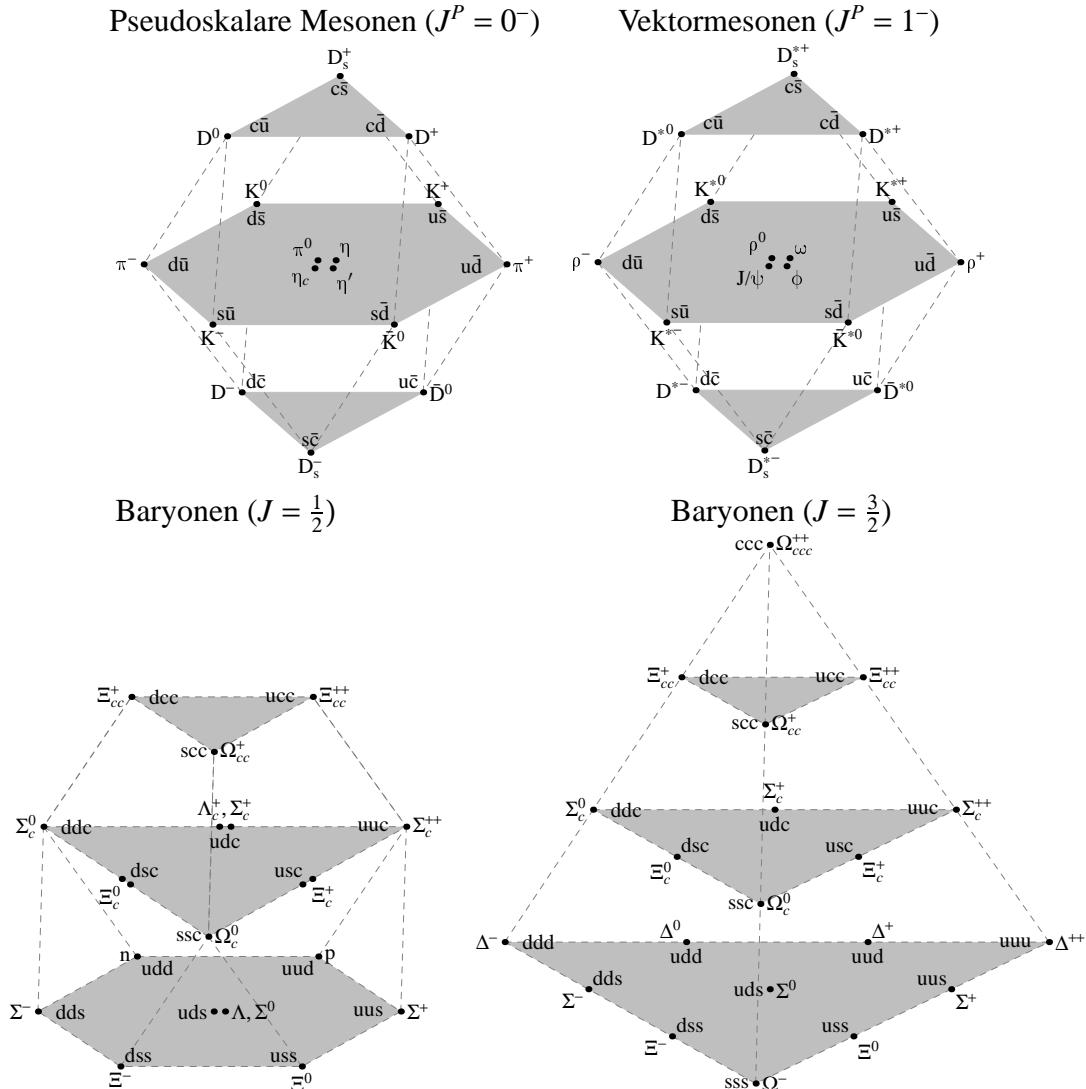
$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}.$$

Up- und down-Quark bilden hierbei ein Isospindublett analog zum Spin, sodaß wir wie bei der Kopplung zweier halbzahliger Spins mittels

$$[2] \otimes [2] = [3] \oplus [1]$$

Triplet-Zustände

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2) \\ |1, -1\rangle &= |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 \end{aligned}$$

**Abb. 6.8:** SU(4) Flavour-Multiplets.

sowie einen Singulett-Zustand

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2)$$

konstruieren können. Hierbei verwenden wir analog zu Abschn. 6.2.3 die Nomenklatur

$$\begin{aligned} |u\rangle &= |\uparrow\rangle \\ |d\rangle &= |\downarrow\rangle. \end{aligned}$$

Aber wie müssen wir Antiquarks zuordnen? Dazu schreiben wir das Transformationsverhalten bei Drehung um die z-Achse an:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} &= \exp(i\tau_3\theta) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gehen wir nun zu Antiquarks über, indem wir die korrekten dritten Komponenten des Isospins für  $\bar{u}$  und  $\bar{d}$  einsetzen. Wir schreiben zunächst verschiedene Antiquark-Dubletts an:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ \bar{u}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\bar{d}' \\ \bar{u}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir sehen, daß gerade das Antiquarkdublett  $q = \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$  dasselbe Isospin-Transformationsverhalten zeigt wie  $q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ . Folglich können wir folgende Zuordnung treffen:

$$\begin{aligned} |\bar{d}\rangle &= -|\uparrow\rangle \\ |\bar{u}\rangle &= |\downarrow\rangle. \end{aligned}$$

So können wir uns die Quark-Wellenfunktionen im Isospinraum wie folgt konstruieren:

$$\begin{aligned} |\pi^+\rangle &= -|u\rangle|\bar{d}\rangle \\ |\pi^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\rangle|\bar{u}\rangle - |d\rangle|\bar{d}\rangle) \\ |\pi^-\rangle &= |d\rangle|\bar{u}\rangle \\ |\eta\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\rangle|\bar{u}\rangle + |d\rangle|\bar{d}\rangle) \end{aligned}$$

Analog konstruiert man die Vektormesonen  $|\rho^+\rangle$ ,  $|\rho^0\rangle$ ,  $|\rho^-\rangle$  sowie  $|\omega\rangle$ .

## 6.5 Diskrete Symmetrien

### 6.5.1 Raumspiegelung bzw. $\mathcal{P}$ -Parität

Die Paritätstransformation  $\mathcal{P} : \vec{r} \rightarrow \vec{r}' = -\vec{r}$  entspricht einer Spiegelung am Ursprung.

- Aus der Quantenmechanik wissen wir, dass der Paritätsoperator

$$\mathcal{P} \psi(\vec{r}, t) := \psi(-\vec{r}, t) \quad (6.7)$$

eine Spiegelung der (nicht-relativistischen) Wellenfunktion am Ursprung bewirkt. Man hat

$$\mathcal{P} \mathcal{P} \psi(\vec{r}, t) := \mathcal{P} \psi(-\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) \Leftrightarrow \mathcal{P}^2 = 1. \quad (6.8)$$

$$\boxed{\mathcal{P} \psi = P \psi, \quad P = \pm 1}$$

Die Eigenwerte der Parität sind also  $\pm 1$ .  $P = +1$  nennen wir gerade Parität,  $P = -1$  ungerade Parität.

- Die Wellenfunktion der Bahnbewegung ist eine Kugelflächenfunktion  $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ , für deren Transformationsverhalten unter  $\mathcal{P}$  gilt:  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ ,  $\varphi \rightarrow \varphi + \pi \Rightarrow Y_{\ell m}(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^\ell Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$

$$\boxed{P_{\text{Bahn}} = (-1)^\ell}$$

- Unterscheidung von polaren und axialen Vektoren: polare Vektoren transformieren sich unter der Parität wie der Ortsvektor  $\vec{r}$ . Axiale Vektoren, auch Pseudovektoren genannt, ändern ihr Vorzeichen hingegen nicht. Beispiele sind in Tab. 6.4 angegeben.
- Quarks ( $u, d, s, c, b, t$ ) und Leptonen ( $e^-, \mu^-, \tau^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) haben eine positive innere Parität. Ihre Antiteilchen, Antiquarks ( $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}, \bar{c}, \bar{b}, \bar{t}$ ) und Antileptonen ( $e^+, \mu^+, \tau^+, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$ ) hingegen haben negative innere Parität.

polare Vektoren	axiale Vektoren
Ort $\vec{r}$ Impuls $\vec{p} = M \frac{d\vec{r}}{dt}$ Elektrisches Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ (erzeugt von der Ladungsdichte $\rho$ ) Vektorpotential $\vec{A}$ (erzeugt von der Stromdichte $\vec{j} = \rho \vec{V}$ )	Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ Spin $\frac{1}{2}\sigma$ Magnetfeld $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Tab. 6.4: Beispiele für polare und axiale Vektoren

- Für die Parität von Dirac-Spinoren (Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen) gilt:

(z.B. benötigen wir zur Betrachtung eines Quark- Antiquark- Bindungszustandes die Paritätsinformation bezüglich eines Dirac- Spinors)

Wir gehen aus von der Dirac-Gleichung:

$$\left( i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - M \right) \psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (6.9)$$

nehmen eine Paritätstransformation vor und multiplizieren von links mit  $\gamma_0$ :

$$\gamma^0 \left( i\gamma_0 \frac{d}{dt} - i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - M \right) \psi'(-\vec{r}, t) = 0 \quad (6.10)$$

Unter Verwendung der Vertauschungsrelation  $\gamma^0 \vec{\gamma} = -\vec{\gamma} \gamma^0$  erhalten wir somit:

$$\left( i\gamma_0 \frac{d}{dt} + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - M \right) \gamma_0 \psi'(-\vec{r}, t) = 0 \quad (6.11)$$

$$\Rightarrow \gamma_0 \psi'(-\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) \quad \text{bzw.} \quad \psi'(\vec{r}, t) = \gamma_0 \psi(-\vec{r}, t)$$

Damit können wir das Verhalten eines Dirac-Spinors unter Paritätstransformationen angeben:

$$\mathcal{P} \psi(\vec{r}, t) = \gamma_0 \psi(-\vec{r}, t)$$

Dabei ist  $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  die erste der vier Diracschen Gamma-Matrizen.

Die oberen zwei Komponenten des Dirac-Spinors beschreiben (ruhende) Teilchenlösungen, die unteren Komponenten entsprechend Antiteilchenlösungen. Also ist die innere Parität eines Fermions +1, entsprechend die innere Parität eines Antifermions -1. Für Mesonen folgern wir:

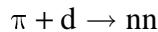
$$\mathcal{P} \psi(q\bar{q}) = (-1)(+1)(-1)^\ell \psi(q\bar{q}) \Rightarrow P(q\bar{q}) = (-1)^{\ell+1}$$

Die Klassifizierung von Skalaren und Vektoren nach ihrer Parität ist in Tab. 6.5 angegeben.

Drehimpuls / Parität	Klassifizierung
0 <sup>+</sup>	Skalar
0 <sup>-</sup>	Pseudoskalar
1 <sup>-</sup>	Vektor
1 <sup>+</sup>	Pseudo- oder Axialvektor
2 <sup>+</sup>	Tensor
2 <sup>-</sup>	Tensor

**Tab. 6.5:** Klassifizierung von Objekten nach der Parität**Beispiele.**

- Parität des Photons:  $P(\gamma) = -1$ . Polarvektorcharakter des Photonfeldes  $\vec{A}(\vec{r}, t)$
- Parität der Pionen  $\pi^+(-u\bar{d})$ ,  $\pi^0(u\bar{u} - d\bar{d})$ ,  $\pi^-(\bar{u}d)$  und Kaonen  $K^+(u\bar{s})$ ,  $K^0(d\bar{s})$ ,  $K^-(\bar{u}s)$ ,  $\bar{K}^0(\bar{d}s)$ :  $P(\pi) = P(K) = (-1)^{0+1} = -1$   
S-Wellen-Bindungszustände ( $L = 0$ ) von Quark und Antiquark: Pseudoskalares Meson-Okttett  $J^P = 0^-$ .  
Parität der Vektormesonen  $\rho^+$ ,  $\rho^0$ ,  $\rho^-$ ,  $\omega$ ,  $\phi$ ,  $K^*$ :  $P(\rho) = P(\omega) = (-1)^{0+1} = -1 \Rightarrow J^P = 1^-$
- Zum Nachweis der negativen Parität des geladenen Pions: betrachten wir die Deuteron-spaltung durch Pioneinfang. Das Deuteron ist ein pn-Bindungszustand (s-Welle):



Der Drehimpuls im Eingangskanal ist dabei  $\ell = 0$ . Die Pionen werden aus der S-Schale pionischer Atome eingefangen.

$$P(nn) = (-1)^{\ell=0} P(\pi) P(d)$$

$\uparrow$                      $\uparrow$   
 $=1$                      $=1$

Ein nn-Systeme aus zwei identischen Teilchen muss dem Pauli-Prinzip genügen, daher muss seine Wellenfunktion ungerade sein unter Teilchenaustausch:

$$-1 = (-1)^{\ell_{nn} + s_{nn} + 1} \quad \ell_{nn} + s_{nn} \text{ gerade}$$

Die Drehimpulserhaltung verlangt  $J = 0 + 1 = 1 \Rightarrow \ell_{nn} = s_{nn} = 1$  (Pion und Deuteron koppeln zu  $J=1$ ).

$$P(nn) = (-1)^{\ell_{nn}} = -1 = P(\pi)$$

**6.5.2 Zeitumkehr**

Bei der Zeitumkehr wird die Zeitachse umgedreht:  $\tau : t \rightarrow -t$ . Sie bedeutet eine Umkehr von Bewegungsrichtungen.

- Impulse drehen sich um:  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$
- Drehimpulse und Spins drehen sich um:  $\vec{L} \rightarrow -\vec{L}$ ,  $\vec{\sigma} \rightarrow -\vec{\sigma}$

- einlaufende und auslaufende Teilchen werden vertauscht (Anfangszustand  $\Leftrightarrow$  Endzustand)

Man spricht auch vom *Prinzip des detaillierten Gleichgewichts*, wenn die Matrixelemente für eine Reaktion und ihre Umkehrreaktion gleich sind.

### Beispiele.

- Wellenfunktionen eines freien Teilchens

$$\Psi(\vec{x}, t) = \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x} - iEt) \quad \xrightarrow{\mathcal{T}} \quad \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{x} - iEt)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{T} \Psi(\vec{x}, t) = \Psi^*(\vec{x}, -t)}$$

- Zeitumkehr-Transformation des Dirac-Spinors ( $(i\gamma_0 \partial_t + i\vec{\gamma} \vec{\nabla} - M)\psi(r, t) = 0$ ):

$$\boxed{\mathcal{T} \psi(\vec{r}, t) = i\gamma^1 \gamma^3 \psi^*(\vec{r}, -t)}$$

- $p p \leftrightarrow d \pi^+$ : Die Wirkungsquerschnitte  $\sigma(p p \rightarrow d \pi^+)$  und  $\sigma(d \pi^+ \rightarrow p p)$  sind gleich bis auf kinematische Faktoren (Phasenraum, Flussfaktor, Spinmultiplizitäten).

### 6.5.3 Ladungskonjugation bzw. $c$ -Parität

Die *Ladungskonjugation* führt Teilchen in ihre jeweiligen Antiteilchen über.

- Quarks  $q = u, d, \dots$

$$c|q\rangle = |\bar{q}\rangle \quad c|\bar{q}\rangle = |q\rangle$$

- Leptonen  $l = e, \mu, \dots$

$$c|l\rangle = |\bar{l}\rangle \quad c|\bar{l}\rangle = |l\rangle$$

- Teilchen  $\alpha$ , die ihre eigenen Antiteilchen sind ( $\alpha = \gamma, \pi^0$ ) oder ladungsneutrale Teilchen-Antiteilchen-Bindungszustände können Eigenzustände der  $c$ -Parität sein:

$$c|\alpha\rangle = C_\alpha |\alpha\rangle \quad \text{mit } C_\alpha = \pm 1$$

**Ladungskonjugation des Photons:** Man betrachtet hierzu die Ladungsquellen in den Maxwell-Gleichungen. Durch die Operation  $c$  ändern Ladungen ihr Vorzeichen, ebenso ändern das elektrische Feld  $\vec{E}$ , das elektrische Potential  $\Phi$ , wie auch elektromagnetische Ströme  $\vec{j}$  ihre Vorzeichen:

$$\begin{aligned} c(\phi, \vec{A}) &= -(\phi, \vec{A}) && \text{elektromagnetische Potentiale} \\ c(\vec{E}, \vec{B}) &= -(\vec{E}, \vec{B}) && \text{elektrische und magnetische Felder} \end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$c|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle \quad C(\gamma) = -1$$

**Ladungskonjugation eines neutralen  $q\bar{q}$ -Systems:**  $c$  vertauscht die Rollen von Quark und Antiquark. Im Ortsraum entspricht diese Vertauschung genau der Parität  $(-1)^L$ . Im Spinraum ergibt sich insgesamt  $(-1)^S$  und damit ein symmetrischer Triplettzustand

$\left( \uparrow\uparrow, \frac{1}{\sqrt{2}} [\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow], \downarrow\downarrow \right)$  mit  $S = 1$ , sowie ein antisymmetrischer Singulettzustand  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$  mit  $S = 0$ .

$$C(q\bar{q}) = (-1)^{L+S}$$

$$\begin{aligned} C(\pi^0) &= +1, \quad \pi^0 \rightarrow 2\gamma, \pi^0 \not\rightarrow 3\gamma \\ C(\rho^0, \omega) &= -1 \quad \text{können direkt ans Photon koppeln} \end{aligned}$$

(Diese Paritätsaussage gilt natürlich für alle Fermion-Antifermion-Paare.)

**Ladungskonjugation des Dirac-Feldes:**

$$\begin{aligned} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - eA^\mu) - M] \psi &= 0|^* \\ [\gamma_\mu (i\partial^\mu + eA^\mu) - M] \psi_c &= 0 \end{aligned}$$

$$i\gamma^2 [\gamma_\mu^* (i\partial^\mu - eA^\mu) - M] \psi^* \quad (i\gamma^2)^2 = 1$$

$$i\gamma^2 \gamma_2^* = -\gamma_\mu i\gamma^2 \quad (\gamma^2 \text{ imaginär}, \gamma_{0,1,3} \text{ reell})$$

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - eA^\mu) - M] i\gamma^2 \psi^* = 0$$

Ladungskonjugierter Spinor:  $\psi_c = i\gamma^2 \psi^*$

**$\mathcal{G}$ -Parität:** Für Isospin-Multipletts, welche Teilchen und zugehörige Antiteilchen umfassen, führt man die  $\mathcal{G}$ -Parität ein:

$$\mathcal{G} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ladungskonjugation}}}{\zeta e^{+i\pi\hat{I}_Z}}$$

Der Phasenfaktor  $\exp(+i\pi\hat{I}_Z)$  vermittelt eine Drehung im Isospinraum um  $\pi$  bezüglich der  $z$ -Achse. Betrachten wir die Wirkung auf (u, d)-Quarks:

$$e^{i\pi\hat{I}_z} = e^{i\frac{\pi}{2}\tau_z} = \cos \frac{\pi}{2} + i\tau_z \sin \frac{\pi}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{+i\pi\hat{I}_z}(u, d, \bar{u}, \bar{d}) = (-d, u, -\bar{d}, \bar{u})$$

$\mathcal{G}$ -Parität wirkend auf (u,d)-Quarks:

$$\mathcal{G}(u, d, \bar{u}, \bar{d}) = (-d, u, -\bar{d}, \bar{u})$$

$$\mathcal{G}(\bar{q}q) = (-1)^{L+S+I}$$

$I$  stellt dabei den Isospin des  $q\bar{q}$ -Systems dar.

Betrachten wir nun einen neutralen Zustand mit  $I_3 = 0$ ,

$$\begin{aligned} e^{-i\pi\hat{I}_z}|I=0, I_3=0\rangle &= (+1)|I=0, I_3=0\rangle \\ e^{-i\pi\hat{I}_z}|I=1, I_3=0\rangle &= (-1)|I=1, I_3=0\rangle \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**$\mathcal{G}$ -Parität verschiedener Teilchen:** Pion:  $\mathcal{G}(\pi) = -1$  ( $L = S = 0, I = 1$ ),  $\rho$ -Meson:  $\mathcal{G}(\rho) = +1$  ( $L = 0, S = I = 1$ ),  $\omega$ -Meson:  $\mathcal{G}(\omega) = -1$  ( $L = I = 0, S = 1$ ),  $\eta$ -Meson:  $\mathcal{G}(\eta) = +1$  ( $L = S = I = 0$ ),  $\phi$ -Meson:  $\mathcal{G}(\phi) = -1$  ( $I = L = 0, S = 1$ )

Damit hat man Auswahlregeln aufgrund der  $\mathcal{G}$ -Paritätserhaltung der starken Wechselwirkung, beispielsweise:  $\rho \rightarrow 2\pi$ ,  $\omega \rightarrow 3\pi$ ,  $\phi \rightarrow 3\pi$ , aber:  $\eta \not\rightarrow 3\pi$  in der starken Wechselwirkung.

### 6.5.4 Das CPT-Theorem

Unter sehr allgemeinen Bedingungen kann man für jede lokale Quantenfeldtheorie zeigen:

In jeder lokal lorentzinvarianten Feldtheorie ist das Produkt  $\mathcal{CPT}$  eine exakte Symmetrie bzw. für alle physikalischen Systeme mit beliebiger Wechselwirkung gilt die Invarianz unter der kombinierten Transformation  $\mathcal{CPT}$ .

Es ergeben sich unmittelbar einige Folgerungen:

- Die Lebensdauern und Massen von Teilchen und Antiteilchen müssen gleich sein.
- Falls ein Prozeß nicht invariant unter einer der Operationen  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{P}$  oder  $\mathcal{T}$  ist, ist er ebenfalls nicht invariant unter einer der beiden Restlichen.

Tabelle 6.6 enthält eine Übersicht, welche Größen von welchen Wechselwirkungen erhalten werden.

	Wechselwirkung		
	stark	el.-magn.	schwach
Energie, Impuls, Drehimpuls	✓	✓	✓
elektrische Ladung, Leptonzahl, Baryonzahl	✓	✓	✓
Strangeness $s$	✓	✓	—
Charm $c$	✓	✓	—
Beauty $b$ , Truth $t$	✓	✓	—
starker Isospin $I$	✓	—	—
Parität $\mathcal{P}$	✓	✓	—
Ladungskonjugation $\mathcal{C}$	✓	✓	—
Zeitumkehr $\mathcal{T}$	✓	✓	—
$\mathcal{CP}$ bzw. $\mathcal{T}$	✓	✓	—
$\mathcal{CPT}$	✓	✓	✓

Tab. 6.6: Übersicht über die Erhaltungssätze

## 6.6 Von Quarks zu Hadronen

Nachdem wir uns über die Quarks als Bausteine der Hadronen klar geworden sind und Flavour, Confinement, Farbe und die theoretischen Grundlagen im Rahmen der Gruppentheorie besprochen haben, wollen wir nun zur Synthese übergehen und vom experimentellen Standpunkt sehen, wie Quarks in  $e^+e^-$ -Kollisionen entstehen und wie sich daraus Hadronen formieren.

### 6.6.1 Hadronisierung aus dem Vakuum

Haben zwei Quarks Relativimpulse, die größer sind als die Masse leichter Quarks, so kann deren Energie zur Erzeugung von  $q\bar{q}$ -Paaren aus dem Vakuum genutzt werden, wie es in Abb. 6.11 gezeigt ist. Diese neuen Quarks lagern sich an die ursprünglichen Quarks an und bilden Hadronen. Wird nur ein Teil der in der Reaktion verfügbaren Überschussenergie zur Erzeugung von Quarks aus dem Vakuum genutzt, so werden alle erzeugten Hadronen in Richtung der beiden ursprünglich erzeugten Quarks „mitgeschleift“ (Abb. 6.9), und es entstehen Teilchenstrahlen, sogenannte *Jets*, welche sich gut mit einem  $4\pi$ -Detektor nachweisen lassen.

**Fragmentation von Quarks.** Sei  $z$  der Bruchteil des Impulses der ursprünglich erzeugten Quarks, den ein Hadron im Jet erhält. Der Zwei-Stufen-Prozess für die Erzeugung eines Hadrons  $h$  kann wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow h + X)}{dz} = \sum_q \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) [D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z)], \quad (6.12)$$

wobei über alle Quarks  $q$  summiert wird, aus denen das Hadron  $h$  fragmentieren kann.  $D_q^h(z)$  sind die sogenannten *Fragmentationsfunktionen* und stellen die Wahrscheinlichkeit dar, in der Fragmentation eines Quarks (oder Antiquarks) ein Hadron mit dem Impulsanteil  $z$  zu finden. Dabei gilt für  $z$ :

$$z = \frac{E_h}{E_q} = \frac{E_h}{E_{\text{beam}}} = \frac{2E_h}{Q} \quad \text{mit } Q = \sqrt{s} \quad (6.13)$$

$D(z)$  (Quark  $\rightarrow$  Hadron) ist das Analogon zur Strukturfunktion  $F(x)$  (Hadron  $\rightarrow$  Quark). Wegen der Impulserhaltung gilt

$$\sum_h \int_0^1 z D_q^h(z) dz = 1, \quad (6.14)$$

wegen der Erhaltung der Wahrscheinlichkeit gilt

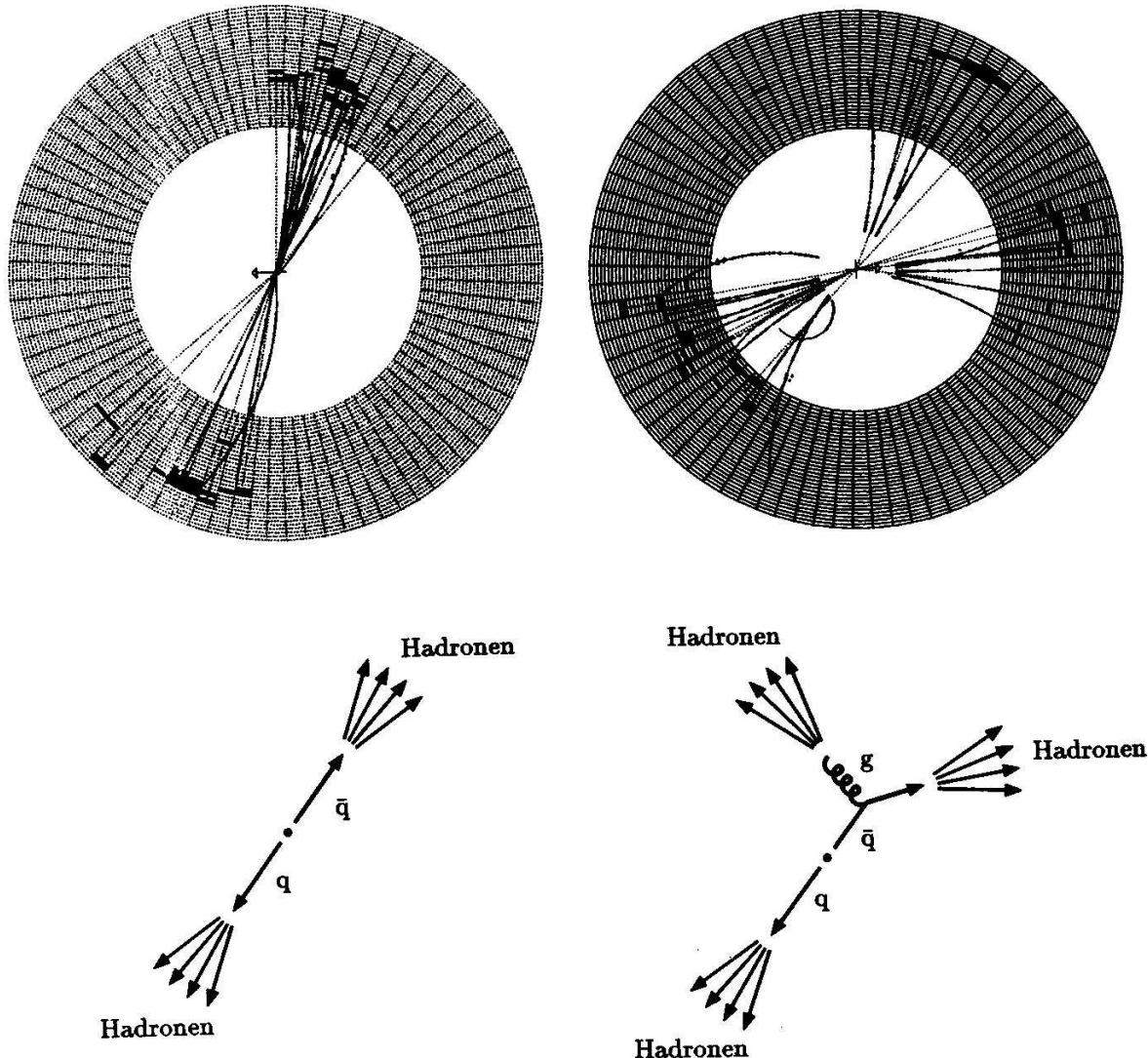
$$\sum_q \int_{z_{\min}}^1 [D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z)] dz = n_h. \quad (6.15)$$

Dabei ist  $z_{\min}$  die Schwellenenergie  $2m_h/Q$  und  $n_h$  die mittlere Multiplizität der Hadronsorthe  $h$  mit Masse  $m_h$ .

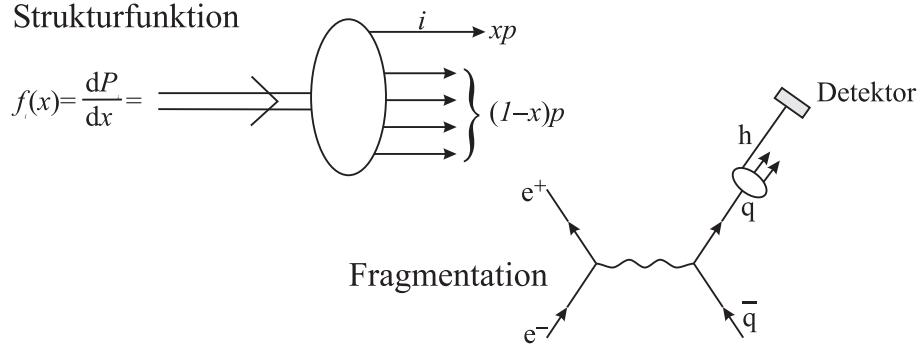
Man kann zeigen, dass im sog. 2-Jet Prozess

$$n_h \propto \log\left(\frac{Q}{2m_h}\right)$$

gilt. Außerdem kann abgeleitet werden:



**Abb. 6.9:** Typisches 2-Jet- und 3-Jet-Ereignis, gemessen mit dem JADE-Detektor am  $e^+e^-$ -Speicherring PETRA. Die Bilder zeigen eine Projektion senkrecht zur Strahlachse, die sich im Zentrum des zylinderförmigen Detektors befindet. Gezeigt sind Spuren geladener (durchgezogene Linien) und ungeladener (gepunktete Linien) Teilchen, die aufgrund ihrer Signale in der innen angeordneten Drahtkammer und des sie umgebenden Bleiglaskalorimeters rekonstruiert wurden. In dieser Projektion ist die Konzentration der erzeugten Hadronen auf zwei bzw. drei Teilchenbündel deutlich zu erkennen (aus [Po96]).



**Abb. 6.10:** Gegenüberstellung der Strukturfunktion und der Fragmentationsfunktion

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow h + X)}{dz} = \frac{\sum_q z_q^2 (D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z))}{\sum_q z_q^2} = f(z)$$

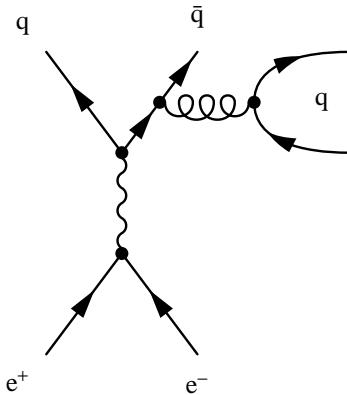
mit  $\sigma = \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})$ . Für die Ableitung wird benötigt:

$$\begin{aligned}\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) &= 3Z_q^2 \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \\ \sigma(e^+e^- \rightarrow h + X) &= \sum_q \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = 3 \sum_q Z_q^2 \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)\end{aligned}$$

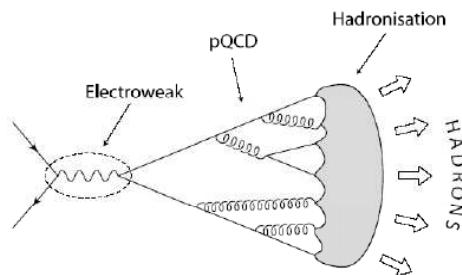
Die Hadronisierung hängt also nicht von  $Q^2$  ab, sondern nur von  $z$  (*Scaling*, analog wie bei der Strukturfunktion  $F(x)$ , für Vergleich siehe Abb. 6.10). Aber auch  $f(z)$  weist eine kleine aber bedeutende Abhängigkeit von  $Q^2$  auf. Hier erzeugt die Gluonenemission eine Skalenbrechung.

Abweichungen des Skalierungverhaltens geben Anlass zur Suche nach neuen, schweren Quarks. An der Energieschwelle, an der die Erzeugung eines solchen Quarks gerade möglich wird ( $\sqrt{s} \gtrsim 2m_Q$ ), ist die verbleibende Restenergie, die für die kinetische Energie aufgewendet werden kann, klein. Das erzeugte, fast statische Quark zerfällt schnell isotrop in viele Hadronen, welche allesamt kleine  $z$  aufweisen.

**Prozesse höherer Ordnung:** Analog zur  $e^-$ -Bremsstrahlung kann in der starken Wechselwirkung Bremsstrahlung auftreten. Möglich sind QED-Bremsstrahlung (Abstrahlung eines Photons) und QCD- oder Gluonbremsstrahlung (Abb. 6.11). Gluonbremsstrahlung führt zur Beobachtung von sog. 3-Jet-Ereignissen, da das abgestrahlte Gluon einen eigenen Jet bildet, falls es eine genügend hohe Energie besitzt. Hierbei kommt es zur Generation neuer Quark-Antiquark-Paare aus dem Vakuum, welche nun wieder fragmentieren und hadronisieren (siehe Abb. 6.12). Dies führt zur Entstehung des 3. Jets. Man beachte allerdings, daß für das Auftreten der Gluonbremsstrahlung das zugrunde liegende Gluon mindestens die Energie zur Bildung eines Quark-Antiquark-Paares besitzen muß, zumal Gluonen ebenfalls dem Confinement unterliegen und nicht frei auftreten (vgl. Photonen). Der erste „direkte“ Nachweis des Gluons gelang bei PE-



**Abb. 6.11:** Abstrahlung eines „weichen“ Gluons (Gluonbremsstrahlung bei Elektron- Positron- Kollisionen)



**Abb. 6.12:** Abstrahlung von Bremsgluonen, Erzeugung neuer Quark- Antiquark- Paare, sowie deren Hadronisation.

TRA<sup>4</sup>. Durch die Gluonabstahlung wird der Wert von  $R$ , wie er uns zuerst in Gl. (6.1) begegnete, verändert:

$$R = 3 \sum_{i=1}^{N_q} z_{q_i}^2 \left( 1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \right) \quad (6.16)$$

Die Abhängigkeit des Verhältnisses 3-Jet/2-Jet von  $\sqrt{s}$  wird auch zur Bestimmung der  $Q^2$ -Abhängigkeit von  $\alpha_s(Q^2)$  benutzt (siehe Abschn. 6.13.5). Bei PETRA ist  $\alpha_s(Q^2) \approx 0.1 - 0.2$ , d. h. ca. 10 - 20 % der Ereignisse haben drei Jets.

## 6.7 Quarkonia ( $q\bar{q}$ -Zustände)

### 6.7.1 Resonante Produktion von Vektormesonen

Im Folgenden betrachten wir die resonante Produktion von flavourneutralen Mesonen ( $q\bar{q}$  mit Flavour( $q$ ) = Flavour( $\bar{q}$ )). Dabei bildet sich bei der Annihilation von Elektronen und Positronen

<sup>4</sup><http://www-hasylab.desy.de/facility/petra/main.htm>

ein resonanter Zwischenzustand X, der wiederum in die Endzustände zerfällt. Dieser unterliegt der Resonanzbedingung:

$$E_{e^+} + E_{e^-} = \sqrt{s} \sim M_x \cdot c^2$$

Gesucht ist nun der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  der Reaktion  $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow X \rightarrow a+b$ .

Betrachte einen Zustand X, der mit der Lebensdauer  $\tau$  in ein Elektron und ein Positron zerfällt. Es gilt:

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{1}{\frac{\Gamma}{\text{naturliche Einheiten}}}$$

Für die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktion gilt nach dem exponentiellen Zerfallsgesetz:

$$|\Psi(t)|^2 = |\Psi(t=0)|^2 e^{-\Gamma t}$$

und somit:

$$\Psi(t) \propto e^{-iMt} e^{-\frac{\Gamma t}{2}}$$

Der Term  $e^{-iMt}$  gibt die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion des freien Teilchens wieder, der Term  $e^{-\frac{\Gamma t}{2}}$  die Dämpfung durch den Zerfall.

Mit der Schwerpunktsenergie  $E$  von Elektron und Positron gilt für die Fouriertransformierte  $\chi(E)$ :

$$\chi(E) = \int \Psi(t) e^{iEt} dt \propto \frac{1}{E - M + \frac{i\Gamma}{2}}$$

D.h. für die zeitumgekehrte Reaktion  $e^+e^- \rightarrow X$  gilt:

$$\sigma = |\chi(E)|^2 = \frac{A}{(E - M)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

Für die Produktion von Vektormesonen gilt die Breit-Wigner-Formel:

$$\sigma(E) = \frac{3\pi\lambda^2}{4} \frac{\Gamma_i \Gamma_f}{(E - E_0)^2 + \Gamma_{\text{tot}}^2/4}$$

(6.17)

Dabei bedeuten:

- $\Gamma_{\text{tot}}$  die totale Breite eines Zustandes ( $\frac{\hbar}{\tau}$ )  
berücksichtigt alle Arten eines Teilchens zu zerfallen
- $\Gamma_{i,f}$  die partiellen Breiten,
- $\Gamma_i/\Gamma_{\text{tot}}$  Wahrscheinlichkeit für den Zerfall von X nach  $e^+e^-$ ,
- $\Gamma_f/\Gamma_{\text{tot}}$  Wahrscheinlichkeit für den Zerfall von X nach  $a+b$ ,
- $\lambda$  De-Broglie-Wellenlänge von  $e^+$ ,  $e^-$  im CMS,
- $E_0$  Resonanzenergie des Zustandes X ( $E_0 = Mc^2$ ).

Name	Quark-Wellenfunktion	$M[\text{MeV}/c^2]$	$\Gamma_{\text{tot}}[\text{MeV}/c^2]$
$\rho$	$1/\sqrt{2}(u\bar{u} - d\bar{d})$	770	150.7
$\omega$	$1/\sqrt{2}(u\bar{u} + d\bar{d})$	781.94	8.41
$\phi$	$s\bar{s}$	1019.413	4.43
$J/\psi$	$c\bar{c}$	3096.88(4)	0.087(5)
$\Upsilon$	$b\bar{b}$	9460.37(21)	0.0525(18)

**Tab. 6.7:** Einige Vektormesonen

Das X besitzt (automatisch) die Quantenzahlen des Photons, Drehimpuls 1, Eigenparität negativ:  $J^P = 1^-$ . Es werden also nur Mesonen mit Spin 1, sogenannte *Vektormesonen*, produziert, Beispiele siehe Tab. 6.7. Bis auf das  $\rho$ -Meson haben diese Mesonen kleine Zerfallsbreiten und tragen zum Wirkungsquerschnitt, das heißt zum Meßwert von  $R = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}}}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}}$ , nur lokal bei, also bei bestimmtem festen Wert von  $\sqrt{s}$ . Außerhalb der Resonanzregion findet die Hadronproduktion via Quarkfragmentation statt. Aus den großen Massenunterschieden der Vektormesonen kann man auf die unterschiedlichen Quarkmassen schließen.

## 6.7.2 Zerfall von Vektormesonen

Betrachten wir flavourneutrale Systeme (Flavour-Quantenzahl = 0, Ladung = 0), wie beispielsweise:

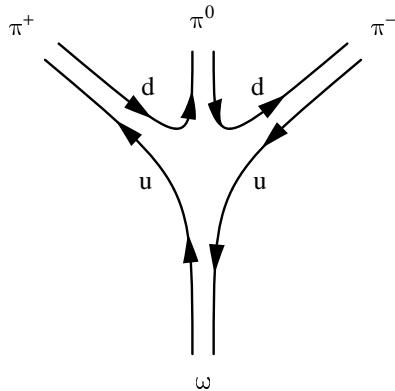
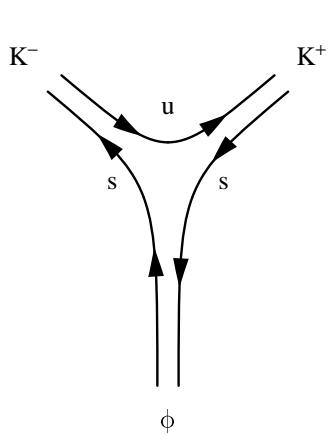
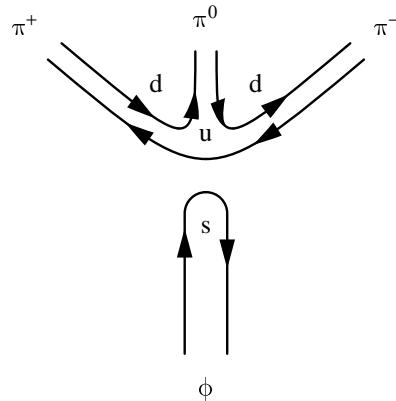
$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} + d\bar{d}) \\ \rho &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} - d\bar{d}) \\ \phi &= s\bar{s}\end{aligned}$$

Diese Systeme haben Spin-Parität  $J^P = 1^-$  und ihr Zerfall erfolgt gemäß Abb. 6.13. Die Abbildung zeigt ein Flavorflussdiagramm, d.h. ohne die (meist starken) Wechselwirkungen. Der dort gezeigte Zerfalls-Mechanismus läuft in etwa in 90% aller Fälle ab.

$$\frac{\Gamma_{\text{hadronisch}}}{\Gamma_{\text{elektromagnetisch}}} \approx 90\%$$

Für den Zerfall  $\omega \rightarrow 3\pi$  ist der Phasenraum klein und somit ergibt sich eine kleine Breite  $\Gamma_\omega \approx 11 \text{ MeV}$ .

Wegen der Erhaltung der Quantenzahlen (Isospin und Ladungsparität, allg. die  $G$ -Parität, siehe Kap. 6.5.3) kann das  $\rho$ -Meson auch in zwei Pionen zerfallen, und besitzt wegen des größeren Phasenraumes bei diesem Zerfall eine Breite von  $\Gamma_\rho \approx 150 \text{ MeV}$ . Das  $\phi$ -Meson dagegen zerfällt zu etwa 84% gemäß dem in Abb. 6.14 gezeigten Schema in zwei K-Mesonen. Die Breite beträgt hier  $\Gamma_\phi \approx 4 \text{ MeV}$ : Der Phasenraum ist wegen der großen Masse der K-Mesonen klein. Der

**Abb. 6.13:** Zerfall des  $\omega$  in drei Pionen**Abb. 6.14:** Zerfallsschema des  $\phi$ -Mesons**Abb. 6.15:** Nach Zweig-Regel unterdrückter Zerfall des  $\phi$ 's in drei Pionen

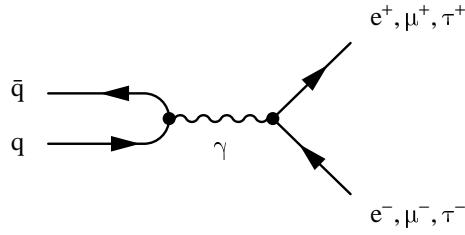
phasenraummäßig günstigere Zerfall analog zum dem des  $\omega$ 's, wie er in Abb. 6.15 gezeigt ist, ist unterdrückt. Diese Unterdrückung von Prozessen mit nichtverbundenen Quarklinien nennt man nach dem Physiker George Zweig die *Zweig-Regel*: Der Zerfall  $\phi \rightarrow 3\pi$  macht nur etwa 15% aller Zerfälle aus.

### 6.7.3 Leptonische Zerfälle von Vektormesonen

Die Kopplung von Quarks an Leptonen ist nur über die elektromagnetische ( $\gamma$ ) oder die schwache Wechselwirkung ( $Z^0$  und  $W$ ) möglich. Hier ist der elektromagnetische Fall dominant.

Um zu zeigen, dass die Zuordnung der Flavour-Spin-Wellenfunktionen zu den Mesonen richtig ist und dass ferner die Quarkladungen durch das  $R$ -Verhältnis korrekt bestimmt sind, messen wir den Zerfall von Vektormesonen in Leptonenpaare über die elektromagnetische Kopplung, wie er in Abb. 6.16 skizziert ist.

Betrachten wir folgende Zerfälle:



**Abb. 6.16:** Ein Vektormeson  $q\bar{q}$  zerfällt in ein Lepton-Antilepton-Paar

$$\begin{aligned}\omega &\rightarrow e^+e^- (\mu^+\mu^-) \\ \rho^0 &\rightarrow e^+e^- (\mu^+\mu^-) \\ \phi &\rightarrow e^+e^- (\mu^+\mu^-)\end{aligned}$$

Die Übergangsrate wird durch die partielle Zerfallsbreite ( $\Gamma_{e^+e^-}$ ) ausgedrückt:

$$\Gamma(V \rightarrow e^+e^-) = \frac{16\pi\alpha^2 Z^2}{M_V^2} |\psi(0)|^2 \quad (6.18)$$

Hier symbolisiert  $V$  Vektormesonen wie  $\rho, \omega, \phi$ . Es gilt:

$$Z^2 = \left| \sum_i a_i Z_i \right|^2$$

wegen der Kopplung an Quarkladungen  $Z_i$  mit dem Gewicht  $a_i$ . Hierbei ist die kohärente Summe zu nehmen, da die Wellenfunktionen der verschiedenen Quarkflavours ununterscheidbar sind. Ferner bedeuten

- $\frac{1}{M_V^2}$  Propagator des Photons · Phasenraum (Zweikörperzerfall)  $\frac{1}{Q^4} Q^2$ , mit  $Q^2 = M_V^2$
- $|\psi(0)|^2$  Wellenfunktionsüberlapp am Ursprung von  $q$  und  $\bar{q}$   
(man beachte die Punktformigkeit des Photons)

Mit der vernünftigen Annahme einer SU(3)-Flavour-Symmetrie ergibt sich:

$$M_\rho \approx M_\omega \approx M_\phi \Rightarrow \frac{|\psi(0)|^2}{M_V^2} \approx \text{konstant} \Rightarrow \Gamma_{e^+e^-} \propto Z^2,$$

d. h. die leptonische Breite hängt nur von den Quarkladungen und ihren Gewichten ab. Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \text{für } \rho : \left| \sum_i a_i Z_i \right|^2 &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{2}{3} - \left( -\frac{1}{3} \right) \right] \right\}^2 = \frac{1}{2} \\ \text{für } \omega : \left| \sum_i a_i Z_i \right|^2 &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{2}{3} + \left( -\frac{1}{3} \right) \right] \right\}^2 = \frac{1}{18} \\ \text{für } \phi : \left| \sum_i a_i Z_i \right|^2 &= \left( \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

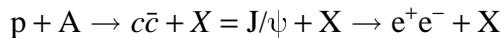
und damit für  $\Gamma_{e^+e^-}(\rho^0) : \Gamma_{e^+e^-}(\omega) : \Gamma_{e^+e^-}(\phi) = 9 : 1 : 2$ . Gemessen wurde in guter Übereinstimmung 11 : 1 : 2,2. Somit können Ladungen und relative Phase der Quarks in der Wellenfunktion gemessen werden. Analog können Vektormesonen auch in  $e^+e^-$ -Stößen erzeugt werden.

#### 6.7.4 Schwere Vektormesonen (Quarkonia)

Aus dem  $R$ -Plot (Abb. 6.5) ist klar ersichtlich, dass auch Vektormesonen mit schweren Quarks ( $M > 3 \text{ GeV}$ ) in  $e^+e^-$ -Stößen generiert werden können (natürlich beschränkt auf solche mit den Quantenzahlen des Photons). Bis 1974 waren nur 3 verschiedene Quarks gefunden (als Vektormesonen der Klasse der  $\rho$ -,  $\omega$ -,  $\phi$ -Mesonen). Die Theorie sagte jedoch voraus, dass es mindestens 4 Quark-Flavours geben muss (aufgrund der schwachen Wechselwirkung, siehe Kapitel 7).

Die Suche nach schweren Quarks, allen voran nach dem Charm-Quark, fand simultan am SPEAR<sup>5</sup>-Speicherring am SLAC in Stanford und an einem Protonenstrahl (28 GeV) des AGS<sup>6</sup> am Brookhaven National Laboratory statt. Das Wettrennen ging durch gleichzeitige Veröffentlichung [Au74a, Au74b] der  $J/\psi$ -Entdeckung (Abb. 6.17) zu Ende. Für diese Entdeckung erhielten 1976 Richter (SLAC) und Ting (BNL) den Nobelpreis<sup>7</sup>.

In Brookhaven wurden der leptonische Zerfall des Vektormesons betrachtet, indem schwere Targets mit Protonen bombardiert und dann der Endzustand von  $e^+e^-$  oder  $\mu^+\mu^-$  durch Bildung der invarianten Masse, also des Betrages der Summe der 4-Impuls-Vektoren der beiden Leptonen, untersucht wurden:



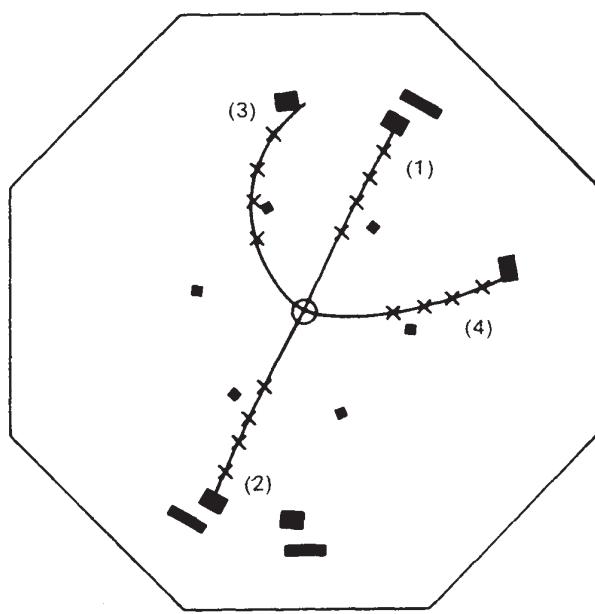
Hierdurch ist ein weiter Massenbereich zugänglich ohne das Experiment ändern zu müssen, der Wirkungsquerschnitt hingegen ist klein.

Am SLAC dagegen wurde mühsam die Schwerpunktsenergie des Colliders variiert, um das Vektormeson resonant zu erzeugen. Der Wirkungsquerschnitt für getrennte Endzustände bei diesem Experiment ist in Abb. 6.20 aufgetragen.

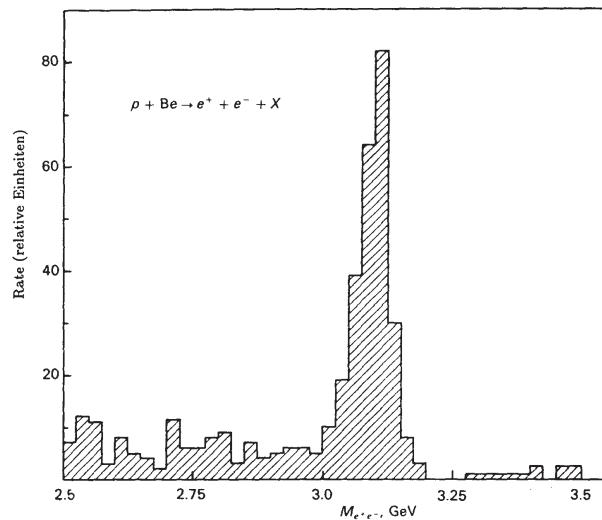
<sup>5</sup><http://www.slac.stanford.edu/welcome/spear.html>

<sup>6</sup><http://www.agshome.bnl.gov/>

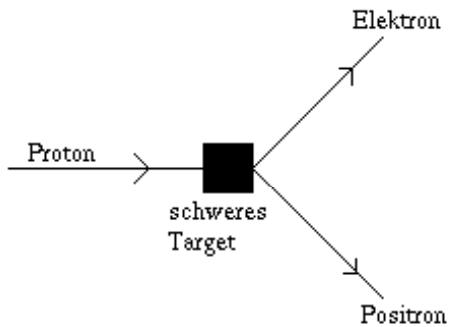
<sup>7</sup><http://mirror.nobel.ki.se/laureates/physics-1976.html>



**Abb. 6.17:** Wie das  $\Psi$  zu seinem Namen kam... Beispiel für die Beobachtung eines Zerfalls  $J/\psi(3.7) \rightarrow J/\psi(3.1) + \pi^+ + \pi^-$  in einem Funkenkammer-Detektor. Das  $J/\psi(3.1)$  zerfällt in  $e^+ + e^-$ . Die Spuren (3) und (4) gehören zu den relativ niederenergetischen Pionen (150 MeV), (1) und (2) zu den 1.5 GeV-Elektronen. Das Magnetfeld und die Strahlröhre des SPEAR stehen senkrecht auf der Zeichenebene. Die eingezeichnete Bahn jedes der vier Teilchen ist die beste Anpassung durch die beobachteten Funken, durch Kreuze symbolisiert (nach [Ab75]).



**Abb. 6.18:** Die Entdeckung des  $J/\psi$  am 28 GeV-AGS des Brookhaven National Laboratory. Man sieht die schmale  $J/\psi$ -Resonanz in der Verteilung der invarianten Masse des  $e^+e^-$ -Paars, das in Reaktionen von Protonen an einem Beryllium-Target erzeugt wurde (nach [Au74a]).



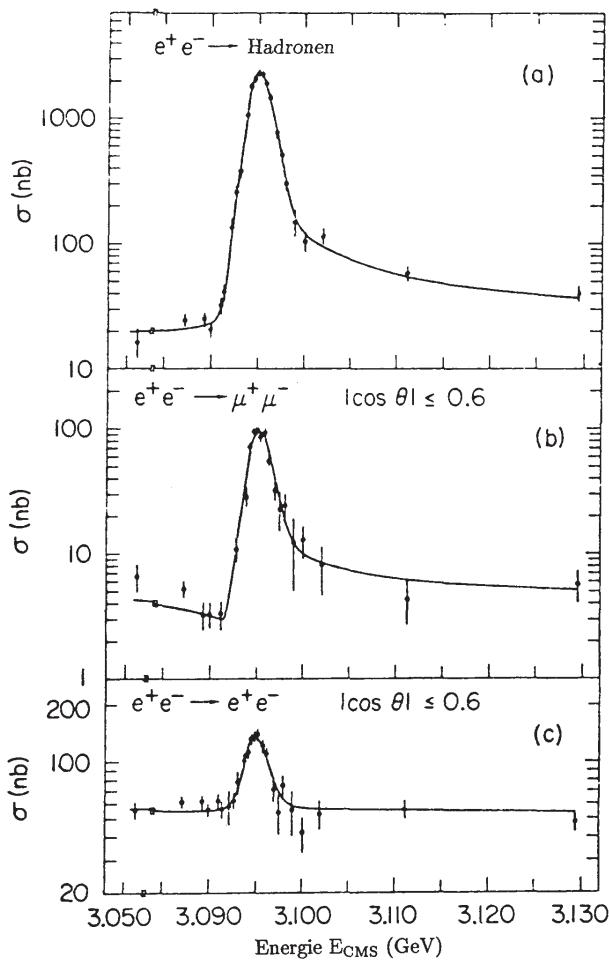
**Abb. 6.19:** Schematischer Aufbau zur Produktion des charm-Quarks in Brookhaven

Letztendlich fand man das  $J/\psi$  bei  $M \sim 3,1 \text{ GeV}/c^2$ .

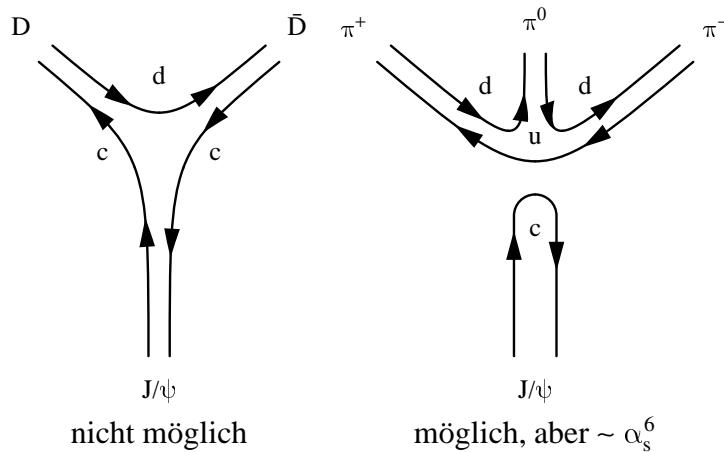
Man fand nicht nur den Grundzustand des Mesons, sondern auch angeregte Zustände, welche unter Emission von Pionen in den Grundzustand übergehen.

$$\Psi(3.7) \rightarrow \Psi(3.1) + \pi^+ + \pi^- \quad \text{mit} \quad \Psi(3.1) \rightarrow e^+ e^-$$

Allerdings überraschte, daß die Breite des neuen Vektormesons sehr klein war. Dies war nur durch einen neuen Flavour zu erklären, *charm* genannt. Der Zerfall des  $J/\Psi$  erfolgt analog zum  $\phi$  (Abb. 6.21). Der Zerfall in zwei D-Mesonen mit *charm* (analog zu  $\phi \rightarrow K^+ K^-$ ) ist nicht möglich, da die Masse des  $J/\psi(3.1)$  kleiner ist, als die zweier D Mesonen ( $M(J/\psi(3.1)) < 2M_D$ ). Der Zerfall in drei Pionen ist möglich, kann aber aus Symmetriegründen (Abb. 6.22) nur über den Austausch von drei Gluonen erfolgen und ist damit stark unterdrückt (Zweig-Regel), da Matrixelement proportional zu  $\alpha_s^6 < 1$ . Hierdurch wird die geringe Breite von  $\Gamma(J/\psi) = 4 \text{ keV}$  verständlich.



**Abb. 6.20:** Resonante Erzeugung des  $J/\psi$  am SLAC. Wirkungsquerschnitt für getrennte Endzustände: (a) Hadronen, (b)  $\mu^+\mu^-$  und (c)  $e^+e^-$ . Die Resonanz wurde in  $e^+e^-$ -Kollisionen am Speicherring SPEAR am SLAC erzeugt (nach [Au74b]).



**Abb. 6.21:** Zerfall des  $J/\Psi$

Analoge Betrachtungen gelten für ein System aus b-Quarks ( $b\bar{b}$ ,  $\Upsilon$  bzw. Bottomium genannt), welches 1977 am Fermilab<sup>8</sup> gefunden wurde. Neben dem Grundzustand mit

$$m(\Upsilon_{1s}) \approx 9.47 \text{ GeV}, \quad \Gamma_{\text{tot}} = 52 \text{ keV}$$

wurden drei schmale angeregte Zustände gefunden. Das B-Meson ist als leichtestes  $b\bar{q}$ -Meson mehr als halb so schwer wie das  $\Upsilon$ ,

$$m_\Upsilon < 2m_B,$$

so daß Zerfälle in zwei B-Mesonen nicht möglich sind. Wie steht es nun mit den leptonischen Breiten? Es gilt für die totalen Breiten  $\Gamma_{\text{tot}}^{\text{J}/\psi} \ll \Gamma_{\text{tot}}^\phi$ , jedoch wird für die leptonischen Breiten gemessen:

$$\begin{aligned} \Gamma_{e^-e^+}^{\text{J}/\psi} &= 5.26 \text{ keV} & \text{Theorie : } Z^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \\ \Gamma_{e^-e^+}^\Upsilon &= 1.32 \text{ keV} & \text{Theorie : } Z^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \\ \text{Und damit: } \Gamma_{ee}^\Upsilon &\approx \Gamma_{ee}^\phi \stackrel{!}{\approx} \frac{1}{4} \Gamma_{ee}^{\text{J}/\psi} \end{aligned}$$

Im Rahmen des Quarkmodells ergibt sich also eine hervorragende Übereinstimmung.

Die Besonderheit der schweren Quarksysteme hat ihre Ursache im  $q\bar{q}$ -Potential der QCD, das in den folgenden Abschnitten näher besprochen wird. Die Quarkonia erlauben präzise Spektroskopie mit schmalen Anregungszuständen.

### 6.7.5 Quarkonia und die Zweig-Regel

Analog zum Orthopositronium ( $J^P = 1^-$ , siehe Abschn. 6.8.1) kann das  $\text{J}/\psi (1^-)$  nur elektromagnetisch (leptonischer Zerfall  $\Gamma^{ee}$ ) oder hadronisch über einen Zwischenzustand aus drei Gluonen zerfallen. Die Zweig-Regel (Abschn. 6.7.2) sorgt für kleine Zerfallsbreiten von Charmonium und allen anderen Quarkonia mit

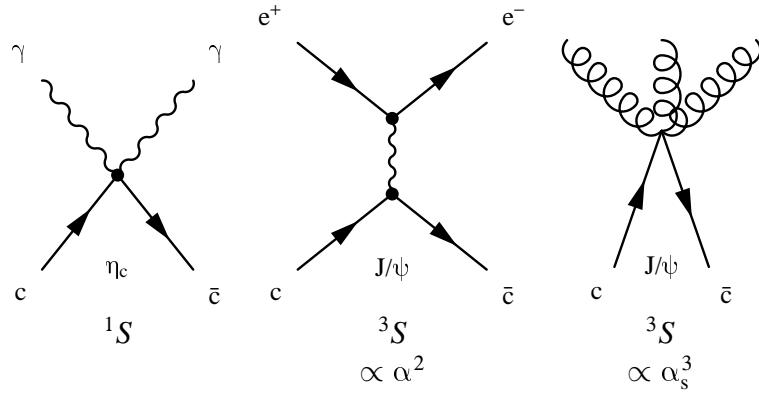
$$m_{q\bar{q}} \lesssim 2m_{q_x}. \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{leichtestes Meson} \\ \text{mit Flavour } q \end{matrix}$$

Was können wir aus dem Vergleich von  $\Gamma^{ee}$  und  $\Gamma^{\text{hadr}}$  lernen? Aus dem leptonischen Vektormesonenzerrfall wissen wir:

$$\Gamma(\psi \rightarrow \gamma \rightarrow e^+e^-) = \frac{16\pi}{M^2} \alpha^2 |\psi(0)|^2 Z^2 \approx 5 \text{ keV} \quad (6.19)$$

---

<sup>8</sup><http://www.fnal.gov/>



**Abb. 6.22:** Mögliche Zerfallsmoden von Quarkonia. Der hadronische Zerfall könnte wegen der Farberhaltung in zwei oder drei Gluonen erfolgen. Wegen  $J^P(g) = J^P(c\bar{c}) = 1^-$  ist aufgrund der Paritätserhaltung jedoch nur der Zerfall in drei Gluonen möglich.

Aus dem Zerfall des Orthopositroniums können wir in Analogie ableiten:

$$\Gamma(\psi \rightarrow 3g \rightarrow \text{Hadronen}) = \frac{160(\pi^2 - 9)}{81M^2} \alpha_s^3 |\psi(0)|^2 \approx 70 \text{ keV}$$

Abweichend von Gl. (6.19) erhält man einen Faktor  $\frac{5}{18}$  aus der Farbladung in  $q\bar{q} \rightarrow 3g$ . Außerdem geht natürlich  $\alpha \rightarrow \alpha_s$ . Der Vergleich der beiden Zerfallsbreiten hilft bei der Bestimmung der Kopplungskonstante  $\alpha_s$  und den Ladungen  $Z_i$ . Experimentelle Beobachtung:

		$\Gamma^{ee}/\Gamma_{\text{tot}}$	$\Gamma^{ee} [\text{keV}]$	$\alpha_s$
$\phi$	$s\bar{s}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$1.31 \pm 0.06$	0.44
$\psi$	$c\bar{c}$	$7.4 \cdot 10^{-2}$	$4.7 \pm 1.0$	0.21
$\Upsilon$	$b\bar{b}$	$3.0 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \pm 0.2$	0.18

Hieraus können wir folgern:

- Der leptonische Zerfall ist auch bei 10 GeV noch proportional zu  $Z^2$ :  
 $c$ -Quark:  $Z = +\frac{2}{3}$      $b$ -Quark:  $Z = -\frac{1}{3}$
- $\alpha_s \gg \alpha$
- $\alpha_s$  hängt von der Energieskala  $Q^2$ , d. h. der im Zerfall zur Verfügung stehenden Energie, ab und wird mit steigender Energie kleiner. Dies nennt man *asymptotische Freiheit*, d. h. bei sehr hohen Energien (kleinen Abständen) bewegen sich die Quarks frei.

### Bemerkungen zum Zerfall des $J/\psi$

Der Zerfall  $J/\psi \rightarrow D\bar{D}$  ist auf Grund der Energieerhaltung wie schon oben angemerkt nicht möglich. Der Zerfall des  $1^1S_0$  Zustandes  $\eta_c \rightarrow \gamma\gamma$  bzw.  $\eta_c \rightarrow gg \rightarrow \text{Hadronen}$  ist wegen der Erhaltung der Quantenzahlen ( $J^P(\gamma) = 1^-$ ) möglich, da das  $\eta_c$  positive Parität hat. Der  $1^3S_0$

Zustand kann dagegen nur über  $J/\psi \rightarrow \gamma\gamma\gamma$  bzw.  $J/\psi \rightarrow ggg$  zerfallen. Die Paritätserhaltung erfordert eine Kopplung an eine ungerade Zahl von Eichbosonen ( $g, \gamma$ ), Farb- und Impulserhaltung erfordern  $n_{g,\gamma} > 1$ , also mehr als ein Eichbosonen.

Zusätzlich muss die Farbe auch erhalten sein. Es sind also nur farbneutrale Endzustände möglich.

Partikel	$J^P$
$J/\psi$	$1^-$
$g$	$1^-$
$\gamma$	$1^-$

Man erkennt aus der obigen Tabelle, dass das  $J/\psi$  nur in eine ungerade Anzahl von Photonen bzw. Gluonen zerfallen kann.

$$\begin{array}{l|l|l|l} J/\psi \rightarrow \gamma^* gg \rightarrow \gamma + \text{Hadronen} & \propto \alpha_s^2 \cdot \alpha \\ J/\psi \rightarrow \gamma^* \rightarrow & \propto \cdot \alpha^2 \\ J/\psi \rightarrow ggg \rightarrow & \propto \cdot \alpha_s^3 \end{array} \left| \begin{array}{l} \approx 30\% \\ \approx 70\% \end{array} \right.$$

Der schwache Zerfall  $J/\psi \rightarrow D_s + e^- + \bar{\nu}_e$  hat keine praktische Bedeutung.

Insgesamt sind Zustände des Charmonium schmal. Für  $J/\psi$  gilt z.B.:

$$\Gamma \approx 88 \text{ keV} \quad \text{bei einer Masse von } M \approx 3,1 \text{ GeV}$$

Für die zweite Anregung hingegen gilt:

$$\Gamma \approx 24 \text{ MeV} \quad \text{bei einer Masse von } M = 3,770 \text{ GeV}$$

Bei Bottomiumsystemen kann erst der dritte angeregte schnell Zustand zerfallen:

$$\Upsilon(4s) \rightarrow B\bar{B}$$

## 6.8 Das Potential der starken Wechselwirkung für Quarks

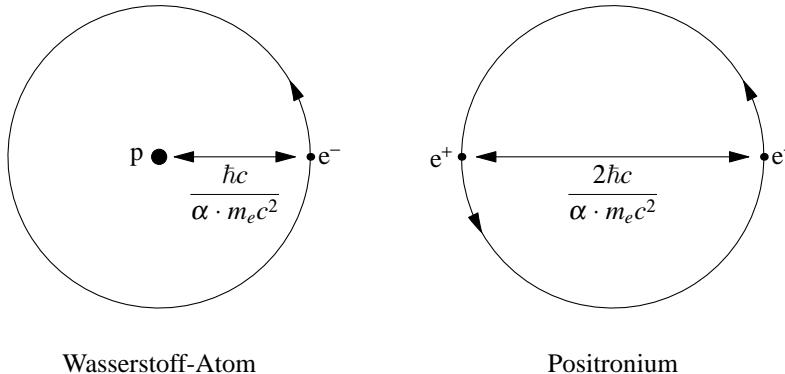
### 6.8.1 Wasserstoffatom und Positronium

Als Analogie zum  $q\bar{q}$ -System studieren wir zunächst das Wasserstoffatom und das *Positronium*, wie sie in Abb. 6.23 skizziert sind.

Unter der Annahme eines kurzreichweiten ein Gluon Austausches (analog zum ein Photon-Austausch) lassen sich beide Systeme durch das Potential

$$V = -\frac{\alpha \hbar c}{r},$$

beschreiben. Die Systeme unterscheiden sich aber in ihren Massen und Radien:



**Abb. 6.23:** Wasserstoff und Positronium

$$\text{reduzierte Masse: } \mu_{\text{red}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu_{\text{red}}(\text{H}) \approx m_e, \quad \mu_{\text{red}}(e^+ e^-) = \frac{m_e}{2}$$

$$\text{Bohrscher Radius: } r_{\text{Bohr}} = \frac{\hbar c}{\alpha \mu_{\text{red}} c^2} \approx 0.5 \text{\AA} \quad \text{f\"ur das H-Atom}$$

Die entarteten Energiezustände ergeben sich zu:

$$E_n = -\frac{\alpha^2 \mu_{\text{red}} c^2}{2n^2} \quad \text{mit} \quad n = N + \ell + 1$$

↓  
 radiale  
 Knotenzahl

Die Entartung der Energieniveaus wird aufgehoben durch:

$$\begin{array}{lll} \text{Spin-Bahn-Wechselwirkung} & (\text{Feinstruktur}) & \propto \alpha^2 \\ \text{Spin-Spin-Wechselwirkung} & (\text{Hyperfeinstruktur}) & \propto \alpha^2 \cdot \frac{\mu_p}{\mu_e} \end{array}$$

$$\frac{E_{\text{HFS}}}{\Delta E = E_2 - E_1} = 5 \cdot 10^{-7}$$

Wasserstoff und Positronium haben ähnliche Termschemata (Abb. 6.24), es gibt jedoch einige Unterschiede:

$$E_n^{e^+e^-} = \frac{1}{2} E_n^H$$

$$r_{\text{Bohr}}^{e^+e^-} = 2 r_{\text{Bohr}}^H$$

$$E_{\text{HFS}}^{e^+e^-} \sim \mu_p/\mu_e E_{\text{HFS}}^H \approx 2000 \cdot E_{\text{HFS}}^H$$

Damit ist die Hyperfeinaufspaltung aufgrund der Spin-Spin-Wechselwirkung im Positronium ähnlich groß wie die Feinstrukturaufspaltung, da die Masse des Positrons viel kleiner als die des Protons ist (und damit  $\mu_e \gg \mu_p$ ).

## 6.8 Das Potential der starken Wechselwirkung für Quarks

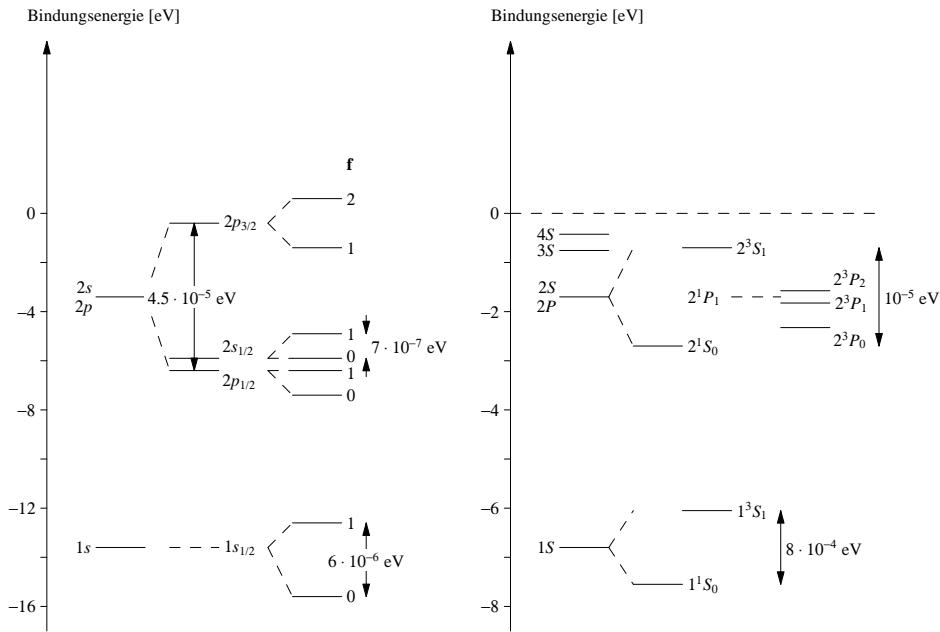


Abb. 6.24: Termschemata von Wasserstoff und Positronium im Vergleich.

**Hauptquantenzahlen:** Beim Positronium werden Zustände folgendermaßen bezeichnet:

Zustandsnotation:  $[n^{2S+1}L_J]$

	Hauptquantenzahl:	$n = 0, 1, 2, \dots$
Dabei sind:	Gesamtspin:	$S = 0, 1$
	Bahndrehimpuls:	$L = 0, 1, 2, \dots$
	Gesamtdrehimpuls:	$J =  L - S , \dots, L + S$

Je nach Gesamtspin unterscheidet man:

Parapositronium  $S = 0 \quad 1^1S_0$   
 Orthopositronium  $S = 1 \quad 1^3S_1$

**Zerfall:** Wegen der Annihilation von  $e^+$  und  $e^-$  hat das Positronium nur eine endliche Lebensdauer. Um zu sehen, wie es zerfällt, betrachten wir zunächst die Quantenzahlen  $S$ ,  $L$  und  $C$ -Parität  $C$ :

	$S$	$L$	$C = (-1)^{S+L}$
$\gamma$	1	0	-1
$1^1S_0$	0	0	+1
$1^3S_1$	1	0	-1

Möglich sind damit die beiden Zerfälle

- $1^1S_0 \rightarrow 2\gamma$  mit

$$\Gamma^{2\gamma} = 4\pi r_e^2 \hbar c |\psi(0)|^2$$

Wobei  $r_e = e^2/4\pi m_e c^2$  der klassische Elektronenradius<sup>9</sup> und  $|\psi(0)|^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha^6}{(2r_e)^3}$  sind. Damit ist die Zerfallsbreite:

$$\Gamma^{2\gamma} = \frac{1}{2} m_e c^2 \underline{\underline{\alpha}}^5$$

- $1^3S_1 \rightarrow 3\gamma$  mit

$$\Gamma^{3\gamma} = \frac{2(\pi^2 - 9)}{9\pi} m_e c^2 \underline{\underline{\alpha}}^6$$

Die daraus resultierenden Lebensdauern,

$$\begin{aligned}\tau_{1^1S_0} &= 1.252 \cdot 10^{-10} \text{ s}, \\ \tau_{1^3S_1} &= 1.374 \cdot 10^{-7} \text{ s},\end{aligned}$$

sind durch Messungen ( $\tau_{1^1S_0} = 1.252(17) \cdot 10^{-10} \text{ s}$  bzw.  $\tau_{1^3S_1} = 1.377(4) \cdot 10^{-7} \text{ s}$ ) hervorragend bestätigt.

### 6.8.2 Vergleich von Positronium und Quarkonium

Das Positronium ist das zum Quarkonium analoge System unter Austausch der elektromagnetischen und der starken Wechselwirkung und damit  $\alpha^2 \leftrightarrow \alpha_s^2$ . Ferner gilt für die Massen im Falle des Charmoniums  $m_c \approx 3000 \cdot m_e$ . Aufgrund dieser beiden Tatsachen ist die Energieskala des Massenspektrums um einen Faktor  $3 \cdot 10^8$  größer.

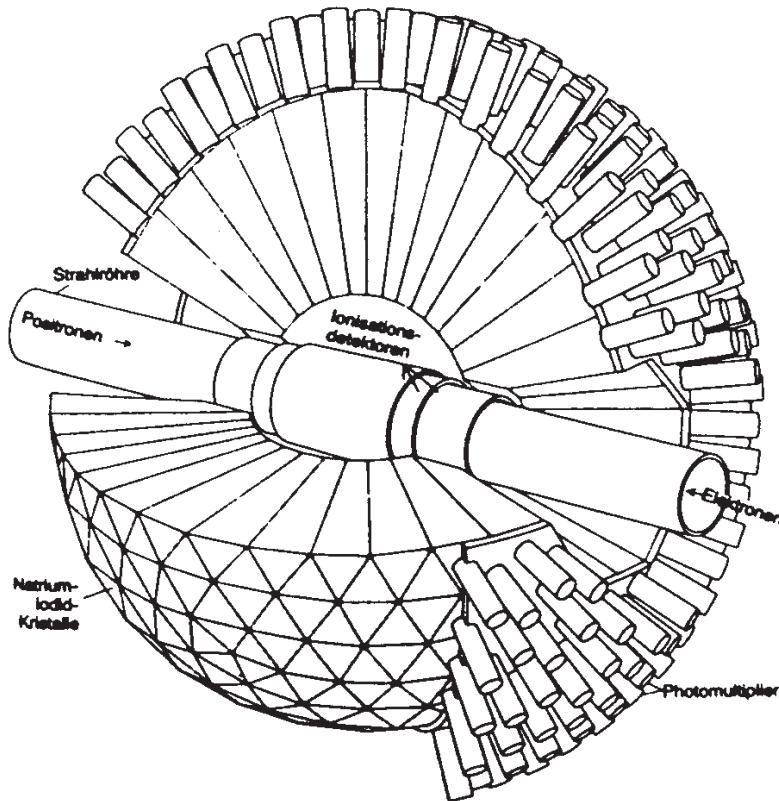
Die Messung des *Charmonium*-Spektrums erfolgte unter anderem am SPEAR<sup>10</sup> (SLAC) mit dem Crystal-Ball-Photonendetektor (Abb. 6.25), um elektromagnetische Übergänge (Abb. 6.26) zwischen verschiedenen Zuständen beobachten zu können und wird heute an dem Speicherring CESR in Cornell und in China weiter verfolgt.

Direkt erzeugt werden nur Zustände mit den Quantenzahlen des  $J/\psi$ , also  $1^-$ . In diesem Fall betrachten wir den radial angeregten Zustand  $\psi(2^3S_1)$  mit  $m = 3685 \text{ MeV}$  und dem Zerfall  $\psi(2^3S_1) \rightarrow \gamma + c\bar{c}(\chi_c)$ . In NaI-Szintillatoren werden Photonen aus elektrischen ( $\Delta L = 1$ ) und magnetischen ( $\Delta S = 1$ ) Dipolübergängen beobachtet. Die Unterscheidung erfolgt über die Winkelverteilung. Während in Atomen die magnetischen Übergänge (Spin-Flip) gegenüber den elektrischen Übergängen unterdrückt sind, sind sie hier wegen der starken *Spin-Spin-Wechselwirkung* gut beobachtbar.

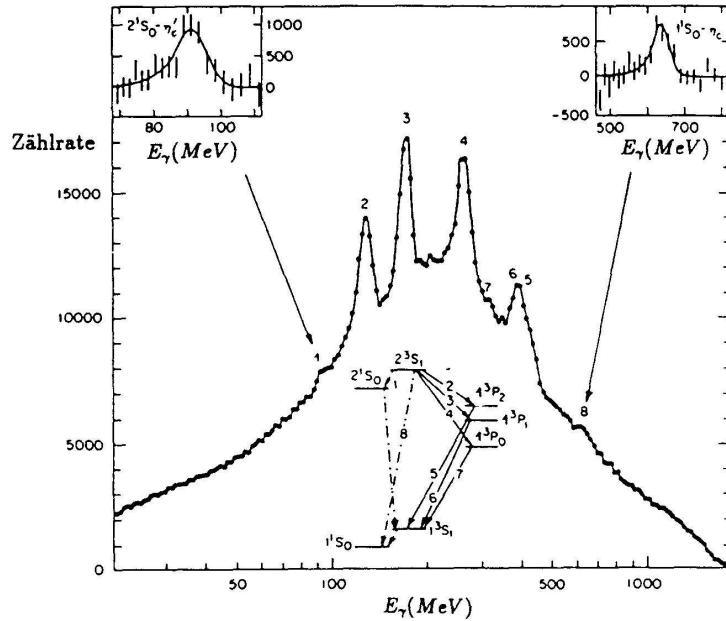
Die verschiedenen  $c\bar{c}$ -Zustände werden folgendermaßen benannt:

<sup>9</sup>Der klassische Elektronenradius beschreibt den Radius einer Kugel um die Punktladung e, in welcher die Coulombenergie entsprechend  $E = mc^2$  enthalten ist.

<sup>10</sup><http://www.slac.stanford.edu/welcome/spear.html>



**Abb. 6.25:** Crystal-Ball-Detektor aus kugelförmig angeordneten NaI-Kristallen (Kristallkugel). In diesen Kristallen werden die (hochenergetischen) Photonen aus elektromagnetischen  $c\bar{c}$ -Übergängen absorbiert. Sie erzeugen dabei einen Schauer von Elektron-Positron-Paaren, die ihrerseits Emissionszentren im Kristall anregen und dadurch viele niederenergetische Photonen im sichtbaren Bereich erzeugen. Diese werden an der Rückseite der Kristalle von Sekundärelektronenvervielfachern (Photomultipliern) nachgewiesen. Der gemessene Photomultiplierstrom ist dann proportional zur Energie des primären Zerfallsphotons (aus [Kö86]).



**Abb. 6.26:** Ergebnisse von SPEAR: Photonenspektrum beim Zerfall des  $\Psi(2^3S_1)$ , wie es mit einer Kristallkugel gemessen wurde, und daraus abgeleitetes Termschema des Charmoniums. Die scharfen Linien im Photonenspektrum entsprechen gerade den ihnen durch die Nummern zugeordneten Übergängen im Termschema. Die im Termschema durchgezogenen Linien entsprechen elektrischen Dipolübergängen mit Paritätsänderung, die gestrichelten Linien magnetischen Dipolübergängen ohne Paritätsänderung (aus [Kö86]).

$J^{PC}$		
$1^{--}$	$J/\psi$	(„Orthocharmonium“)
$J^{++}$	$\chi_c$	( $P$ -Zustand)
$0^{-+}$	$\eta_c, \eta'_c$	(„Paracharmonium“)

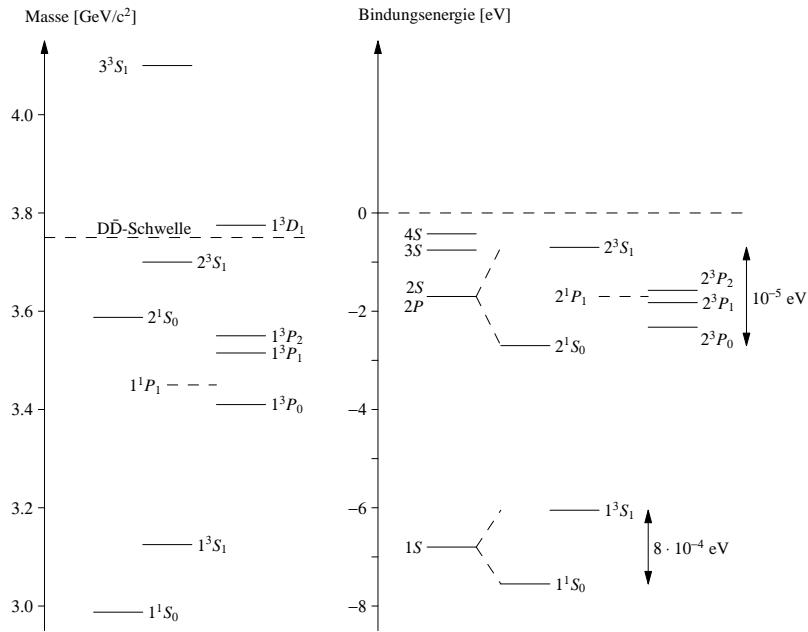
Vergleichen wir nun die Termschemata von Charmonium und Positronium, wie dies in Abb. 6.27 getan wird, so erkennen wir, daß sich das Spektrum der unteren Zustände sehr ähneln; Abweichungen vom Spektrum des Positroniums erhalten wir erst bei höheren Anregungen. Über das Potential des Charmonium-Systems können wir also folgende Aussagen machen: Analog zum Ein-Photonaustausch des Coulomb-Potentials kann man sich den Ein-Gluonaustausch mit einem  $1/r$ -Potential für kleine Abstände denken. Dies legt nahe, dass die Austauschteilchen ( $g, \gamma$ ) ähnliche Eigenschaften haben ( $J^+ = 1^-$ ,  $m_{g,\gamma} = 0$ ). Allerdings gilt es zu beachten, daß wir für große Abstände Abweichungen hiervon erhalten. Phänomenologisch wird das Spektrum z.B. durch einen linearen Anstieg des Potentials mit dem Abstand (Abb. 6.28,  $k \approx 1 \text{ GeV fm}^{-1}$ ) beschrieben:

$$V = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s(r)}{r} + kr$$

Farbfaktor

Die Annahme eines solchen Potentials erweist sich als sinnvoll, man erhält aber keine eindeutige Lösung, da nur ein Bereich von  $0.2 \text{ fm} - 0.1 \text{ fm}$  abgetastet wird. Der lineare Anstieg trägt

## 6.9 Baryonen im Quarkmodell



**Abb. 6.27:** Termschemata von Charmonium und Positronium im Vergleich.

dem Confinement Rechnung, das auf die Tatsache zurückzuführen ist, dass Gluonen anders als Photonen selbst Träger der Farbladungen sind (siehe Kap. 6.13).

Die Spektren von Charmonium und *Bottomonium* sind sehr ähnlich (Abb. 6.30), wenn man die Energieskala entsprechend der unterschiedlichen Massen ( $m_c \approx 1.8 \text{ GeV}$ ,  $m_b \approx 5 \text{ GeV}$ ) skaliert.

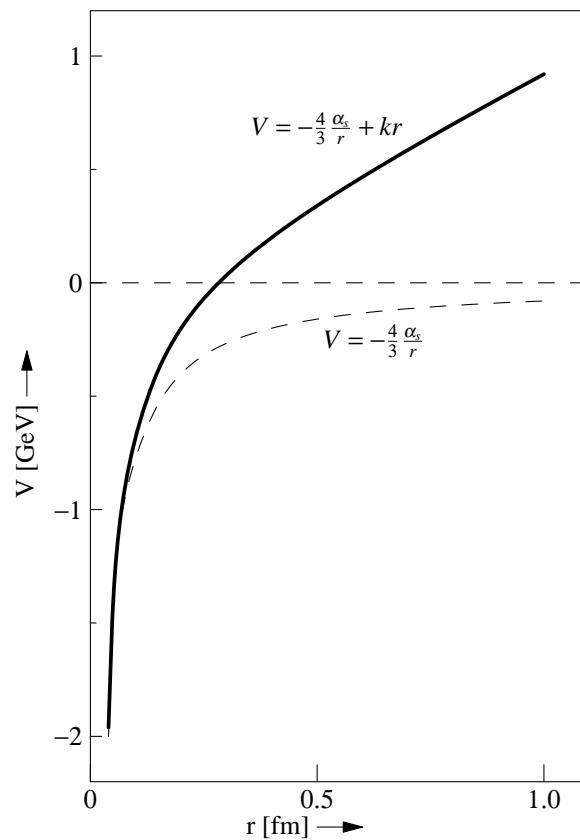
### Fazit:

Das  $q\bar{q}$ -Potential ist bei kleinen Abständen von der Form  $1/r$  und wird analog zur QED durch den Austausch eines Gluons erzeugt. Bei großen Abständen wird die Wechselwirkung durch ein lineares Potential  $V \sim k \cdot r$  beschrieben (vergleichbar mit einem, die Teilchen zusammenhaltenden, Gummiband), welches das Confinement widerspiegelt. Die Konstante  $k$  nennt man „String-Tension“. Typischerweise zu erwartende Feldlinien zeigt Abb. 6.29.

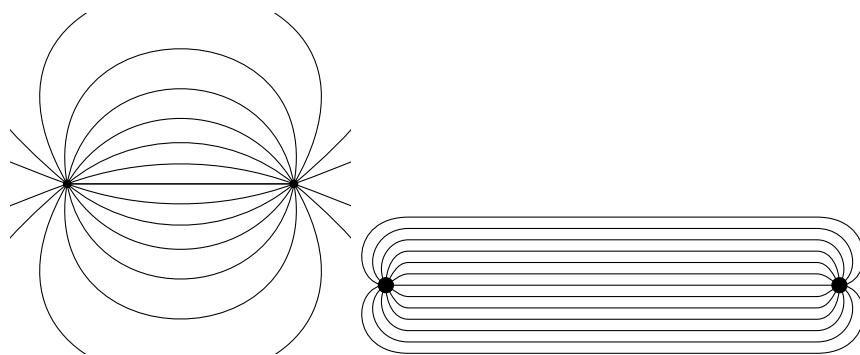
Abschließend stellen wir fest, daß für Systeme wie  $ep$  (H),  $e^+e^-$  (Positronium),  $c\bar{c}$  und  $b\bar{b}$ , welche durch die nichtrelativistische Schrödinger-Gleichung mit Potential  $V$  beschrieben werden, das Energieschema nur durch die jeweiligen Massen und Kopplungskonstanten bestimmt wird.

## 6.9 Baryonen im Quarkmodell

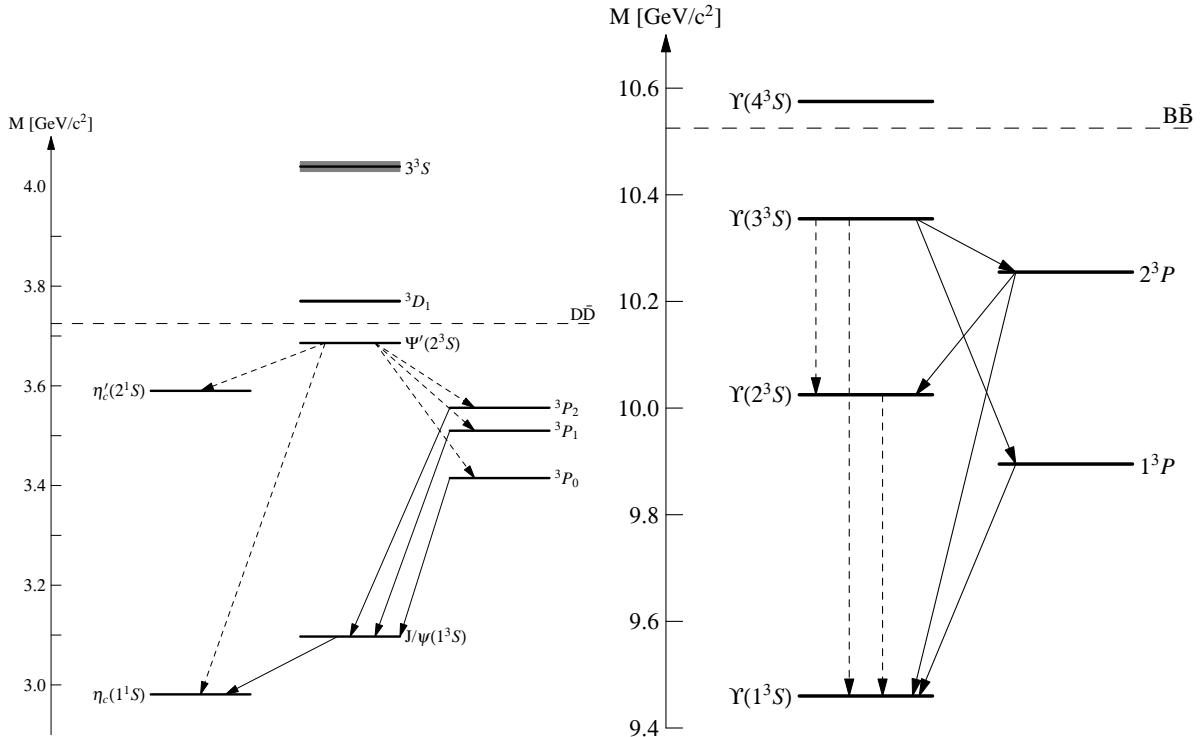
- Wir wissen, dass Quarks Farbladungen tragen (Zahl der Farben:  $N_c = 3$ ). Die Zustände können in der (fundamentalen) [3]-Darstellung der Gruppe  $SU(3)_c$  folgendermaßen beschrieben werden:  
Triplet



**Abb. 6.28:** Form des QCD-Potentials  $V = -\frac{4}{3}(\alpha_s/r) + kr$



**Abb. 6.29:** Typische Feldlinien der elektromagnetischen (links) und starken (rechts) Wechselwirkung.



**Abb. 6.30:** Termschemata von Charmonium und Ypsilononium im Vergleich

$$q = \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix}$$

Dementsprechend tragen die Antiquarks Antifarben. In der (fundamentalen)  $[3]$ -Darstellung von  $SU(3)_c$ : Antitriplett

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} \bar{q}_{\bar{r}} \\ \bar{q}_{\bar{g}} \\ \bar{q}_{\bar{b}} \end{pmatrix}$$

- Hadronen sind „farblos“, bzw.  $SU(3)_c$ -Singulets. Farbe ist eine versteckte Eigenschaft.
  - Mesonen sind  $\bar{q}q$ -Systeme:  $[3] \otimes \overline{[3]} = [8] \oplus [1]$
  - Farbwellenfunktion von Mesonen:

$$\phi_{\text{Farbe}}^{\text{Meson}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (|R\rangle |\bar{R}\rangle + |G\rangle |\bar{G}\rangle + |B\rangle |\bar{B}\rangle)$$

Wegen ihrer Farbsingulett-Eigenschaft sind sie unter unitären Transformationen  $U_c$  im Farbraum invariant:

$$\bar{q}q \rightarrow \bar{q} U_c^\dagger U_c q = \bar{q}q$$

- Baryonen sind qqq-Systeme:  $[3] \otimes [3] \otimes [3] = \underbrace{[10] \oplus [8] \oplus [8]}_{\text{nicht beobachtet}} \oplus \underbrace{[1]}_{\text{beobachtet}}$
- Farbwellenfunktion von Baryonen:

$$\begin{aligned}\phi_{\text{Farbe}}^{\text{Baryon}} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{\alpha=R,G,B} \sum_{\beta=R,G,B} \sum_{\gamma=R,G,B} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} |\alpha\rangle|\beta\rangle|\gamma\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} (|R\rangle|G\rangle|B\rangle + |G\rangle|B\rangle|R\rangle + |B\rangle|R\rangle|G\rangle - \\ &\quad |G\rangle|R\rangle|B\rangle - |B\rangle|G\rangle|R\rangle - |R\rangle|B\rangle|G\rangle)\end{aligned}$$

Diese ist total antisymmetrisch unter Teilchenaustausch.

Hinweis: Das Spatprodukt dreier Vektoren  $\vec{\chi}_1 \cdot (\vec{\chi}_2 \times \vec{\chi}_3)$  ist invariant unter Rotationen. Ein analoger Sachverhalt gilt in  $SU(3)_c$ .

### 6.9.1 Baryonen als Zustände aus drei Quarks

- Quarks als Fermionen müssen dem Pauli-Prinzip genügen. Die Wellenfunktion eines Baryons muß deshalb total antisymmetrisch unter der Vertauschung zweier Quarks sein:

$$|B\rangle = |qqq\rangle_A = |\text{Farbe}\rangle_A \otimes |\text{Ort, Spin, Flavour}\rangle_S$$

Da die Farbwellenfunktion als Farbsingulett antisymmetrisch ist, muß die restliche Orts-, Spin- und Flavour-Wellenfunktion total symmetrisch sein.

- In den Zuständen niedrigster Masse haben die Quarks Bahndrehimpuls  $\ell = 0$  und keine radialen Anregungen. Die drei Quarkspins  $s = \frac{1}{2}$  können zu den Gesamtspins  $S = \frac{3}{2}$  und  $S = \frac{1}{2}$  koppeln:

$$[2] \otimes [2] \otimes [2] = ([3] \oplus [1]) \otimes [2] = [4] \oplus [2] \oplus [2]$$

Wegen  $\ell = 0$  ist der Gesamtspin  $S = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$  gleich dem Gesamtdrehimpuls  $J = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$  des Baryons.

- Baryondekuplett  $J^P = \frac{3}{2}^+$**  (siehe Abb. 6.8 auf Seite 200)  
Die drei Quarkspins sind parallel ausgerichtet:

$$\left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle = |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle \dots$$

Die Spinwellenfunktion ist also symmetrisch unter Teilchenaustausch. Wegen  $\ell = 0$  der drei Quarks gilt dies ebenso für die Ortswellenfunktion. Damit muß die Flavourwellenfunktion ebenfalls symmetrisch unter Teilchenaustausch sein.

Es gibt folgende 10 Flavourzustände:

Massen

$$\begin{aligned}
 & 1232 \text{ MeV} \left\{ \begin{array}{l} |\Delta^{++}\rangle = |uuu\rangle \\ |\Delta^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|uud\rangle + |udu\rangle + |duu\rangle) \\ |\Delta^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|ddu\rangle + |dud\rangle + |udd\rangle) \\ |\Delta^-\rangle = |ddd\rangle \end{array} \right. \\
 & 1385 \text{ MeV} \left\{ \begin{array}{l} |\Sigma^{*+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|uus\rangle + |usu\rangle + |suum\rangle) \\ |\Sigma^{*0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|uds\rangle + |dsu\rangle + |sdu\rangle + |usd\rangle + |dus\rangle + |sud\rangle) \\ |\Sigma^{*-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|dds\rangle + |dsd\rangle + |sdd\rangle) \end{array} \right. \\
 & 1530 \text{ MeV} \left\{ \begin{array}{l} |\Xi^{*0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|uss\rangle + |sus\rangle + |ssu\rangle) \\ |\Xi^{*-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|dss\rangle + |sds\rangle + |ssd\rangle) \end{array} \right. \\
 & 1672 \text{ MeV} \quad |\Omega^-\rangle = |sss\rangle
 \end{aligned}$$

- **Baryonoktett**  $J^P = \frac{1}{2}^+$  (siehe Abb. 6.8 auf Seite 200)

Für Gesamtspin  $J = 1/2$  muß ein Quarkspin antiparallel zu den Spins der beiden anderen Quarks stehen.

$\uparrow\downarrow\downarrow$  ist weder total symmetrisch noch total antisymmetrisch, sondern gemischt symmetrisch. Deshalb muß die Flavourwellenfunktion ebenso gemischt symmetrisch sein, damit die gesamte Spin-Flavour-Wellenfunktion total symmetrisch sein kann.

Folglich sind die Quarkkombinationen uuu, ddd und sss (symmetrisch im Flavour) nicht als  $J = \frac{1}{2}$  Baryongrundzustände möglich.

- Um die Wellenfunktion des **Protons** mit Spin  $\uparrow$  zu konstruieren, koppelt man zuerst die Spin- $\frac{1}{2}$  der beiden u-Quarks zum Gesamtspin 1 und koppelt dann den Spin- $\frac{1}{2}$  des d-Quarks dazu.

Clebsch-Gordan-Koeffizienten  
der Kopplung  $1 \otimes \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$

$$\left| p \uparrow \right\rangle = \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \underbrace{\left| [uu]_{S=1}^{m_s=1} d \downarrow \right\rangle}_{\left| u \uparrow u \uparrow \right\rangle} - \sqrt{\frac{1}{3}} \underbrace{\left| [uu]_{S=1}^{m_s=0} d \uparrow \right\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(\left| u \uparrow u \downarrow \right\rangle + \left| u \downarrow u \uparrow \right\rangle)} \right)_{\text{sym}}$$

$$\left| p \uparrow \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left( 2 \left| u \uparrow u \uparrow d \downarrow \right\rangle - \left| u \uparrow u \downarrow d \uparrow \right\rangle - \left| u \downarrow u \uparrow d \uparrow \right\rangle \right)_{\text{sym}}$$

Die angegebenen Terme sind nur symmetrisch unter Austausch des ersten und des zweiten Quarks. Zur vollständigen Symmetrisierung muß man noch die Terme addieren, die durch Vertauschung des ersten und dritten sowie des zweiten und dritten Quarks entstehen.

$$|p \uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \left\{ 2|u \uparrow u \uparrow d \downarrow\rangle + 2|u \uparrow d \downarrow u \uparrow\rangle + 2|d \downarrow u \uparrow u \uparrow\rangle - \right. \\ - |u \uparrow u \downarrow d \uparrow\rangle - |u \uparrow d \uparrow u \downarrow\rangle - |d \uparrow u \downarrow u \uparrow\rangle - \\ \left. - |u \downarrow u \uparrow d \uparrow\rangle - |u \downarrow d \uparrow u \uparrow\rangle - |d \uparrow u \uparrow u \downarrow\rangle \right\}$$

Diese Wellenfunktion läßt sich nicht in Spin- und Isospinanteile faktorisieren.

– **Neutron:** vertausche  $d \leftrightarrow u$

– **Hyperonen:**

- \*  $|\Sigma^+ \uparrow\rangle$  (uus): vertausche  $d \leftrightarrow s$  in  $|p \uparrow\rangle$
- \*  $|\Sigma^- \uparrow\rangle$  (dds): vertausche  $u \leftrightarrow d$  und  $d \leftrightarrow s$  in  $|p \uparrow\rangle$
- \*  $|\Xi^0 \uparrow\rangle$  (uss),  $|\Xi^- \uparrow\rangle$  (dss): analog
- \* zwei Zustände gehören zur Quarkkombination uds:
  - $|\Sigma^0 \uparrow\rangle = |u \uparrow d \uparrow s \downarrow\rangle_{\text{sym}}$ : Isospintriplett mit  $I = 1$  (Isospin des s-Quarks ist Null)  
Kopple Spins und *Isospins* von u- und d-Quarks zu 1 (Wellenfunktion hat 18 Terme), dadurch symmetrisch 1.  $\leftrightarrow$  2. Teilchen
  - $|\Lambda \uparrow\rangle = |u \uparrow d \downarrow s \uparrow\rangle_{\text{sym}}$ : Isospinsingulett  
Kopple Spins und *Isospins* von u- und d-Quarks zu 0 (Wellenfunktion hat 12 Terme)

## 6.9.2 Nichtrelativistisches Konstituentenquarkmodell für Baryonen

Die Konstituentenquarks sind nicht mit den Partonen der tiefinelastischen Streuung identisch. Sie sind vielmehr „effektive“ massive Teilchen mit den Quantenzahlen der Quarks.

**Hamilton-Operator:** (ein Modell)

$$H = H_0 + V_{\text{Spin}}$$

$$H_0 = \sum_{i=1}^3 \left( m_i + \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} \right) + \frac{\kappa}{2} \sum_{i < j} \vec{r}_{ij}^2 \quad (\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

mit der Oszillatorkreuzfrequenz

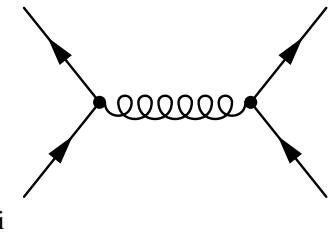
$$\omega = \sqrt{\frac{3\kappa}{m_i}}$$

und den Konstituentenquarkmassen  $m_i$ .

Hierbei wurde der Anteil der relativistischen, kinetischen Energie bis in 1. Ordnung Taylorentwickelt, wodurch sich der bekannte, nichtrelativistische Term der Schrödinger-Gleichung ergibt.

Man benutzt ein quadratisches Confinementpotential (siehe Abb. 6.31), weil dieses analytisch lösbar ist (harmonischer Oszillator).

**Spinabhängige Wechselwirkung** aus dem magnetischen Teil des Gluon-Austauschpotentials zwischen Quarks (analog zur Hyperfein-Wechselwirkung in der Atomphysik,  $\sim \vec{\sigma}_e \cdot \vec{\sigma}_p \mu_e \mu_p$ ):



$$V_{\text{Spin}} = \frac{4\pi}{9} \alpha_s \sum_{i < j} \delta^3(\vec{r}_{ij}) \frac{\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j}{m_i m_j}$$

Erwartungswert von  $V_{\text{Spin}}$ :

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i < j} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \right\rangle &= \frac{1}{2} \left( \underbrace{\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_3}_{2\vec{S}} \right)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_1^2 + \vec{\sigma}_2^2 + \vec{\sigma}_3^2) = \\ &= 2S(S+1) - \frac{9}{2} = \begin{cases} -3 & S = \frac{1}{2} \\ +3 & S = \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Die spinabhängige Wechselwirkung verursacht eine Massenaufspaltung zwischen  $J = \frac{3}{2}$ - und  $J = \frac{1}{2}$ -Baryonen von ca. 300 MeV.

### Spektroskopie der Baryonen:

Man betrachte hierzu die Abb. 6.31 und 6.32:

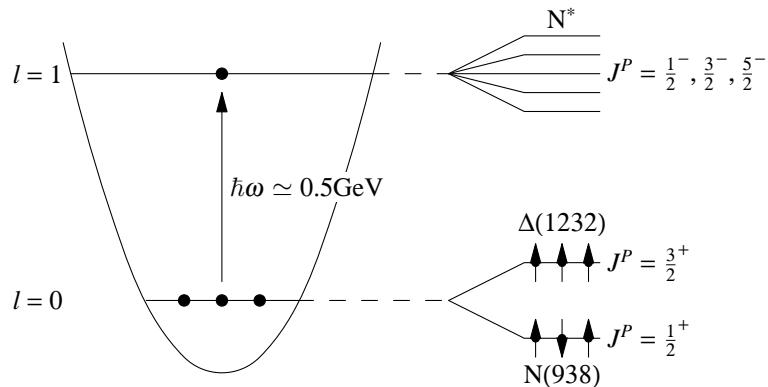


Abb. 6.31: Spektroskopie der Baryonen

### 6.9.3 Magnetische Momente der Oktett-Baryonen

Nach der Dirac-Theorie ist der Vektor des magnetischen Moments eines Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens der Masse  $m$  gegeben durch:

$$\vec{\mu} = \frac{eq}{2m} \vec{\sigma}, \quad q = \text{elektrische Ladung}$$

Der Erwartungswert des magnetischen Moments ist dann

$$\mu := \langle \uparrow | \mu_z | \uparrow \rangle = \frac{eq}{2m}$$

Sind alle drei Konstituentenquarks im  $l = 0$ -Zustand, so kann es keinen Konvektionsstrom durch die Bahnbewegung geben und es gilt:

$$\vec{\mu}_{\text{Baryon}} = \sum_{i=1}^3 \underbrace{\mu_i \vec{\sigma}_i}_{\substack{\text{magnet. Momente und} \\ \text{Spins der Quarks}}}$$

#### Beispiele:

- **Proton:**  $\mu_p = \left\langle p \uparrow \left| \sum_i \mu_i \sigma_{zi} \right| p \uparrow \right\rangle$   
 $|p \uparrow\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| [uu]_{S=1}^{m_S=+1} d \downarrow \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| [uu]_{S=1}^{m_S=0} d \uparrow \right\rangle$   
 $\Rightarrow \mu_p = \frac{2}{3}(\mu_u + \mu_u - \mu_d) + \frac{1}{3}(\mu_u - \mu_u + \mu_d) = \frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_d$

- **Neutron:**  $\mu_n = \frac{4}{3}\mu_d - \frac{1}{3}\mu_u$

- **Hyperonen:**

$$\begin{aligned} \mu_{\Sigma^+} &= \frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_s) & \mu_{\Sigma^-} &= \frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_s) \\ \mu_{\Xi^0} &= \frac{1}{3}(4\mu_s - \mu_u) & \mu_{\Xi^-} &= \frac{1}{3}(4\mu_s - \mu_d) \\ \mu_{\Sigma^0} &= \frac{1}{3}(2\mu_u + 2\mu_d - \mu_s) = \frac{1}{2}(\mu_{\Sigma^+} + \mu_{\Sigma^-}) \end{aligned}$$

- **$\Lambda$ -Hyperon:**

$$\begin{aligned} \mu_\Lambda &= \left\langle \Lambda \uparrow \left| \sum_i \mu_i \sigma_{zi} \right| \Lambda \uparrow \right\rangle \\ |\Lambda \uparrow\rangle &= \left( \underbrace{|u \uparrow d \downarrow\rangle_{S=0}}_{\substack{\text{tragen nicht zum} \\ \text{magn. Moment bei}}} |s \uparrow\rangle \right)_{\text{sym}} \Rightarrow \mu_\Lambda = \mu_s \end{aligned}$$

**Annahme:** Die magnetischen Momente der Konstituentenquarks seien durch ihre Dirac-Werte  $\mu_q = \frac{e}{2m_q}$  gegeben.

$$\mu_u = \frac{2e}{3 \cdot 2m_u} = \frac{e}{3m_u}, \quad \mu_d = -\frac{e}{6m_d}, \quad \mu_s = -\frac{e}{6m_s}$$

Daraus lassen sich die Konstituentenquarkmassen bestimmen (unter Annahme der Isospinsymmetrie,  $m_u = m_d$ ):

$$\mu_p = \frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d) = \frac{3}{2}\mu_u = \frac{e}{2m_u} = 2.793 \frac{e}{2m_p}$$

$$\mu_\Lambda = \mu_s = -\frac{e}{6m_s} = -0.61 \frac{e}{2m_p}$$

$m_u = m_d \approx 336 \text{ MeV}$   
 $m_s \approx 510 \text{ MeV}$

Sowie:

$\frac{\mu_p}{\mu_n} = -\frac{3}{2} \quad \text{experimentell: } -\frac{2,79}{1,91} \approx -1,46$

Daraus ergibt sich

$$m_s - m_u = 174 \text{ MeV} \tag{6.20}$$

Die Massenaufspaltungen im Baryonoktett sind:

$$\begin{aligned} m_\Sigma - m_N &= (1193 - 939) \text{ MeV} = 254 \text{ MeV} \\ m_\Xi - m_\Sigma &= (1318 - 1193) \text{ MeV} = 125 \text{ MeV} \\ m_\Lambda - m_N &= (1115 - 939) \text{ MeV} = 176 \text{ MeV}, \end{aligned}$$

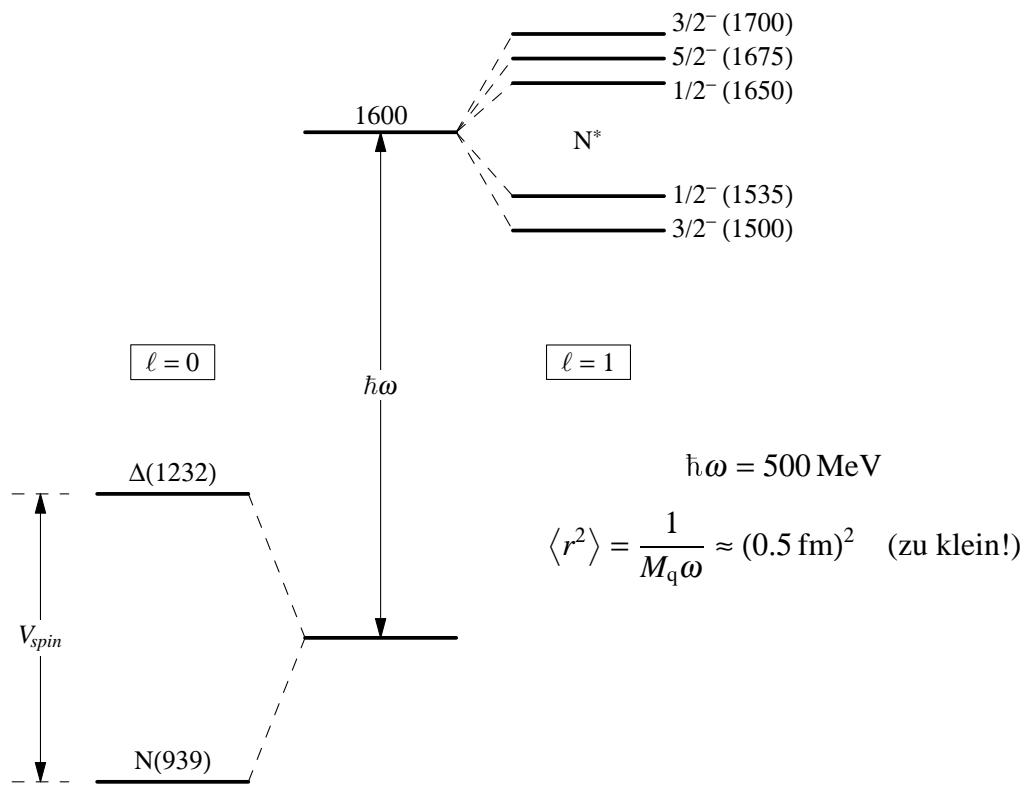
Was in etwa mit (6.20) übereinstimmt. Außerdem ergibt sich  $\mu_p/\mu_n = -3/2$ , was bis auf 3% mit dem experimentellen Wert von  $-2.79/1.91 \approx -1.46$  im Einklang ist. Das Konstituentenquarkmodell ist also recht erfolgreich bei der Beschreibung von Spektroskopie und magnetischen Momenten der Baryonen.

Baryon	naives Quarkmodell	beobachtet
p	2.79	2.793
n	-1.86	-1.913
$\Lambda$	-0.61	$-0.613 \pm 0.004$
$\Sigma^+$	2.68	$2.46 \pm 0.01$
$\Sigma^0$	0.82	—
$\Sigma^-$	-1.04	$-1.160 \pm 0.025$
$\Xi^0$	-1.43	$-1.250 \pm 0.014$
$\Xi^-$	-0.50	$-0.651 \pm 0.003$

Konstituentenquarks:

$$\mu_q = \frac{Z_q e}{2m_q}$$

**Tab. 6.8:** Magnetische Momente einiger Baryonen in Einheiten von  $\mu_K$ . Vergleich der Vorhersagen des naiven Quarkmodells mit  $m_u = m_d = 336$  MeV und  $m_s = 510$  MeV mit den experimentellen Werten.



**Abb. 6.32:** Spektrum niedrig liegender Nukleon- und  $N^*$ -Resonanzzustände

## 6.10 Streuung von Hadronen

### 6.10.1 Nichtrelativistische Potentialstreuung

Die Schrödinger-Gleichung mit kugelsymmetrischem Potential (Abb. 6.33) lautet (ohne Spin):

$$\left( \frac{-\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2M} + V(r) \right) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad \left( M = \frac{M_1 \cdot M_2}{M_1 + M_2} : \text{reduzierte Masse} \right)$$

mit Impuls  $p = \hbar k$  und Wellenzahl  $k = \sqrt{\frac{2ME}{\hbar^2}}$ .

- Asymptotisch verhält sich die Wellenfunktion wie

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} e^{ikz} + f(\theta, k) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$f(\theta, k)$  ist die komplexe Streuamplitude.

- Stromdichte:

$$\vec{j} = \frac{1}{2iM} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - (\vec{\nabla} \psi^*) \psi)$$

Einlaufende Stromdichte und radiale Stromdichte der Streuwelle sind ( $\hat{r} \cdot \vec{\nabla} = \partial/\partial r$ ):

$$j_{\text{ein}} = \frac{k}{M} \quad j_{\text{Streu}} = \frac{k}{M} \frac{|f(\theta, k)|^2}{r^2}$$

Die Stromdichte ist definiert durch

$$\text{Stromdichte} = \frac{\text{Anzahl Teilchen}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}},$$

folglich ist also:

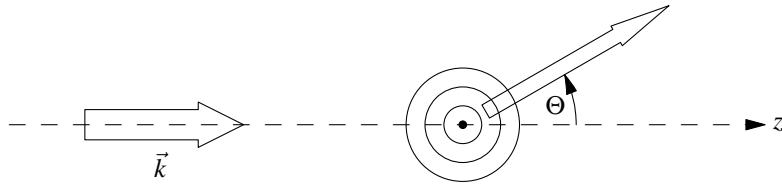
$$\frac{\text{Anzahl gestreuter Teilchen}}{\text{Zeit}} = j_{\text{Streu}} \underbrace{r^2 d\Omega}_{\text{Fläche}}$$

- Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist dann:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\text{Anzahl gestreuter Teilchen}/(\text{Zeit} \cdot d\Omega)}{\text{einlaufende Stromdichte}} \\ \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, k) &= |f(\theta, k)|^2 \end{aligned} \tag{6.21}$$

- Den totalen Wirkungsquerschnitt erhält man durch Integration:

$$\sigma_{\text{tot}}(k) = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, k) \tag{6.22}$$



**Abb. 6.33:** Streuung am kugelsymmetrischen Potential

- **Optisches Theorem:**

$$\boxed{\sigma_{\text{tot}}(E) = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f(\theta = 0, E))}$$

## 6.10.2 Partialwellenentwicklung

- Eine Partialwellenentwicklung der Streuamplitude ist mit den Legendrepolynomen  $P_\ell(x)$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad \dots$$

möglich:

$$f(\theta, k) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Partialwellenamplituden}}}{f_\ell(k)} P_\ell(\cos \theta)$$

Dabei ist  $\ell$  die Bahndrehimpulsquantenzahl  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  (für die s-, p-, d-, ... - Welle). Bei kurzreichweiter Wechselwirkung sind nur die Partialwellen mit niedrigem  $\ell$  von Bedeutung.

- Die Legendrepolynome erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{+1} dx P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell\ell'} \quad (6.23)$$

- Die Partialwellenzerlegung der ebenen Welle lautet:

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell + 1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sphärische Besselfunktion}}}{j_\ell(kr)} P_\ell(\cos \theta)$$

Dabei haben die Besselfunktionen folgendes asymptotisches Verhalten:

$$j_\ell(kr) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \frac{\sin(kr - \frac{\ell\pi}{2})}{kr}$$

- Damit lässt sich das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion als Superposition von einlaufenden Kugelwellen  $e^{-ikr}/r$  mit Amplitude  $(-1)^{\ell+1}/2ik$  und auslaufenden Kugelwellen mit Amplitude  $\frac{1}{2ik} + f_\ell(k)$  darstellen:

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_{\ell}(\cos \theta) \frac{1}{r} \left( \frac{1}{2ik} (e^{ikr} - e^{-ikr+i\ell\pi}) + f_{\ell}(k) e^{ikr} \right)$$

Natürlich kann die radiale Stromdichte der auslaufenden Kugelwelle maximal so groß sein wie die radiale Stromdichte der einlaufenden Kugelwelle, d.h. es können nicht mehr Teilchen aus dem Streuzentrum kommen als hineinfleßen.

$$\left| f_{\ell}(k) + \frac{1}{2ik} \right| \leq \left| \frac{1}{2ik} \right| \quad (6.24)$$

- Bei elastischer Streuung (d. h. in (6.24) gilt das Gleichheitszeichen) folgt für die sog. S-Matrix:

$$1 + 2ikf_{\ell}(k) = e^{2i\delta_{\ell}(k)} =: S_{\ell}(k)$$

Dabei sind die  $\delta_{\ell}(k)$  die (reellen) Streuphasen der  $\ell$ -ten Partialwelle. Aus der Unitarität (Stromerhaltung) bei der elastischen Streuung folgt also:

$$f_{\ell}(k) = \frac{e^{2i\delta_{\ell}(k)} - 1}{2ik} = \frac{1}{k} e^{i\delta_{\ell}(k)} \sin \delta_{\ell}(k)$$

Für reelle  $\delta_{\ell}$  ist die Streumatrix unitär, d.h. es gilt:

$$S_l^* \cdot S_l = 1$$

- Aus dem Optischen Theorem folgt, daß der totale Wirkungsquerschnitt gleich dem Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude ist:

$$\sigma_{\text{tot}}(k) = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(\theta = 0, k) \quad (6.25)$$

- Andererseits ist der totale Wirkungsquerschnitt nach (6.22) und (6.21):

$$\sigma_{\text{tot}}(k) = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \sum_{\ell, \ell'=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta) (2\ell+1)(2\ell'+1) f_{\ell}^*(k) f_{\ell'}(k)$$

Mit der Orthogonalitätsrelation (6.23) der Legendrepolygone ergibt sich daraus jedoch:

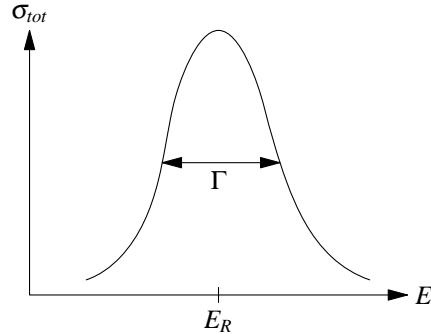
$$\sigma_{\text{tot}}(k) = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) |f_{\ell}(k)|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \delta_{\ell}(k)$$

Es gilt also:

$$\frac{4\pi}{k} \text{Im} f(\theta = 0, k) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \delta_{\ell}(k)$$

### 6.10.3 Resonanzstreuung

Betrachtet wird eine Resonanz in einer Partialwelle mit Drehimpuls  $\ell$ :



**Abb. 6.34:** Resonanz in  $\sigma_{\text{tot}}$

Das Maximum des totalen Wirkungsquerschnitts

$$\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)}(E) = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_\ell(E)$$

liegt bei der Resonanzenergie  $E = E_R$  mit

$$\delta_\ell(E_R) = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dort ist die Partialwellenstreuamplitude rein imaginär:

$$f_\ell(E_R) = \frac{1}{2ik} \left( \underbrace{e^{2i\delta_\ell(E_R)}}_{-1} - 1 \right) = \frac{i}{k}$$

Betrachten wir nun

$$kf_\ell(E) = \frac{\sin \delta_\ell(E)}{e^{-i\delta_\ell(E)}} = \frac{\sin \delta_\ell(E)}{\cos \delta_\ell(E) - i \sin \delta_\ell(E)} = \frac{1}{\cot \delta_\ell(E) - i}.$$

Entwicklung in der Nähe der Resonanzenergie  $E_R$  liefert:

$$\cot \delta_\ell(E) = \underbrace{\cot \delta_\ell(E_R)}_{\substack{\text{Null an der} \\ \text{Resonanz}}} + (E - E_R) \underbrace{\frac{d}{dE} \cot \delta_\ell(E) \Big|}_{\substack{-2/\Gamma \\ \Gamma = \text{Breite}}} \Big|_{E=E_R} + \dots$$

Damit ist die Partialwellenamplitude in der Nähe der Resonanz:

$$f_\ell(E) = \frac{1}{\frac{2}{\Gamma}(E_R - E) - i} = \frac{\frac{\Gamma}{2k}}{E_R - E - i\Gamma/2}$$

Die Resonanz ist hier ein Pol in der komplexen Ebene. Die **Lebensdauer** der Resonanz ist gegeben durch:

$$\tau_R = \frac{\hbar}{\Gamma}$$

Der Wirkungsquerschnitt in der Nähe der Resonanz ergibt sich zu:

$$\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)}(E) = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma^2/4}{(E_R - E)^2 + \Gamma^2/4} \quad (6.26)$$

Dies ist die sogenannte Breit-Wigner-Resonanzkurve, mit der Breit-Wigner-Funktion:

$$f_l(E) = \frac{\Gamma_l(E)/2k}{E_R - E - \frac{i}{2}\Gamma_l(E)}$$

Die Resonanz stellt hier einen Pol in der komplexen E- Ebene dar.

#### 6.10.4 Inelastische Streuung und Argand-Diagramme

Die S-Matrix,

$$\text{S-Matrix} = \frac{\text{Amplitude der auslaufenden Kugelwelle}}{(-1)^{\ell+1} \cdot \text{Amplitude der einlaufenden Kugelwelle}}$$

$$S_\ell(k) = \frac{f_\ell(k) + \frac{1}{2ik}}{\frac{1}{2ik}} = 1 + 2ikf_\ell(k),$$

enthält alle Informationen über den Streuprozess. Falls keine Streuung stattfindet, gilt  $S_\ell(k) \equiv 1$ .

**Elastische Streuung:** Die Streuphasen  $\delta_\ell$  sind reell und

$$|S_\ell(k)| = \sqrt{S_\ell^* S_\ell} = 1, \quad S_\ell(k) = e^{2i\delta_\ell(k)}$$

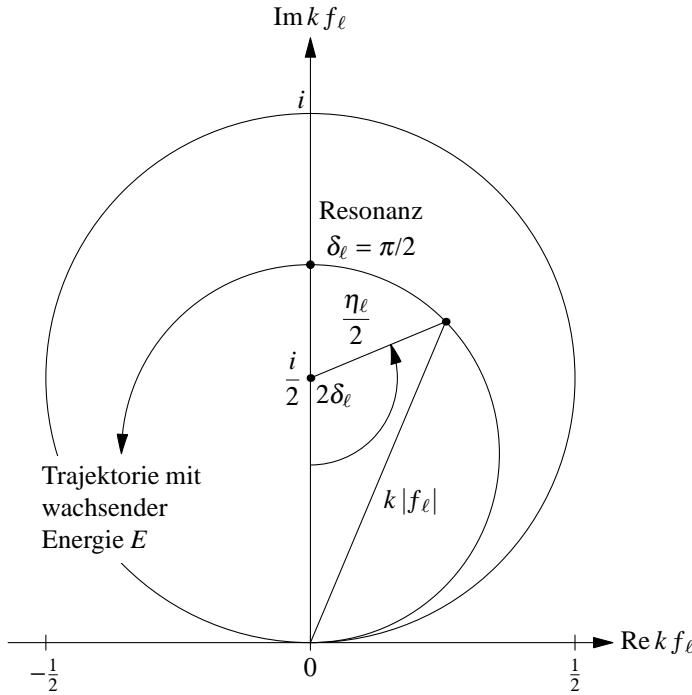
**Inelastische Streuung:** Es werden Teilchen vom Streuzentrum absorbiert. Die radiale Stromdichte der auslaufenden Kugelwelle ist kleiner als die der Einlaufenden:

$$|S_\ell(k)| < 1$$

Die Streuphasen sind hier komplex mit  $\delta_\ell = \Re(\delta_\ell) + i\Im(\delta_\ell)$ . Es gilt

$$S_\ell(k) = 1 + 2ikf_\ell(k) = \eta_\ell(k)e^{2i(\Re\delta_\ell(k))}$$

mit dem Inelastizitätsparameter  $\eta_\ell(k) = \exp[-2\Im(\delta_\ell(k))]$  im Bereich  $0 \leq \eta_\ell(k) < 1$ . Dieser Sachverhalt lässt sich in einem sog. **Argand-Diagramm** darstellen ( $k f_\ell = \frac{1}{2i}(S_\ell(k) - 1)$ ):

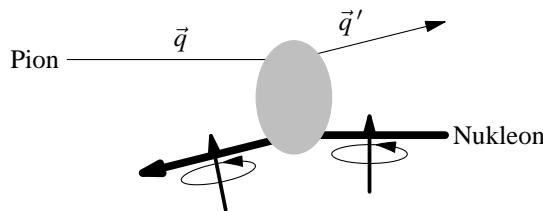


**Abb. 6.35:** Argand-Diagramm für inelastische Streuung

Im Falle elastischer Streuung ( $\eta_\ell = 1$ ) ergibt sich der „Unitaritätskreis“.

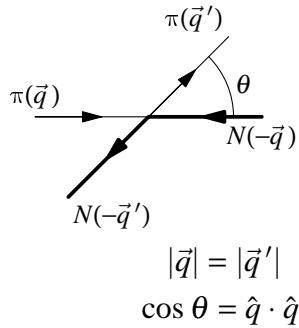
### 6.10.5 Streuung von Spin-0- an Spin-1/2-Teilchen

**Beispiel:** Pion-Nukleon-Streuung:



**Abb. 6.36:** Streuung von Pionen an Nukleonen

Wir betrachten die  $\pi N$ -Streuung im Schwerpunktsystem. Dort gilt:



Aufgrund der Rotationsinvarianz ist der Gesamtdrehimpuls erhalten:

$$\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}, \quad \vec{s} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$$

Die zugehörige Quantenzahl ist

$$j = \ell \pm \frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

(analog zur Spin-Bahn-Kopplung in der Atomphysik).

Die Partialwellen sind dann  $S_{\frac{1}{2}} (\ell = 0, j = \frac{1}{2})$ ,  $P_{\frac{1}{2}} (\ell = 1, j = \frac{1}{2})$ ,  $P_{\frac{3}{2}} (\ell = 1, j = \frac{3}{2})$ , etc. Die Partialwellenentwicklung der  $\pi N$ -Streuamplitude hat die Form ( $E = \sqrt{m_\pi^2 + q^2}$ ):

$$f(\theta, E) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \left( \begin{array}{c} f_{\ell+}(E) \hat{Q}_{\ell+} \\ f_{\ell-}(E) \hat{Q}_{\ell-} \end{array} \right) P_\ell(\cos \theta)$$

mit den Projektionsoperatoren auf die Zustände mit  $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ :

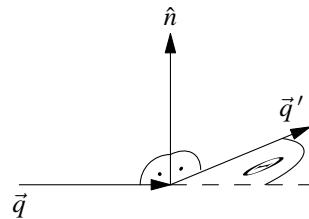
$$\hat{Q}_{\ell+} = \frac{\ell + 1 + \vec{\ell} \cdot \vec{\sigma}}{2\ell + 1}, \quad \hat{Q}_{\ell-} = \frac{\ell - \vec{\ell} \cdot \vec{\sigma}}{2\ell + 1} \quad \begin{aligned} \hat{Q}_{\ell+} + \hat{Q}_{\ell-} &= 1 \\ \hat{Q}_{\ell+}^2 &= \hat{Q}_{\ell+} \\ \hat{Q}_{\ell-}^2 &= \hat{Q}_{\ell-} \end{aligned}$$

Eine weitere mögliche Darstellung der  $\pi N$ -Streuamplitude ist:

$$f(\theta, E) = g(\theta, E) + i \underbrace{\vec{\sigma} \cdot \hat{n} h(\theta, E)}_{\text{Spinflipamplitude}}$$

Dabei ist  $\hat{n}$  die Normale auf die Streuebene:

$$\hat{n} = \frac{\hat{q} \times \hat{q}'}{\sin \theta}; \quad \hat{q} = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}$$



Damit ergeben sich als Partialwellenzerlegungen die spinunabhängige Streuamplitude,

$$g(\theta, E) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( (\ell + 1) f_{\ell+}(E) + \ell f_{\ell-}(E) \right) P_{\ell}(\cos \theta),$$

sowie die Spinflip-Amplitude:

$$h(\theta, E) = \sin \theta \sum_{\ell=1}^{\infty} \left( f_{\ell+}(E) - f_{\ell-}(E) \right) P'_{\ell}(\cos \theta) \quad P'_{\ell}(x) = \frac{d}{dx} P_{\ell}(x)$$

Der unpolarisierte differentielle Wirkungsquerschnitt ist (siehe auch Übung 6.9):

$$\boxed{\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{unpol}} = |g(\theta, E)|^2 + |h(\theta, E)|^2}$$

## 6.11 Erzeugung von Hadronenresonanzen

Die Erzeugung von neuen Hadronen kann mit zwei verschiedenen Experimentiertechniken erreicht werden, der *Formation* und der *Produktion*. Beispiel: Erzeugung von Hyperonresonanzen (Baryonresonanzen mit Baryonenzahl  $B = 1$  mit Strangeness  $S = -1$ ).

### 6.11.1 Formationsprozesse

In Formationsexperimenten geht man analog zur  $e^+e^-$ -Vernichtung vor: Man nimmt Hadronstrahlen (z.B.  $K^-$ -Strahlen) und lenkt diese auf ein feststehendes Target. Dabei variiert man die Schwerpunktsenergie  $M_x = \sqrt{s}$  (und damit die mögliche Masse eines resonant erzeugten Zwischenzustandes) durch Variation der Strahlenergie und betrachtet einen möglichen Endzustand (oder auch nur die elastische Streuung).

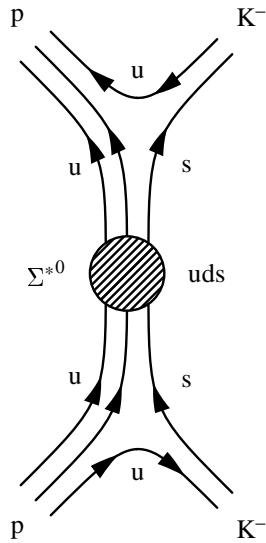
$$\sqrt{s} = \sqrt{M_N + M_{K^-} + 2E_{K^-}M_N}$$

So erhält man eine Anregungskurve (ähnlich des R-Verhältnisses). Eine Resonanz zeigt sich als Überhöhung im Wirkungsquerschnitt – auch im elastischen. Der Formationsprozeß  $K^- p \rightarrow \Sigma^{*0} \rightarrow K^- p$  ist in Abb. 6.37 dargestellt.

Die Strukturen in den Diagrammen in Abb. 6.38 entsprechen den möglichen Resonanzen im Zwischenzustand ( $M > m_p + m_K \approx 1425 \text{ MeV}/c^2$ ). Die nachgewiesenen Resonanzen werden nach ihrer Masse, ihrem Isospin und ihrer Strangeness benannt, hier beispielsweise  $\Lambda(1820)$ ,  $\Sigma(1775)$ .

Es gilt stets die Erhaltung der Quantenzahlen vom Anfangszustand im resonanten Zwischenzustand. Daher können nur Quantenzahlen resonant erzeugt werden, welche im Eingangszustand verfügbar sind. Es entstehen also keine neuen Quarks bei Formationsprozessen, wodurch nur relative wenige Teilchenarten erzeugt werden können.

## 6.11 Erzeugung von Hadronenresonanzen

Abb. 6.37: Der Formationsprozeß  $K^+ p \rightarrow \Sigma^{*0} \rightarrow K^+ p$ 

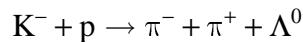
## 6.11.2 Produktionsprozesse

Mit sog. Produktionsexperimenten lassen sich wesentlich mehr Teilchenarten erzeugen. Hierbei schreibt man  $p$ ,  $\pi$ ,  $\Sigma$  oder  $K$  mit möglichst hoher Energie auf ein Target oder benutzt einen Collider ( $e^+e^-$ ,  $pp$ ,  $p\bar{p}$ ). Zur Erzeugung von neuen Teilchen steht maximal die Schwerpunktsenergie dieser Reaktion zur Verfügung. Neue Teilchen können als Resonanzen in einem Teil der beobachteten Endprodukte gesichtet werden. Die neuen Teilchen können auch andere Quantenzahlen haben, da nur der gesamte Endzustand die Anfangsquantenzahlen darstellen muß.

Oft sind die Reaktionsprodukte jedoch sehr kurzlebig, so daß sich nur noch ihre Zerfallsprodukte nachweisen lassen. Gelingt es, die Impulse  $\vec{p}_i$  und die Energien  $E_i$  aller Zerfallsprodukte zu bestimmen (Abb. 6.40), so kann man mit der Methode der invarianten Masse auf die Masse  $M_X$  des zerfallenen Teilchens schließen:

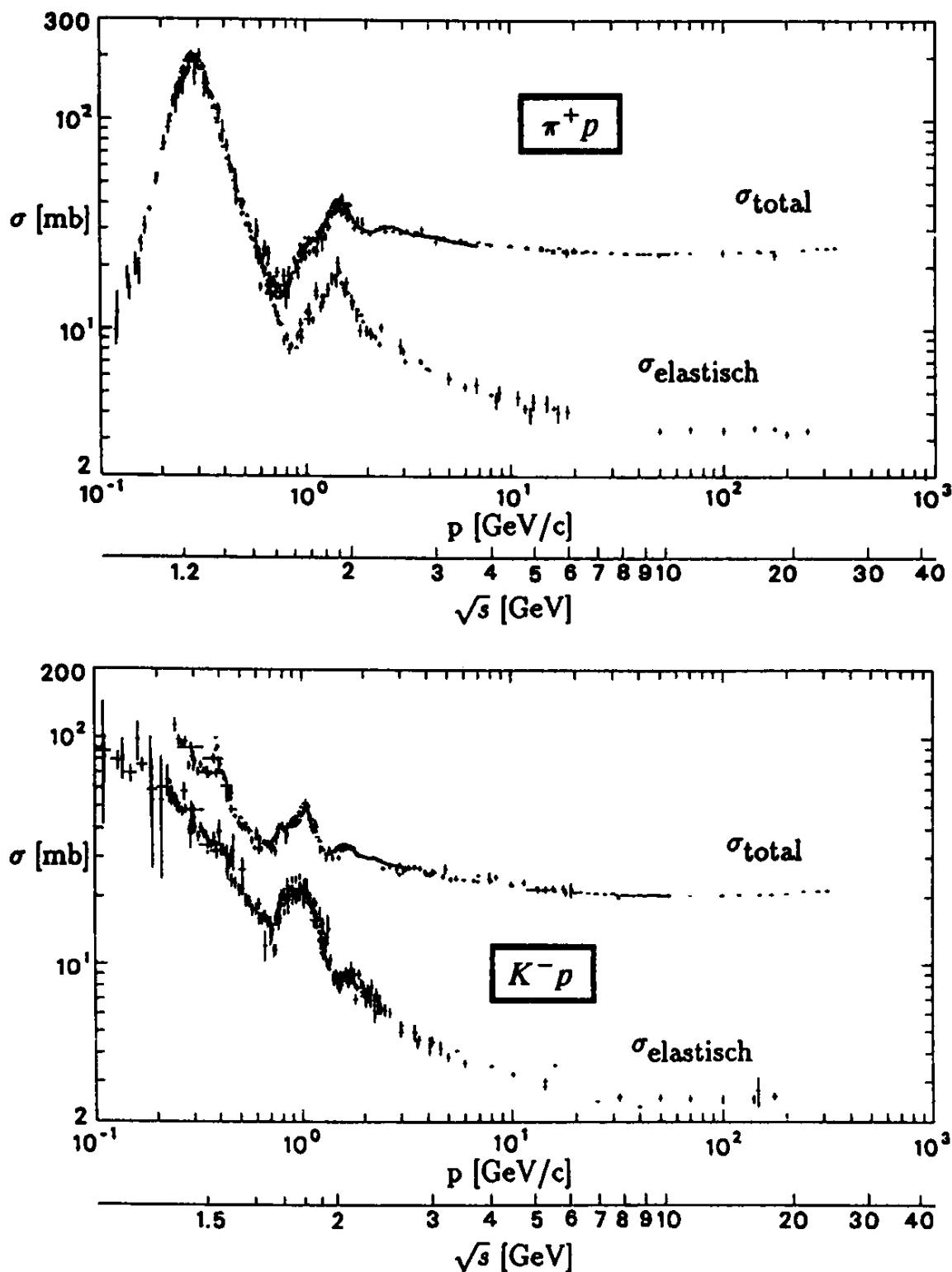
$$M_X^2 c^4 = P_X^2 c^2 = \left( \sum_i P_i c \right)^2 = \left( \sum_i E_i \right)^2 - \left( \sum_i \vec{p}_i c \right)^2$$

Bei einer großen Anzahl von Ereignissen erscheint das Teilchen dann als Maximum im invarianten Massenspektrum. Als Beispiel wird in Abb. 6.39 die Reaktion

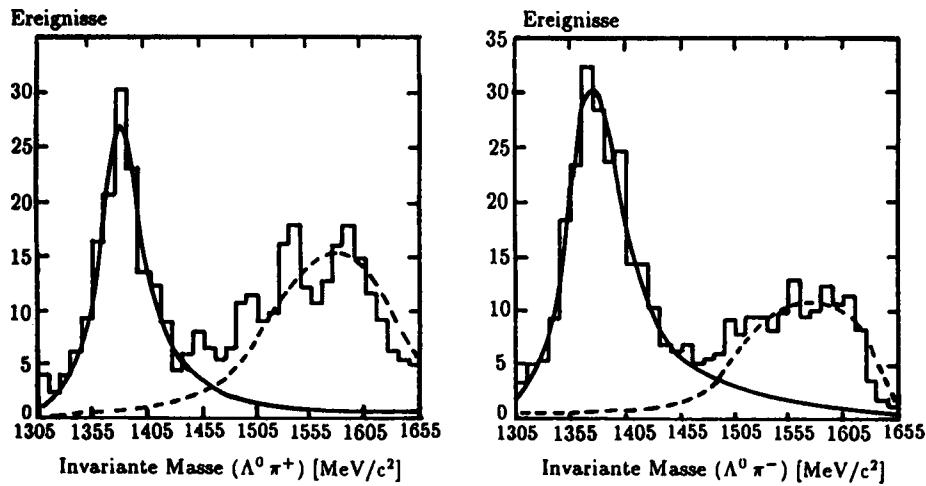


betrachtet, bei der alle Teilchen im Grundzustand nachgewiesen werden. Beim Nachweis vieler solcher Ereignisse weisen sowohl das System  $\Lambda^0 + \pi^+$  als auch  $\Lambda^0 + \pi^-$  angeregte Zustände auf. Bei Variation der Strahlenergie ändert sich die Form der Resonanz nicht, sondern nur die Form des modifizierten Phasenraumes.

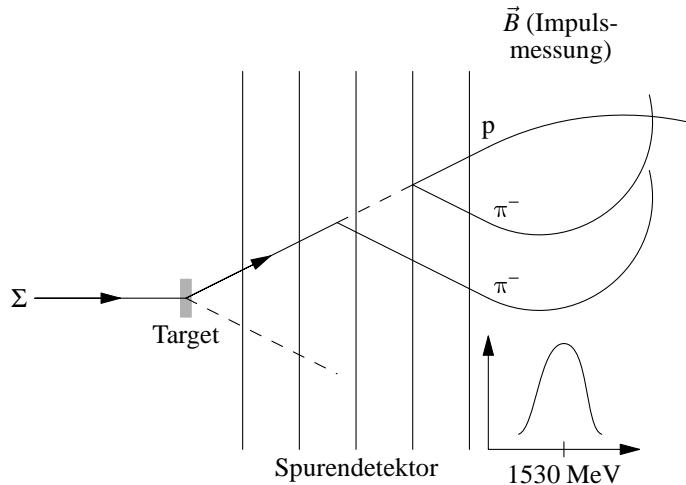
Allgemein müssen bei Produktionsexperimenten oft komplizierte Kaskaden nachgewiesen werden, beispielsweise:



**Abb. 6.38:** Totaler und elastischer Streuquerschnitt der Reaktion von  $\pi^+$ -Mesonen mit Protonen (oben) bzw. von  $K^-$ -Mesonen mit Protonen (unten) als Funktion des Impulses des Mesonenstrahls bzw. der Schwerpunktsenergie (aus [Po96])



**Abb. 6.39:** Invariantes Massenspektrum der Teilchenkombination  $\Lambda^0 + \pi^+$  (links) bzw.  $\Lambda^0 + \pi^-$  (rechts) aus der Reaktion  $K^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^+ + \Lambda^0$ . In beiden Spektren sieht man jeweils ein Maximum bei ca.  $1385\text{MeV}/c^2$ , das einem  $\Sigma^{*+}$  bzw. einem  $\Sigma^{*-}$  entspricht. Die Energie des jeweils beim Zerfall unbeteiligten Pions ist kinematisch festgelegt. Daher ergibt sich durch die Kombination des  $\Lambda^0$  mit dem „falschen“ Pion ein weiteres Maximum bei höherer Energie, das jedoch keiner Baryonresonanz entspricht („Modifizierter Phasenraum“; aus [Po96]).



**Abb. 6.40:** Nachweis der Zerfallsprodukte in Spuredetektoren

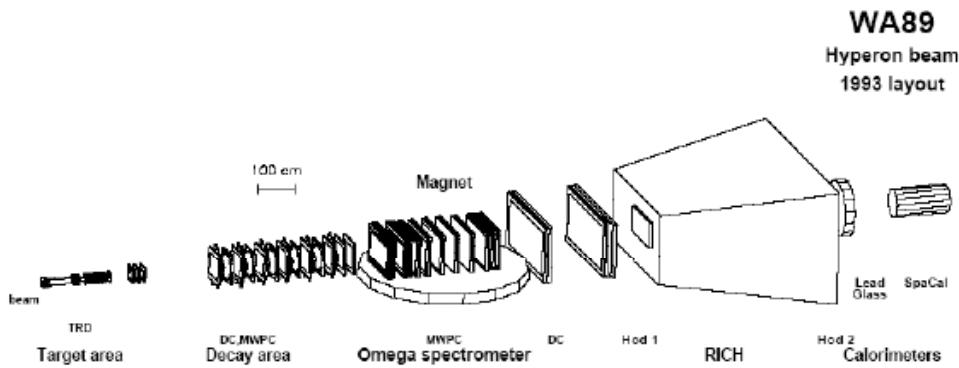
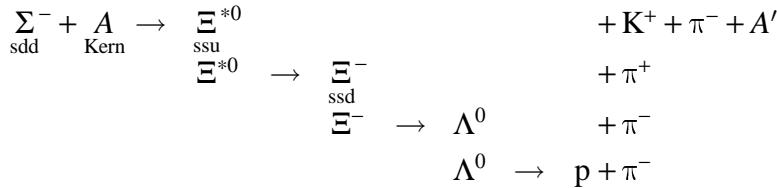


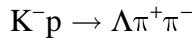
Abb. 6.41: Detektoranordnung zur Messung eines Hyperonenstrahls



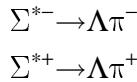
Hier wird unter anderem ein Teilchen mit Strangeness  $S = -2$  erzeugt, obwohl im Anfangszustand nur  $S = -1$  war. Die Strangeness wird durch Erzeugung eines Kaons mit  $S = +1$  trotzdem erhalten. Der Zerfall des  $\Xi^-$  erfolgt über die schwache Wechselwirkung, deshalb ist hier die Strangenessverletzung möglich.

Eine Detektoranordnung zur Messung der Zerfallsprodukte ist in Abb. 6.41 gezeigt.

### Exklusive Reaktionen bei niedrigen Energien:

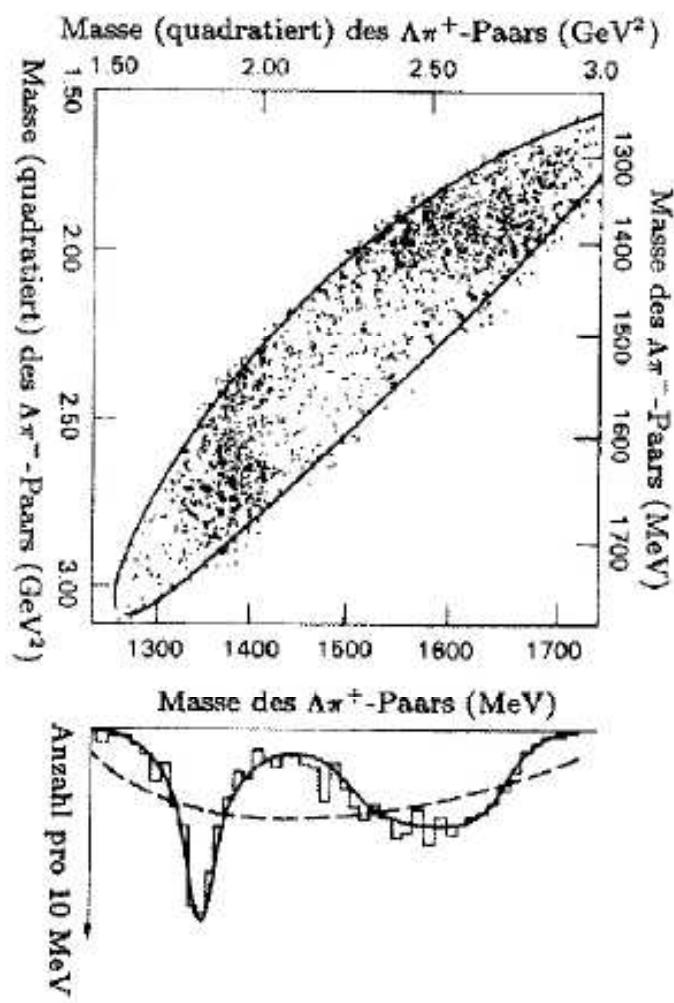


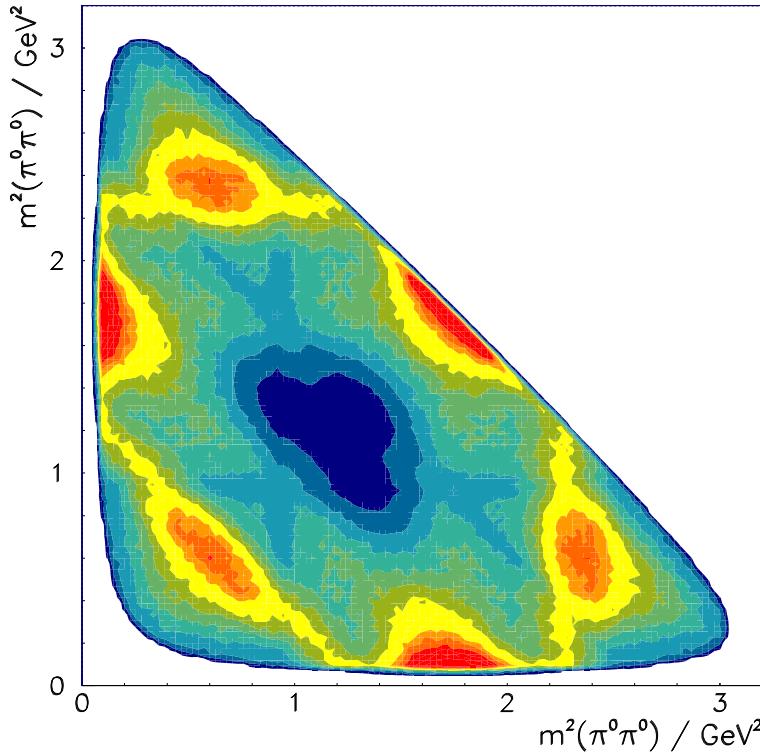
Betrachte das  $(\Lambda\pi)$ -Subsystem. Dieses repräsentiert einen  $\Sigma^*$  Zwischenzustand. Möglich sind:



Ist der Phasenraum der Reaktion klein (d.h.  $\sqrt{s} \geq m_\Lambda + m_{\pi^-} + m_{\pi^+}$ ) besteht eine starke Korrelation zwischen den Massen der beiden Subsysteme  $\Lambda\pi^-$  und  $\Lambda\pi^+$ . Bildlich lässt sich die Korrelation schön in einem Dalitzplot darstellen (Abb. 6.42)<sup>11</sup>. Das Maximum bei 1.6 GeV entspricht einer Reflexion der echten Resonanz bei 1370 MeV im adjungierten Kanal.

<sup>11</sup>Im Dalitzplot werden die Massenquadrate verschiedener Felderkombinationen ereignisweise gegeneinander aufgetragen. Die Verteilung füllt den offenen Phasenraum

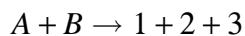
Abb. 6.42: Dalitzplot für das Subsystem  $\Lambda\pi$



**Abb. 6.43:** Allgemeiner Dalitzplot für drei erzeugte Teilchen

Die Maxima lassen sich durch eine Variation der Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$ , und damit des Phasenraumes, in echte Resonanzen und reine Phasenraumeffekte auf trennen.

**Dalitzplot:** Wir betrachten die exklusive Reaktion



Mit dem Impulsen  $P_A$  und  $P_B$  haben wir insgesamt 8 Freiheitsgrade. Diese teilen sich wie folgt auf:

1. Die Massen  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$  haben 3 Freiheitsgrade.
2. Die Energieerhaltung  $E_A + E_B = \sum_i E_i$  liefert einen Freiheitsgrad.
3. Die Impulserhaltung für  $P_x^A + P_x^B = \sum_i P_x^i$  und  $P_y^A + P_y^B = \sum_i P_y^i$  liefert zwei weitere.
4. Die beiden letzten kommen aus den invarianten Massen  $m_{12}^2$  und  $m_{13}^2$ .

Ein Beispiel für einen Dalitzplot ist in Abb. 6.43 angegeben.

- Eine zufällige und unkorrelierte Produktion der Teilchen 1, 2 und 3 ergibt eine gleichmäßige Verteilung der Ereignisse im Dalitzplot.
- Werden hingegen die zwei Teilchen (1-2, 2-3 oder 1-3) über einen resonanten Zwischenzustand erzeugt, so ergeben sich Strukturen im Diagramm.

- Die Verteilung der Strukturen in Dalitzplot erlaubt Aussagen über die Masse und die Drehimpulse (und damit der Winkelverteilung) der Teilchen.

Betrachte die Reaktion



Aus der Vierer-Impulserhaltung

$$m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{23}^2 = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$$

sowie der Energieerhaltung

$$E_3 = \frac{M^2 + m_3^2 - m_{12}^2}{2M}$$

ergibt sich mit  $m_{ij}^2 = (P_i + P_j)^2$ :

$$m_{12}^2 = \text{Konst} - m_{13}^2 - m_{23}^2$$

Folglich ist  $m_{12}$  nicht unabhängig von  $m_{13}$  und  $m_{23}$  und wird in der Diagonalen eines Darlitzplots mit  $m_{13}$  und  $m_{23}$  sichtbar.

## 6.12 Hadronstreuung bei hohen Energien

### 6.12.1 Beobachtungen

Allgemein hat der Wirkungsquerschnitt (Abb. 6.44) bei Hadronenstreuung folgende Eigenschaften:

- Inelastischer Wirkungsquerschnitt:

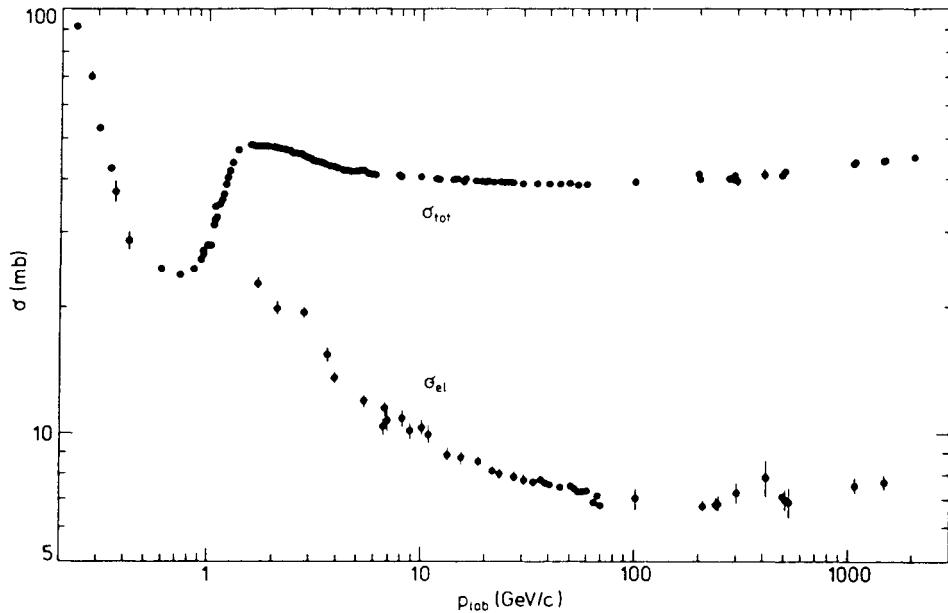
$$\sigma_{\text{inel}} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad p \ll 1 \text{ GeV/c}$$

- Elastischer Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{\text{el}} \approx 10\% \quad \text{ab ca.} \quad 5 \text{ GeV/c}$$

- Bei hohen Energien ist der totale Wirkungsquerschnitt näherungsweise konstant:

$$\sigma_{\text{tot}} \approx 40 \text{ mbarn} = \text{konst}$$



**Abb. 6.44:** Wirkungsquerschnitt bei Hadronenstreuung (aus [Pe87])

- Zum Vergleich der geometrische Wirkungsquerschnitt (effektive Fläche der streuenden Objekte):

$$\sigma_{\text{geom}} \approx \pi R^2$$

$$R \approx 1 \text{ fm} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\text{geom}} \approx 30 \text{ mbarn}$$

Dabei ist 1 fm die ungefähre Reichweite der starken Wechselwirkung.

Vergleicht man die Wirkungsquerschnitte verschiedener Reaktionen (Abb. 6.45), beobachtet man folgendes:

- Der Wirkungsquerschnitt für Teilchen- und Antiteilchenkurven nähern sich bei hohen Energien an. Dies ist konsistent mit einer Vorhersage der Quantenfeldtheorie (sog. Pomeranschuk-Theorem).
- Die Wirkungsquerschnitte steigen bei sehr hohen Energien logarithmisch an.
- Bei höheren Energien ( $200 \text{ GeV} > E > 30 \text{ GeV}$ ) gilt:

$$\sigma_{\pi p} \approx \frac{2}{3} \sigma_{pp}$$

Dies wird plausibel, wenn man bedenkt, dass das Pion nur zwei, Baryonen aber drei Valenzquarks enthalten.

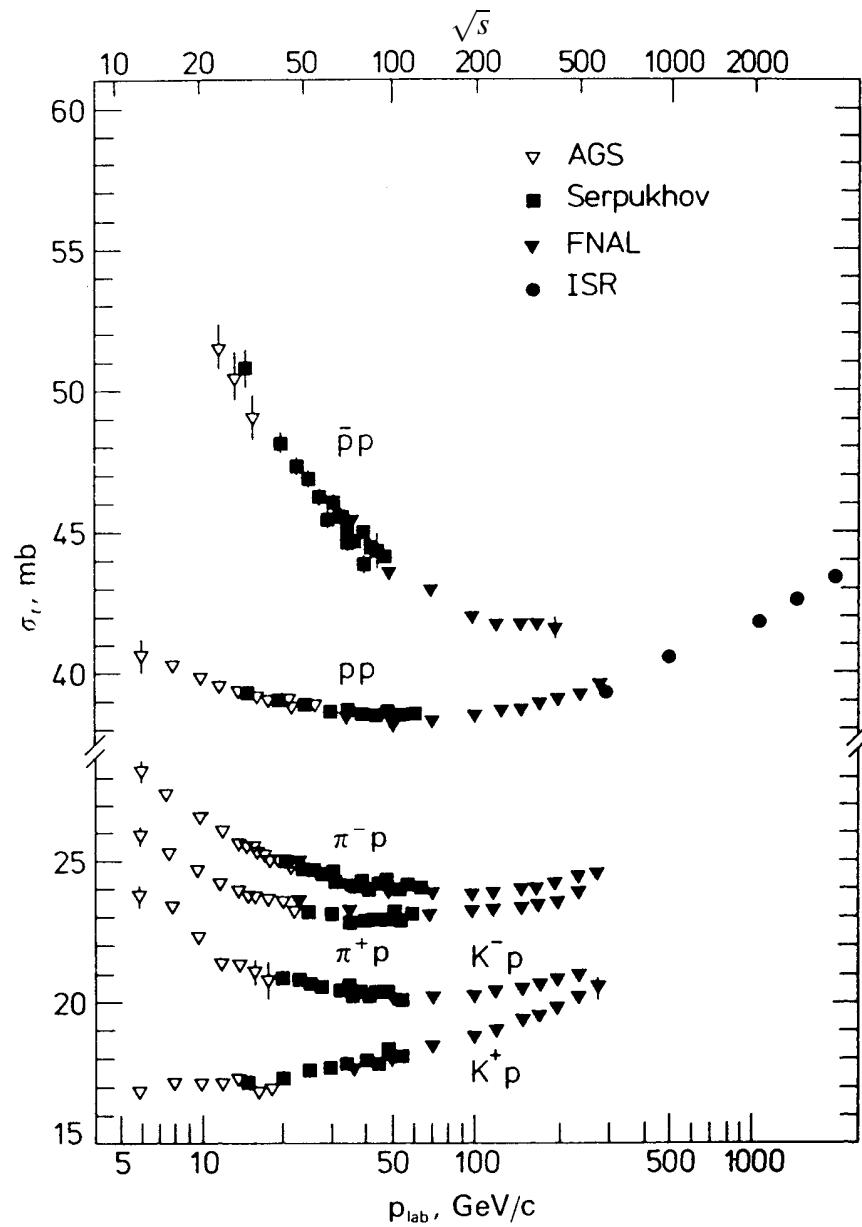
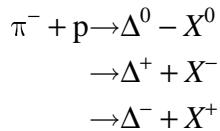
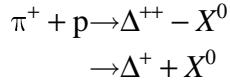
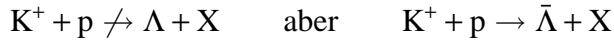


Abb. 6.45: totale Wirkungsquerschnitte bei Streuung verschiedener Hadronen (aus [Pe87])

Die Wirkungsquerschnitte bei K-p- und  $\pi$ -p-Streuung zeigen bei niedrigen Energien eine Ladungsabhängigkeit, weil die Anzahl der offenen Endzustände vom Isospin abhängt. So sind zum Beispiel die folgenden Reaktionen *nicht* möglich, da Baryonen nur s-Quarks und keine  $\bar{s}$  enthalten und weil die Erzeugung von  $\bar{\Lambda}$  wegen der Baryonenzahlerhaltung schwierig ist:



Da bei hohen Energien in größerem Maße andere Teilchen erzeugt werden, verringern sich dort die Unterschiede zwischen den Wirkungsquerschnitten.

Ähnliche Argumente gelten für Pion und Antiproton, wobei bei der Annihilation von  $\bar{p}p$  die verfügbare Energie zur Erzeugung von Pionen im Endzustand um  $2m_p$  größer ist als bei der  $p\bar{p}$ -Reaktion.

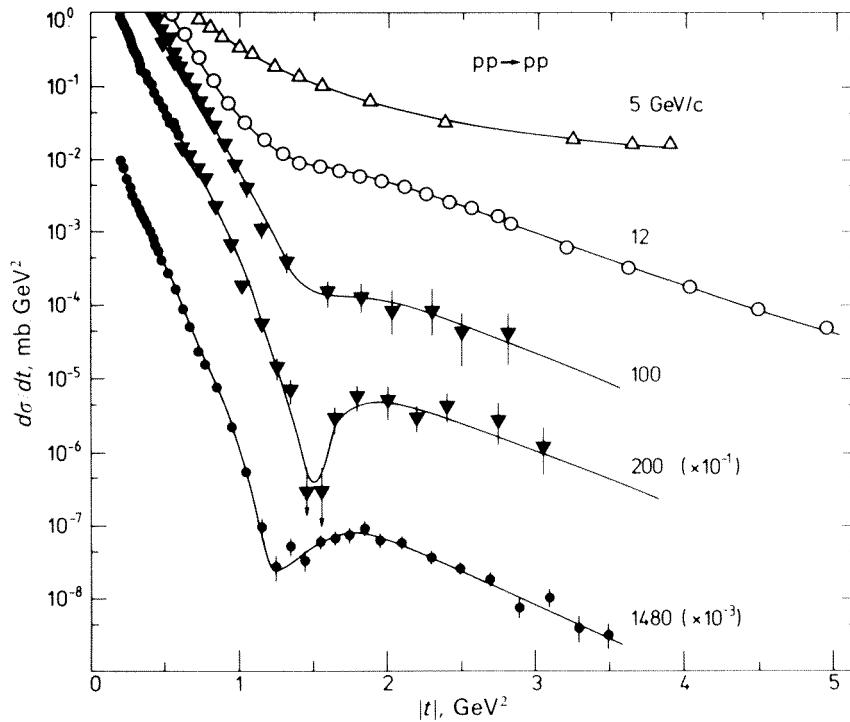
### 6.12.2 Optisches Modell der Hadronenstreuung

Wir vergleichen nun die Hadronenstreuung mit der Streuung und Absorption an einer schwarzen Scheibe mit Radius  $R$ . Dies entspricht  $\eta = 0$  in der Streuphasenzerlegung.

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{el}} &= 4\pi\lambda^2 \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell+1) \left| \frac{\eta_\ell e^{2i\delta_\ell} - 1}{2i} \right|^2 = \pi\lambda^2 \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell+1) = \pi R^2 \\ \sigma_{\text{inel}} &= \pi\lambda^2 \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell+1)(1 - \eta_\ell^2) = \pi\lambda^2 \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell+1) = \pi R^2 \\ \sigma_{\text{tot}} &= \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}} = 2\pi R^2 \end{aligned}$$

$\lambda$  ist dabei die de-Broglie-Wellenlänge und  $\ell_{\max} = R/\lambda$ . (Mit  $p = 20 \text{ GeV}$  bzw.  $\lambda = \frac{1}{k} = 0.01 \text{ fm}$  und  $R = 1 \text{ fm}$  ergibt sich z. B.  $\ell_{\max} = 100$ .)  $\sigma_{\text{tot}}$  entspricht, analog zur Optik, in etwa der geometrischen Fläche der Teilchen.

Die  $\ell$ -te Partialwelle ist proportional zum Legendrepolyynom  $P_\ell(\cos \theta)$ . Für kleine Winkel  $\theta$  kann man folgendermaßen nähern ( $J_1$  ist die Besselfunktion):



**Abb. 6.46:** Differentieller Wirkungsquerschnitt für elastische pp-Streuung als Funktion des Quadrats  $|t| = |q^2|$  des Impulsübertrags (aus [Pe87])

$$\sum_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \propto J_1$$

Für elastische Streuung ( $\eta_l = 0$ ) gilt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{l=0}^{l_{max}} (2l+1) P_l(\cos \theta) \right|^2$$

Damit erhält man dann für kleine Werte von  $qR$ , was kleinen Winkeln  $\theta$  entspricht, zumal  $q \approx 2p \sin \frac{\theta}{2}$ :

$$\frac{d\sigma}{d(q^2)} = \pi R^2 \left| \frac{J_1(qR)}{qR} \right|^2 \approx \frac{\pi R^4}{4} e^{-R^2 q^2/4} \quad q \approx 2p \sin \frac{\theta}{2}$$

Für größere Werte von  $qR$  durchläuft  $J_1(qR)/(qR)$  Maxima und Minima (wie bei allen Diffraktionsphänomenen). Nullstellen liegen bei  $qR \approx 3.83, 7.02, 10.12, \dots$ . Damit liegt die erste Nullstelle bei  $q^2 \approx 1.15 \text{ GeV}^2$  ( $R \approx 0.7 \text{ fm}$ ).

Die Maxima und Minima verschieben sich bei steigender Energie zu kleineren  $q^2$ , d.h. der Durchmesser der Scheibe wächst mit der Energie an, wie auch der totale Wirkungsquerschnitt (Abb. 6.46).

Das optische Modell ist zwar qualitativ richtig, quantitativ ergibt es aber falsche Werte: Tatsächlich ist z. B.  $\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}} \ll 0.5$ .

## 6.13 Grundzüge der Quantenchromodynamik

### 6.13.1 Vorbereitung: Eichinvarianz

Den Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen bilden freie Fermionen (Masse  $m$ ), welche die Dirac-Gleichung erfüllen:

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi(x) = 0 \quad \text{mit } \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (6.27)$$

Treffen zwei gleiche Indizes aufeinander (einer oben, einer unten), so muss über alle möglichen Werte des Index summiert werden (Einstein'sche Summenkonvention). Tritt ein Index nur einfach auf, so gilt die Gleichung für jeden Wert des Index, es handelt es sich also um mehrere Gleichungen bzw. eine Vektorgleichung.

Die Lagrangedichte für ein freies Diracteilchen ist gegeben durch:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi(x), \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (6.28)$$

Gemäß dem Prinzip der kleinsten Wirkung ist das Wirkungsintegral  $\int dt L_{\text{Dirac}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{Dirac}}$  extremal. Im Extremum ergibt sich die Bedingung, dass der Integrand  $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$  gegenüber einer Variation bezüglich  $\psi$  invariant ist.

Untersucht wird nun das Verhalten unter Phasentransformationen:

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\theta} \psi(x) \equiv U\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}(x)e^{-i\theta}, \quad \text{wobei } e^{i\theta} \in U(1) \text{ mit } U^\dagger = U^{-1}$$

Damit ist  $U$  unitär.

Man unterscheidet lokale und globale Eichtransformationen:

$$\theta = \begin{cases} \text{const} & \text{globale Eichtransformation} \\ \theta(x) & \text{lokale Eichtransformation} \end{cases}$$

Die Dirac-Lagrangedichte (6.28) ist offensichtlich invariant unter globalen Eichtransformationen. Dies gilt jedoch nicht für lokale Eichtransformationen:

$$\partial_\mu (U\psi(x)) = e^{i\theta(x)} \partial_\mu \psi(x) + i e^{i\theta(x)} \psi(x) \partial_\mu \theta(x)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{Dirac}} - \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \partial^\mu \theta(x) \neq \mathcal{L}_{\text{Dirac}} \quad (6.29)$$

Daraus folgt, dass es keine *freien* Diracteilchen geben kann; die Existenz einer Wechselwirkung folgt direkt aus der Eichinvarianz. Die Wechselwirkung wird durch Eichfelder (z.B. Gluonfeld, Photonfeld) vermittelt („Eichfeldtheorie“).

Zur Rettung der Eichinvarianz führt man die Ankopplung eines *Eichfeldes*  $\mathcal{A}_\mu(x)$  ein, so dass der Zusatzterm in (6.29) kompensiert wird.

$$\mathcal{A}_\mu(x) \xrightarrow[\text{transf.}]{\text{Eich-}} \mathcal{A}_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$$

Desweitern haben wir die sogenannte *minimale Substitution* durchgeführt:

$$\begin{array}{ccc} \partial_\mu & \rightarrow & \partial_\mu - ieA_\mu(x) =: D_\mu(x) \\ \begin{matrix} \text{normale} \\ \text{Ableitung} \end{matrix} & & \begin{matrix} \uparrow \\ \text{Photonfeld} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{eichkovariante} \\ \text{Ableitung} \end{matrix} \end{array}$$

Die Dirac-Gleichung mit der kovarianten Ableitung  $D_\mu(x)$  ist invariant unter der unitären Transformation  $U = e^{i\theta(x)}$  aus der Eichgruppe  $U(1)$ :

$$U^\dagger [i\gamma_\mu D^\mu - m] U \psi(x) = [i\gamma_\mu D^\mu - m] \psi(x) = 0$$

Die Lagrangedichte mit Kopplung,

$$\mathcal{L}_{\text{Kopp}} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu \partial^\mu + \gamma_\mu \mathcal{A}^\mu(x) - m)\psi(x), \quad (6.30)$$

ist invariant unter lokalen  $U(1)$ -Transformationen (z.B:  $U = e^{i\theta(x)}$ ).

**Beispiel QED:** Für die QED ist das Eichfeld schon bekannt. Dies ist gerade die Eichtransformation des Vektorpotentials in der Elektrodynamik.

$$\mathcal{A}_\mu = -eA_\mu \quad D_\mu(x) = \partial_\mu + ieA_\mu(x)$$

Die Feldstärken können in einem Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}(x)$  zusammengefasst werden:

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{i}{e} [D_\mu(x), D_\nu(x)] = \frac{i}{e} [\partial_\mu - ieA_\mu(x), \partial_\nu - ieA_\nu(x)] = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) = -F_{\nu\mu}(x)$$

Wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen ist dieser nicht von  $\theta(x)$  abhängig und deshalb eichinvariant. Es ergibt sich:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Eichfeld Photon trägt natürlich zur Energie des Gesamtsystems bei, so dass die Lagrangedichte um einen entsprechenden Term erweitert werden muss:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \quad (6.31)$$

Wir haben also gesehen wie die Forderung nach lokaler U(1)-Eichinvarianz zu der wechselwirkenden Feldtheorie der QED führt. Außerdem folgt, dass das Photon *masselos* sein muss, da ein eventuell vorhandener Massenterm

$$\mathcal{L}_{\text{Masse}}^{(\gamma)} = \frac{m_\gamma^2}{2} A^\mu(x) A_\mu(x)$$

die Eichinvarianz bricht.

### 6.13.2 Quarks mit Farbe

Quarks existieren in  $N_f = 6$  Flavours (u, d, s, c, b, t) und besitzen jeweils  $N_c = 3$  Farben.

$$\psi_i(x) = \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \\ s_i \\ c_i \\ b_i \\ t_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3: \text{Farbe})$$

Hierbei sind die  $u_i, \dots, t_i$  jeweils vierkomponentige Dirac-Spinoren, d.h. die Wellenfunktion  $\psi$  besteht aus 6 (Flavour) mal 3 (Farbe) mal 4 (Spinor) gleich 72 Komponenten.

Wir fassen  $(u_i, \dots, t_i)$  (mit  $i = 1, 2, 3$ ), sprich den „Vektor“ aller Farben zu einer bestimmten Quarkflavour, als [3]-Basis-Darstellung der Farbgruppe  $SU(3)_c$  auf.

Die **Farbströme** sind gegeben durch:

$$J_\mu^a(x) = \sum_{i,j=1}^3 \bar{\psi}_i(x) \gamma_\mu \frac{\lambda_{ij}^a}{2} \psi_j(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi(x)$$

Die hermiteschen und spurfreien  $3 \times 3$ -Matrizen  $\lambda^a$  ( $a = 1, \dots, 8$ ), die sog. Gell-Mann-Matrizen (siehe Abschn. 6.2.3), sind die Generatoren der Farbgruppe  $SU(3)_c$ .

#### Postulat:

Die starke Wechselwirkung wird durch eine Eichfeldtheorie beschrieben, deren Lagrange-Dichte invariant unter der lokalen Eichgruppe  $SU(3)_c$  ist.

$$\psi(x) \rightarrow U(x) \psi(x) \quad \text{mit } U(x) \in SU(3)$$

### 6.13.3 Gluonen

In Analogie zur QED stellen wir folgende Hypothese auf:

Die Farbgruppe  $SU(3)_c$  ist die lokale Eichgruppe der starken Wechselwirkung. Die zugehörigen Eichfelder sind die Gluonen.

Die lokale  $SU(3)_c$ -Eichtransformation der Quarkfelder ist gegeben durch:

$$\psi(x) \longrightarrow U(x)\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}(x)U^\dagger(x)$$

$U(x)$  wirkt dabei nur im Farbraum ( $i = 1, 2, 3$ ) und rotiert hier die Farbe. Der Operator wirkt nicht im Flavor- und im Diracraum. Es ist

$$U(x) = \exp\left(i\theta_a(x)\frac{\lambda^a}{2}\right); \quad UU^\dagger = \mathbb{1}, \quad \det U(x) = 1$$

Die Generatoren  $\lambda^a$  der  $SU(3)_c$  erfüllen die Kommutator-Algebra:

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if_{abc}\lambda^c$$

Dabei sind  $f_{abc}$  die Strukturkonstanten von  $SU(3)_c$ . Für eine abelsche Gruppe (wie  $U(1)$ ) wären alle  $f_{abc} = 0$ , was hier jedoch nicht erfüllt ist. Die QCD ist also eine *nicht-abelsche Eichfeldtheorie*.

Die Eichfelder der QCD, nämlich die Gluonfelder werden mit  $G_\mu^a(x)$ ; ( $a = 1, \dots, 8$ ) bezeichnet. Sie können zusammengefasst werden zu dem Gluonfeld

$$G(x)_\mu = \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a(x) \quad (\text{kontrahiertes Gluonfeld})$$

Die Forderung nach lokaler  $SU(3)_c$ -Eichinvarianz der Lagrangedichte der Quarks verlangt die Ankopplung dieses Eichfeldes gemäß der minimalen Substitution:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - \underbrace{igG_\mu(x)}_{\text{entspricht } e}$$

Der Gluonfeldstärketensor wird zu:

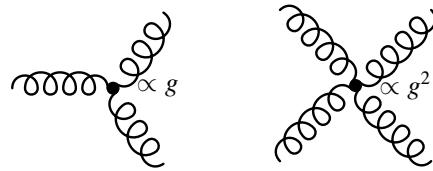
$$G_{\mu\nu}(x) = \frac{i}{g} [D_\mu(x), D_\nu(x)] = \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^a}{2} G_{\mu\nu}^a(x) \quad (6.32)$$

$$G_{\mu\nu}^a(x) = \overbrace{\partial_\mu G_\nu^a(x) - \partial_\nu G_\mu^a(x)}^{\text{nicht eichinvariant weg, Nicht-Kommutativität}} + \underbrace{gf_{abc}G_\mu^b(x)G_\nu^c(x)}_{\text{nichtlinear!}} \quad (6.33)$$

Die Lagrangedichte der Gluonen ist wie bei den Photonen gegeben durch:

$$\mathcal{L}_{\text{Gluon}} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a(x) G_a^{\mu\nu}(x)$$

Durch den nichtlinearen Term in (6.33) können nun auch Gluonen miteinander wechselwirken (mit der gleichen Kopplungsstärke). Sie tragen selbst Farbladung im Gegensatz zu den ungela denen Photonen der QED.



**Abb. 6.47:** Mögliche Wechselwirkungen von Gluonen

### 6.13.4 Lagrangedichte der QCD

Die Lagrangedichte der QCD hinzuschreiben ist ungeheuer einfach. Sie lautet:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(x) \begin{pmatrix} i\gamma_\mu D^\mu & -\hat{m} \end{pmatrix} \psi(x) - \underbrace{\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a(x) G_a^{\mu\nu}(x)}_{\equiv \text{Abb. 6.49; 6.50}} \quad (6.34)$$

mit  $\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \\ c \\ b \\ t \end{pmatrix}$ ,  $D^\mu = \partial^\mu - igG^\mu(x)$  und der

Quarkmassen-Matrix  $\hat{m}$ :

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m_u & & & \\ & \ddots & & \\ & & & m_t \end{pmatrix}$$

- Die Quarkmassen haben folgende Werte (bei einer Skala von 1 GeV, da es keine freien Quarks gibt und stets Gluonen mit dabei sind):

$$\begin{aligned}
 m_u &= (5 \pm 1) \text{ MeV/c}^2 \\
 m_d &= (8 \pm 2) \text{ MeV/c}^2 \\
 m_s &= (164 \pm 33) \text{ MeV/c}^2 \\
 m_c &= (1.2 \pm 0.1) \text{ GeV/c}^2 \\
 m_b &= (4.2 \pm 0.1) \text{ GeV/c}^2 \\
 m_t &= (165 \pm 5) \text{ GeV/c}^2
 \end{aligned}$$

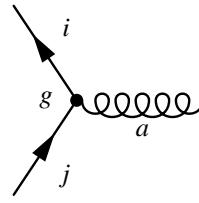
Es soll hier angemerkt sein, daß die hier aufgeführten Quarkmassen nichts mit den bereits erwähnten Konstituentenquarkmassen zu tun haben.

- Die Gluonen sind *masselos*. (Wegen der  $SU(3)_c$ -Eichinvarianz)
- Die Kopplung der acht Gluonfelder an die Quarkfarbströme ist:

$$\mathcal{L}_{qg} = -g \sum_{a=1}^8 \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi(x) G_\mu^a(x) \quad (6.35)$$

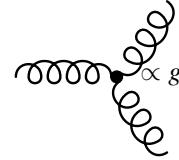
Der dem Quark-Gluon-Kopplungsvertex (Abb. 6.48) in den Feynman-Diagrammen entsprechende Faktor lautet:

$$ig\gamma_\mu \frac{\lambda_{ij}^a}{2}$$



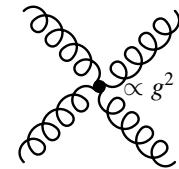
**Abb. 6.48:** Quark-Gluon-Kopplungsvertex

$$gf_{abc} [g^{\mu\nu}(p-q)^\tau + g^{\nu\tau}(q-k)^\mu + g^{\tau\mu}(k-p)^\nu]$$



**Abb. 6.49:** 3 Gluonen Vertex

$$\begin{aligned}
 -ig^2 f_{ace} f_{bde} &[g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\gamma\beta}] \\
 -ig^2 f_{adef} f_{bce} &[g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}] \\
 -ig^2 f_{abef} f_{cde} &[g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}]
 \end{aligned}$$



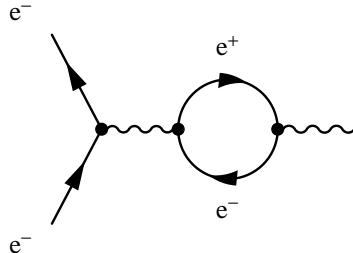
**Abb. 6.50:** 4 Gluonen Vertex

- Die kubischen und quartischen Terme in  $-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$  bedingen die Gluonselbstwechselwirkung, siehe auch den Kommentar zu (6.33). Die  $SU(3)_c$ -Eichinvarianz erlaubt nur die Kopplung von jeweils drei oder vier Gluonen.

Die QCD ist eine auf der Farbgruppe  $SU(3)_c$  basierende nichtabelsche Feldtheorie. Später werden wir die elektroschwache Wechselwirkung kennenlernen, die analog abgeleitet werden kann.

### 6.13.5 Laufende Kopplungsstärke der QCD

In der QED können durch Vakuumpolarisation kurzzeitig  $e^+e^-$ -Paare entstehen:



**Abb. 6.51:** Vakuumpolarisation in der QED

In der Umgebung einer Punktladung haben diese Einfluss auf die effektive (gemessene) Kopplungsstärke.

Man findet in erster Ordnung Störungstheorie:

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} \quad (\text{für große } Q^2) \quad (6.36)$$

Dabei ist  $\mu$  eine beliebige Renormierungsskala, die man benötigt, um bei der Berechnung auftretende Divergenzen zu eliminieren. Es ist beispielsweise:

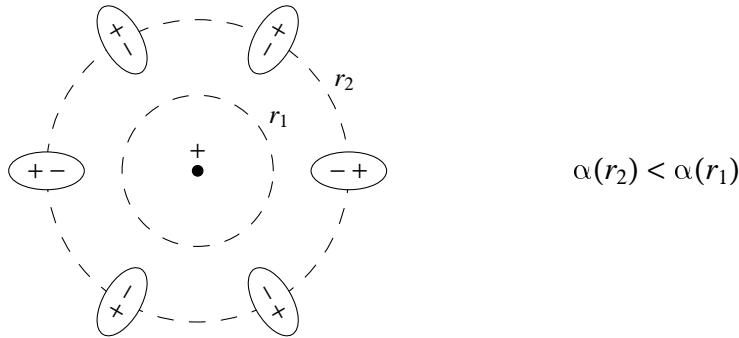
$$\alpha(m_e^2) = \frac{1}{137.036}, \quad \alpha(M_Z^2) = \frac{1}{129} \quad \text{mit} \quad M_Z = 91.9 \text{ GeV}$$

Man sieht, dass die QED-Feinstrukturkonstante schwach  $Q^2$ -abhängig ist. Die Effekte der laufenden QED-Kopplung (verursacht durch Vakuumpolarisation) sind experimentell beobachtbar, z. B. bei der  $e^+e^-$ -Bhabha-Streuung.

#### Anschauliche Interpretation der Vakuumpolarisation

Jede Punktladung ist umgeben von einer Wolke aus virtuellen Elektron-Positron-Paaren. Diese bilden effektive Dipole der Länge  $\sim 1/m_e$  und schirmen die Punktladung ab. Analog zu den Polarisationsphänomenen in der Festkörperphysik ist das Vakuum also ein polarisierbares Medium.

Bei geringem  $Q^2$  (und damit geringer Ortsauflösung  $r_2$ ) „sieht“ man nicht die Punktladung selbst, sondern eine effektive Ladung, zu der auch die  $e^+e^-$ -Paare beitragen (Abb. 6.52). Bei hohen Impulsen ( $\Rightarrow$  Auflösung kurzer Distanzen) dringt man tiefer in die abschirmende Wolke aus  $e^+e^-$ -Paaren ein und die effektive Ladung wächst dadurch an.

Abb. 6.52: Abhängigkeit von  $\alpha$  vom Abstand**QCD:**

Wegen der Farbladung der Gluonen können in der QCD bei der Vakuumpolarisation neben Quark-Antiquark-Paaren auch Gluonen erzeugt werden:

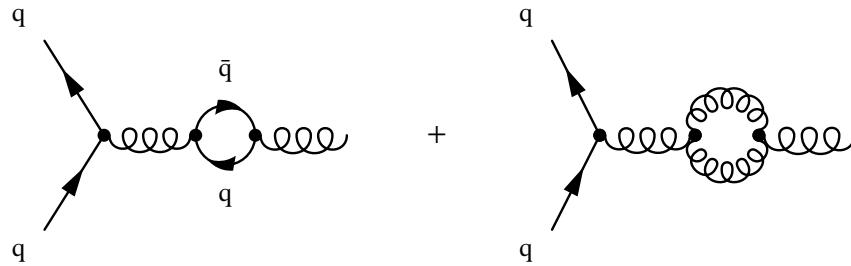


Abb. 6.53: Vakuumpolarisation in der QCD

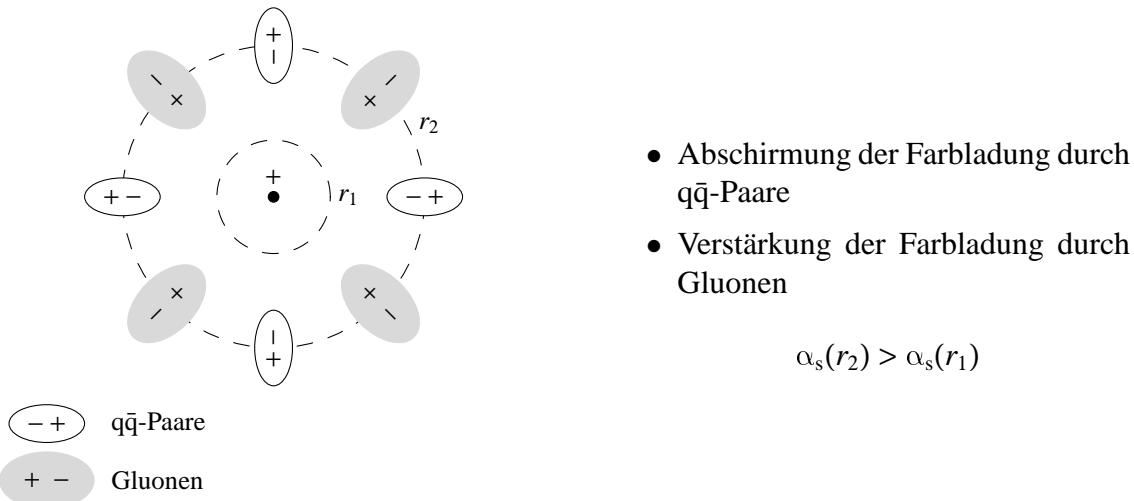
Für die Kopplungsstärke erhält man in erster Ordnung:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \beta_0 \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}}$$

$$\text{Beitrag der Gluonen} \\ \text{mit } \beta_0 = 11 - \underbrace{\frac{2}{3} N_f}_{\text{Beitrag der Quarks}}$$

wobei  $N_f$  die Anzahl der beteiligten Quarkflavours ist (von  $Q^2$  abhängig). Der Beitrag der Quarks kommt analog zur QED zustande, wobei noch ein Farbfaktor  $\frac{1}{2}$  berücksichtigt werden muß.

Für  $N_f < 16$  überkompenziert der Gluonbeitrag zur Vakuumpolarisation den der Quarks.



**Abb. 6.54:** Abhängigkeit von  $\alpha_s$  vom Abstand (die + und - stehen symbolisch für die Farbladungen)

$\alpha_s$  kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{(11 - \frac{2}{3}N_f) \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}\right)}$$

Die Konstante

$$\Lambda_{\text{QCD}} = \mu \exp\left(-\frac{2\pi}{\beta_0 \alpha_s(\mu)}\right)$$

ist der Skalenparameter der QCD und kann aus Meßdaten bestimmt werden.

$$\Lambda_{\text{QCD}} = (200 \dots 300) \text{ MeV}$$

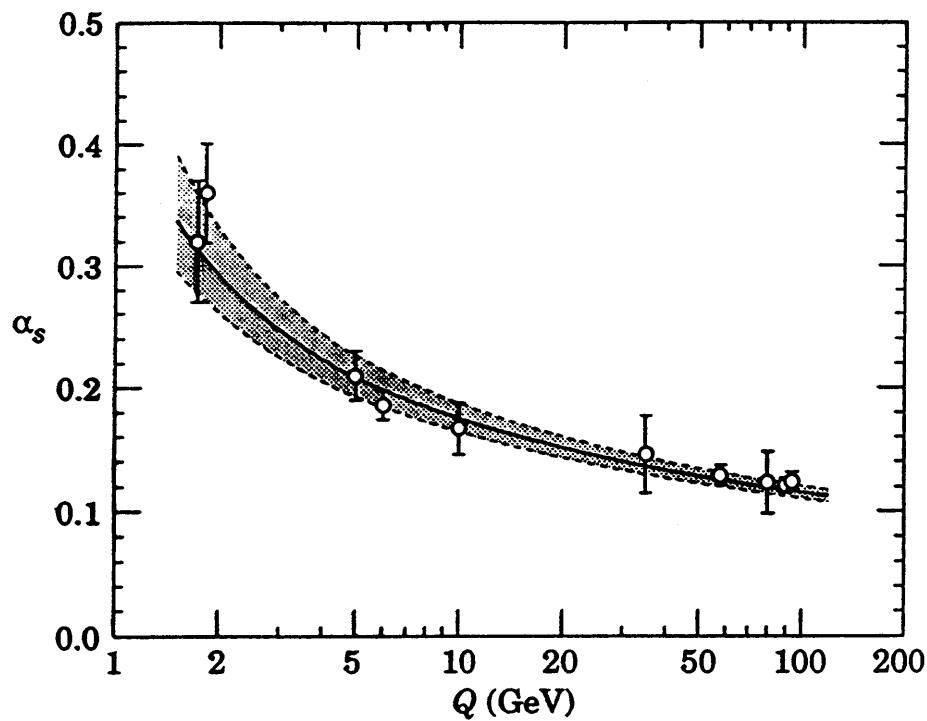
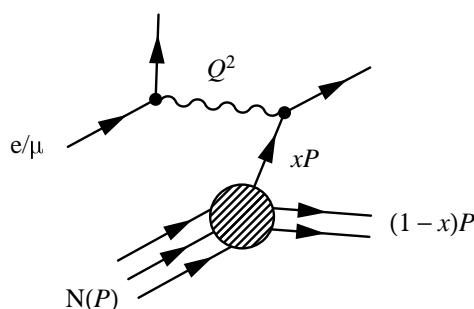
Bei hohen Impulsen (kurzen Abständen) nimmt die laufende QCD-Kopplungskonstante ab,

$$\alpha_s(Q^2 \rightarrow \infty) \rightarrow 0.$$

Dieses Verschwinden der starken Wechselwirkung auf sehr kurzen Distanzen nennt man die *asymptotische Freiheit* der QCD.

### 6.13.6 Skalenbrechung in der tiefinelastischen Streuung

Im einfachen Partonmodell hängt die Quarkverteilung  $q(x, Q^2)$  und damit die Strukturfunktion  $F_2(x, Q^2)$  nur von der Bjorken-Variable  $x = Q^2/2Mv$  ab und nicht von  $Q^2$ . Daraus hatten wir in Abschnitt 5.5 gefolgert, dass Quarks punktförmig sind.

Abb. 6.55:  $Q$ -Abhängigkeit von  $\alpha_s$ 

$x$  = Bruchteil des Nukleon-impulses  $P$ , den das Parton trägt

Abb. 6.56: Tiefinelastische Streuung im naiven Partonmodell

$$F_2(x) = x \sum_{i=u,d} Z_i^2 \left( q_i(x) + \bar{q}_i(x) \right)$$

Quark-  
↓  
Antiquarkverteilung  
↑

Welchen Anteil des Nukleon-Impulses tragen nun die u- und d-Quarks?

$$\int_0^1 dx (u(x) + \bar{u}(x)) x P = \varepsilon_u P$$

$$\int_0^1 dx (d(x) + \bar{d}(x)) x P = \varepsilon_d P$$

$u(x), \bar{u}(x), \dots$  seien die Verteilungsfunktionen im Proton. Nun gilt:

$$F_2^{\text{ep}}(x) = x \left( \frac{4}{9} (u(x) + \bar{u}(x)) + \frac{1}{9} (d(x) + \bar{d}(x)) \right)$$

$$F_2^{\text{en}}(x) = x \left( \frac{4}{9} (d(x) + \bar{d}(x)) + \frac{1}{9} (u(x) + \bar{u}(x)) \right)$$

Und damit:

$$\int_0^1 dx F_2^{\text{ep}}(x) = \frac{4}{9} \varepsilon_u + \frac{1}{9} \varepsilon_d \stackrel{\text{exp.}}{=} 0.18$$

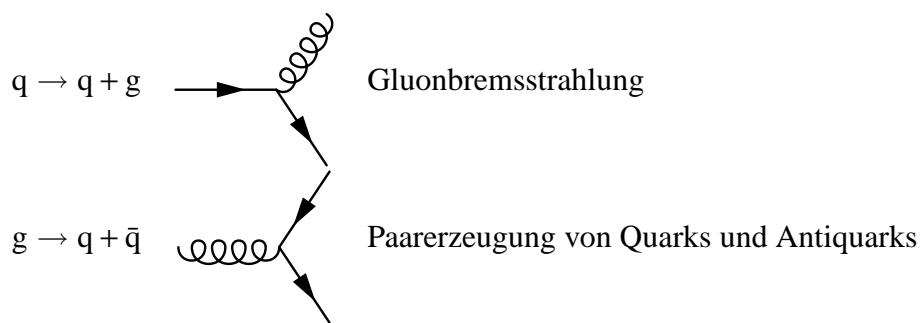
$$\int_0^1 dx F_2^{\text{en}}(x) = \frac{1}{9} \varepsilon_u + \frac{4}{9} \varepsilon_d \stackrel{\text{exp.}}{=} 0.12$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_u = 0.36, \quad \varepsilon_d = 0.18$$

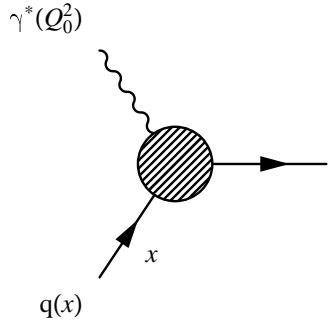
Die u- und die d-Quarks tragen nur etwa 50 % des Nukleonimpulses. Die anderen 50 % des Nukleonimpulses werden von elektrisch neutralen Partonen, den *Gluonen* getragen.

$$\varepsilon_g \approx 0.46$$

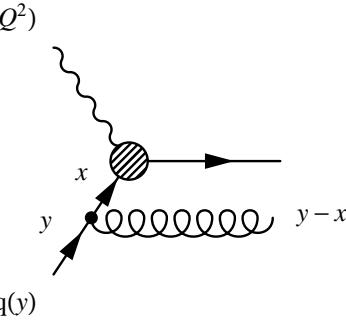
Gemäß der QCD wechselwirken Quarks und Gluonen kontinuierlich über:



Diese Prozesse führen zur Skalenbrechung (d.h.  $Q^2$ -Abhängigkeit) in den Partonverteilungen. Anschaulich kann man sich dies folgendermaßen vorstellen:



**Abb. 6.57:** Geringes Auflösungsvermögen  $Q_0^2$



**Abb. 6.58:** Erhöhtes Auflösungsvermögen  $Q^2$

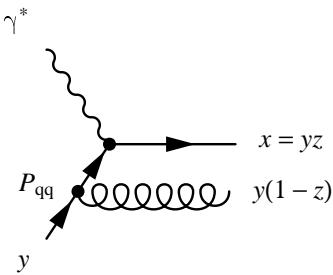
Man sieht, dass das Parton selbst wieder von einer Wolke aus Partonen umgeben ist. Durch Gluonabstrahlung wie in Abb. 6.58 wird die Quarkverteilung  $q(x)$  verändert, weiterhin tritt an einem Vertex der Gluonbremsstrahlung jewils eine sogenannte Verzweigungsfunktion (splitting function)  $P\left(\frac{x}{y}\right)$  auf. In erster Ordnung der QCD-Störungsrechnung wird dies durch die Altarelli-Parisi-Gleichungen beschrieben.

### Altarelli-Parisi-Gleichungen:

$$\underbrace{Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2}}_{(*)} q(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y, Q^2) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right)$$

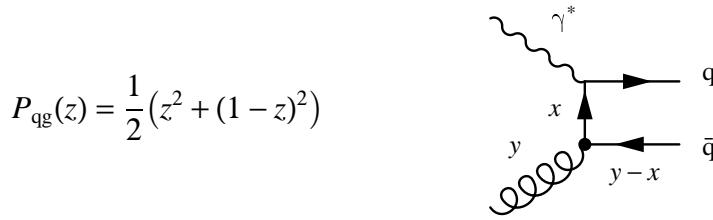
Diese Gleichung stellt eine Integrodifferentialgleichung dar. Die Integration erfolgt ab  $x$ , da nur mit  $y > x$  Gluonen abgestrahlt werden können. Die eigenartige Form (\*) der Ableitung auf der linken Seite kommt zustande, weil auf der rechten Seite nur dimensionslose Größen stehen. Die Splittingfunktion,

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{1-z}, \quad z = \frac{x}{y} \neq 1,$$



ist proportional zu der Wahrscheinlichkeit, dass  $q \rightarrow q + g$  aufspaltet.

Noch sind unsere Betrachtungen unvollständig, denn Gluonen können ja  $q\bar{q}$ -Paare erzeugen. Die zugehörige Splittingfunktion lautet:

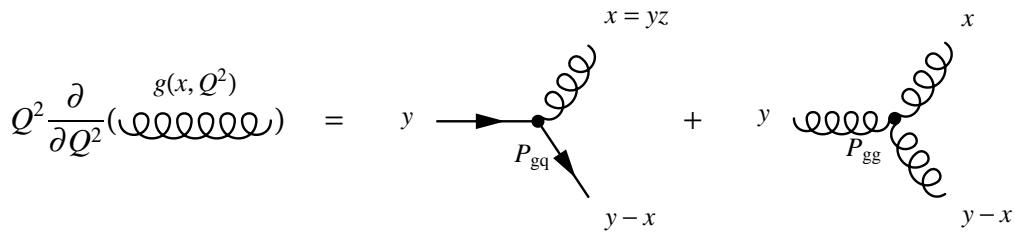


Damit ergibt sich für jeden Flavour  $i$ :

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} q_i(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ q_i(y, Q^2) P_{qq} \left( \frac{x}{y} \right) + g(y, Q^2) P_{qg} \left( \frac{x}{y} \right) \right] \quad (6.37)$$

Gluonverteilung

Völlig analog läuft die Evolution der Gluonverteilung:



Die Splittingfunktion im ersten Fall,

$$P_{gq}(z) = \frac{4}{3} \frac{1 + (1-z)^2}{z} = P_{qq}(1-z),$$

kann man folgendermaßen verstehen: Das Gluon hat den Impulsbruchteil  $yz$ . Aufgrund der Impulserhaltung muß das Quark dann den Bruchteil  $y(1-z)$  tragen.

In gleicher Weise ergibt sich für den zweiten Fall:

$$P_{gg}(z) = 6 \left( \frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} + z(1-z) \right) = P_{gg}(1-z)$$

Die zu (6.37) analoge Integro-Differentialgleichung lautet dann:

$$\begin{aligned} Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} g(x, Q^2) &= \\ &= \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ \sum_{i=1}^{N_f} \left( q_i(y, Q^2) + \bar{q}_i(y, Q^2) \right) P_{gq} \left( \frac{x}{y} \right) + g(y, Q^2) P_{gg} \left( \frac{x}{y} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.38)$$

(6.37) und (6.38) sind die QCD-Evolutionsgleichungen der Partonverteilungen, die sogenannten *Altarelli-Parisi-* oder — nach Dokhshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli und Parisi — *DGLAP-Gleichungen*:

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \begin{pmatrix} q_i(x, Q^2) \\ g(x, Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s(Q)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \underbrace{\begin{pmatrix} P_{qq} \left( \frac{x}{y} \right) & P_{qg} \left( \frac{x}{y} \right) \\ P_{qg} \left( \frac{x}{y} \right) & P_{qq} \left( \frac{x}{y} \right) \end{pmatrix}}_{\text{Verzweigungs- (splitting) Funktionen}} \begin{pmatrix} q_i(x, Q^2) \\ g(x, Q^2) \end{pmatrix} \quad (6.39)$$

Die gemessene Strukturfunktion  $F_2(x, Q^2)$  (Abb. 6.59) zeigt folgendes Verhalten:

- Bei konstantem  $x > 0.2$  nimmt  $F_2(x, Q^2)$  mit wachsendem  $Q^2$  ab. Aufgrund der Gluonabstrahlung (Abb. 6.58) findet man mit wachsendem  $Q^2$  weniger Quarks mit großem Impulsbruchteil und mehr mit kleinem Impulsbruchteil im Nukleon vor.
- Bei konstantem  $x < 0.2$  nimmt  $F_2(x, Q^2)$  mit wachsendem  $Q^2$  zu. Die Gluonen tragen nur kleine Bruchteile des Nukleonimpulses,  $x < 0.4$ . Aufgrund der  $q\bar{q}$ -Paarerzeugung findet man mit wachsendem  $Q^2$  (Auflösungsvermögen) mehr Quarks und Antiquarks mit kleinem Impulsbruchteil.

Mit Hilfe der DGLAP-Gleichungen kann die Gluonverteilung  $g(x, Q^2)$  und die Quarkverteilung  $q_i(x, Q^2)$  (für die verschiedenen Flavors u, d, s, ...) aus den gemessenen Strukturfunktionen extrahiert werden (Abb. 6.60).

### 6.13.7 Darstellung in der “zweiten Quantisierung“

**Quarkfelder:** Die Wellenfunktion eines Quarksfeldes mit dem Flavor  $f$ , Farbe und Spin lässt sich auch schreiben als:

$$\Psi_f = \sum_{c=1}^3 \sum_{s=\pm 1/2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[ b_{f,c}(\vec{p}, s) u_s(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + d_{f,c}^\dagger(\vec{p}, s) v_s(\vec{p}) e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right]$$

Hierbei beschreibt  $c$  die Farbe und  $s$  den Spin. Weiter sind  $b$  bzw  $b^\dagger$  die Vernichtungs- bzw Erzeugungsoperatoren für Quarks,  $d$  bzw  $d^\dagger$  die Vernichtungs- bzw Erzeugungsoperatoren für Antiquarks.  $u_s$  bzw  $v_s$  sind die Dirac-Spinoren der Quarks bzw Antiquarks.

$$u_s(\vec{p}) = \mathcal{N}(\vec{p}) \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \chi_s \end{pmatrix} \quad v_s(\vec{p}) = \overline{\mathcal{N}}(\vec{p}) \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix}$$

mit den Pauli-Spinoren  $\sigma$  und der Energie  $E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ .

Man definiert den Vakuum- Zustand  $|0\rangle$  über die Erzeuger und Vernichter durch:

$$b_{f,i}(\vec{p}, s)|0\rangle = 0 \quad (6.40)$$

$$b^\dagger(\vec{p}, s)|0\rangle = |q_{f,i}(\vec{p}, s)\rangle \quad \text{Quark} \quad (6.41)$$

$$d_{f,i}(\vec{p}, s)|0\rangle = 0 \quad (6.42)$$

$$d^\dagger(\vec{p}, s)|0\rangle = |\bar{q}_{f,i}(\vec{p}, s)\rangle \quad \text{Anti- Quark} \quad (6.43)$$

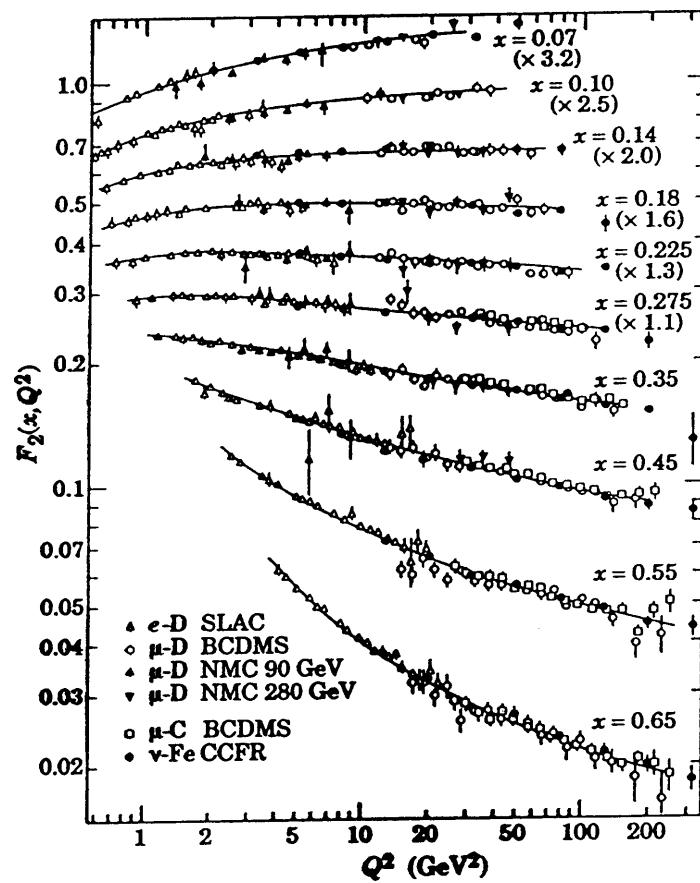


Abb. 6.59:  $Q^2$ -Evolution der Strukturfunktion  $F_2$  des Protons

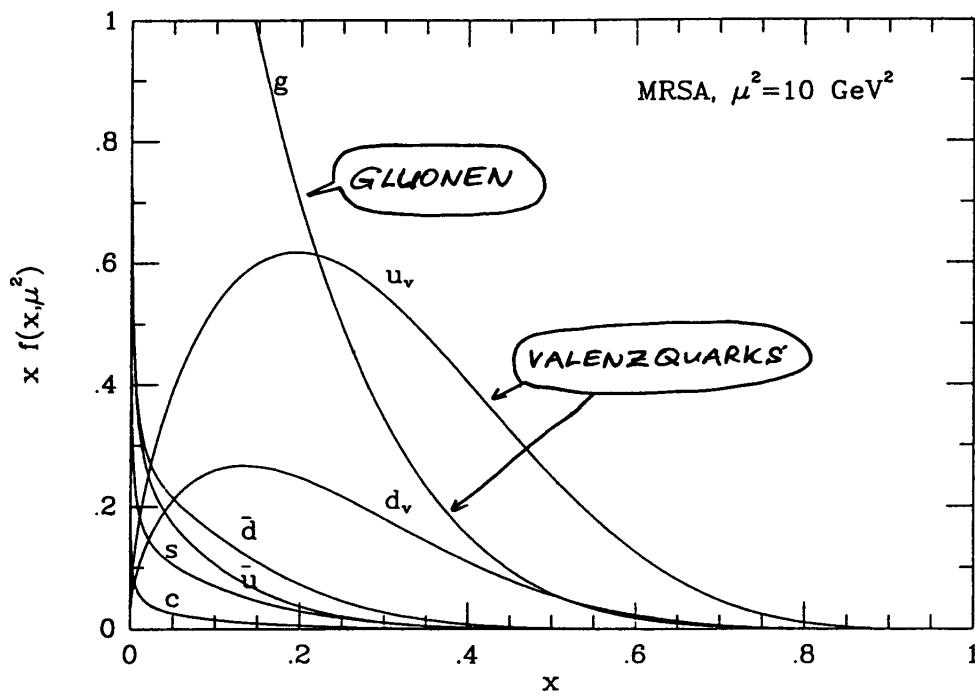


Abb. 6.60: Quark- und Gluon-Verteilungen im Proton (QCD-Analyse)

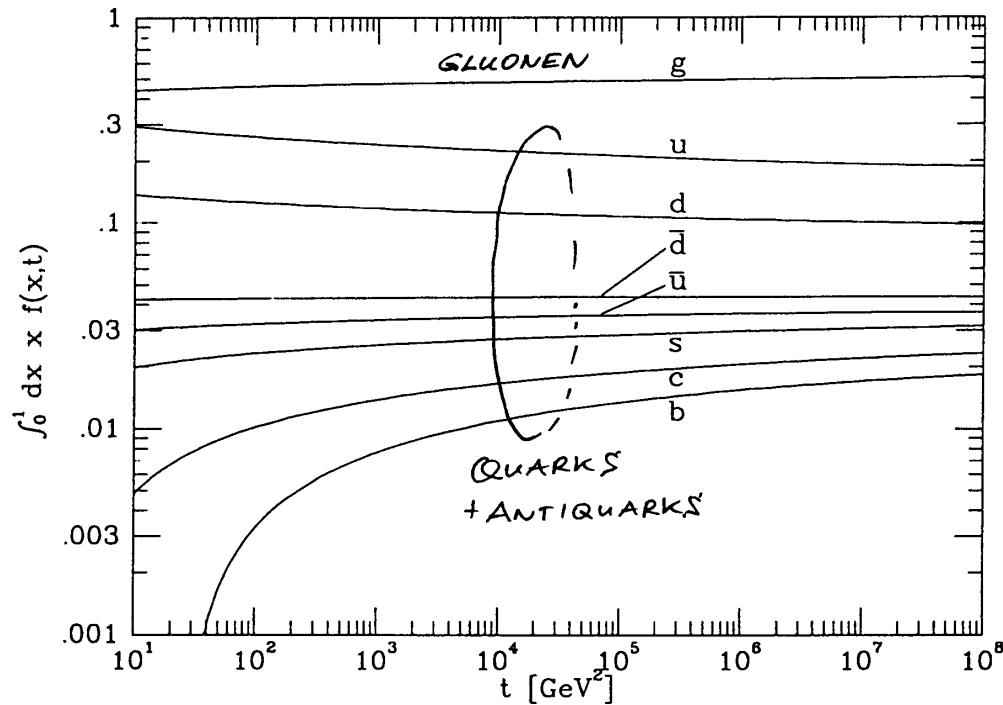


Abb. 6.61: Quarks und Gluonen tragen jeweils etwa die Hälfte des Gesamtimpulses

Die Vertauschungsrelationen für Quarks (Fermionen) sind mit  $\{b, b^\dagger\} \equiv bb^\dagger + b^\dagger b$ :

$$\{b_{f,c}(\vec{p}, s), b_{f',c'}^\dagger(\vec{p}', s')\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{ff'} \delta_{cc'} \delta_{ss'} = \{d_{f,c}(\vec{p}, s), d_{f',c'}^\dagger(\vec{p}', s')\}$$

und

$$\{b^\dagger, b^\dagger\} = \{d^\dagger, d^\dagger\} = \{b, b\} = \{d, d\} = 0 \quad \text{für alle Kombinationen von Indizes}$$

## Gluonenfelder

$$A_a^\mu(x) = \sum_\lambda \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[ a_a(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^\mu(\lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_a^\dagger(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^{*\mu}(\lambda) e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]$$

Hierbei ist  $a$  der Farbindex ( $a = 1, 2, \dots, 8$ ),  $\lambda$  ist der Polarisationsfreiheitsgrad zu den Polarisationsvektoren  $\varepsilon^\mu$  und  $\varepsilon^{*\mu}$ .  $a_a^\dagger(\vec{k}, \lambda)$  und  $a_a(\vec{k}, \lambda)$  sind die Erzeuger bzw. Vernichter für Gluonen. Die einzelnen Zustände der Gluonen werden erzeugt durch (analog zu Quark- Feldern):

$$|g_a(\vec{k}, \lambda)\rangle = a_a^\dagger(\vec{k}, \lambda)|0\rangle .$$

Die zugehörigen bosonischen Vertauschungsrelationen sind:

$$\left[ a_a(\vec{k}, \lambda), a_b^\dagger(\vec{k}', \lambda') \right] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{ab} \delta_{\lambda\lambda'} .$$

### 6.13.8 Perturbative QCD

Für  $Q > 2\text{GeV}$  oder einem Radius von  $r < 0,1\text{fm}$  ist die Kopplungsstärke  $\alpha_s$ :

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi} < 0,3 .$$

In diesem Bereich ist eine störungstheoretische Entwicklung von Observablen als Potenzreihe in  $\alpha_s$  möglich. Dies nennt man auch perturbative QCD.

## Beispiele

- DGLAP - Evolutionsgleichungen in der tiefinelastischen Lepton-Nukleon-Streuung.
- Gluon-Austausch-Wechselwirkung zwischen schweren Quarks / Antiquarks bei Abständen von  $r < 0,1\text{fm}$ .

Betrachten wir den zweiten Punkt genauer ...

**Gluon-Austausch-Potential :** Für schwere Quarks gilt bei kleinen Abständen  $r$ :

$$V(\vec{r}) = C \left[ \frac{\alpha_s}{r} - \frac{2\pi}{3m_q^2} \alpha_s \delta^3(\vec{r}) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + \dots \right]$$

Mögliche Farb-Konfigurationen sind:

**Quark-Quark**  $[3] \otimes [3] = [\bar{3}] \oplus [6]$

$$C = \begin{cases} -\frac{2}{3} & \dots [\bar{3}] \text{ attraktiv} \\ +\frac{1}{3} & \dots [6] \text{ repulsiv} \end{cases}$$

**Quark-Antiquark**  $[3] \otimes [\bar{3}] = [1] \oplus [8]$

$$C = \begin{cases} -\frac{4}{3} & \dots [1] \text{ attraktiv} \\ +\frac{1}{6} & \dots [8] \text{ repulsiv} \end{cases}$$

### 6.13.9 QCD auf dem Gitter

Um QCD-Simulationen auf Computern berechnen zu können, müssen verschiedene Voraussetzungen erfüllt werden:

- Übergang zu einem euklidischen Raum mit  $t = -i\tau$ . Im diesem Raum wird nun ein Gitter  $G$  aufgespannt:

$$G = \{x_i ; x_i/a \in \mathbb{Z} ; i = 1, \dots, 4 ; x_4 = \tau\}$$

- Die Quarkfelder befinden sich auf den Gitterpunkten und haben periodische Randbedingungen.
- Die Eichfelder (Gluonen) werden zu Link-Variablen.

$$U_{x,x+\Delta x} = 1 + A_i(x)\Delta x \quad A_i(x) = ig \sum_{b=1}^8 A_i^b(x) \frac{\lambda_b}{2}$$

$$U_{x,x} = 1 - G_{ij}(x)\Delta x_i \Delta y_j \quad G_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j]$$

Dabei ist  $G_{ij}$  der gluonische Feldstärketensor.

Man verwendet solche Berechnungen auf dem Gitter speziell bei Problemen mit großen Koppelungsstärken, zumal hier ein störungstheoretischer Ansatz der perturbativen QCD nicht zulässig ist. Weiterhin hat man ebenfalls damit begonnen, Vielteilchensysteme aus Quarks und Gluonen (z.B. Atomkerne) mit dieser Methode zu behandeln, um deren Verhalten auf dem elementaren Niveau der starken Wechselwirkung zu verstehen.

## 6.14 Streuprozesse der starken Wechselwirkung

Wir werden im Folgenden verschiedene Prozesse der Streuung und der Teilchenproduktion betrachten.

### 6.14.1 Streuprozesse

#### 6.14.1.1 Hadronische Streuprozesse

Wir erinnern uns an die Partialwellenzerlegung aus 6.10.2. Dabei haben wir bereits die Anregungsfunktion diskutiert. Wir haben die Streuung von Pionen (Spin 0) an Protonen (Spin =  $\alpha(s = 1/2, m_s = \pm 1/2)$ ) betrachtet. Bei niedrigen Energien ( $E_\pi^{\text{kin}} \approx 100 - 300 \text{ MeV}$ ) tragen nur wenige Partialwellen ( $l \in [0, 1]$ ) zur Streuung bei (Reichweite  $R \approx 1 \text{ fm} \Rightarrow Rp_{\text{CM}} \approx l/\hbar$ ).

- Für  $l = 0$  erfolgt nur  $s$ -Wellenstreuung, also eine isotrope Winkelverteilung.
- Für  $l = 1$  gilt für die Drehimpulswellenfunktion:

$$\pi(s = 0) \rightarrow \pi(s = 0, l = 1) \quad \Phi(l, m) = \Phi(1, 0)$$

Wegen der Drehimpulserhaltung muss  $\vec{L}$  senkrecht auf der Streuebene stehen, somit ist für die Quantenzahl  $m$  nur der Wert  $m = 0$  möglich.

Für den Gesamtzustand ergibt sich:

$$\Psi(j, m) = \Psi\left(\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) \quad \text{und} \quad \Psi(j, m) = \Psi\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$$

Wir wollen uns nun für die  $\Delta$ -Resonanz interessieren, wobei  $I = 3/2$  gilt. Dies ist für die  $\pi^+ p$ -Streuung ( $|I^\pi, I_3^\pi\rangle |I^p, I_3^p\rangle = |1, +1\rangle |1/2, +1/2\rangle$ ) immer gegeben. Für  $J_\Delta$  gibt  $J = 3/2$ .

Bei der Resonanzenergie ( $E_{\text{kin}} \approx 190 \text{ MeV}$ ) wird ein  $\Delta$  erzeugt und zerfällt sofort wieder in ein  $\pi^+ + p$ . Für die elastische Streuung betrachten wir nur den Zerfall in  $\pi p$ .

$$\Psi\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \underbrace{\sqrt{\frac{1}{3}} \Phi'_\pi(1, 1) \alpha'\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}_{\text{Protonspinflip}} + \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}} \Phi'_\pi(1, 0) \alpha\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}_{\text{kein Protonspinflip}}$$

Die auftretenden Vorfaktoren  $\sqrt{1/3}$  und  $\sqrt{2/3}$  sind die Clebsch-Gordon-Koeffizienten. Unsere winkelabhängigen Ortswellenfunktionen  $\Phi'_\pi$  lassen sich über Kugelflächenfunktionen  $Y_m^l$  darstellen:

$$\Phi'_\pi(1, 1) = Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \vartheta \frac{e^{i\phi}}{\Gamma_L} \quad \Phi'_\pi(1, 0) = Y_0^1 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta$$

Betrachten wir nun die Winkelverteilung  $I(\vartheta)$  des gestreuten Pions:

$$I(\vartheta) = \Psi\Psi^* = \frac{1}{3} (Y_1^1)^2 + \frac{2}{3} (Y_0^1)^2$$

- Terme mit  $Y_0^1 Y_1^1$  oder  $\alpha(1/2, 1/2)\alpha(1/2, -1/2)$  verschwinden auf Grund der Orthogonalität der Wellenfunktionen.
- Die Integration über den Winkel  $\phi$  ergibt einen Faktor  $2\pi$

Somit folgt:

$$I(\vartheta) \propto \sin^2 \vartheta + 4 \cos^2 \vartheta = 1 + 3 \cos^2 \vartheta \quad (6.44)$$

Außerhalb der Resonanz erfolgt eine starke Vermischung mit der  $s$ -Wellenstreuung. Man erhält nun auch Terme  $\propto \cos \vartheta$  (Abb. 6.62).

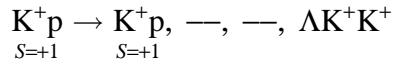
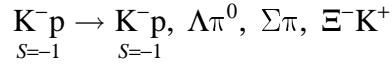
## 6.14.2 Teilchenerzeugung bei hohen Energien

### 6.14.2.1 Bei niedrigen Energien

Hier ist der Phasenraum nur klein, es gilt:

- Energieerhaltung
- Isospinerhaltung
- Strangenesserhaltung

#### Beispiele:



Daher hat die Reaktion  $K^- p$  bei niedrigen Energien einen höheren totalen Wirkungsquerschnitt als die Reaktion  $K^+ p$ .

### 6.14.2.2 Bei hohen Energien

$$\sum_{n=1}^{n_{\text{Teilchen}}} m_n \ll \sqrt{s}$$

Somit ergibt sich ein großer Phasenraum.

- Bei hohen Energien dominiert der inelastische Prozess im totalen Wirkungsquerschnitt.
- Es werden Sekundärteilchen erzeugt:
  - Meist Pionen ( $\approx 90\%$ ) und Kaonen ( $\approx 10\%$ ).
  - Aber auch Baryonen-Antibaryonen Paare (beachte Baryonenzahlerhaltung).

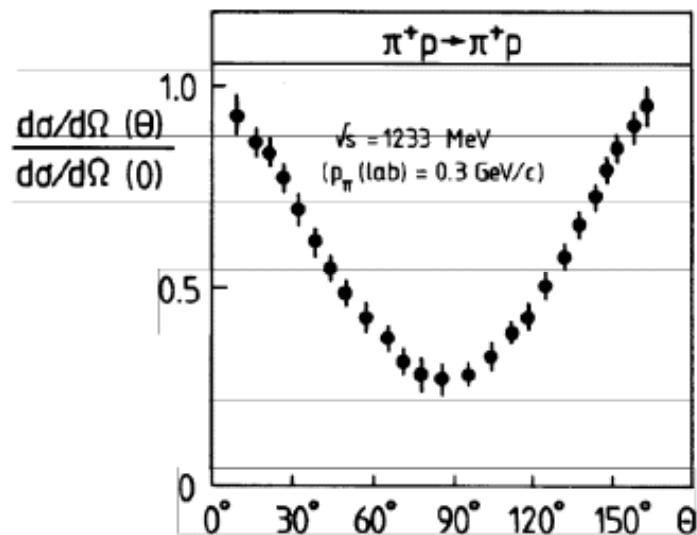
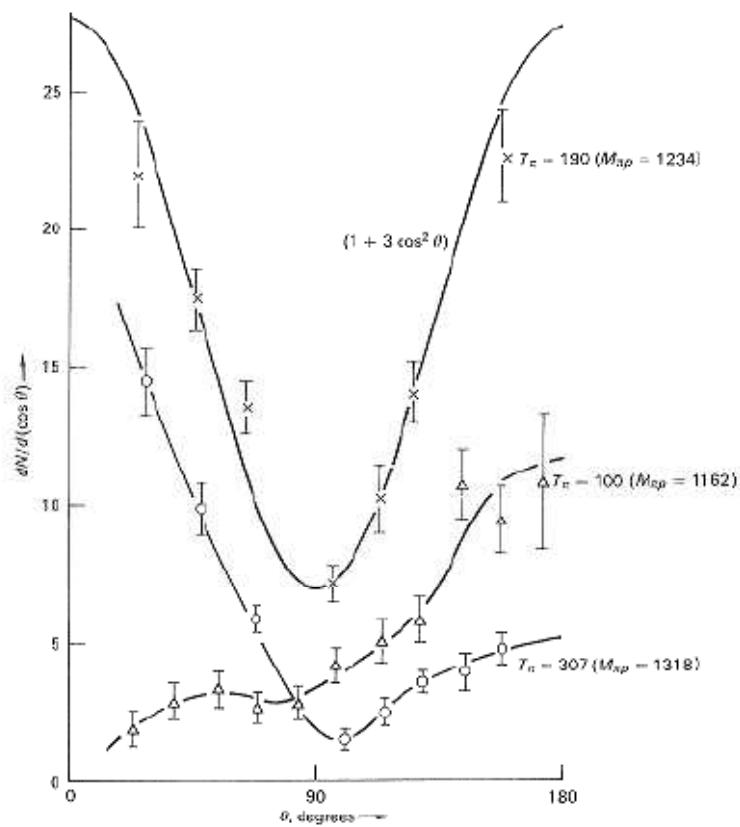
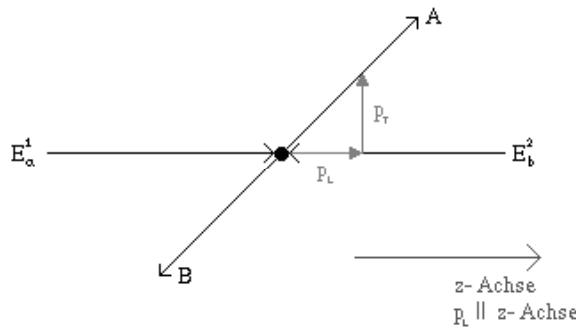


Abb. 6.62: Bestätigung der Formel 6.44

**Abb. 6.63:** Energien und Impulse CMS

- Beobachtet wurden auch schon Antideuteronen  $\bar{D}$ , Antitritium  $\bar{T}^3 = {}^3\bar{H}$  und Antihelium(3)  ${}^3\bar{\text{He}}$ .
- Experimentell hat man folgendes beobachtet:  
Sei  $n$  die Anzahl (Multiplizität) der Teilchen:

$$n = A + B \cdot \ln s \quad \text{mit der Schwerpunktsenergie } \sqrt{s}$$

### 6.14.3 Kinematik

Bei hohen Energien definiert man sich drei neue kinematische Variablen. Wichtig ist hier als erstes die Trennung von transversalen und longitudinalen Bewegungen. Zunächst führen wir die nicht Lorentz- invariante Größe des sog. Feynman- $x$  ein:

$$x_{\text{Feynman}} = x_F = \frac{p_l}{p_l(\max)}$$

Im Laborsystem ist diese Größe:

$$x_F \approx \frac{p_{\text{Teilchen}}}{p_{\text{Strahl}}} \quad x_F \in [0, 1]$$

Im Schwerpunktssystem (CMS) hingegen ist  $X_F$

$$x_F \approx \frac{2p_{\text{Teilchen}}}{\sqrt{s}}$$

Bei hohen Energien ist die Ruheenergie der Teilchen vernachlässigbar und es gilt:  $E \approx |\vec{p}|$ .

Betrachtet man die Abb. 6.63, welche den Streuprozess im Schwerpunktssystem zeigt, erkennt man:

- Die Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$  teilt sich auf mindestens zwei Teilchen auf.

- Wenn man alle Massen vernachlässigt ( $\equiv$  hohe Energien), so gilt:

$$E_{\max}^A = \frac{\sqrt{s}}{2} = |\vec{p}_{\max}| = |\vec{p}_l^{\max}| \quad x_F = \frac{\vec{p}_l}{|\vec{p}_l^{\max}|} = p_l \frac{2}{\sqrt{s}} \quad x_f \in [-1, 1]$$

### Interpretation von $x_F$ für ein Teilchen:

$x_F > 0$  Das Teilchen stammt von der Fragmentation von  $E_b^{(1)}$ , also aus dem “Projektil“.

$x_F < 0$  Das Teilchen stammt aus dem Target ( $E_b^{(2)}$ ); hierbei spricht man auch von “Targetfragmentation“.

### Transversalimpuls:

$$|\vec{p}|^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

Wir wählen die  $z$ -Achse entlang der Strahlachse, womit dann gilt:

$$|\vec{p}|^2 = \underbrace{p_x^2 + p_y^2}_{p_\perp^2} + p_z^2$$

Analog folgt:

$$|p_\perp| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \hat{=} p_\perp \hat{=} p_T \quad \vec{p}_\perp = \vec{e}_x \cdot p_x + \vec{e}_y \cdot p_y$$

Bei hohen Energien ( $E > 10 \text{ GeV}$  in pp-Stößen) kann das longitudinale und transversale Verhalten des Wirkungsquerschnittes getrennt voneinander behandelt werden.

### Lorentz-invarianter Wirkungsquerschnitt:

Man schreibt für den Lorentz-invarianten Wirkungsquerschnitt:

$$E \cdot \frac{d^3\sigma}{d^3\vec{p}}$$

**Ableitung:** Es sei  $(E, \vec{p})$  der Vierervektor eines produzierten Teilchens im Laborsystem. Dann ist der Phasenraumfaktor:

$$d^3\vec{p} = dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z$$

Betrachten wir nun eine Lorentztransformation in ein Inertialsystem mit der Geschwindigkeit  $+\beta$  in  $x$ -Richtung:

$$p'_x = \gamma(p_x - \beta E), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E' = \gamma(E - \beta p_x)$$

Für das totale Differential des Impulses in  $x$ -Richtung gilt nun:

$$dp'_x = \frac{\partial p'_x}{\partial p_x} dp_x + \frac{\partial p'_x}{\partial E} dE = \gamma dp_x - \gamma \beta dE = \gamma \left(1 - \beta \frac{p_x}{E}\right) dp_x$$

mit  $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - E^2 = -m^2$  und  $p_x dx = EdE$ . Es folgt:

$$\frac{dp'_x}{E'} = \frac{\gamma \left(1 - \beta \frac{p_x}{E}\right) dp_x}{\gamma E \left(1 - \beta \frac{p_x}{E}\right)} = \frac{dp_x}{E}$$

Auf Grund der freien Wahl der  $x$ -Achse (Drehung in Boostrichtung immer möglich) ergibt sich der invariante Ausdruck:

$$\frac{d^3\sigma}{\left(\frac{d^3\vec{p}}{E}\right)} = \frac{Ed^3\sigma}{d^3\vec{p}}$$

Kehren wir nach dieser Herleitung nun zu der oben angegebenen Form des Wirkungsquerschnittes (siehe 6.14.3) zurück und führen eine Variablentransformation von den ursprünglichen kartesischen auf die von uns gewählten kinematischen Variablen durch, so erhalten wir:

$$\frac{Ed^3\sigma}{d^3\vec{p}} = \frac{Ed^3\sigma}{p_\perp \cdot dp_\perp \cdot dp_L \cdot dp_\phi}$$

Hierbei wurde eine Variablentransformation von  $dp_x dp_y$  nach  $dp_\perp dp_\phi$ . Wir integrieren über  $\phi$ , zumal das Problem rotationssymmetrisch um die Strahlachse ist, und erhalten:

$$\int_0^{2\pi} \frac{Ed^3\sigma}{p_\perp \cdot dp_\perp \cdot dp_L \cdot dp_\phi} = \frac{d^3\sigma}{\pi \cdot dp_\perp^2 \cdot d\left(\frac{p_L}{E}\right)} \hat{=} F(x_F, p_\perp, s) \quad \text{mit } dp_\perp^2 = 2p_\perp \cdot dp_\perp$$

Aus der Beobachtung erhält man:

$$F(x_F, p_\perp, s) = F'(x_F) \cdot F''(p_\perp)$$

Hierbei ist  $F''$  unabhängig von  $s$  und  $p_L$ , aber proportional zu  $e^{-bp_\perp}$ .

**Rapidität:** Die longitudinale Impulsverteilung der erzeugten Teilchen wird oft in Einheiten der *Rapidität* diskutiert. Wir definieren diese neue Größe als:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E + p_L}{E - p_L} \right) = \ln \left( \frac{E + p_L}{\sqrt{p_\perp^2 + m^2}} \right)$$

(6.45)

- $E = \sqrt{p_\perp^2 + m^2} \cdot \cosh(y) \equiv m_\perp \cdot \cosh(y)$
- $p_L = m_\perp \sinh(y)$

- $\beta_L = \frac{p_L}{E} = \operatorname{arctanh}(y)$

Eigenschaften der Rapidity:

1. Im CMS gilt für  $p_L = 0$  automatisch  $y = 0$
2.  $y$  ist *nicht* Lorentz-invariant, hat aber *einfache* Transformationseigenschaften beim Übergang vom System  $S$  ( $y$ ) in ein anderes Inertialsystem  $S'$  ( $y'$ ) mit Relativgeschwindigkeit  $\beta$ :

$$\boxed{y' = y - y_{S'}} \quad \text{mit } y_{S'} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$$

Dabei ist  $y_{S'}$  die Rapidity des Systems  $S'$  gemessen im System  $S$ . Somit ist die Rapidity additiv und die Form der Rapiditysspektren ändert sich bei Transformationen nicht.

3. Der Maximalwert der Rapidity  $y_{\max}$  im CMS ist:

$$y_{\max} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{s}{p_{\perp}^2 + m^2} \right) \quad y_{\min} = -y_{\max}$$

4. Totales Differential der Rapidity

$$dy = \frac{dp_L}{dE}$$

Aus Beobachtungen wissen wir, dass  $F'(x_F) = \text{konstant} = B$ , wodurch für das Differential des Wirkungsquerschnittes nach der Rapidity gilt:

$$\frac{d\sigma}{dy} = \text{Konstant}$$

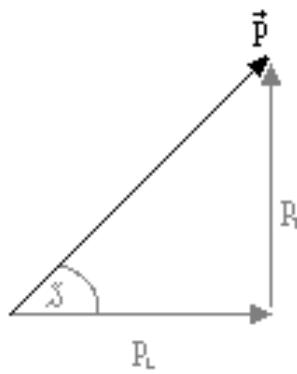
Oft wird noch eine weitere Variable eingeführt: die Pseudorapidity  $\eta$ . Für  $p_{\perp} \gg m$  gilt:

$$y = \ln \frac{E + p_L}{\sqrt{p_{\perp}^2 + m^2}} \approx \frac{\sqrt{p_L^2 + p_{\perp}^2} + p_L}{p_{\perp}} \stackrel{p_L = \cot \vartheta}{=} \ln \left[ \frac{\sqrt{1 + \cot^2 \vartheta} + \cot \vartheta}{\cot(\frac{\vartheta}{2})} \right] = \ln \left[ \cot \left( \frac{\vartheta}{2} \right) \right] = \eta$$

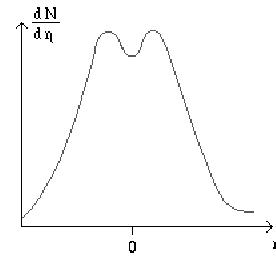
$$\boxed{\eta = -\ln \left( \tan \frac{\vartheta}{2} \right)} \quad (6.46)$$

Der maximale Impuls eines Teilchens entspricht dem Strahlimpuls ( $x_F = 1$ ). Somit ist die maximale Rapidity die Strahlrapidity.

$$y_{\text{Strahl}} = \ln \frac{E + p}{m} = y_{\max}$$



**Abb. 6.64:** Zur Erklärung des Winkels Theta in der Pseudorapidität



**Abb. 6.65:** Pseudorapiditätverteilung

Hierbei geht ein, dass für den Strahl der Transversalimpuls Null ist. Für den invarianten Wirkungsquerschnitt gilt:

$$\frac{E \cdot d^3\sigma}{d^3\vec{p}} \stackrel{E = \frac{dp_L}{dy}}{=} \frac{1}{p_\perp} \frac{d^3\sigma}{dp_\perp dy} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{p_\perp} \frac{d^3\sigma}{dp_\perp dy}$$

## 6.15 Hochenergiereaktionen und Konstituenten der Hadronen

### 6.15.1 Leptonpaar Produktion in hadronischen Kollisionen

Im Zuge der Hadronisierung von Quarks haben wir die Reaktion  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow$  Hadronen betrachtet und mit der Reaktion  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  verglichen. Für den Wirkungsquerschnitt der zweiten Reaktionen haben wir gefunden:

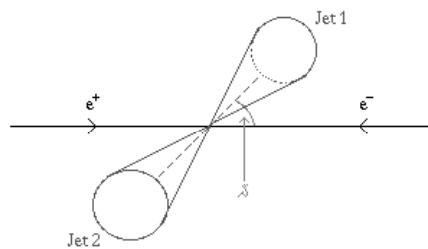
$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

Betrachten wir nun die Reaktion  $e^+e^- \rightarrow$  Jet+Jet nach Abb 6.66. Hierbei gilt:

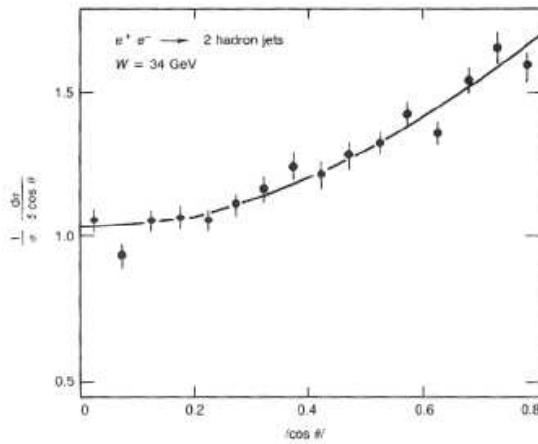
$$s = (E_{e^+} + E_{e^-})^2 = (2E_{\text{Strahl}})^2$$

Da nur die elektrische Ladung involviert ist, gilt:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow \text{Jet} + \text{Jet}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N_f} e_i^2}_*$$



**Abb. 6.66:** Erzeugung von zwei Jets bei  $e^-e^+$ -Kollision



**Abb. 6.67:** Winkelverteilung von zwei Jets bei  $e^-e^+$ -Kollision

Der Faktor \* ergibt für eine Strahlenergie von  $\sqrt{s} > 10 \text{ GeV}$  (reicht für die Produktion von u, d, s, c und b)  $11/9$ .

Nun betrachten wir zusätzlich die Winkelverteilung der Jets (siehe Abb. 6.67). Hierbei ist die Strahlachse die Quantisierungsachse.

$$J^P(\gamma^*) = 1^-$$

Mit dem Spin der Quarks von  $1/2$  ergibt sich:

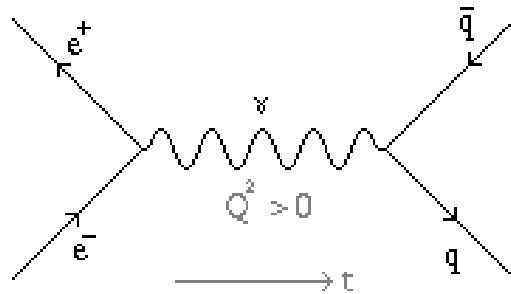
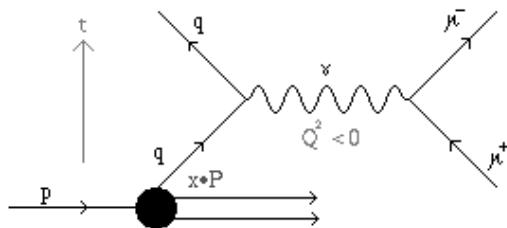
$$\frac{dN}{d\Omega} \propto (1 + \cos^2 \vartheta)$$

Der Faktor  $\cos^2 \vartheta$  kommt aus der Ununterscheidbarkeit der Jets unter  $90^\circ$ -Symmetrie. Weiterhin gilt wie bei der Mott-Streuung:

- Wegen  $m_e, m_\mu \ll \sqrt{s}$  ist die Helizität

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{\sigma}| |\vec{p}|} = \pm 1$$

erhalten.

Abb. 6.68:  $e^- e^+$ -PaarvernichtungAbb. 6.69: Tiefinelastische Myonen-Streuung an eine Parton mit dem Impulsbruchteil  $x$ 

- Wegen der Parität und der reinen  $s$ -Wellenstreuung ist die  $90^\circ$ -Streuung unterdrückt.

**Was ist mit dem Umkehrprozess?** Betrachten wir die Abbildungen 6.68 und 6.69. Aus der Kombination erhalten wir einen neuen Graphen, Abb. 6.70, die Leptonen-Produktion aus zwei Quarks.

Hier gilt nun nach “Drell-Yan“:

$$pp \rightarrow \mu^+ \mu^- + X$$

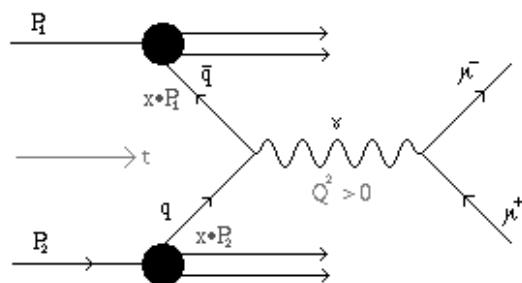


Abb. 6.70: Leptonen-Produktion aus zwei Quarks

$$\sigma(q\bar{q} \rightarrow \mu^-\mu^+) = \frac{4}{3} \frac{\pi \alpha^2}{s} e_i^2 = \frac{4}{3} \frac{\pi \alpha^2}{Q^2} e_i^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{dQ^2}(q\bar{q} \rightarrow \mu^-\mu^+) = \frac{4}{3} \frac{\pi \alpha^2}{Q^4} e_i^2$$

mit der Ladung der annihilierenden Quarks  $e_i$  und der Masse des virtuellen Gammas  $M_{\gamma^*}^2 = M_{\mu\mu}^2 \hat{=} Q^2$ .

$Q^2 = \hat{s}$  hängt wiederum nur von den Impulsbruchteilen  $x$  und  $\bar{x}$  ab!

$$M_{\gamma^*}^2 = \hat{s}^2 = (x_i P_1 + \bar{x}_i P_2)^2 = 2P_1 P_2 x_i \bar{x}_i + x_i^2 P_1^2 + \bar{x}_i^2 P_2^2 = M_{\mu^+\mu^-}^2$$

$M_{\mu^+\mu^-}^2$  ist eine messbare Größe. Im Proton-Proton System gilt:

$$s = (P_1 + P_2)^2 = 2P_1 P_2 + \underbrace{P_1^2}_{m_p^2} + \underbrace{P_2^2}_{m_p^2}$$

Mit  $s \gg m_p^2$  ergibt sich:

$$M_{\mu\mu} = s \cdot x_i \bar{x}_i$$

Definiere dem dimensionslosen Parameter  $\tau$

$$\tau = \frac{M_{\mu\mu}}{s} = x_i \bar{x}_i$$

Somit ergibt sich für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^4} F(\tau)$$

Die interessante Physik steckt nun in  $F(\tau)$ :

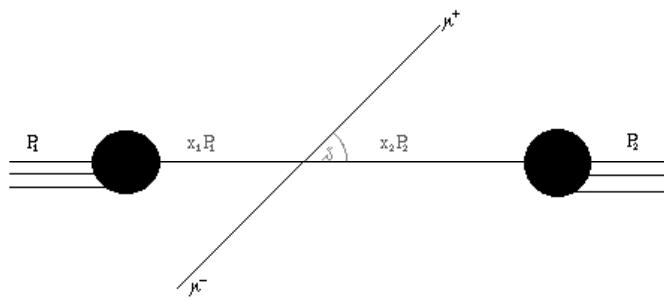
$$F(\tau) = \underbrace{\sum_i e_i^2 \frac{1}{N_c}}_* \underbrace{\int_0^1 x_i dx_i \int_0^1 \bar{x}_i d\bar{x}_i}_{**} f_i^1(x_i) f_i^2(\bar{x}_i) \cdot \delta(x_i \bar{x}_i - \tau)$$

Der Faktor \* stellt sicher, dass nur zwei gleich Quarksorten mit Farbe und passender Antifarbe miteinander annihilieren. Der Faktor \*\* ist eine Summation über alle Impulsbruchteile  $x_i$  und  $\bar{x}_i$  der Quarksorten  $i$  über die Quarkdichteveerteilungen  $f_i^1(x_i)$  und  $f_i^2(\bar{x}_i)$ . Der Faktor  $N_c$  beschreibt die Anzahl der Farben und ist somit  $N_c = 3$ .

- Für die beobachteten Winkelverteilungen gilt dasselbe wie zuvor:

$$\frac{dN}{d\Omega} \propto (1 + \cos^2 \vartheta)$$

Somit steht fest, das Quarks im Proton Spin1/2-Teilchen sind.



**Abb. 6.71:** Winkelverteilung bei Leptonen-Produktion aus zwei Protonen

- Aus der bekannten Verteilung  $f_i^1(x_i)$  und

$$\frac{d\sigma}{dM_{\mu^-\mu^+}^2} \propto F(\tau) \propto f_i^1(x_i) \cdot f_i^2(\bar{x}_i)$$

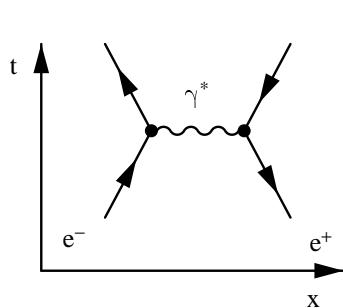
lässt sich nun die Impulsverteilung der Antiquarks im Nukleon ermitteln.

## 6.16 Elastische Quarkstreuung bei hohen Energien

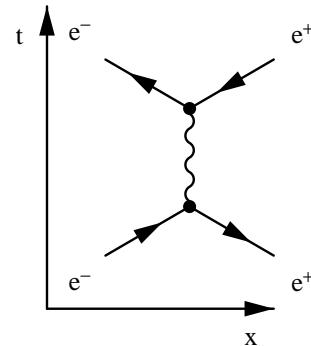
Aus den Anregungsspektren der  $c\bar{c}$ - und  $b\bar{b}$ -Zustände haben wir gefolgert, dass das Potential der starken Wechselwirkung sich für kleine Abstände wie  $V(r) \propto 1/r$  und für große Abstände wie  $V(r) \propto r$  verhält. Diese Information gilt aber bisher nur bis hin zu  $r \approx 0.2$  fm. Um die Wechselwirkung bei noch kleineren Distanzen zu testen benötigt man höhere Energien.

### 6.16.1 Analogie zur $e^+e^-$ -Streuung

Zur Erinnerung betrachten wir die Analogie zur  $e^+e^-$ -Streuung, deren Potential bis zu  $r \approx 10^{-19}$  m getestet ist. Es gibt zwei konkurrierende Streuprozesse:



**Abb. 6.72:**  $\gamma$ -Austausch



**Abb. 6.73:** virtueller  $\gamma$ -Zwischenzustand

t-Kanal	s-Kanal
$t = (P'_{e^-} - P_{e^-})^2 = q^2 =$ $= -Q^2 = -4 \vec{p}^* ^2 \sin^2 \frac{\theta^*}{2}$ $ \mathcal{M} ^2 \propto \alpha^2 \frac{s^2 + u^2}{t^2}$	$s = (P_{e^-} + P_{e^+})^2 = 4(E^*)^2$ $ \mathcal{M} ^2 \propto \alpha^2 \frac{t^2 + u^2}{s^2}$

wobei  $s$ ,  $t$  und  $u = (P'_{e^+} - P_{e^-})^2$  die drei (lorentzinvarianten) *Mandelstam-Variablen* sind<sup>12</sup>.

Für kleine Winkel ist  $s \gg t$  bzw.  $1/t^2 \gg 1/s^2$ . In diesem Fall dominiert also der  $\gamma$ -Austausch.

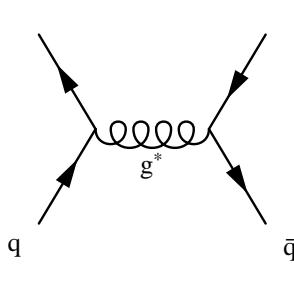
$$\frac{d\sigma}{d\theta} \propto \frac{\alpha^2}{q^4} \propto \frac{\alpha^2}{\sin^4 \frac{\theta^*}{2}}$$
 (Rutherford-Querschnitt)

(6.47)

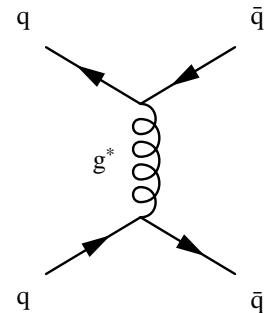
Diese Form des Wirkungsquerschnitts ist eine direkte Folge des 1-Photon-Austausches mit  $m_\gamma = 0$  und  $\text{Spin}(\gamma) = 1$  sowie  $J^P = 1^-$

### 6.16.2 Quarkstreuung ( $q\bar{q}$ )

Wir gehen von der Annahme aus, daß  $m_g = 0$  und  $\text{Spin}(g) = 1$ . Dann gibt es ebenfalls zwei konkurrierende Prozesse:



**Abb. 6.74:** „t-Kanal“



**Abb. 6.75:** „s-Kanal“

„t-Kanal“ (s. Abb. 6.74):

$$|\mathcal{M}| \propto \alpha_s^2 \frac{s^2 + u^2}{t^2}$$

„s-Kanal“ (s. Abb. 6.75):

$$|\mathcal{M}| \propto \alpha_s^2 \frac{t^2 + u^2}{s^2}$$

<sup>12</sup>Die beiden Prozesse sind über die Crossing-Symmetrie verknüpft.

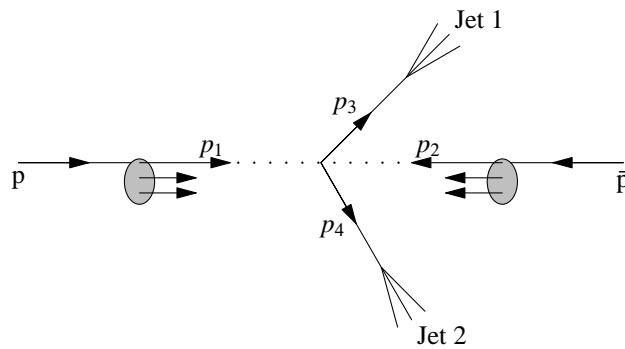
Leider gibt es aber keine freien Quarkstrahlen, mit denen man dieses überprüfen könnte. Deshalb benutzt man hochenergetische p- und  $\bar{p}$ -Strahlen (z.B. am CERN<sup>13</sup> mit 310 GeV + 310 GeV oder am FNAL<sup>14</sup> mit 1 TeV + 1 TeV).

Dabei sucht man (analog zur  $e^+e^-$ -Streuung) nach 2-Jet-Ereignissen. Diese machen nur  $10^{-6}$  aller Ereignisse aus. Um eine Auswahl zu ermöglichen muss genügend Energie in die transversale Bewegung umgesetzt werden (harter Stoß), so dass

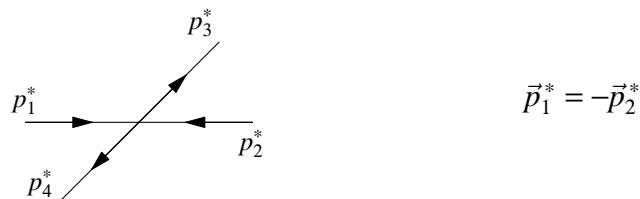
$$E_T = \sum_{i=1}^N E_i \sin \theta_i > 15 \text{ GeV}, \quad N \propto \text{Anzahl aller Teilchen im Jet.}$$

$E_i$  ist die Energie,  $\theta_i$  ist der Polarwinkel des Teilchens  $i$  bezogen auf die Strahlachse.

Die ausgewählten Ereignisse sehen im Laborsystem folgendermaßen aus:



Im Schwerpunktsystem der Partonen hat man folgende Impulse:



Gemessen wird die harte Wechselwirkung von zwei Partonen aus q und  $\bar{q}$ . Die nicht „getroffenen“ Partonen laufen fast ungestört weiter, fragmentieren und verschwinden vorne und hinten aus dem Detektor. Die wechselwirkenden Partonen tragen die Impulsbruchteile  $x_1$  und  $x_2$  der Strahlteilchen ( $x_i$ : Bjorkensche Variablen).

$$p_1 = x_1 p_p^{\text{Strahl}}, \quad p_2 = x_2 p_{\bar{p}}^{\text{Strahl}}$$

Aufgrund der Impulserhaltung müssen sich die Transversalimpulse von  $p_3$  und  $p_4$  aufheben und es gilt ( $p_i^z$  sind die Longitudinalimpulse)

<sup>13</sup><http://www.cern.ch/>

<sup>14</sup><http://www.fnal.gov/>

$$p_1 + p_2 = p_3^z + p_4^z = p_3 + p_4 \quad \text{und} \quad q = p_3 - p_1 = p_2 - p_4$$

Des Weiteren lässt sich ableiten:

$$x_1 - x_2 = \frac{p_3^z + p_4^z}{E_{\text{Strahl}}} = x_F \hat{=} \frac{2p_L}{\sqrt{s}}$$

Die für den Parton-Parton-Stoß relevanten kinematischen Größen sind

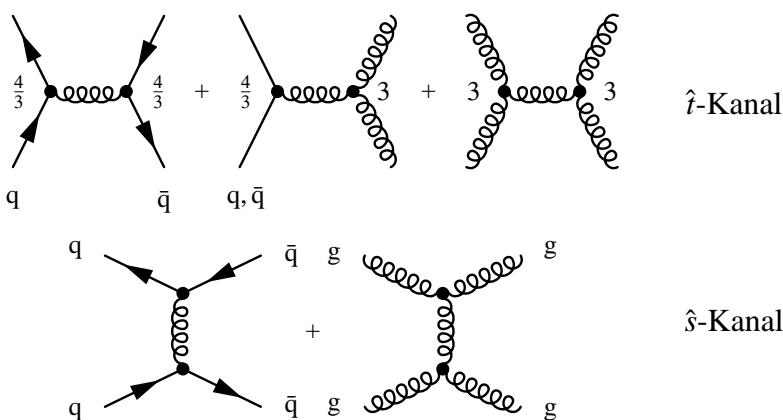
$$\begin{aligned}\hat{s} &= (p_3 + p_4)^2 = 4x_1 x_2 E_{\text{Strahl}}^2 = x_1 x_2 s \\ \text{meßbar} \\ \hat{t} &= (p_3^{\text{Jet}} - x_1 p^{\text{Strahl}})^2 = -2x_1 \frac{\sqrt{s}}{2} E_3^{\text{Jet}} (1 - \cos \theta) = -x_1 \sqrt{s} E_3^{\text{Jet}} (1 - \cos \theta)\end{aligned}$$

mit

$$\cos \theta = \frac{(\vec{p}_3 - \vec{p}_4) \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)}{|\vec{p}_3 - \vec{p}_4| |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|}$$

Dabei ist zu beachten, dass eine Zuordnung von einlaufenden Partonen zu Jets nicht eindeutig möglich ist, der Winkel ist mehrdeutig  $\theta \leftrightarrow \pi - \theta$ . Konventionsgemäß ist  $\theta$  immer der kleinere der beiden Streuwinkel.

Da im Nukleon nicht nur Quarks sondern auch Antiquarks und Gluonen vorkommen, müssen die aus der  $e^+e^-$ -Streuung bekannten Streuprozesse erweitert werden. (Die Zahlen an den Vertices sind die Farbfaktoren, die in den Matrixelementen auftauchen.)

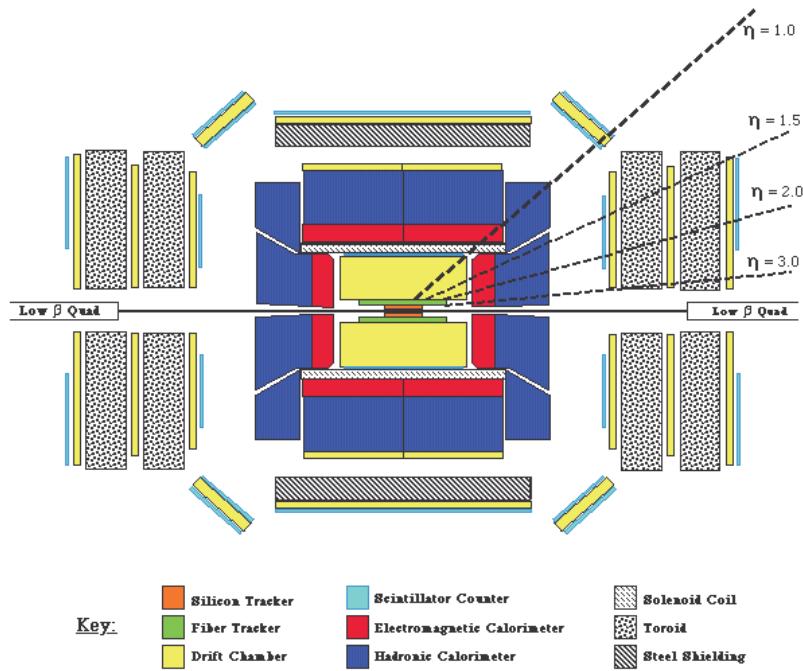


Für kleine Winkel gilt im CMS wiederum  $\hat{t} \ll \hat{s}$ , weshalb die  $\hat{t}$ -Kanal Prozesse dominieren.

$$\frac{d\sigma^{ab}}{d\hat{t}} \propto \alpha_s^2 c_F \frac{1}{\hat{t}}$$

Farbfaktor

## The CDF Upgrade



### CDF: Highest Transverse Energy Event from the 1988-89 Collider Run

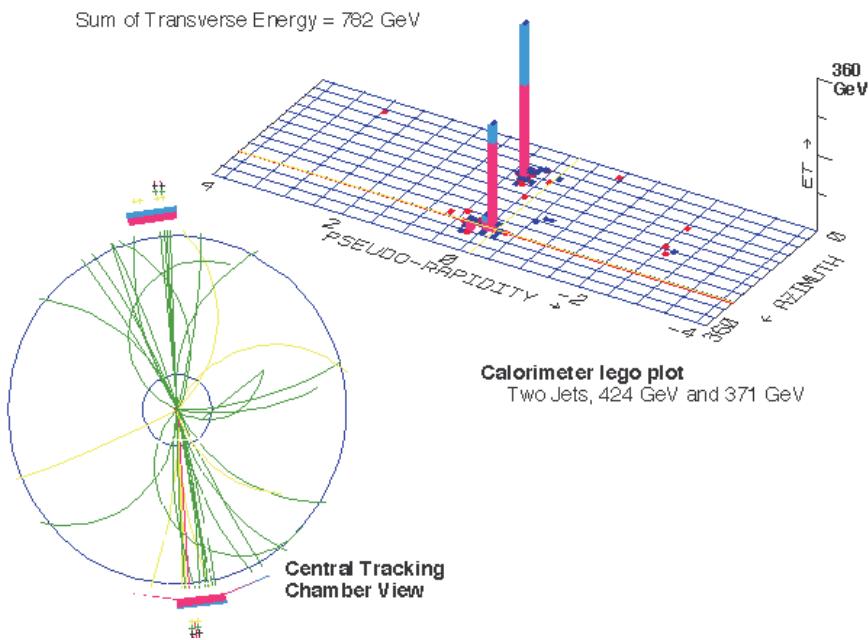


Abb. 6.76: Aufbau des CDF-Detektors sowie ein damit gemessenes Ereignis

Ein Problem bei der Analyse ist, dass die  $x_i$  für ein einzelnes Ereignis nicht vorhersehbar sind. Sie sind aber messbar. Die Verteilungen aller möglichen  $x_i$  werden jedoch durch die Quarkdichtheverteilungen  $q^a(x)$  beschrieben ( $a$ : Partonsorte). Für Quarks gilt:

$$\underbrace{F_2(x)}_{\substack{\text{aus} \\ \text{tiefinelastischer} \\ \text{Neutrinostreuung}}} = x \sum_a \left( q^a(x) + \bar{q}^a(x) \right)$$

Wegen der Hadronisierung kann das Quarkflavour im Endzustand nicht gemessen werden. Man muss daher geeignet summieren:

$$\underbrace{\frac{d^3\sigma(p\bar{p} \rightarrow 2 \text{ Jets})}{dx_1 dx_2 d\cos\theta}}_{\text{Hadronischer WQ}} = \sum_{a,b} \frac{F_p^a(x, Q^2)}{x} \frac{F_{\bar{p}}^b(x, Q^2)}{x} \frac{d\sigma_{\rightarrow 2 \text{ Jets}}^{ab}}{d\cos\theta} = \sum_{a,b} q_p^a(x, Q^2) q_{\bar{p}}^b(x, Q^2) \underbrace{\frac{d\sigma_{\rightarrow 2 \text{ Jets}}^{ab}}{d\cos\theta}}_{\text{Partonischer WQ}}$$

Unter Verwendung gewichteter Strukturfunktionen  $F(x, Q^2)$  und gewichtet gemittelter Wirkungsquerschnitte ergibt sich:

$$\frac{d^3\sigma(p\bar{p} \rightarrow 2 \text{ Jets})}{dx_1 dx_2 d\cos\theta} = F(x_1, Q^2) F(x_2, Q^2) \frac{d\sigma_{\rightarrow 2 \text{ Jets}}^{ab}}{d\cos\theta}$$

Dabei enthält  $F(x_1, Q^2) \cdot F(x_2, Q^2)$  alle drei Austauschgraphen in der richtigen Stärke, da in

$$F(x, Q^2) = g(x, Q^2) + \frac{4}{9} \left( q(x, Q^2) + \bar{q}(x, Q^2) \right)$$

der Faktor 4/9 die relative Stärke von 3-Gluon- und Quark-Gluon-Quark-Kopplung berücksichtigt. Die Größe des Verhältnisses ergibt sich aus der Farbsymmetrie.

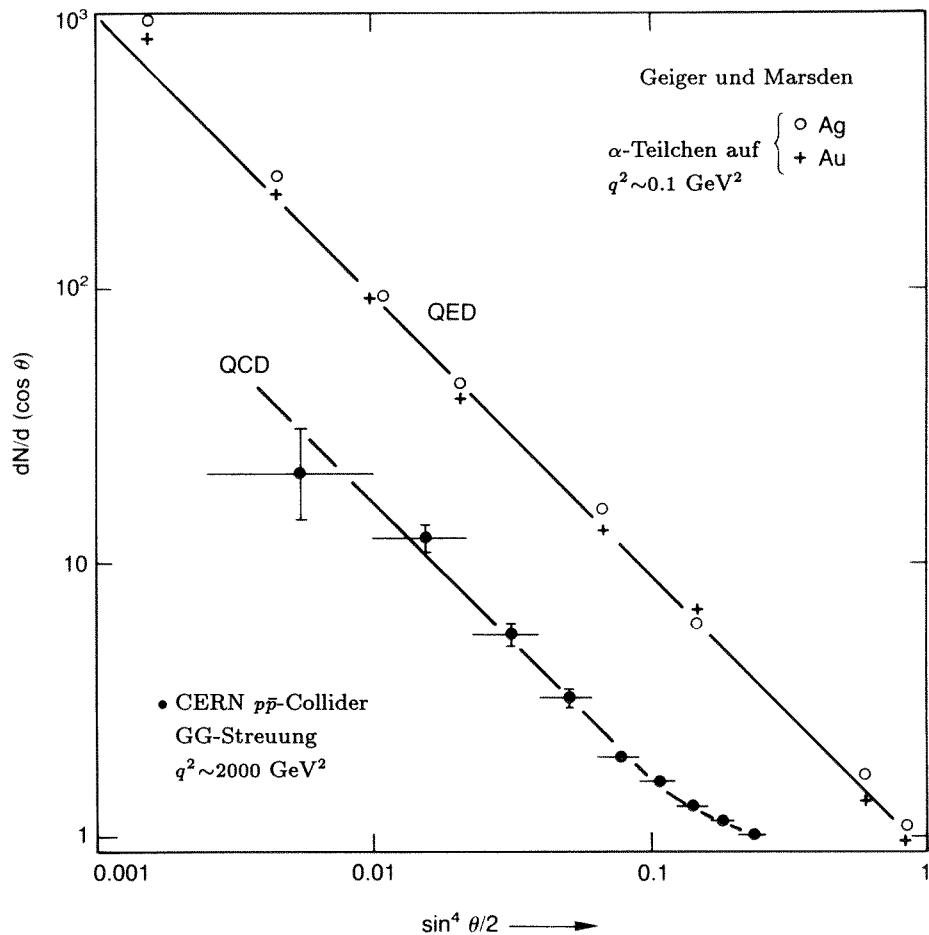
Es gibt zwei Arten, die Daten der 2-Jet-Produktion zu analysieren:

1. *Winkelverteilung der Jets*, d. h. man integriert über alle  $x_1$  und  $x_2$ . Man kann zeigen, dass dann für  $\cos\theta \approx 1$  (also Vorwärtsstreuung) gilt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{9}{8} \cdot \frac{\alpha_s^2}{4E_0^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Man sieht, dass die Winkelverteilung sich analog zum Rutherford-Streuquerschnitt (6.47) verhält. Sie unterscheidet sich nur durch die Ersetzung  $\alpha \rightarrow \alpha_s$  und den Farbfaktor  $\frac{9}{8}$ .  $\theta$  ist hier der Winkel im Schwerpunktsystem der Jets und nicht der Winkel in dem von  $p\bar{p}$ . Diese Analogie zur Rutherford-Streuung bedeutet bis zu  $Q^2 \lesssim 2000 \text{ GeV}$ , also Abständen über  $4 \cdot 10^{-18} \text{ m}$ :

- Potential  $\sim \frac{1}{r}$
- $m_g = 0$
- Spin(g) = 1



**Abb. 6.77:** Differentielle Wirkungsquerschnitte bei der Streuung punktförmiger Teilchen an einem  $1/r$ -Potential (Rutherford-Streuung) (aus [Pe87])

Bei großen Winkeln muss man in der Praxis noch Abweichungen berücksichtigen, die durch Spineffekte, die relativistische Näherung und die Winkelzweideutigkeit zustande kommen.

Als Resultat erhält man:

- Das Potential ist proportional zu  $1/r$ :  $V(r) \propto \frac{1}{r}$
- Gluonen besitzen keine Ruhemasse:  $m_{Gluon} = 0$
- Gluonen tragen ganzzahligen Spin (Bosonen):  $s_{Gluon} = 1$

2. Man benutzt die bekannte Winkelabhängigkeit des Streuquerschnitts

$$\frac{d\sigma_{\rightarrow 2 \text{ Jets}}^{ab}}{dcos \theta}$$

und analysiert die Messdaten um  $F(x, Q^2)$  zu bestimmen. Die unbekannten  $x_1$  und  $x_2$  werden experimentell bestimmt aus

$$(p_z^{\text{Jet } 1} - p_z^{\text{Jet } 2}) = (p_z^3 - p_z^4) = (x_1 - x_2)p^{\text{Strahl}}$$

(d. h. der Longitudinalimpuls des Schwerpunktes bestimmt  $\Delta x$ ) und

$$M_{12}^2 = (p^{\text{Jet } 1} + p^{\text{Jet } 2})^2 = (p_3 + p_4)^2 = \hat{s} = x_1 x_2 \underset{4E^2}{\uparrow}$$

Mit den so bestimmten  $x_1$  und  $x_2$  analysiert man den Wirkungsquerschnitt als Funktion dieser beiden Variablen und erhält so  $F(x, Q^2)$ . Das Ergebnis vergleicht man dan mit  $g(x) + F_2(x)$  aus der Leptonstreuung.

Wie man in Abb. 6.78 sieht ist die Übereinstimmung hervorragend. *Die Leptonen sehen also die gleichen Partonen wie die Partonen selbst.* In dieser Hinsicht ist also unsere Beschreibung der starken Wechselwirkung konsistent.

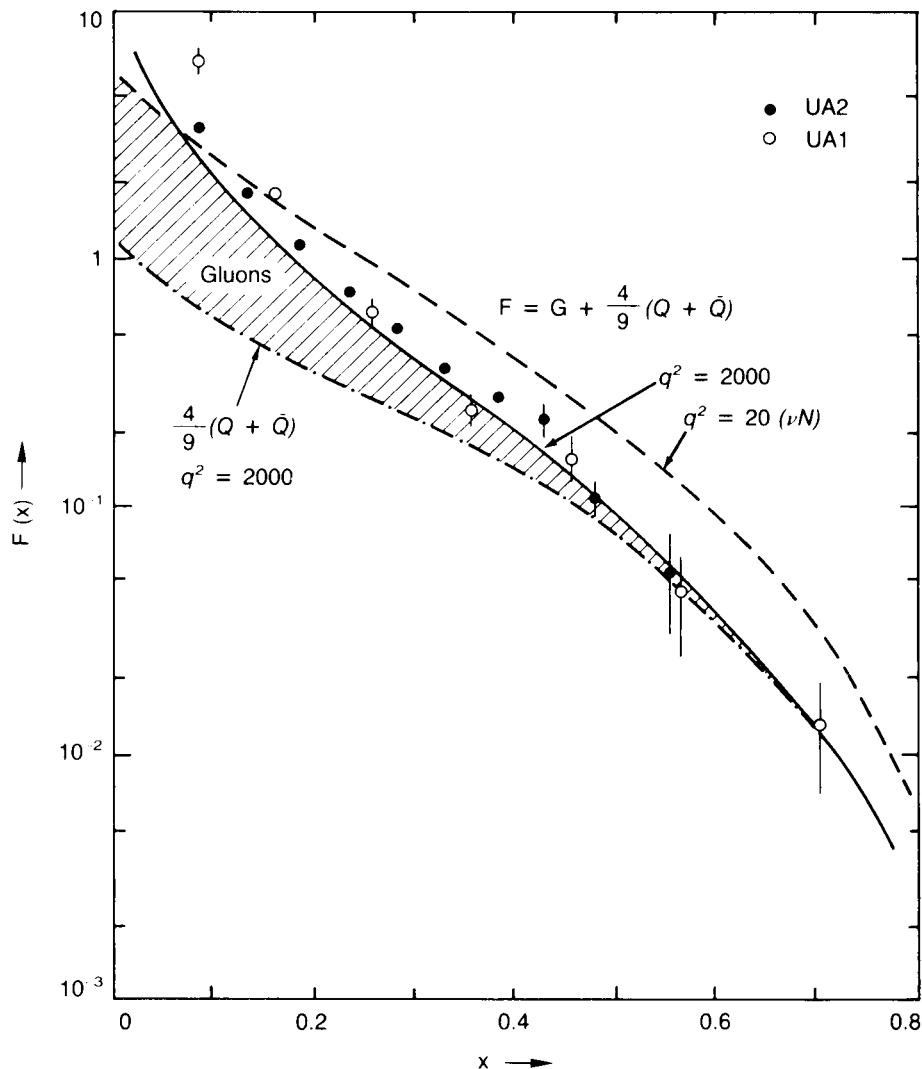
## 6.17 Bestimmung magnetischer Momente

Als Beispiel verwenden wir hier das  $\Lambda$ -Hyperon. Die allgemeine Methode ist die Bestimmung der Spinpräzession im Magnetfeld, wie in der Atomphysik bei der Hyperfeinstruktur. Nur werden hier externe magnetische Felder verwendet. Notwendige Voraussetzungen sind:

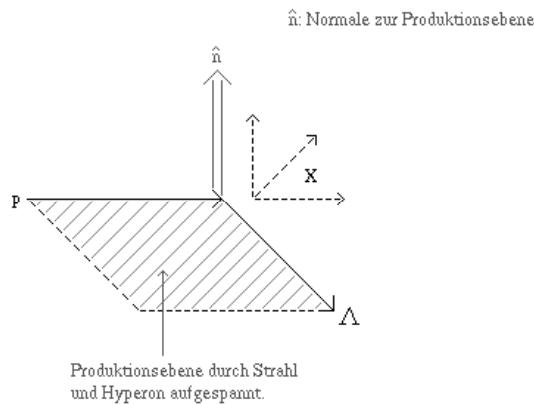
- Polarisation der Teilchen (nach Spinausrichtung)
- Analyse der Spinstellung

**Polarisation:** Bei Hyperonen findet man in Experimenten, daß sich bei  $P_\perp \geq 0.7 \text{ GeV}$  spontan eine Polarisation bis zu 30% senkrecht zur Produktionsebene (Abb. 6.79) einstellt. Die Ursache hierfür ist noch unklar.

Die Produktionsebene wird durch den Strahl (Protonen) und den Impuls des Hyperons ( $\Lambda$ ) aufgespannt. Die Normale  $\hat{n}$  hierzu berechnet sich aus:



**Abb. 6.78:** Die Punkte zeigen die Kombination der Strukturfunktionen  $g(x) + 4/9(q(x) + \bar{q}(x))$  bei  $Q^2 \approx 2000$  GeV $^2$ . Die durchgezogene Linie erhält man aus der Messungen bei  $Q^2 \approx 20$  GeV $^2$  (gestrichelte Linie) durch QCD-Entwicklung zu  $Q^2 \approx 2000$  GeV $^2$ . Ohne den Gluonbeitrag ergibt sich dabei die gestrichelpunktete Linie (aus [Pe87]).



$$\hat{n} \propto \vec{p}_{\text{Strahl}} \times \vec{p}_{\text{Hyperon}} = \vec{p}_p \times \vec{p}_\Lambda$$

Die Polarisation  $\vec{\varphi}$  steht dann parallel zu  $\hat{n}$ . Dabei bedeutet  $\uparrow$  eine Polarisation in Richtung  $\hat{n}$ .

$$\vec{\varphi} \propto \frac{N_\Lambda^\uparrow - N_\Lambda^\downarrow}{N_\Lambda^\uparrow + N_\Lambda^\downarrow}$$

**Spinanalyse:** Aus der schwachen Wechselwirkung (siehe Kap. 7) wissen wir, dass beim Zerfall des  $\Lambda$  die Emission des Pions nicht isotrop in alle Raumrichtungen erfolgt (Abb. 6.80). Es gilt:

$$I(\cos \vartheta) = 1 + \alpha \cdot \varphi \cdot \cos \vartheta$$

Hierbei ist  $\alpha$  die Analysierstärke und  $\varphi$  der Polarisationsgrad.

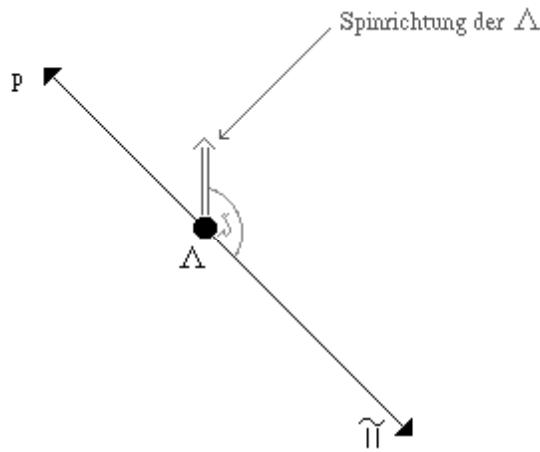
Man verwendet nun eine statistische Analyse und betrachtete die Anzahl der emittierten Pionen als Funktion von  $\cos \vartheta$ .

- $\vartheta$  ist der Winkel zwischen  $\hat{n}$  (der Produktionsnormalen) und dem Tochterteilchen  $\pi$ .
- Man beachte, daß  $\vec{\varphi} \parallel \hat{n}$ .

Aus der Winkelverteilung bei bekanntem  $\alpha$  ( $\alpha \approx 0,6$  für  $\Lambda$ ) ergibt sich der Polarisationsgrad  $\varphi$ .

**Wie erhält man nun das magnetische Moment  $\mu_\Lambda$ ?** Hierzu lässt man polarisierte  $\Lambda$ -Hyperonen durch ein Magnetfeld laufen. Die zeitliche Änderung des Spinvektors  $\vec{s}$  im Magnetfeld ist

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \mu \frac{e}{\gamma \cdot m_N} \left[ (\vec{s} \times \vec{b}) + m \right]$$



**Abb. 6.80:** Abstrahlung von Pionen bei Zerfall von Hyperonen

wobei die zusätzlichen Terme durch geeignete Symmetrien verschwinden. Der Drehwinkel  $\varepsilon$  des magnetischen Momentes  $\mu_\Lambda$  (in Einheiten des magnetischen Momentes eines Nukleons  $\mu_N$ ) ergibt sich zu

$$\varepsilon = \mu_\Lambda \frac{e}{m_N} \frac{m_\Lambda}{p \cdot c} l \cdot B .$$

Typische Werte sind:

- $p \cdot c \approx 100 \text{ GeV}$
- $B \cdot l \approx 8 \text{ Tm}$

Man bestimmt nun das magnetische  $\vec{\mu}_\Lambda$  Moment aus dem Drehwinkel (über den Impuls  $\vec{p}_\Lambda$ ) bei verschiedenen  $B \cdot l$ . Als Ergebnis ergibt sich:

Teilchen	$\mu [\mu_N]$
$\Lambda$	$-0,613 \pm 0,004$
$\Sigma^+$	$2,419 \pm 0,022$
$\Sigma^-$	$-1,156 \pm 0,014$
$\Xi^0$	$-1,253 \pm 0,014$
$\Xi^-$	$-0,651 \pm 0,017$
$\Omega^-$	$-2 \pm 0,2$

Die Bestimmung von  $\mu_{\Omega^-}$  des  $\Omega^-$  Baryons ist schwierig, da hier die Analysierstärke  $\alpha$  nur sehr klein ist.

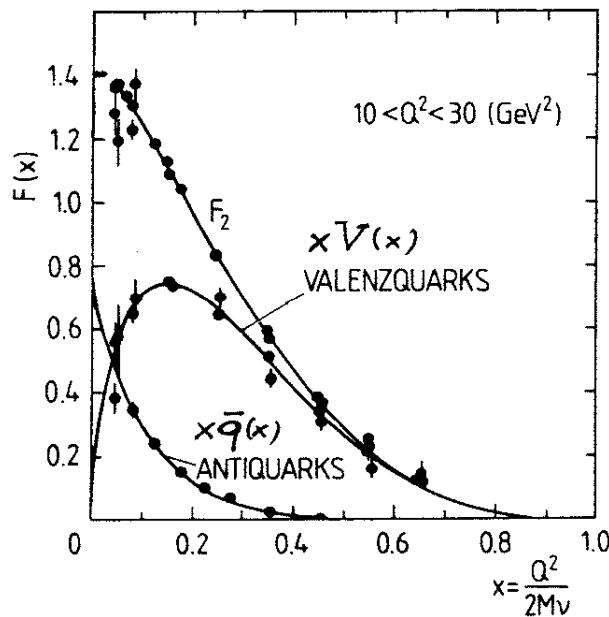


Abb. 6.81: Strukturfunktion des Nukleons

## Übungen zu Kapitel 6

**Übung 6.1: Quarkverteilungen im Nukleon.** Abb. 6.81 zeigt die Zerlegung der Strukturfunktion  $F_2(x) = x(q(x) + \bar{q}(x))$  des Nukleons in einen Valenzquark- und einen Antiquarkanteil.

- a) Für den Valenzquarkanteil gilt  $V(x) = q(x) - \bar{q}(x)$ . Die Valenzquarkverteilung in der Abbildung wird parametrisiert durch

$$xV(x) = 3.6x^{0.55}(1-x)^3.$$

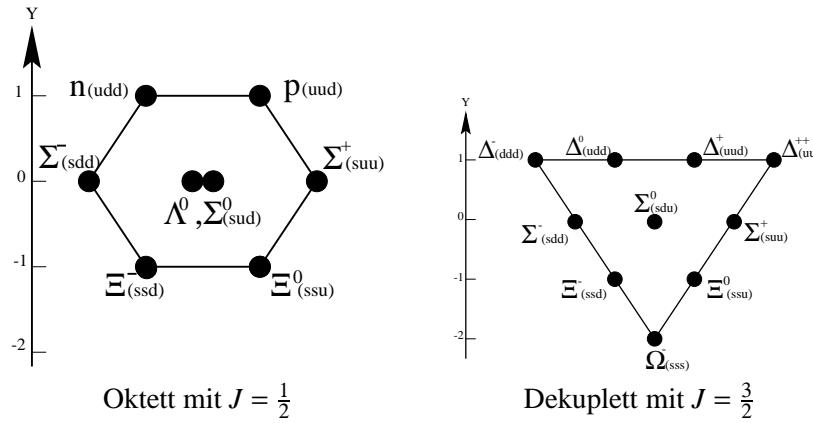
Man schätzt  $\int_0^1 dx V(x)$  ab und bestätige, daß es drei Valenzquarks gibt.

- b) Warum ist  $F_2(x)$  für kleine Werte von  $x$  ca. das Doppelte der Antiquarkverteilungsfunktion?

**Übung 6.2: Zerfälle von Hadronen.** Begründen Sie, welche der folgenden Prozesse nicht durch die starke Wechselwirkung ablaufen können:

- |  |  |
|--|--|
| a) $K^- \rightarrow \pi^- + \pi^0$         | e) $K^- + n \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$ |
| b) $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0$ | f) $\Sigma^+ + n \rightarrow \Sigma^- + p$ |
| c) $K^- + p \rightarrow K^0 + n$           | g) $\Lambda^0 \rightarrow \Sigma^+ + n$    |
| d) $K^+ + n \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$ | h) $\pi^- + p \rightarrow K^- + \Sigma^+$  |

**Übung 6.3: Baryonen-Multiplets.** Im SU(3)-Schema werden Teilchen mit vorgegebenem Spin gemäß der Hyperladung  $Y = B+S$  und der dritten Komponente ihres Isospins  $I_3$  klassifiziert.  $B$  ist hierbei die Baryonenzahl und  $S$  die Strangeness der Teilchen. So findet man z. B. für Baryonen mit Spin  $J = \frac{1}{2}$  ein Oktett und mit  $J = \frac{3}{2}$  ein Dekuplett.



Die Massen der Oktett-Zustände sind näherungsweise gegeben durch  $m_n/p = 939 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_\Lambda = 1116 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_\Sigma = 1193 \text{ MeV}/c^2$  und  $m_\Xi = 1318 \text{ MeV}/c^2$ . Die Massen der Dekuplett-Zustände sind näherungsweise  $m_\Delta = 1232 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_{\Sigma(3/2)} = 1385 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_{\Xi(3/2)} = 1530 \text{ MeV}/c^2$  und  $m_\Omega = 1672 \text{ MeV}/c^2$ .

- a) Zeigen Sie, daß für die elektrische Ladung  $Q$  die Relation

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(B + S)$$

generell erfüllt ist.

- b) Wäre die Flavour-SU(3)-Symmetrie in der starken Wechselwirkung exakt erfüllt, so wären alle Zustände eines Multipletts entartet, d. h. alle Teilchen eines Multipletts hätten dieselbe Masse. Die Brechung der Symmetrie führt zur Aufhebung der Massenentartung. Gruppentheoretische Überlegungen führten Gell-Mann und Okubo zu einer Massenformel für die Masse  $M$  der Zustände eines Multipletts:

$$M = M_0 + aY + b \left( I(I+1) - \frac{1}{4}Y^2 \right)$$

Hierbei sind  $M_0$ ,  $a$  und  $b$  feste Parameter in einem gegebenen Multiplett.

Testen Sie die Gell-Mann-Okubo-Massenformel anhand der empirischen Daten im Baryonen-Oktett und -Dekuplett. Zeigen Sie insbesondere, daß die Massenformel zu folgenden Relationen führt:

$$M_N + M_\Xi = \frac{1}{2}(3M_\Lambda + M_\Xi)$$

im Oktett und

$$M_{\Sigma(3/2)} - M_\Delta = M_{\Xi(3/2)} - M_{\Sigma(3/2)} = M_\Omega - M_{\Xi(3/2)}$$

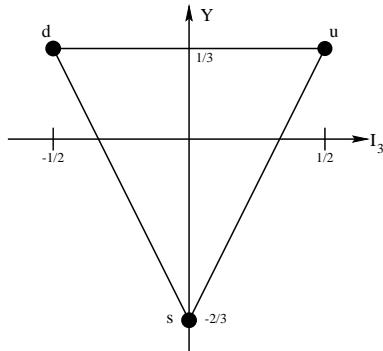
im Dekuplett.

Machen Sie eine Vorhersage für die Masse des  $\Omega^-$  im Dekuplett. Welche Reaktion würden Sie vorschlagen, um das  $\Omega^-$  zu erzeugen?

**Übung 6.4: Positronium.** Das Positronium ist ein wasserstoffähnlicher gebundener Zustand aus einem Elektron und einem Positron. Je nach Kopplung der Spins von Elektron und Positron unterscheidet man Para-Positronium ( $S = 0$ ) und Ortho-Positronium ( $S = 1$ ).

- Das Positronium hat nur eine endliche Lebensdauer, da sich Elektron und Positron annihilieren. Bei diesem Prozeß werden Photonen erzeugt. Überlegen Sie, wieviele Photonen beim Zerfall des Positroniums mindestens entstehen müssen. Welche Unterschiede zwischen Ortho- und Para-Positronium gibt es hierbei? Hinweis: Fermionen und Antifermionen haben entgegengesetzte innere Parität.
- Schätzen Sie das Verhältnis der Zerfallsbreiten (bzw. Lebensdauern) von Ortho- und Para-Positronium ab.
- Bestimmen Sie unter Verwendung der Grundzustandswellenfunktion für ein wasserstoffähnliches System  $J/\psi(0)$  ausgewertet am Ursprung die Lebensdauer von Ortho-Positronium. Geben Sie hierzu zunächst die Wahrscheinlichkeit für ein Zusammentreffen von Elektron und Positron an. Die Übergangsrate erhalten Sie dann aus der Übergangswahrscheinlichkeit und der „Dauer“ der Wechselwirkung.

**Übung 6.5: SU(3)-Operatoren.** Die  $\lambda$ -Matrizen der Gruppe  $SU(3)$  besitzen die auf S. 196 gegebene Darstellung.



Erläutern Sie anhand des Gewichtsdiagramms der Fundamentaldarstellung mit

$$\text{Isospin: } I_3 = \frac{1}{2} \lambda_3$$

$$\text{Hyperladung: } Y = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Wirkung der Operatoren

$$T_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2), \quad U_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7), \quad V_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5)$$

**Übung 6.6: Magnetische Momente im Quarkmodell.**

- a) Konstruieren Sie durch geeignete Kombination von u-Quarks ( $I_3 = \frac{1}{2}, Y = \frac{1}{3}$ ), d-Quarks ( $I_3 = -\frac{1}{2}, Y = \frac{1}{3}$ ) und s-Quarks ( $I_3 = 0, Y = -\frac{2}{3}$ ) die Spin-Flavour-Wellenfunktionen für Proton (uud), Neutron (udd) und das  $\Lambda$ -Hyperon (uds). Diese müssen symmetrisch unter der Vertauschung zweier Quarks sein. Für das  $\Lambda$ -Hyperon muß hierbei berücksichtigt werden, daß aus Symmetriegründen der ud-Anteil der Wellenfunktion zu Spin Null koppelt.
- b) Berechnen Sie die magnetischen Momente gemäß  $\vec{\mu} = g\vec{J}$ , wobei  $\vec{J} = \sum_i \vec{s}_i$  der Gesamtspin der Valenzquarks ist. Für die magnetischen Momente wird angenommen, daß:

$$\vec{\mu}_{u,d} = Q_{u,d} \left( \frac{e\hbar}{2mc} \right) \vec{\sigma}_{u,d} \quad \text{und} \quad \vec{\mu}_s = Q_s \left( \frac{e\hbar}{2m_s c} \right) \vec{\sigma}_s$$

- c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Wellenfunktionen die Verhältnisse

$$\frac{g_p}{g_n} \stackrel{\text{Daten}}{=} -1.459898 \quad \text{und} \quad \frac{g_\Lambda}{g_n} \stackrel{\text{Daten}}{=} 0.320 \pm 0.003$$

und vergleichen Sie diese mit den Daten.

Hinweis: Bestimmen Sie die effektive s-Quarkmasse aus  $m_\Lambda = 1115 \text{ MeV}/c^2$  mit Hilfe von  $m = m_u = m_d$  und  $M_{\text{Proton}} = 3m$ .

**Übung 6.7: Charmonium.** Wie das Positronium ( $e^+e^-$ ) hat das Charmonium ( $c\bar{c}$ ) Energieniveaus, die ähnlich dem Wasserstoffatom mit der nichtrelativistischen Schrödinger-Gleichung beschrieben werden können.

Für kleine Abstände wird die starke Wechselwirkung näherungsweise durch das coulombartige Potential

$$V = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s \hbar c}{r}$$

beschrieben. Analog zur Spin-Spin-Wechselwirkung im Atom lässt sich eine farbmagnetische Wechselwirkung

$$V_{ss} = \frac{8\pi\hbar^3}{9c} \alpha_s \frac{\vec{\sigma}_c \cdot \vec{\sigma}_{\bar{c}}}{m_c m_{\bar{c}}} \delta(\vec{r})$$

definieren, bei der die starke Kopplung  $\alpha_s$  an die Stelle der elektromagnetischen Kopplungsstärke  $\alpha$  tritt und die Vorfaktoren berücksichtigen, daß es drei Ladungen gibt.

Berechnen Sie in Analogie zum Wasserstoffatom die Aufspaltung des Grundzustands zum ersten angeregten Zustand und ermitteln Sie mit Hilfe des gemessenen Massensplittings von  $\eta_c(1^1S_0)$  zu  $J/\psi(1^3S_1)$  von 120 MeV Werte für  $\alpha_s$  und  $m_c$ .

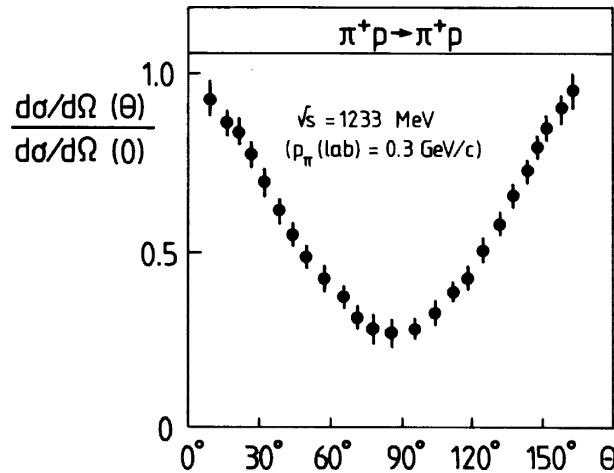


Abb. 6.82: Differentieller Wirkungsquerschnitt für Pion-Proton-Streuung (aus [Er88])

**Übung 6.8: Parität des Pions.** In der Reaktion  $\pi^- + d \rightarrow 2n$  wird ein gestopptes negativ geladenes Pion in einem „atomaren“ s-Orbital eingefangen und am Deuteron (d) absorbiert. Im Deuteron (Spin 1) sind Proton und Neutron überwiegend in einem Zustand mit relativem Bahndrehimpuls  $\ell = 0$ . Bestimmen Sie die innere Parität des Pions unter der Voraussetzung, daß die innere Parität der Nukleonen positiv ist.

**Übung 6.9: Spin der Δ(1232)-Resonanz.** Der differentielle Wirkungsquerschnitt für  $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$  im Bereich der Δ-Resonanz bei  $\sqrt{s} = 1232 \text{ MeV}$  hat die in Abb. 6.82 gezeigte Winkelverteilung.

a) Drücken Sie diesen differentiellen Wirkungsquerschnitt in der Form

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = 0) [A + B \cos \theta + C \cos^2 \theta]$$

aus und bestimmen sie die Koeffizienten A, B und C.

b) Die Partialwellenentwicklung der  $\pi^+ + p$ -Streuamplitude lautet (mit  $d\sigma/d\Omega = |g|^2 + |h|^2$ ):

$$g(\theta, E) = \sum_{\ell} [(\ell + 1) a_{\ell}^+(E) + \ell a_{\ell}^-(E)] P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$h(\theta, E) = \sin \theta \sum_{\ell} [a_{\ell}^+(E) - a_{\ell}^-(E)] P'_{\ell}(\cos \theta)$$

Dabei sind  $a_{\ell}^{\pm}$  die Amplituden zum Gesamtdrehimpuls  $j = \ell \pm \frac{1}{2}$  des Pion-Nukleon-Systems. Man berechne  $d\sigma/d\Omega$  unter Berücksichtigung von s- und p-Wellen.

c) Durch Vergleich mit der experimentellen Winkelverteilung aus der Abbildung zeige man, daß das  $\pi N$ -System bei der Formation der Δ-Resonanz den Bahndrehimpuls  $\ell = 1$  und den Gesamtdrehimpuls  $j = \frac{3}{2}$  besitzt.

**Übung 6.10: Charmonium-Spektroskopie.** Das Spektrum der niedrigliegenden Zustände von Charmonium ist in Abb. 6.27 (S. 229) gezeigt. Diskutieren Sie die Auswahlregeln (Drehimpuls und Parität) für elektrische und magnetische Dipolübergänge vom angeregten Zustand  $J/\psi(2^3S_1)$  in die darunterliegenden Zustände des  $c\bar{c}$ -Systems. Vergleichen Sie mit dem gemessenen Photonenspektrum aus dem Zerfall des  $J/\psi(2^3S_1)$  in Abb. 6.26 und diskutieren Sie die Zuordnung der Linien zu entsprechenden Übergängen.

**Übung 6.11: Hadron-Proton-Wirkungsquerschnitte.** Die mittlere freie Weglänge  $\lambda$  eines Hadrons in Kermaterie der Dichte  $\rho$  ist gegeben durch

$$\lambda = \frac{1}{\rho \sigma}.$$

Dabei ist  $\sigma$  der totale Wirkungsquerschnitt für die Hadron-Nukleon-Streuung. Bestimmen Sie die mittleren freien Weglängen für Antiprotonen, Protonen, Pionen,  $K^-$ - und  $K^+$ -Mesonen aus den in Abb. 6.45 auf S. 255 gezeigten Wirkungsquerschnitten. Vergleichen Sie die Werte mit typischen Kernradien gemäß  $R = r_0 A^{1/3}$  mit  $r_0 = 1.2$  fm für  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^{12}\text{C}$  und  ${}^{208}\text{Pb}$ . Interpretieren Sie das Resultat.

**Übung 6.12: Datenanalyse mit dem Dalitz-Plot.** Wir betrachten die Vernichtung von Protonen und Antiprotonen in Ruhe:

$$p + \bar{p} \rightarrow X \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0.$$

Zur Beschreibung des Endzustands definieren wir

$$p_{ij} = p_i + p_j \quad \text{und} \quad m_{ij}^2 = p_{ij}^2, \quad i, j = 1, 2, 3$$

woraus folgt, daß

$$\begin{aligned} m_{12}^2 + m_{23}^2 + m_{13}^2 &= M_X^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \quad \text{und} \\ m_{12}^2 &= (P - p_3)^2 = M^2 + m_3^2 - 2ME_3 \end{aligned}$$

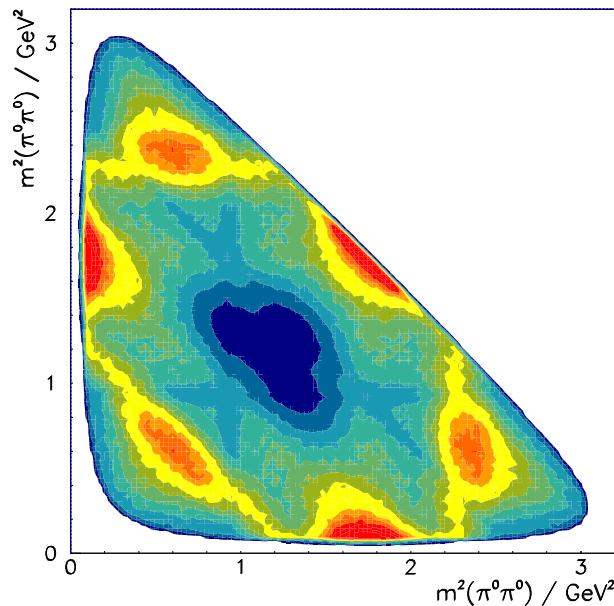
gilt. Im Ruhesystem ergibt sich für ein spinloses Teilchen  $X$  eine Endzustandsdichte

$$\rho = |\mathcal{M}(E_1, E_2)|^2 dE_1 dE_2.$$

Hierbei beschreibt das Matrixelement  $\mathcal{M}(E_1, E_2)$  die Reaktionsdynamik.

- a) Überprüfen Sie, daß sich die Zustandsdichte auch schreiben läßt als

$$\rho = \frac{1}{4M^2} |\mathcal{M}|^2 dm_{12}^2 dm_{23}^2.$$



**Abb. 6.83:** Dalitz-Plot in  $\pi^0\pi^0\pi^0$  (Crystal-Barrel-Experiment, CERN)

- b) Zur Analyse der Endzustände und Auffindung von Resonanzen im Zwischenzustand X, die aus zwei der drei Pionen gebildet werden, wird häufig der sogenannte *Dalitz-Plot* verwendet. Hierbei trägt man  $m_{12}^2$  gegen  $m_{23}^2$  auf. Ein konstantes Matrixelement  $\mathcal{M}$  würde sich durch eine konstante Zustandsdichte im Dalitz-Plot ausdrücken. Aus Strukturen im Dalitz-Plot kann man Rückschlüsse auf das Matrixelement ziehen, z. B. auf Resonanzen, die in der Reaktion entstehen, und auf deren Spin. Geben Sie die Massen der vier Resonanzen an, die im Dalitz-Plot in Abb. 6.83 sichtbar sind.
- c) Überlegen Sie, welche Gesamtspins ein aus zwei identischen Pionen gebildeter Zustand haben kann unter Berücksichtigung eines möglichen relativen Drehimpulses. Wie wirkt sich der Gesamtspin auf die Zustandsdichte aus, wenn man die beiden niedrigsten Möglichkeiten betrachtet? Geben Sie Ihren Überlegungen folgend die Spins der vier im Dalitz-Plot identifizierten Resonanzen an.

**Übung 6.13: Hochenergetische elastische Proton-Proton-Streuung.** Wir untersuchen die elastische Streuung von Protonen ( $p + p \rightarrow p + p$ ) bei hohen Schwerpunktsenergien ( $\sqrt{s} \gg M_p$ ). Es sei  $t = (p - p')^2$ , wobei  $p$  und  $p'$  die Viererimpulse im Schwerpunktsystem (CMS) vor und nach der Streuung und  $\theta^*$  der Streuwinkel im CMS sind.

- a) Für elastische Streuung und  $s \gg 4M_p^2$  zeige man:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{s}{4\pi} \frac{d\sigma}{d|t|}$$

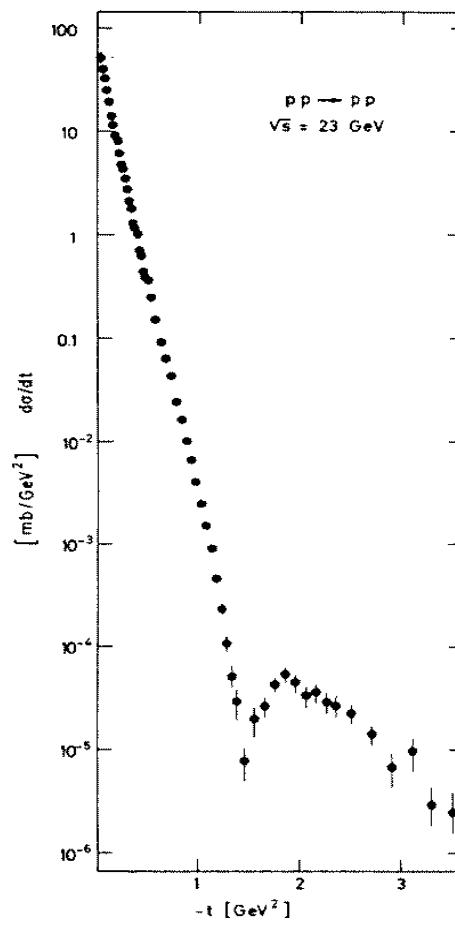
- b) Der differentielle Wirkungsquerschnitt unter Vorwärtswinkeln wird in guter Näherung durch

$$\frac{d\sigma}{d|t|} = A \exp^{-B|t|} \quad \text{mit} \quad A = \left[ \frac{d\sigma}{d|t|} \right]_{\theta^*=0}$$

beschrieben. Schätzen Sie  $A$  und  $B$  aus den experimentellen Daten für  $\sqrt{s} = 23 \text{ GeV}$  in Abb. 6.84 ab. Bestimmen Sie den elastischen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\text{el}} = \int d\Omega^* \frac{d\sigma}{d\Omega^*}$$

bei dieser Energie und vergleichen Sie mit dem totalen Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{\text{tot}}(\text{pp})$  aus Aufgabe 6.10. Wie groß ist folglich der inelastische Proton-Proton-Wirkungsquerschnitt bei  $\sqrt{s} = 23 \text{ GeV}$ ?



**Abb. 6.84:** Elastische pp-Streuung bei  $\sqrt{s} = 23 \text{ GeV}$

- c) Unter Verwendung des optischen Theorems zeige man, daß für den elastischen differentiellen Wirkungsquerschnitt in Vorwärtsrichtung gilt

$$\left[ \frac{d\sigma}{d|t|} \right]_{t=0} = \frac{\sigma_{\text{tot}}^2}{16\pi} (1 + \xi^2)$$

Dabei ist  $\xi = \text{Re}f(0)/\text{Im}f(0)$  das Verhältnis von Real- und Imaginärteil der elastischen Vorwärtsstreuamplitude. Ermitteln Sie  $\xi$  bei  $\sqrt{s} = 23 \text{ GeV}$  und interpretieren Sie das Resultat.

# Kapitel 7

## Schwache Wechselwirkung

Unter allen vier Wechselwirkungen nimmt die schwache Wechselwirkung eine besondere Stellung ein. Die bisher besprochenen fundamentalen Wechselwirkungen, die elektromagnetische und die starke Wechselwirkung, gehorchen Auswahlregeln und beachten die Symmetrien

- Raumspiegelung  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$
- Zeitumkehr  $t \rightarrow -t$
- Ladungskonjugation  $q \rightarrow -q$
- Isospin und  $G$ -Parität  $I$  und  $I_3$
- Flavorerhaltung u, d, ... und e,  $\mu$ , ...

Die schwache Wechselwirkung ist zwar theoretisch gut verstanden, aber doch immer wieder für Überraschungen gut.

### 7.1 Überblick

Zum ersten Mal wurde die schwache Wechselwirkung in niederenergetischen Prozessen, vor allem beim  $\beta$ -Zerfall von Kernen, beobachtet. Obwohl alle Teilchen an ihr teilnehmen, ist die schwache Wechselwirkung selten sichtbar, da sie im allgemeinen durch elektromagnetische und starke Wechselwirkung maskiert wird. Folglich wird sie nur in Prozessen, welche nicht über die beiden letztgenannten Wechselwirkungen ablaufen, der Beobachtung zugänglich sein.

Typisch für die schwache Wechselwirkung ist die Beteiligung von Leptonen; diese sind aber nicht unerlässlich. Einige der typischen Prozesse der schwachen Wechselwirkung sind in Tab. 7.1 zusammengestellt.

Für diese Vielzahl von Prozessen ist also gerade *eine* Wechselwirkung verantwortlich. Daher nimmt man folgende Klassifizierung vor:

- **semileptonische Prozesse** (Abb. 7.1) stellen die häufigsten Prozesse der schwachen Wechselwirkung dar ( $\beta$ -Zerfälle). Sie involvieren sowohl Hadronen als auch Leptonen.

Prozeß			Übergangsrate
Kern- $\beta$ -Zerfall	${}^{40}\text{K}$	$\rightarrow {}^{40}\text{Ca} + e^- + \bar{\nu}_e$	$10^{-9} \text{ a}^{-1}$
$\beta$ -Zerfall des Neutrons	$n$	$\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$	$10^{-3} \text{ s}^{-1}$
Pion-Zerfall	$\pi^-$	$\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$	$10^8 \text{ s}^{-1}$
Myon-Zerfall	$\mu^-$	$\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$	$10^6 \text{ s}^{-1}$
Lambda-Zerfall	$\Lambda$	$\rightarrow p + \pi^-$	$10^{10} \text{ s}^{-1}$
Fusion in der Sonne	$p + p$	$\rightarrow d + e^+ + \nu_e$	
Antineutrino-Streuung	$\bar{\nu}_e + p$	$\rightarrow n + e^+$	$10^{-38} \text{ cm}^2$
Neutraler Strom	$e^+ + e^-$	$\rightarrow \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$	

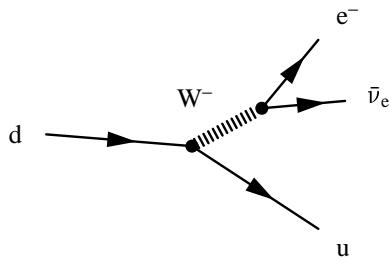
**Tab. 7.1:** Einige Prozesse der schwachen Wechselwirkung

- **nichtleptonische** oder **hadronische Prozesse** (Abb. 7.2): Zerfälle von Hadronen.
- **leptonische Prozesse** (Abb. 7.3): Die am seltensten vorkommenden Prozesse; hier hat man ausschließlich Leptonen als Wechselwirkungspartner.

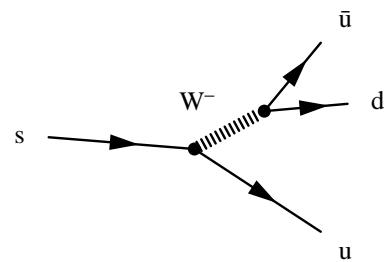
### 7.1.1 Eigenschaften der schwachen Wechselwirkung

- Der zugrundeliegende Prozess involviert Quarks und Leptonen, sowie die Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung, die Wechselwirkungsbosonen  $Z^0$  und  $W^\pm$ . Da man feststellt, dass die Wechselwirkungsstärke dieselbe für alle Teilchen ist, wird analog zur elektromagnetischen Ladung bzw. zur Farbladung eine *schwache Ladung* eingeführt, welche universell ist.
- Die Übergangsraten der schwachen Wechselwirkung sind klein im Vergleich zu anderen Prozessen, man findet charakteristische Reaktionszeiten von  $10^3 \text{ s}$  bis  $10^{-13} \text{ s}$ .
- Die schwache Wechselwirkung weist eine große Bandbreite an Raten auf. Die Übergangsraten werden dominiert vom Phasenraum und wenigen Erhaltungsgrößen.
- Die Wirkungsquerschnitte sind nur klein. Typische Werte sind  $\sigma_{\text{schwach}} \lesssim 10^{-38} \text{ cm}^2$  im Vergleich zu typischen Werten der starken Wechselwirkung  $\sigma_{\text{stark}} \approx 10^{-24} \text{ cm}^2$ .

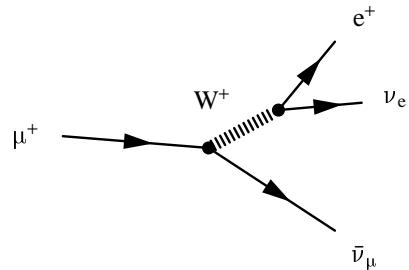
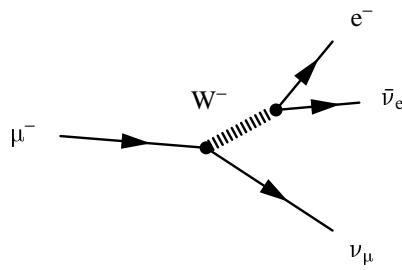
### 7.1.2 Grundlegende Prozesse



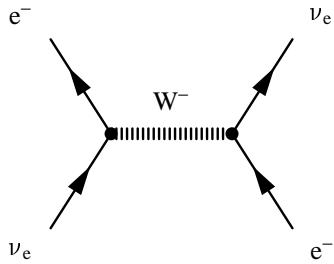
**Abb. 7.1:** semileptonischer Prozess



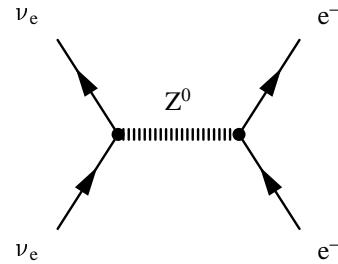
**Abb. 7.2:** hadronischer Prozess



**Abb. 7.3:** leptonische Zerfälle



**Abb. 7.4:** geladener Strom (CC)



**Abb. 7.5:** neutraler Strom (NC)

Anmerkung:

Als Voraussetzung für den Prozess in Abb. 7.2, also die Erzeugung eines Pions  $\pi^-$  ist:

$$Q = E_{\text{in}} - E_{\text{out}} \geq m_{\pi^-}$$

Diese Voraussetzung ist nur bei dem Zerfall schwerer Quarks gegeben.

**Stärke der schwachen Wechselwirkung und typische Übergangsraten:** Fermis goldene Regel kennen wir bereits aus Kap. 3.3:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{dN}{dE_0} \quad (3.1)$$

$$\frac{dN}{dE_0} = \text{Endzustandsdichte}$$

mit  $\mathcal{M}_{fi}^2$ : Quadrat des Matrixelementes. Für den Austausch eines Spin-1-Teilchens, zum Beispiel eines W-Bosons, ergibt die Auswertung des Propagators im Matrixelement:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \int dx j_1(x) j_2(x') G(x, x') \\ G(q) &\approx \frac{g^2}{|q|^2 + M_W^2} \quad (\text{Fourier-Transformation}) \end{aligned}$$

Dabei ist  $g$  eine Kopplungskonstante (analog wie bei der elektromagnetischen Wechselwirkung). Mit  $M_W \approx 80 - 90 \text{ GeV}/c^2$  und  $M_W^2 \gg |q|^2$  ergibt sich, daß das Matrixelement konstant für Niederenergieprozesse (wie Zerfälle) ist. Wie wir schon mehrfach erfahren haben, impliziert dies die Punktformigkeit der zugehörigen Wechselwirkung (Ausnahmen: Prozesse bei hohen Energien, wie sie beim LEP, Tevatron oder beim LHC erreicht werden). Mit dem konstanten Matrixelement können wir eine neue Kopplungskonstante für den geladenen Strom definieren:

$$G_F = \frac{\sqrt{2}g^2}{8M_W^2} \quad (\text{Fermikonstante}) \quad (7.1)$$

Für die Reichweite der Wechselwirkung ergibt sich  $\lambda \approx \hbar/M_{WC} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ fm}$ .

## 7.2 Leptonen

Analog zu den drei Quarkfamilien mit insgesamt sechs Quarkflavours kennt man *drei Leptonenfamilien*, e,  $\mu$  und  $\tau$ . Jede dieser Familien hat zwei Mitglieder, die als Doublets mit gleicher Leptonenfamilienzahl geschrieben werden können:

	Leptonenzahl		el. Ladung
$L = 1$	$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$
	$L_e = 1$	$L_\mu = 1$	$L_\tau = 1$
$Z = -1$			
$L = -1$	$\begin{pmatrix} e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mu^+ \\ \bar{\nu}_\mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tau^+ \\ \bar{\nu}_\tau \end{pmatrix}$
	$L_e = -1$	$L_\mu = -1$	$L_\tau = -1$
$Z = 1$			

Die Erfahrung zeigt, dass die Leptonenzahl  $L$  immer erhalten bleibt. Neuste Ergebnisse zeigen allerdings, dass die Leptonenfamilienzahl nicht erhalten sein muss. Bei der Beobachtung von Neutrinooszillationen wurden Prozesse gefunden, welche die Leptonenfamilienzahl nicht erhalten; der genaue Vorgang unterliegt allerdings noch intensiver Erforschung und ist noch nicht vollständig verstanden. In den meisten Fällen ist die Leptonenfamilienzahl aber erhalten, so daß bisher auch noch keine Prozesse der Art  $\mu^- \rightarrow e^-\gamma$  beobachtet wurden.

Die Leptonen haben folgende Massen:

$$\begin{aligned} m_e &= 0,511 \text{ MeV} \\ m_\mu &= 105,7 \text{ MeV} \\ m_\tau &= 1771,1 \text{ MeV} \end{aligned}$$

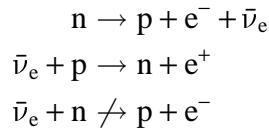
Bisher galt für die Massen der Neutrinos:  $m_\nu = 0$ . Direkte Messungen haben aber nun obere Grenzen gesetzt:

$$\begin{aligned} m_{\nu_e} &< 2,3 \text{ eV} \\ m_{\nu_\mu} &< 190 \text{ keV} \\ m_{\nu_\tau} &< 18,2 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Die hier genannten Obergrenzen stellen solche aus der Teilchenphysik dar, astrophysikalischen Berechnungen zu Folge müsste die Gesamtmasse aller drei Neutrinos unterhalb von  $\approx 0,5 \text{ eV}$  liegen. Neutrinooszillation ist nur möglich, wenn Neutrinos Masse besitzen, wie wir in Kapitel 8 noch sehen werden. Für die meisten Rechnungen ist die Annahme  $m_\nu = 0$  aber völlig ausreichend.

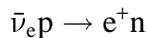
Das gesamte Wissen über die schwache Wechselwirkung stammt aus Experimenten, also Beobachtungen bzw. Nichtbeobachtungen aus denen sich die Theorie ergibt. Die Erfahrung hat gezeigt, dass präzise Experimente heutige Vorstellungen falsifizieren oder ergänzen können. Hier nun einige solcher “Erfahrungstatsachen” . . .

Wir wissen, dass Neutrinos und Antineutrinos verschiedene Teilchen sind. Dies folgt aus der Beobachtung bzw. Nichtbeobachtung der folgenden Zerfälle:



**Die Entdeckung des Neutrino:** Das Neutrino wurde erstmals 1930 von W. Pauli zur Erklärung des kontinuierlichen  $\beta$ -Spektrums im radioaktiven Zerfall gefordert. Beobachtet wurde dann als erstes eine Neutrino ( $\nu_e$ ) induzierten Reaktion durch F. Reines und C. Cowan.

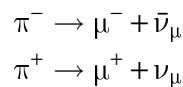
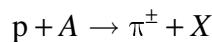
Dies wurde mit Neutrinos durchgeführt, die in einem Kernreaktor entstehen und diesen verlassen. Um eine Verfälschung durch kosmische Hintergrundstrahlung zu vermeiden, wurde in einem Untergrundlabor 12 m unter der Erdoberfläche gearbeitet. Die beobachtete Reaktion ist:



Die entstehenden Positronen werden über die Reaktion  $e^+ e^- \rightarrow \gamma\gamma$  nachgewiesen, wobei man die beiden  $\gamma$ 's auch gleichzeitig als Trigger für die Reaktion verwendet. Zum Neutronennachweis verwendet man die Reaktion  $n + Cd \rightarrow Cd^* \rightarrow Cd + x\gamma$ , wobei die hier entstehenden  $\gamma$ 's durch die endliche Lebensdauer des angeregten Kernzustandes etwas verzögert auftreten.

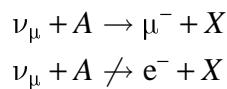
Durchgeführt wurde das Experiment erstmals 1953, der Nobelpreis wurde 1995 für das Experiment verliehen.

Bis dato wurde die schwache Wechselwirkung nur bei  $\beta$ - bzw beim inversen  $\beta$ -Zerfall studiert. Schließlich kam die Idee zur Erzeugung von Neutrinostrahlen auf, welche sich beispielsweise mit den folgenden Reaktionen herstellen lassen:

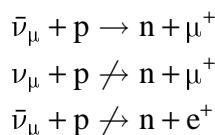


Durch Wahl der elektrischen Ladung des Pions über ein Magnetfeld lässt sich selektieren, welche Neutrinos im Strahl sind.

Beobachtet wurde:



Mit diesen Neutrinos lässt sich auch noch die Unterschiedlichkeit von  $\nu_e$  und  $\nu_\mu$  zeigen (Experiment von Steinberg, Schwarz und Lederman, Nobelpreis 1988):



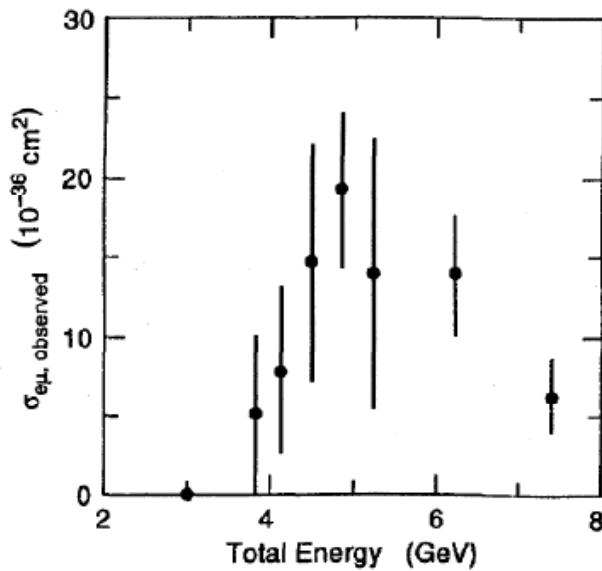
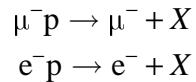


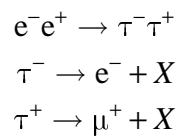
Abb. 7.6: Elektronen- Myonen- Paare gegen die Schwerpunktsenergie bei der Entdeckung des tau- Neutrinos

**Die Entdeckung des  $\tau$ -Leptons:** Das  $\tau$ -Lepton wurde 1973 am SLAC entdeckt (Nobelpreis 1995).

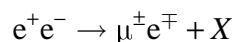
Erste Versuche in den 60'er Jahren mit Proton/Myon und Proton/Elektron Kollisionen blieben erfolglos.



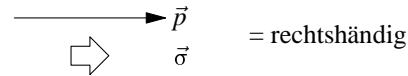
Der Erfolg stellte sich erst mit dem MARK1-Detektor am ersten  $e^-e^+$  Speicherring (SPEAR) am SLAC ein. Der Nachweis erfolgt über folgende Auswahl an Reaktionen:



Also:



Gezählt wurden die  $\mu^\pm e^\mp$  Ereignisse als Funktion von  $\sqrt{s}$  (siehe Abb. 7.6). Die Masse lässt sich über den Wirkungsquerschnitt  $\sigma(\sqrt{s})$  und das Impulsspektrum von  $\mu^\pm e^\mp$  unter der Annahme des Zerfalls  $\tau^\pm \rightarrow \mu^\pm \bar{\nu}_\mu \nu_\tau$  abschätzen. Heute gilt:

**Abb. 7.7:** Definition der Rechtshändigkeit

$$m_\tau = 1777,1 \text{ MeV/c}^2 .$$

Aus einem  $\nu_\tau$ -Strahl wurde auch das zugehörige Neutrino nachgewiesen. Ein  $\tau$  lässt sich über

- Emulsionen
- elektronische (SciFi)-Detektoren und
- Spektrometer

nachweisen.

Außerdem ist noch bemerkenswert, dass das Tauon wegen seiner großen Masse auch in ein Pion zerfallen kann:

$$\boxed{\tau^- \rightarrow \nu_\tau + n\pi}$$

Dieser Prozess macht ungefähr 50% der  $\tau$ -Zerfälle aus.

### 7.3 Paritätsverletzung

Die Paritätsverletzung ist eine besondere Eigenschaft der schwachen Wechselwirkung. Diese Aufhebung der Spiegelsymmetrie setzt natürlich die Existenz einer Vorzugsrichtung im Raum voraus. Typischerweise wird diese Vorzugsrichtung durch die Korrelation von Spinrichtung und der kinematisch davon unabhängigen Impulsrichtung dargestellt. Diese Korrelation wird beschrieben durch die Helizität  $H$ :

$$H = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{\sigma}| |\vec{p}|}$$

Für ein masseloses Photon ist  $J_z = \pm 1$  und damit die Helizität  $H = \pm 1$ . In diesem Fall ist also die Helizität gleich der Chiralität<sup>1</sup> oder Händigkeit, das Photon ist entweder rechts- oder linkshändig (Abb. 7.7).

In der elektromagnetischen Wechselwirkung werden bei Lichtemission unpolarisierter Atome gleichviele Photonen mit  $J_z = H = +1$  und  $J_z = H = -1$  ausgesandt. Da keine Richtung bevorzugt ist, gibt es keine effektive Polarisation. Wie stehen die Dinge nun beim Neutrino? Die Antwort auf diese Frage liefert das Goldhaber-Experiment:

<sup>1</sup>Die Chiralität entspricht der Händigkeit gemessen im Bezugssystem des Teilchens und findet sich mathematisch im Dirac-spinor des Teilchens wieder

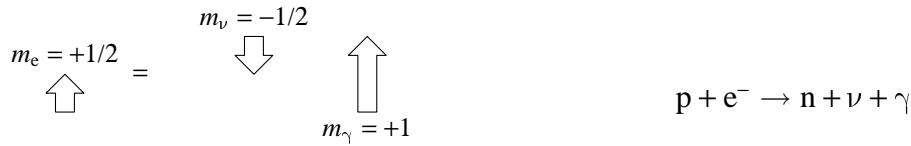


Abb. 7.9: Spinrichtungen beim Goldhaber-Experiment

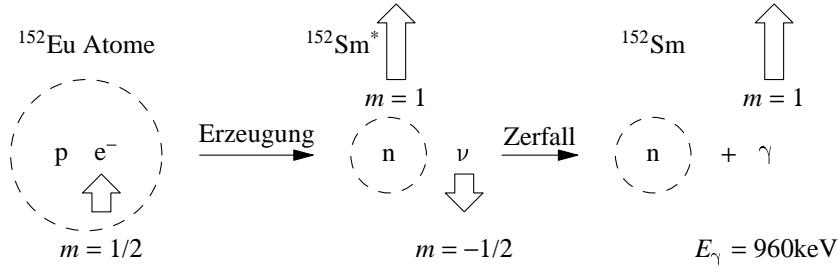
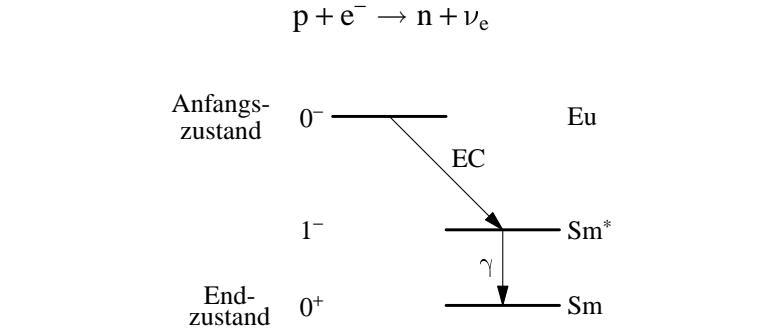


Abb. 7.10: Der im Goldhaber-Experiment betrachtete Übergang

**Goldhaber-Experiment:** Bei diesem Experiment wird folgender Umkehrprozess des Neutronzerfalls betrachtet (Abb. 7.8):

Abb. 7.8: Niveauschema beim Prozess  $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$  (im Atomkern!)

Dabei untersucht man diesen Übergang nicht an freien Protonen, sondern in Kernen, die im Anfangs- und Endzustand Spin 0 haben und nach dem sogenannten „Electron-Capture-Zerfall“ noch ein  $\gamma$  aussenden. Im Spinbild sieht das Ganze dann folgendermaßen aus (Abb. 7.9):

Man sieht, dass der  $\nu$ -Spin dem  $\gamma$ -Spin genau entgegengesetzt sein muß. Im Goldhaber-Experiment verwendet man  $^{152}\text{Eu}$ -Atome, welche in  $^{152}\text{Sm}$  zerfallen (Abb. 7.10).

Die Paritätsverletzung lässt sich untersuchen, indem man die Helizität des Neutrinos (Abb. 7.11) betrachtet. Diese ist nach Abb. 7.11 stets gleich der Helizität des  $\text{Sm}^*$ . Dessen Helizität bestimmt man durch Messung seiner Spinrichtung  $\vec{\sigma}_{\text{Sm}^*}$  und Impulsrichtung  $\vec{p}_{\text{Sm}^*}$ . Um  $\vec{\sigma}_{\text{Sm}^*}$  zu bestimmen, genügt es nach Abb. 7.10 die Polarisationsrichtung  $\vec{\sigma}_\gamma$  des Photons zu kennen. Sie lässt sich über ein sog. *Spin-Filter* messen. Bei diesem nutzt man aus, dass die Absorption von polarisierten  $\gamma$  in magnetisiertem Eisen von der Richtung der Magnetisierung abhängt: Bei  $\uparrow_\gamma \downarrow_{\text{Fe}}$  ist eine Wechselwirkung wahrscheinlicher als bei  $\uparrow_\gamma \uparrow_{\text{Fe}}$ . Nach Durchgang durch einen magnetisierten Eisenabsorber ist also eine  $\vec{\sigma}_\gamma$ -Richtung bevorzugt.

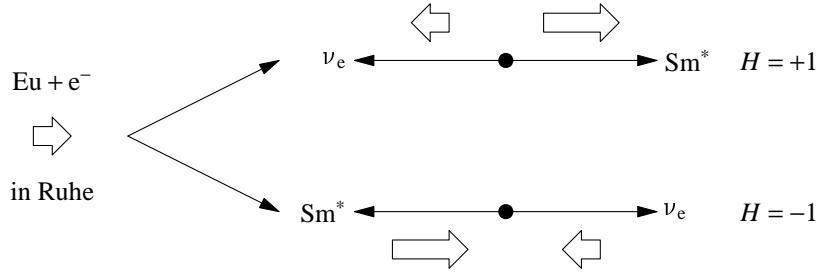


Abb. 7.11: Helizitäten beim Goldhaber-Experiment

Da das Elektron beim EC-Zerfall keinen Impuls überträgt, ist der Neutrinoimpuls gleich dem Sm<sup>\*</sup>-Rückstoßimpuls:

$$E_\nu = 950 \text{ keV} \quad |P_{\text{Rück}}^{\text{Sm}^*}| = 950 \frac{\text{keV}}{\text{c}}$$

Je nach Emissionsrichtung des Gammas wird dessen Energie  $E_\gamma \approx 961 \text{ keV}$  durch den Doppler-effekt verschoben, was man durch Resonanzstreuung an Samarium messen kann. Normalerweise ist  $E_\gamma < E_{\text{Resonanz}}$ , da das  $\gamma$  ja nur einen Teil der Anregungsenergie bekommt und der Rest für den Rückstoß des Sm-Kerns sorgt. In diesem Fall ist der Streuquerschnitt gering. Wird jedoch das  $\gamma$  genau in Bewegungsrichtung des Kerns ausgesandt, so ist seine Energie  $E_\gamma \approx E_{\text{Resonanz}}$ <sup>2</sup>. Da außerdem der Sm-Impuls dem  $\nu$ -Impuls entgegengerichtet ist, selektiert man bei Resonanzstreuung genau den Fall mit antiparallelen Impulsen von  $\gamma$  und  $\nu$  und hat so  $p_\nu$  gemessen.

Experimenteller Aufbau und Ergebnis des Goldhaber-Experiments sind in Abb. 7.12 dargestellt. Die gestreuten Photonen werden über einen NaI Kristall nachgewiesen, der von der Eu-Quelle durch einen Bleimantel abgeschirmt ist, so dass Photonen nur über den Umweg der Streuung zum Detektor gelangen können. Es ergab sich eine Asymmetrie bei Umkehrung der Magnetisierung im Streumagneten von:

$$2 \frac{N^+ - N^-}{N^+ + N^-} = 0.017 \pm 0.003$$

Daraus kann man auf eine Linkszirkularpolarisation von  $0.66 \pm 0.15$  für das  $\gamma$  schließen. Neuere Experimente haben gezeigt, dass die Linkszirkularpolarisation wesentlich höher ist und bei etwa 1,0 liegt, was gleichbedeutend mit der Linkshändigkeit des Neutrinos ist:

$H_\nu = -1 \quad \text{linkshändig}$
---------------------------------------

**Fazit:** Die schwache Wechselwirkung verletzt die  $\varphi$ -Invarianz. Rechts- und linkshändige Teilchen sind nicht gleichberechtigt.

$$\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_L) \neq \Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_R) = 0$$

<sup>2</sup>Das liegt an der geschickten Auswahl der genutzten Kerne EU und SM und ist damit eher dem Zufall der Natur zu verdanken

## 7.3 Paritätsverletzung

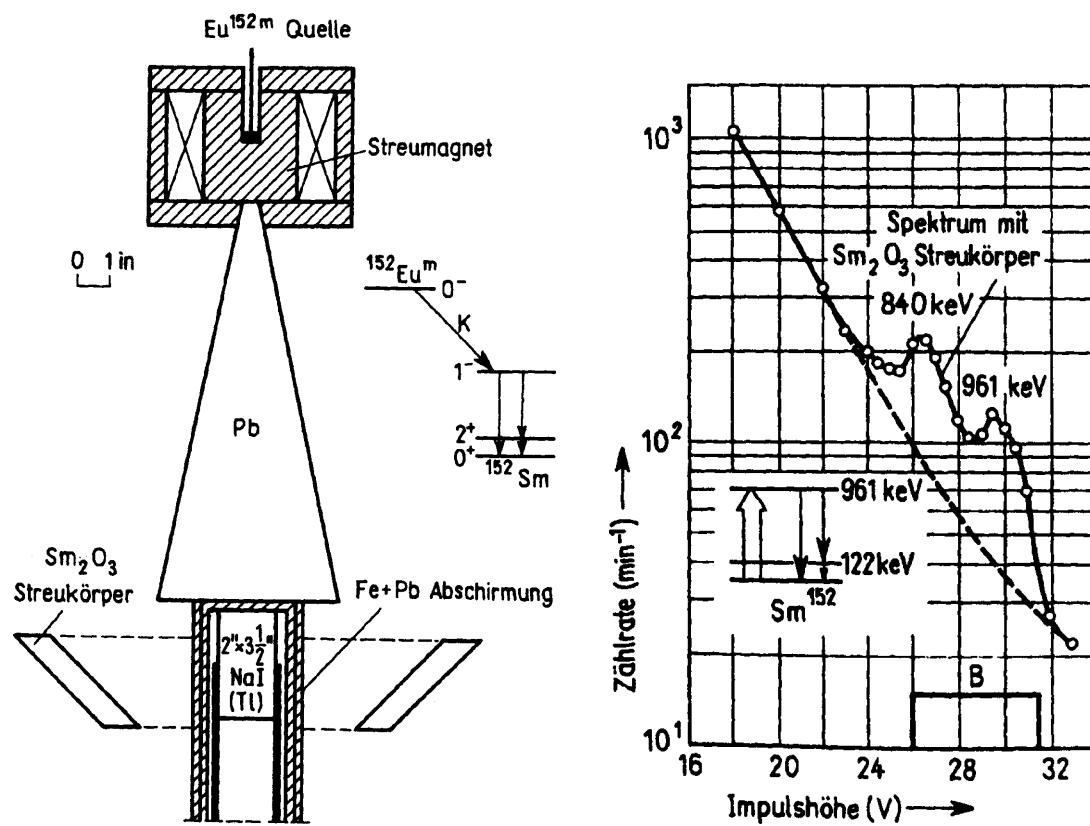


Abb. 7.12: Aufbau und Messergebnis des Goldhaber-Experiments

Auch die  $\mathcal{CP}$ -Invarianz ist verletzt: auch Teilchen und Antiteilchen sind nicht gleichberechtigt:

$$\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_L) \neq \Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_L) = 0$$

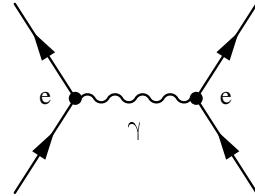
Die  $\mathcal{CP}$ -Parität ist aber erhalten!

$$\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_L) = \Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_R)$$

Es gibt aber auch Verletzungen der  $\mathcal{CP}$ -Invariantz, z.B. den Kaon oder B-Meson Zerfall.

## 7.4 Die V–A-Theorie der schwachen Wechselwirkung

Wie wir gesehen haben, übernehmen in der Quantenelektrodynamik virtuelle Photonen (Spin 1) mit Ruhemasse Null die Rolle der Austauschteilchen. Das Feynman-Diagramm beschreibt die Kopplung des Photonenfeldes  $A_\mu(x)$  an den Vektorstrom  $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$  (für Dirac-Teilchen). Für die Lagrangedichte gilt hier:



$$\mathcal{L}_{\text{inf}}^{\text{eff.}} = \underbrace{i \cdot e \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x)}_{\text{Vektorstrom}} \underbrace{A^\mu(x)}_{\text{Photonfeld}}$$

Für den Vektorstrom gilt allgemein:

$$V_\mu(x) = \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x) = \begin{cases} V_0 = \bar{\Psi} \gamma_0 \Psi = \Psi^\dagger \gamma_0^2 \Psi = \Psi^\dagger \Psi & \text{"Dichte"} \\ \vec{V} = \bar{\Psi} \vec{\gamma} \Psi = \Psi^\dagger \gamma_0 \vec{\gamma} \Psi = \Psi^\dagger \vec{\alpha} \Psi & \text{"Stromdichte"} \end{cases}$$

Unter Raumspiegelung mit  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$  gilt:

$$V_0 \rightarrow V_0 \quad \vec{V} \rightarrow -\vec{V}$$

Es handelt sich also um einen polaren Vektor unter Spiegelung.

### 7.4.1 Der Axialvektorstrom

Neben Vektorströmen tauchen hier zum ersten Mal auch sog. Axialvektorströme auf, die wie folgt definiert sind:

$$\text{Axialvektorstrom: } A^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \quad \text{mit } \gamma_5 = i \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei  $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$  mit allen anderen  $\gamma$ -Matrizen antikommutiert:  $\{\gamma_\mu, \gamma_5\}_+ = \gamma_\mu\gamma_5 + \gamma_5\gamma_\mu = 0$ .

$$\vec{A}(x) = \bar{\Psi} \vec{\gamma}_5 \Psi(x) = \Psi^\dagger(x) \gamma_0 \vec{\gamma}_5 \Psi(x) = \Psi^\dagger(x) \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi = \Psi^\dagger(x) \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}}_{\text{Spin}} \Psi(x)$$

Damit ist  $\vec{A}$  ein ‘‘Pseudovektor‘‘, der unter Raumspiegelung sein Vorzeichen nicht ändert. Vektoren und Pseudovektoren sind also wie folgt definiert:

- Vektor  $\overset{\vec{x} \rightarrow -\vec{x}}{\longrightarrow}$  - Vektor
- Axialvektor  $\overset{\vec{x} \rightarrow -\vec{x}}{\longrightarrow}$  + Axialvektor
- Spin/ Drehimpuls  $\iff$  Pseudovektor (Axialvektor)

Die V-A-Theorie impliziert bereits eine Paritätsverletzung, da sich die beiden enthaltenen Vektoren und Axialvektoren (siehe 7.2) unter Parität verschieden transformieren:

Vektorstrom	$V_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$	Axialvektorstrom	$A_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \Psi$
Dichte:	$V_0 \rightarrow V_0$	Pseudoskalare Dichte:	$A_0 \rightarrow -A_0$
Stromdichte:	$\vec{V} \rightarrow -\vec{V}$	Spindichte:	$\vec{A} \rightarrow \vec{A}$

**Anwendung von  $\gamma_5$  auf masselose Diracteilchen:** Für Diracteilchen ist der Spinor für  $m = 0$  und damit  $E = |\vec{p}|$  gegeben durch:

$$\Psi(x) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} X \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|} \chi \end{pmatrix} e^{-i|\vec{p}|t} e^{i\vec{p}\vec{x}}.$$

Die Anwendung von  $\gamma_5$  auf  $\Psi(x)$  ergibt mit  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) = \vec{a}^2$ :

$$\gamma_5 \Psi(x) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|} \chi \\ X \end{pmatrix} e^{-i|\vec{p}|t} e^{i\vec{p}\vec{x}} = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|} \mathcal{N} \begin{pmatrix} X \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|} \chi \end{pmatrix} e^{-i|\vec{p}|t} e^{i\vec{p}\vec{x}} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \Psi(x).$$

Die Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung, die virtuellen  $W^\pm$ -Vektorbosonen (Spin 1) sind elektrisch geladen, es handelt sich also um Ladungsaustauschreaktionen. Zudem sind sie sehr schwer: das  $Z^0$ -Boson hat eine Masse von  $M_{Z^0} = (80.22 \pm 0.26) \text{ GeV}/c^2$  (experimentell nachgewiesen am CERN<sup>3</sup> 1983, Nobelpreis 1984<sup>4</sup>), die  $W^\pm$ -Bosonen sind noch schwerer.

$W^\pm$ -Bosonen koppeln an die Differenz aus Vektor- und Axialvektorstrom, weshalb man auch von der *V-A-Theorie* der schwachen Wechselwirkung spricht. Für dieses Verhalten existiert bislang keine wirklich tiefe Begründung, es ist vielmehr im Einklang mit dem Experiment so gefunden worden.

<sup>3</sup><http://www.cern.ch/>

<sup>4</sup><http://www.nobel.se/laureates/physics-1984.html>

Außerdem stellt man fest, dass nur linkshändige Leptonen und Quarks sowie rechtshändige Antileptonen und Antiquarks an die geladenen  $W^\pm$ -Bosonen koppeln. Dabei ist die *Händigkeit* oder *Chiralität* folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \text{linkshändig: } & \text{Eigenwert von } \gamma_5 \text{ ist } -1 \\ \text{rechtshändig: } & \text{Eigenwert von } \gamma_5 \text{ ist } +1 \end{aligned} \quad \gamma_5 \psi_{L,R} = \mp \psi_{L,R}$$

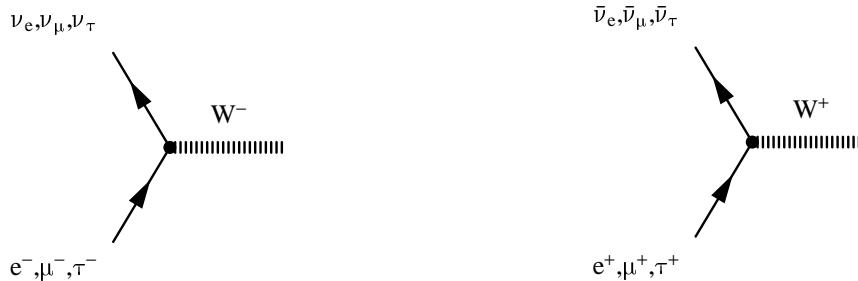
Bei masselosen Dirac-Teilchen ist

$$\text{Chiralität} = \text{Helizität} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \vec{\sigma} \cdot \hat{p}$$

Dies gilt nicht für  $m \neq 0$ . Man erhält als Projektoren auf rechts- bzw. linkshändige Teilchen:

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \quad \text{mit } P_{L,R}^2 = P_{L,R}$$

### 7.4.2 Kopplungen der Leptonen:



Die Lagrangedichte der schwachen Wechselwirkung ist:

$$\mathcal{L}_{\text{weak}} = \frac{g}{\sqrt{2}} \left[ \bar{\nu}_\ell \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \ell W_\mu^+ + \bar{\ell} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu_\ell W_\mu^- \right] \quad (7.2)$$

Dabei sind:

- $P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}$  Projektor auf linkshändige Zustände der Chiralität  $-1$  ( $P_L^2 = P_L$ )
- $g$  universelle schwache Kopplungskonstante (analog der elektrischen Ladung  $e$ )
- $W_\mu^\pm$  Feld der  $W^\pm$ -Bosonen (analog  $A_\mu$  für Photonen)
- $\ell, \nu_\ell$  Dirac-Spinoren der Leptonenfelder ( $\ell = (\psi_e, \psi_\mu, \psi_\tau)^T, \dots$ )

Der  $W$ -Boson-Propagator ist gegeben durch:

$$-\frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2}}{q^2 - M_W^2}$$

Man beachte, daß bei der schwachen Wechselwirkung stets nur *linkshändige Leptonen* und *rechtshändige Antileptonen* an die  $W^\pm, Z^0$  Bosonen koppeln, sprich, nur Teilchen mit dieser

Chiralität nehmen überhaupt an der schwachen Wechselwirkung teil. Dies ist in der oben definierten Lagrange- Dichte enthalten, woraus folgt, daß die V- A- Theorie die *Paritätsverletzung* der schwachen Wechselwirkung impliziert.

Für niedrige Energien mit  $|q^2| \ll M_W^2$  ergibt sich dadurch für die Streuung eine Strom-Strom-Kontaktwechselwirkung:

$$\mathcal{L}_{\text{weak}}^{\text{contact}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left( \bar{v}_\ell \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \ell \right) \left( \bar{\ell} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_\ell \right)$$

Diese Kontaktwechselwirkung kann im jeweiligen Feynman- Graphen dadurch dargestellt werden, daß man das Austauschboson entfallen läßt und sich somit die beiden wechselwirkenden Ströme in einem Vertex berühren.

Herleitung von  $\mathcal{L}_{\text{weak}}^{\text{contact}}$ :

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -\frac{g^2}{2} \left[ \bar{u}(p') \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u(p) \right] \frac{g_{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{M_W^2}}{q - M_W} \left[ \bar{u}(k') \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u(k) \right] \stackrel{q=0}{=} \\ &= \frac{g^2}{8M_W^2} [\bar{u}(p') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p)] [\bar{u}(p') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p)] \end{aligned}$$

mit  $\gamma_\mu g^{\mu\nu} \gamma_\nu = \gamma_\mu \gamma_\nu$ .

$G_F$  ist die Fermi-Konstante:

$$G_F = \frac{\sqrt{2} g^2}{8M_W^2} = 1.16637 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \approx 10^{-5} \cdot M_p^{-2}$$

Daraus ergibt sich:

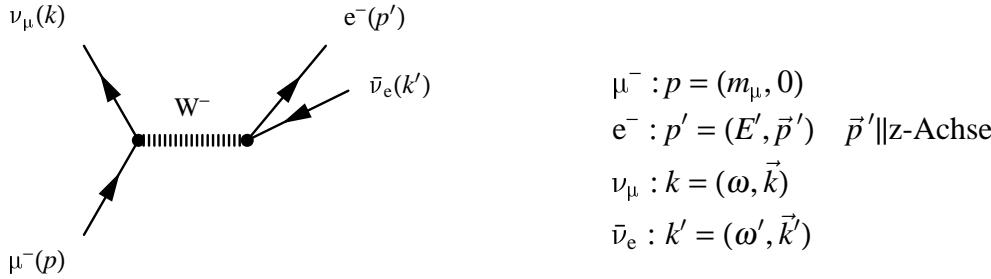
$$\frac{g^2}{4\pi} = \frac{1}{29.6} \quad \left( \text{vergleiche: } \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} \right)$$

Hier erkennt man, dass die schwache Wechselwirkung nur wegen der großen Masse der Austauschteilchen und nicht wegen einer kleinen intrinsischen Kopplungskonstanten schwach ist. Bei hohen Energien ( $|q^2| > M_W^2$ ) wird die schwache Wechselwirkung stärker als die elektromagnetische.

## 7.5 Anwendungen der V-A-Theorie

### 7.5.1 Elektronenspektrum im Myonzerfall

Wir vernachlässigen im weiteren mögliche Komplikationen, die sich durch die starke Wechselwirkung ergeben würden.

**Abb. 7.13:** Impulse beim Myonenzerfall

Das Matrixelement ergibt sich aus Abb. 7.5.1 zu:

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(k) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p) \bar{u}(p') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(k')$$

Wir vernachlässigen nun die Elektronenmasse ( $m_e = 0$ ) und verwenden linkshändige Spinoren für  $\nu_\mu$  und  $e^-$  sowie rechtshändige Spinoren für  $\bar{\nu}_e$ , beispielsweise

$$u(k) = \sqrt{\omega + m_{\nu_\mu}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{k} \end{pmatrix} \chi_-, \quad \vec{\sigma} \cdot \hat{k} \chi_\pm = \pm \chi_\pm$$

Dabei sind:

$$\hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma} \cdot \hat{k} = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \chi_- = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix},$$

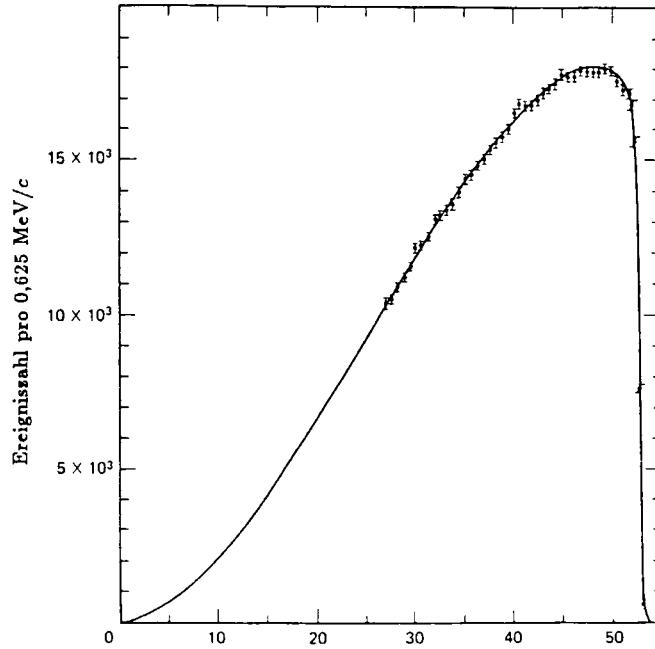
Diese Spinoren berechnen Sie auch in Übung 7.1, Teilaufgabe b). Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(k) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p) \cdot \bar{u}(p') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v(k') = \\ &= 16 G_F \sqrt{m_\mu \omega' \omega E'} \sin \frac{\theta_{\nu_\mu}}{2} \begin{cases} \cos \frac{\theta_{\bar{\nu}_e}}{2} & \text{Myonspin } \uparrow \text{ bzgl. z-Achse} \\ -\sin \frac{\theta_{\bar{\nu}_e}}{2} & \text{Myonspin } \downarrow \text{ bzgl. z-Achse} \end{cases} \end{aligned}$$

Quadriert und summiert man dies unter Verwendung von

$$4\omega E' \sin^2 \frac{\theta_{\nu_\mu}}{2} = 2\omega E' (1 - \cos \theta_{\nu_\mu}) = 2k \cdot p' = (k + p')^2 = (p - k')^2 = m_\mu^2 - 2m_\mu \omega' \quad (7.3)$$

so erhält man



**Abb. 7.14:** Energiespektrum des Elektrons beim Myonzerfall

$$\frac{1}{2} \sum_{\uparrow\downarrow} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = 32 G_F^2 m_\mu^2 \omega' (m_\mu - 2\omega') \quad (7.4)$$

Mit der Dichte der Anfangszustände  $1/(2m_\mu)$ , die man durch Auswerten der Stromdichte eines Klein-Gordon-Feldes für eine ebene Welle erhält, und dem lorentzinvarianten Drei-Teilchen-Phasenraum des Endzustandes, der auch explizit in Übung 7.3 berechnet wird,

$$\frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p' - k - k') = \frac{1}{32\pi^3} dE' d\omega'$$

ergibt sich aus (7.4) die differentielle Zerfallsbreite:

$$\frac{d^2 \Gamma}{d\omega' dE'} = \frac{G_F^2}{2\pi^3} m_\mu \omega' (m_\mu - 2\omega') \quad (7.5)$$

Aus (7.3) lassen sich die möglichen Energiewerte  $\omega'$  des  $\bar{\nu}_e$  bestimmen. Mit  $\theta_{\nu_\mu} = \pi$  ergibt sich zunächst:

$$m_\mu (m_\mu - 2\omega') = 4E' \omega = 4E' (m_\mu - E' - \omega') \Rightarrow \omega' = \frac{m_\mu}{2} - E'$$

Mit  $\theta_{\nu_\mu} = 0$  erhält man dann:

$$\frac{m_\mu}{2} - E' < \omega' < \frac{m_\mu}{2}$$

Über diesen Bereich integrieren wir nun (7.5) über  $\omega'$  und erhalten:

$$\frac{d\Gamma}{dE'} = \int_{\frac{m_\mu}{2} - E'}^{\frac{m_\mu}{2}} d\omega' \frac{d^2\Gamma}{d\omega' dE'} = \frac{m_\mu G_F^2}{12\pi^3} (E')^2 (3m_\mu - 4E') \quad (7.6)$$

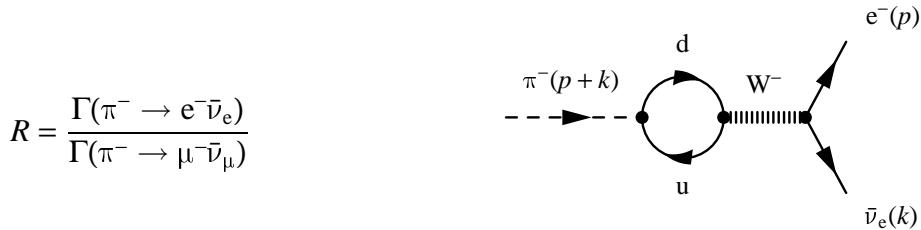
Die Zerfallsbreite des Myons ergibt sich dann durch Integration von  $E' = 0$  bis  $E' = m_\mu/2$ :

$$\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} = (2.197 \cdot 10^{-6} \text{ s})^{-1}$$

(7.7)

Die in (7.7) enthaltene  $m_\mu^5$ -Abhängigkeit wird durch die sog. *Sargent-Regel* beschrieben.

### 7.5.2 Berechnung des R-Verhältnisses beim $\pi$ -Zerfall.



Die relevanten Vektor- bzw. Axialvektorströme der Quarks sind:

$$V_{ud}^\mu(x) = \bar{\Psi}_u(x) \gamma^\mu \Psi_d(x) \quad A_{ud}^\mu(x) = \bar{\Psi}_u(x) \gamma^\mu \gamma^5 \Psi_d(x)$$

Damit gilt:

$$\langle 0 | A_{ud}^\mu(x) | \pi^-(q) \rangle = i\sqrt{2} f_\pi q^\mu \quad \langle 0 | V_{ud}^\mu(x) | \pi^-(q) \rangle = 0$$

$\langle 0 | V_{ud}^\mu(x) | \pi^-(q) \rangle = 0$  gilt wegen der Parität auf der linken bzw. rechten Seite der Gleichung: eine pseudoskalare Größe (hier  $|\pi^-(q)\rangle$ ) mal einem Vektor ergibt einen Axialvektor. In der Gleichung ist jedoch kein Axialvektor vorhanden.

$f_\pi = 92,4 \text{ MeV}$  ist die Pionzerfallskonstante. Für das Matrixelement gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &\propto G_F f_\pi (p^\mu + k^\mu) \bar{u}_\ell(p) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_\nu(k) \propto \\ &\propto \bar{u}_\ell(p) \left( \underbrace{\gamma_\mu p^\mu}_{=m_\ell} (1 - \gamma_5) + \underbrace{\gamma_\mu k^\mu}_{=m_\nu \approx 0} (1 - \gamma_5) \right) v_\nu(k) = \\ &= m_\ell \bar{u}_\ell(p) (1 - \gamma_5) v_\nu(k) \end{aligned}$$

Dabei haben wir  $\{\gamma_\mu, \gamma_5\}_+ = 0$  sowie die Dirac-Gleichung benutzt.

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Spin}} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 &\propto m_\ell^2 p \cdot k = m_\ell^2 (E_\ell E_\nu + \vec{p}_\nu^2) = \\ &= m_\ell^2 E_\nu (E_\ell + E_\nu) = m_\ell^2 E_\nu m_\pi \end{aligned}$$

Aus der Energieerhaltung und mit  $|\vec{p}_\ell| = |\vec{p}_\nu| = |E_\nu|$  bekommt man die Neutrinoenergie:

$$\begin{aligned} m_\pi &= E_\nu + \sqrt{m_\ell^2 + \vec{p}_\ell^2} = E_\nu + \sqrt{m_\ell^2 + E_\nu^2} \\ \Rightarrow E_\nu &= \frac{m_\pi^2 - m_\ell^2}{2m_\pi} \end{aligned}$$

Die Dichte der Anfangszustände ist  $1/(2m_\pi)$ . Wir werten den lorentzinvarianten 2-Teilchen-Phasenraum des Endzustandes im Schwerpunktsystem  $P^\mu = (m_\pi, 0)$  aus und erhalten:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_\ell} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E_\nu} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - p - k) = \\ \frac{1}{4\pi^2} 4\pi \int dp p^2 \frac{1}{E_\ell E_\nu} \delta(m_\pi - E_\ell(p) - E_\nu(p)) = \\ = \frac{1}{4\pi} \frac{p^2}{E_\ell E_\nu} \frac{E_\ell E_\nu}{pm_\pi} = \frac{|\vec{p}_\nu|}{4\pi m_\pi} = \frac{E_\nu}{4\pi m_\pi} = \frac{m_\pi^2 - m_\ell^2}{8\pi m_\pi^2}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

Daraus ergibt sich:

$$\Gamma(\pi \rightarrow \ell \bar{\nu}_\ell) \propto m_\ell^2 (m_\pi^2 - m_\ell^2)^2$$

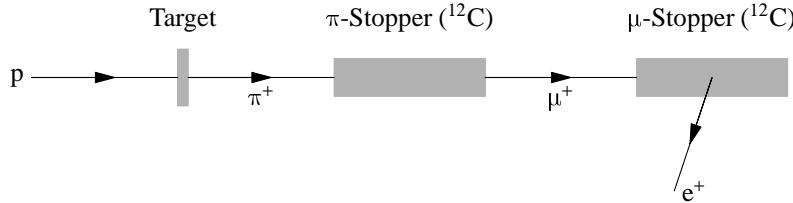
Woraus man schließlich das Verhältnis

$$R = \left( \frac{m_e (m_\pi^2 - m_e^2)}{m_\mu (m_\pi^2 - m_\mu^2)} \right)^2 = 1.28 \cdot 10^{-4}$$

erhält, was gut mit dem experimentellen Wert von  $R = (1.27 \pm 0.23) \cdot 10^{-4}$  übereinstimmt. Im Gegensatz dazu ist das Phasenraumverhältnis  $R_{\text{Phasenraum}} = (m_\pi^2 - m_e^2)/(m_\pi^2 - m_\mu^2) \approx 2.34$  grob falsch. Der Grund dafür ist, dass nur linkshändige Leptonen und rechtshändige Antileptonen an die  $W^\pm$ -Bosonen koppeln,  $P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)$ . Nur für masselose Leptonen gilt dabei Chiralität=Helizität, bei massiven Leptonen ist die Chiralität  $\neq$  Helizität, und der Anteil positiver Helizität eines linkshändigen Leptons geht wie

$$1 - \beta_\ell^2 = 1 - \frac{V^2}{c^2} = 1 - \frac{\vec{p}_\ell^2}{E_\ell^2} = \frac{E_\ell^2 - \vec{p}_\ell^2}{E_\ell^2} = \frac{m_\ell^2}{E_\ell^2}.$$

Da  $m_\mu \gg m_e$  ist, gilt beim  $\pi$ -Zerfall ( $m_\pi > m_\mu$ )

**Abb. 7.15:** Experiment zur Untersuchung des  $\mu$ -Zerfalls

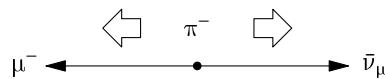
$$\frac{V_\mu}{c} \ll \frac{V_e}{c} \approx 1$$

Beim K-Zerfall findet man den gleichen Sachverhalt, jedoch ist hier der Effekt größer, da der e-Impuls noch größer ist ( $m_K \approx 490 \text{ MeV}/c^2$ ):

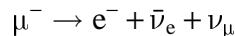
$$R_K = \frac{K \rightarrow e\nu}{K \rightarrow \mu\nu} = 2.5 \cdot 10^{-5}$$

### 7.5.3 Paritätsverletzung bei $\pi$ - und $\mu$ -Zerfall

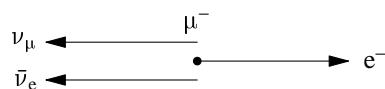
Der  $\pi$ -Zerfall erfolgt als Zweikörperzerfall:  $\pi \rightarrow \mu + \nu_\mu$ , wobei der Spin der Pionen  $S(\pi) = 0$  ist. Ein möglicher experimenteller Aufbau zur Untersuchung dieses Zerfalls und der daraus entstehenden Myonen ist in Abb. 7.15 dargestellt. Wir wissen, dass das entstehende Antineutrino rechtshändig ist. Wegen der Drehimpulserhaltung müssen dann die Myonen polarisiert sein:

**Abb. 7.16:** Spinverhältnisse bei  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ . Das  $\bar{\nu}_\mu$  ist rechtshändig.

Um nun den Myonzerfall zu untersuchen, werden die  $\mu$  aus dem Pionzerfall gestoppt. Die Myonen zerfallen dann in Ruhe mit der Lebensdauer  $\tau_\mu = 2.19 \mu\text{s}$ :



Bei diesem Übergang wollen wir jetzt die Winkelverteilung der emittierten Elektronen bestimmen. Da im Elektronenspektrum hohe Energien bevorzugt sind, betrachten wir dabei nur den Fall, bei dem das  $e^-$  den maximalen Rückstoß erhält (Abb. 7.17). In diesem Fall sind die ersten zwei in Abb. 7.18 abgebildeten Konfigurationen möglich, eine mit rechts- und eine mit linkshändigem Elektron. Wie wir sehen werden ist Fall b) deutlich bevorzugt.

**Abb. 7.17:** Myonzerfall mit maximalem  $e^-$ -Rückstoß

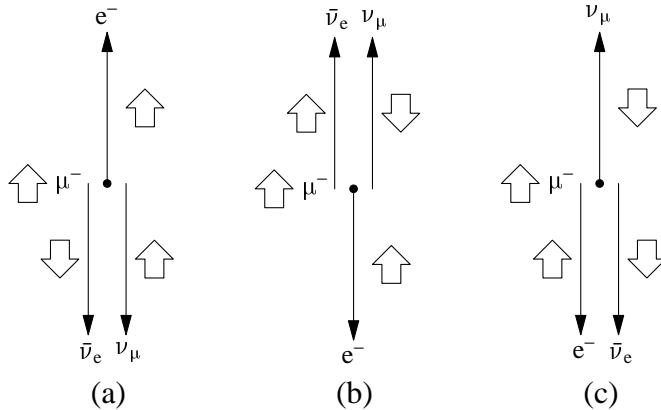


Abb. 7.18: Spinkonfigurationen beim Myonzerfall

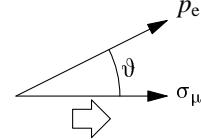
Die Helizität für massive Teilchen ist gegeben durch:

$$H = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_c}{|\vec{\sigma}| |E|} = \frac{\vec{\sigma}}{|\vec{\sigma}|} \cdot \vec{\beta} = \frac{\vec{\sigma}}{|\vec{\sigma}|} \cdot \frac{\vec{V}}{c}$$

Für  $E \gg mc^2$ , d. h.  $\beta \approx 1$ , ist die Helizität eine gute Quantenzahl, unabhängig vom Bezugssystem.

Die für das Elektron gefundene Winkelverteilung hat die Form:

$$\frac{dN}{d\Omega} = 1 - \frac{\alpha}{3} \cos \theta$$



Die cos-Verteilung ergibt sich wegen  $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = |\vec{\sigma}| |\vec{p}| \cos \theta$ . Der Faktor  $\frac{1}{3}$  berücksichtigt, dass auch Fälle mit kleineren Elektronenenergien möglich sind (Abb. 7.18c).

Gemessen wurde  $\alpha = 1$ , was einer maximalen Asymmetrie und somit einer maximalen Paritätsverletzung entspricht. Wir können deshalb folgern:

In der schwachen Wechselwirkung haben alle Leptonen die Helizität

$$H = \begin{cases} +\frac{V}{c} & \text{für Antileptonen } (e^+, \bar{\nu}, \dots) \\ -\frac{V}{c} & \text{für Leptonen } (e^-, \nu, \dots) \end{cases} \quad (7.9)$$

Wir haben also gesehen, dass die schwache Wechselwirkung die  $\varphi$ -Invarianz verletzt:

$$\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_L) \neq \Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_R) = 0$$

Ebenso wird die  $c$ -Invarianz verletzt:

$$\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_L) \neq \Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_L) = 0$$

Dagegen bleibt die  $\mathcal{CP}$ -Invarianz erhalten:

$$\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_L) = \Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_R)$$

Später werden wir allerdings noch Beispiele sehen, in denen  $\mathcal{CP}$  nicht erhalten ist (K- und B-Zerfall).

Aus dem  $\mu$ -Zerfall können wir noch weitere Informationen gewinnen:

**$\mu$ -Lebensdauer:** Nach der Sargent-Regel zum 3-Körper- $\beta$ -Zerfall (s. Kap. 7.5.1) ist die Zerfallsbreite des Myons:

$$\Gamma_\mu = \frac{\hbar}{\tau_\mu} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \quad (7.10)$$

Lebensdauer und Masse des  $\mu$  sind sehr genau bekannt:

$$\begin{aligned} m_\mu &= (105.658389 \pm 0.000034) \text{ MeV}/c^2 \\ \tau_\mu &= (2.197035 \pm 0.000040) \cdot 10^{-6} \text{ s} \end{aligned}$$

Aus diesen Daten lässt sich mit (7.10) die Fermi-Kopplungskonstante sehr genau bestimmen:

$$G_F = (1.16639 \pm 0.00002) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

Dabei definieren wir:

$$G_F = \frac{\sqrt{2}g^2}{8M_W^2} \quad \text{für} \quad E \ll M_W^2$$

In Abb. 7.19 ist das komplette Elektronenspektrum aus dem Zerfall gestoppter Pionen abgebildet.

#### 7.5.4 $\tau$ -Zerfälle

Das  $\tau$ -Lepton wurde 1975 durch Martin Pearl et. al. bei  $e^+e^-$ -Streuung am SLAC<sup>5</sup> entdeckt (Nobelpreis 1995, Kap. 7.2<sup>6</sup>). Wegen seiner großen Masse,  $m_\tau \approx 1.78 \text{ GeV} \gg m_\mu$ , kann das  $\tau$  nicht nur in Leptonen sondern auch in Mesonen zerfallen:

<sup>5</sup><http://www.slac.stanford.edu/>

<sup>6</sup><http://www.nobel.se/laureates/physics-1995.html>

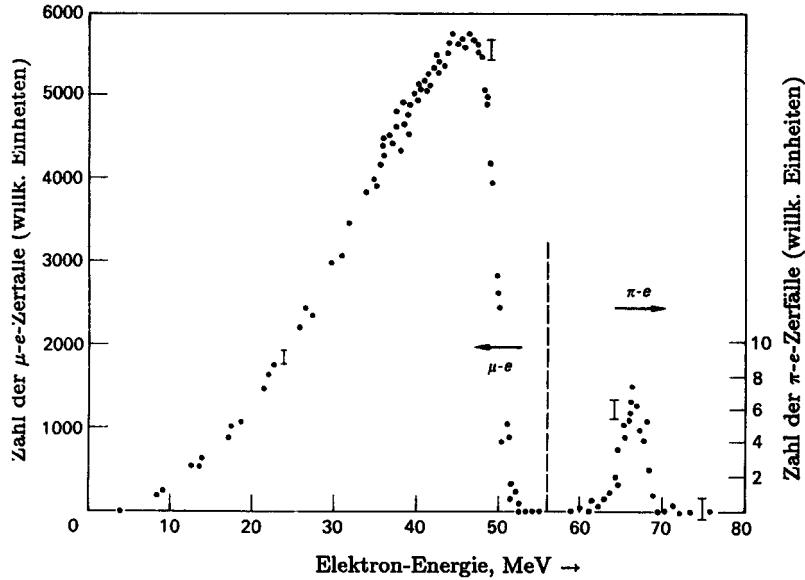


Abb. 7.19: e-Spektrum gestoppter Pionen

$$\begin{aligned}
 \tau^- &\rightarrow \nu_\tau + \bar{\nu}_e + e^- \\
 \tau^- &\rightarrow \nu_\tau + \bar{\nu}_\mu + \mu^- \\
 \tau^- &\rightarrow \nu_\tau + \bar{u} + d \rightarrow \nu_\tau + \text{Mesonen}
 \end{aligned}$$

Bei näherer Betrachtung dieser Zerfälle taucht unweigerlich die Frage auf, ob die Kopplungsstärke der schwachen Wechselwirkung für Leptonen und Quarks gleich groß ist. Wir nehmen an, dass die Masse der Mesonen und Leptonen im Endzustand vernachlässigbar ist ( $m_\tau \gg m_X$ ). Dann ist:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\tau e} &\approx \Gamma_{\tau \mu} \\
 \Gamma_{\tau u \bar{d}} &\approx 3 \cdot \Gamma_{\tau \mu}
 \end{aligned}$$

Dabei kommt der Faktor 3 durch die drei Farbladungen zustande (analog (6.1)). Wie groß sind nun diese Zerfallsbreiten? Wir haben in Abschn. 7.5.1 die  $\mu$ -Zerfallsbreite (7.7) hergeleitet, aus der folgt:

$$\Gamma_{\tau e} = \left( \frac{m_\tau}{m_\mu} \right)^5 \Gamma_{\mu e}$$

Damit ergibt sich mit den partiellen Breiten  $\Gamma_i$ :

$$\Gamma_{\text{tot}} = \sum_i \Gamma_i = \Gamma_{\tau \rightarrow e} + \Gamma_{\tau \rightarrow \mu} + \underbrace{\Gamma_{\tau \rightarrow u \bar{d}}}_{3\Gamma_{\tau \rightarrow e}} \approx 5\Gamma_{\tau e} = 5\Gamma_{\mu e} \left( \frac{m_\tau}{m_\mu} \right)^5$$

Die Lebensdauer ist dann:

$$\tau_\tau = \frac{\hbar}{\Gamma_{\text{tot}}} \approx \frac{\hbar}{5\Gamma_{\mu e}} \cdot \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^5 = \frac{\tau_\mu}{5} \cdot \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^5 = 3.1 \cdot 10^{-13} \text{ s}$$

Experimentell findet man:

$$\tau_\tau = (2.956 \pm 0.031) \cdot 10^{-13} \text{ s}$$

Diese gute Übereinstimmung gibt Anlaß zu der Hypothese, dass die Kopplung der W-Bosonen an Quarks und Leptonen identisch ist. Man bezeichnet dies als *Universalität der schwachen Wechselwirkung*.

### 7.5.5 Zerfall schwerer Mesonen

Im Folgenden werden wir untersuchen, ob sich die Betrachtungen zum  $\tau$ -Lepton auf schwere Mesonen übertragen lassen. Bei diesen sind mit

$$m_c \approx 1.35 \text{ GeV} \quad m_b \approx 4.9 \text{ GeV}$$

die Massen der Quarks groß im Vergleich zu ihrer „Bindungsenergie“ im Meson<sup>7</sup>. Es sind beispielsweise:

$$m_D = 1.864 \text{ GeV} \quad m_B = 5.278 \text{ GeV}$$

Da im Bereich der Quarkmassen  $\alpha_s(Q^2 \approx m_q^2) \ll 1$  gilt, sollten die Effekte der starken Wechselwirkung klein sein. Analog zum  $\tau$ -Zerfall sollte sich aus der Sargent-Regel ergeben:

$$\tau_D \approx \tau_\mu \cdot \frac{1}{8} \left(\frac{m_\mu}{m_c}\right)^5 \approx 0.7 \cdot 10^{-12} \text{ s}$$

Der Faktor 1/4 ergibt sich wegen der möglichen Endzustände  $c \rightarrow W^+s, W^+d$  sowie zweier leptonischer Endzustände. Experimentell findet man in guter Übereinstimmung:

$$\tau_D \approx 1.0 \cdot 10^{-12} \text{ s}$$

Für B-Mesonen gilt analog:

$$\tau_B \approx \tau_\mu \cdot \frac{1}{9} \left(\frac{m_\mu}{m_b}\right)^5 \approx 0.73 \cdot 10^{-15} \text{ s}$$

Hier ist wegen der größeren b-Masse auch der Zerfall in den Tau-Kanal möglich. Man erhält als Endkanäle also:  $e, \mu, \tau, c, u$  (beide Quarkflavours jeweils gewichtet mit einem Faktor 3, wegen

<sup>7</sup>Quarkmassen sind im Vergleich zu Leptonenmassen prinzipiell schwer bestimmbar, da sie nicht frei beobachtet werden können. Diese Werte sind also Richtwerte.

der möglichen Farben), wodurch der Vorfaktor  $\frac{1}{9}$  zustande kommt. Experimentell findet man jedoch:

$$\tau_B \approx 1.65 \cdot 10^{-12} \text{ s}$$

Es stellt sich also die Frage: Warum stimmt die Sargent-Regel für  $\Delta c = 1$ , nicht aber für  $\Delta s = 1$  und  $\Delta b = 1$ ? Bei den s- und b-Zerfällen findet ein Übergang von der zweiten in die erste bzw. von der dritten in die zweite Quarkgeneration statt. Wie wir in Abschn. 7.8 sehen werden, sind die Quarkübergänge nicht alle gleichwertig. Sie werden durch eine „Übergangs“- oder Mischungsmatrix, die CKM-Matrix, beschrieben.

## 7.6 Neutronenzerfall

**Zerfallsrate (Lebensdauer):** Wir betrachten den Neutronenzerfall, also

$$n \rightarrow e^- + p + \bar{\nu}_e .$$

Mit der differentiellen Zerfallsrate  $dW/dE_e$  gilt:

$$\frac{\hbar}{\tau} = W = \int_0^{E_{\max}} \frac{dW}{dE_e} dE_e = G_F^2 \int_0^{E_{\max}} \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{d\rho(E_{\max}, E_e)}{dE_e} dE_e \quad (7.11)$$

Für kleine  $E_{\max}$  ist  $\mathcal{M}_{fi}$  konstant, d.h. unabhängig von der Energie  $E_e$ . Wir berechnen nun den dreiteilchen Phasenraum. Es seien  $q$  und  $E_\nu$  Impuls und Energie des  $\bar{\nu}$  sowie  $p$  und  $E_e$  bzw.  $P$  und  $T$  Impuls und kinetische Energie von  $e^-$  bzw.  $p$ . Nimmt man an, dass das Neutron am Anfang in Ruhe ist, muß außerdem

$$\vec{P} + \vec{p} + \vec{q} = 0 \quad (7.12)$$

und damit

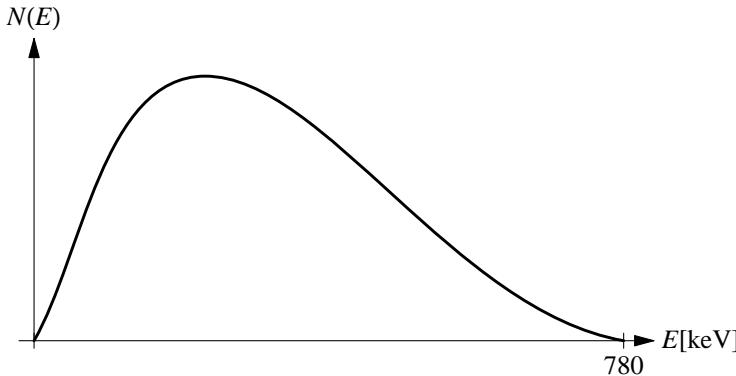
$$T + E_\nu + E_e = E_0 = \text{freiwerdende Energie} = E_{\max} \approx 780 \text{ keV} \quad (7.13)$$

sein. Mit  $E_0 \lesssim 1 \text{ MeV}$  folgt aus (7.12) außerdem, dass  $P_c \lesssim 1 \text{ MeV}$ . Das bedeutet, dass man die kinetische Energie des Protons vernachlässigen kann:

$$T = \frac{P^2}{2M_p} \lesssim 10^{-3} \text{ MeV}$$

Unter Verwendung von  $m_\nu = 0$  erhält man damit aus (7.13):

$$E_\nu = qc = E_0 - E_e \quad (7.14)$$



**Abb. 7.20:** Elektronenspektrum beim  $\beta$ -Zerfall

Wir integrieren nun die Anzahl der Phasenraumzustände für Elektronen im Volumen  $V$  mit Impulsen  $[p, p + dp]$  in Richtung des Raumwinkelelements  $d\Omega$ ,

$$N = \frac{V d\Omega}{h^3} p^2 dp,$$

über alle Raumwinkel. Der Faktor  $V$  fällt wegen der Normierung der Wellenfunktion auf  $1/\sqrt{V}$  weg. Damit und aus der analogen Vorgehensweise für das Neutrino erhalten wir:

$$d\rho_e = \frac{4\pi p^2}{h^3} dp \quad \text{für das Elektron}$$

$$d\rho_\nu = \frac{4\pi q^2}{h^3} dq \quad \text{für das Neutrino}$$

Der Impuls des Protons ist bei gegebenen  $\vec{p}$  und  $\vec{q}$  festgelegt,  $P = -(p + q)$ . Da wir in (7.11) nur über  $E_e$  integrieren, betrachten wir die Zahl der möglichen Endzustände bei fester Elektronenenergie:

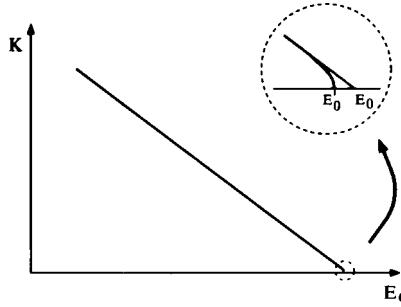
$$d^2\rho(E_e, E_0) = d^2\rho(E, E_0) = d\rho_e \cdot d\rho_\nu = \underbrace{\frac{16\pi^2}{h^6} p^2 q^2 dp dq}_{\substack{\text{Produkt der Anzahl} \\ \text{der Zustände für } e, \bar{\nu}}} \quad (7.15)$$

Verwendung von (7.14) und  $dq = dE_0/c$  (bei fester Elektronenenergie) liefert schließlich das Elektronenspektrum eines  $\beta$ -Zerfalls (Abb. 7.20):

$$\frac{d^2\rho(E_e, E_0)}{dE_0} = \frac{16\pi^2}{h^6 c^3} p^2 (E_0 - E_e)^2 dp = N(p) dp \quad (7.16)$$

Meistens wird für das  $e^-$ -Spektrum beim  $\beta$ -Zerfall ( $n$ , Kerne) eine andere Darstellung gewählt:

$$\underline{\text{Kurie-Diagramm:}} \quad \sqrt{\frac{N(p)}{p^2}} \text{ gegen } E$$



**Abb. 7.21:** Kurieplot des Elektronenspektrums

In dieser Darstellung liegt das Elektronenspektrum (bei verschwindender Neutrinomasse) auf einer Geraden. Abweichungen von der Geraden-Form können Hinweise auf eine endliche Masse des Elektron-Neutrinos geben, der Endpunkt des Spektrums müßte um  $|m_\nu|$  verschoben sein. Bisher konnte man hieraus jedoch nur eine obere Grenze für die  $\nu_e$ -Masse bestimmen. Das derzeit beste Limit haben Otten (Mainz) und Lobashev (Troitsk) aus dem Tritium-Zerfall  ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$  bestimmt:  $m_{\nu_e} \lesssim 2.5 \text{ eV}/c^2$ . Allgemein ist allerdings anzumerken, daß die momentan niedrigste Obergrenze zur Neutrinomasse indirekt aus der Astrophysik erhalten wird und nicht aus der Teilchenphysik.

Integriert man die Phasenraumdichte (7.16) unter der Annahme, dass  $E \approx pc$  (relativistische Näherung), so erhält man:

$$\rho(E_0) \approx \int_0^{E_0} E_e^2 (E_0 - E_e)^2 dE_e = \frac{E_0^5}{30} \quad (7.17)$$

Die Abhängigkeit von der fünften Potenz von  $E_0$  ist die bekannte *Sargent-Regel*, der wir auch in (7.7) beim Myonzerfall begegnet sind.

Für die Berechnungen haben wir nur den Phasenraum betrachtet. Genauere Beschreibungen des Matrixelementes folgt im weiteren Verlauf der Kapitels. Da das Matrixelement für Zerfälle von Quarks und Leptonen aber sehr ähnlich ist, spielt der Phasenraum bei der totalen Übergangsrate eine große Rolle.

**Abschätzung der Neutronlebensdauer:** Unter der Annahme, dass das Übergangsmatrixelement *nicht* von  $E_e$  abhängt, ist die Zerfallsrate des Neutrons

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \int_0^{E_0} \frac{dW}{dE_e} dE_e = \frac{G_F^2 E_0^5}{30\pi^2}.$$

Daraus ergibt sich mit  $G_F = 1.16 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$  (aus dem  $\mu$ -Zerfall) und  $E_0 = 780 \text{ keV}$  eine Lebensdauer von  $\tau \approx 5 \cdot 10^3 \text{ s}$ .

Um das Matrixelement zu bestimmen betrachten wir nun die axiale und vektorielle Kopplung beim Nukleon. Die Übergangsrate wurde bereits in (7.11) dargestellt, das Matrixelement ergibt sich aus Abb. 7.22.

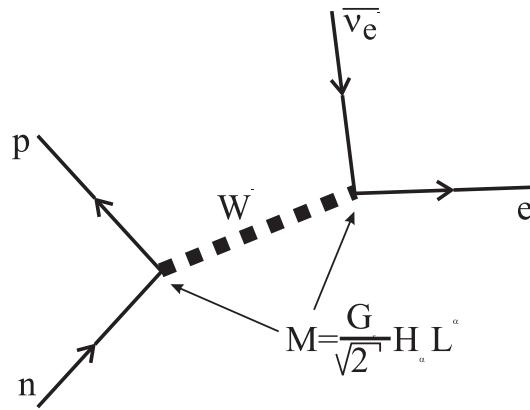


Abb. 7.22: Feynman graph des Neutronenzerfalls

Wir kombinieren den hadronischen und den leptonischen Strom.

Leptonischer Anteil mit den schwachen Ladungen  $c_V = c_A = 1$ :

$$\langle \ell | \bar{l} \gamma^\alpha (c_V - c_A \gamma_5) \nu_e \underbrace{|\nu_e\rangle}_{\text{Wellenfkt.}} = \underbrace{\bar{u}_e(p)}_{\text{Spinor}} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}(p) \quad (7.18)$$

Hadronischer Anteil:

$$\underbrace{\langle p | \bar{u} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) d | n \rangle}_{\text{Quarkstrom}} = V_\alpha - A_\alpha \quad (7.19)$$

Die schwache Wechselwirkung agiert auf dem Quarkniveau. Die Quarks sind aber gleichzeitig auch noch im Nukleon durch die starke Wechselwirkung gebunden.

$$\bar{u}_p(\vec{p}) \gamma_\alpha (g_V + g_A \gamma_5) u_n(\vec{p})$$

Das “+“-Zeichen ist Konvention.  $g_V$  und  $g_A$  sind die schwachen Ladungen des Neutrons. Diese müssen noch bestimmt werden.

Dazu betrachten wir die Spin-Verhältnisse. Es sind sowohl Übergänge möglich, bei denen Elektron und Neutrino zu  $S = 0$  koppeln und das Proton den Neutron-Spin beibehält, als auch solche bei denen der Quarkübergang wegen  $S(e, \bar{\nu}) = 1$  mit einem Spin-Flip verbunden ist:

Fermi-Übergang:  $S(e, \bar{\nu}) = 0 \quad \Delta S(n \rightarrow p) = 0 \quad \text{statistisches Gewicht: } 2S + 1 = 1$

Gamow-Teller-Übergang:  $S(e, \bar{\nu}) = 1 \quad \Delta S(n \rightarrow p) = 1 \quad \text{statistisches Gewicht: } 2S + 1 = 3$

In der schwachen Wechselwirkung sind Leptonen immer linkshändig und Antileptonen immer rechtshändig. Wir betrachten nun den hadronischen Strom, der sich aus den beiden möglichen Zerfällen zusammensetzt:

$$H_\alpha = \underbrace{\langle f | \bar{u} \gamma_\alpha d | i \rangle g_V}_{\text{Fermizerfall}} + \underbrace{\langle f | \bar{u} \gamma_\alpha \gamma_5 d | i \rangle g_A}_{\text{Gamow-Teller-Zerfall}} \quad (7.20)$$

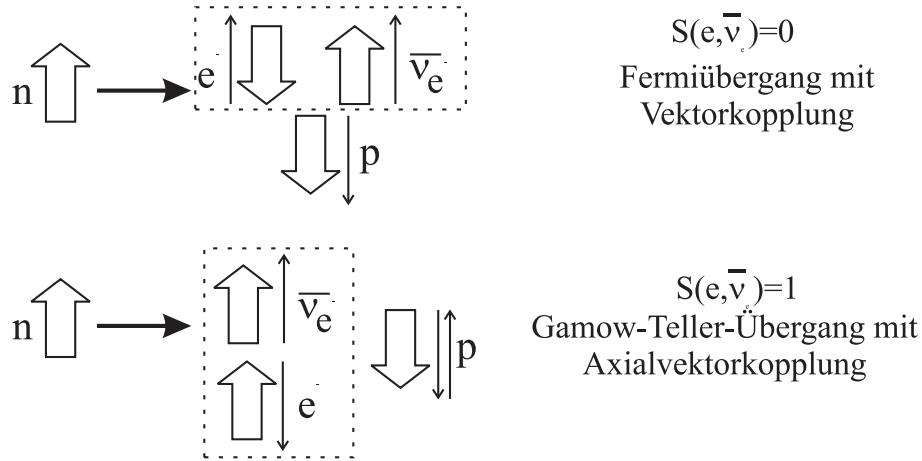


Abb. 7.23: Möglichkeiten des Neutronenzerfalls

## 1. Matrixelement für den Fermizerfall

Betrachte den Übergang Quark  $\leftrightarrow$  Nukleon:

$$|\mathcal{M}_F| = \frac{G_F}{V} c_V |\langle uud | \sum_{i=1}^3 T_i^+ | udd \rangle| \quad (7.21)$$

Die Summe läuft über die drei Valenzquarks des Neutrons. Für die Normierung auf  $V$  gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \approx \frac{1}{R^{3/2}},$$

da  $\lambda_{e,\nu} \gg R_{\text{Nukleon}} \approx 1 \text{ fm}$  gilt.  $T_i^+$  ist der Leiteroperator des schwachen Isospins, er verknüpft die Eigenzustände der schwachen Wechselwirkung  $\langle u |$  und  $\langle d' | = \cos \vartheta_c \langle d |$ , für die starke Wechselwirkung ist  $I^+$  Isospinleiteroperator. Für den Zusammenhang zwischen beiden folgt somit durch die Mischung über den Cabibbowinkel:

$$\langle u | T^+ | d \rangle = \langle u | I^+ | d \rangle \cos \vartheta_c$$

Also gilt auf Grund der Isospinsymmetrie zwischen Neutron und Proton ( $I^+ |n\rangle = |p\rangle$ ):

$$\langle uud | \sum_{i=1}^3 I_i^+ | udd \rangle = 1 \quad (7.22)$$

Für das Matrixelement gilt nun:

$$|\mathcal{M}_{fi}|_F = \frac{G_F}{V} c_V \cos \vartheta_c \cdot 1 \quad (7.23)$$

Also bleibt der Vektorstrom erhalten und wir haben keine Strureffekte der starken Wechselwirkung.

## 2. Gamov-Teller-Übergang

Hier ist der Spin des Systems Elektron-Neutrino  $S_{e\nu_e} = 1$ , es wird also Drehimpuls fortgetragen.

$$|\mathcal{M}_{fi}|_{GT} = \frac{G_F}{V} c_A |\langle uud | \sum_{i=1}^3 T_i^+ \vec{\sigma} | udd \rangle| \quad (7.24)$$

Mit dem Spinoperator  $\vec{\sigma}$ , für den gilt:

$$\left\langle \sum_i \sigma_i^x \right\rangle^2 = \left\langle \sum_i \sigma_i^y \right\rangle^2 = \left\langle \sum_i \sigma_i^z \right\rangle^2$$

Es lässt sich zeigen<sup>8</sup>, dass gilt:

$$\langle uud | \sum_{i=1}^3 I_i^+ \vec{\sigma} | udd \rangle \cos \vartheta_c = \frac{5}{3} \cos \vartheta_c$$

Aus unserer Diskussion zur Struktur des Nukleons, sowie zur starken Wechselwirkung kennen wir die Wellenfunktion des Protons:

$$\langle p | = \langle uud | = \sqrt{\frac{2}{3}} \langle u \uparrow u \uparrow d \downarrow | - \sqrt{\frac{1}{6}} \langle u \uparrow u \downarrow d \uparrow | - \sqrt{\frac{1}{6}} \langle u \downarrow u \uparrow d \uparrow |$$

Hiermit ergibt sich:

$$g_A = \cos \vartheta_c C_A \cdot \frac{5}{3} \quad (7.25)$$

$$g_V = \cos \vartheta_c C_A \quad (7.26)$$

Damit ergibt sich für das Matrixelement mit dem starken Isospindublett  $|p\rangle = I^+|n\rangle$ :

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{g_V^2}{V^2} |\langle p | I^+ | n \rangle|^2 + \frac{g_A^2}{V^2} |\langle p | I_+ \vec{\sigma} | n \rangle|^2 = \frac{g_V^2 + 3g_A^2}{V^2} G_F^2 \quad (7.27)$$

$I_+ \vec{\sigma}$  gibt einen Faktor 3, wegen der dreifachen Evaluierung von  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\sigma_z$ .

Es gibt insgesamt *vier* verschiedene Zerfallsconfigurationen. Die Vektorkomponente hat hierbei das statistische Gewicht 1; die Axialvektorkomponente eines von 3, welches den 3 Einstellungsmöglichkeiten des weggetragenen Spins resultiert (Anzahl( $m_s$ ) =  $2(s+1)$ ). Folglich erwartet man mit  $g_V = g_A = 1$  für die Lebensdauer  $\tau \approx 1316$  s. Mit dem gemessenen Verhältnis von  $g_V/g_A$  ergibt sich  $\tau = 914$  s.

Tatsächlich beobachtet man jedoch:

$$\tau = 886 \text{ s} \pm 1 \text{ s}$$

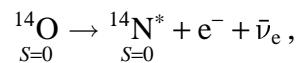
Zu unserer Rechnung sind allerdings auch noch Korrekturen notwendig, da das Elektron ja nicht immer relativistisch ist und deshalb die Integration in (7.17) nicht ganz korrekt sein kann. Darüber hinaus verursacht die starke Wechselwirkung ebenfalls Abweichungen.

<sup>8</sup>Sukzessives Anwenden des Operators auf die vollständige Spin-Flavour-Wellenfunktion des Protons (siehe Kap. 6.9.1)

**Hinweis zur W-Emission im n-Zerfall:** Die *Vektorkopplung* ist das Analogon zur elektromagnetischen Wechselwirkung. Dem zeitartigen ( $q^2 > 0$ ) Photon entsprechend wird ein zeitartiges W (Spin = 0) übertragen. Dies ist ohne 3-Impulsübertrag möglich.

Bei der *Axialvektorkopplung* wird dagegen ein raumartiges ( $q^2 < 0$ ) W emittiert, d. h. die 3-Impuls-Komponenten sind ungleich Null. Dies geht in der elektromagnetischen Wechselwirkung nur bei  $q \neq 0$  über die magnetische Wechselwirkung. Dann wird ein raumartiges virtuelles Photon übertragen.

**Paritätsverletzung beim Neutronenzerfall:** Bei manchen n-Zerfällen in Kernen, etwa



kann es *keinen*  $\Delta S = 1$  Anteil geben, da die Quantenzahl von Mutter- und Tochterkern dies verbieten. Es handelt sich also um einen reinen Vektorübergang. Die Verteilung des  $e, \nu$ -Öffnungswinkels ist dann für  $E_e \gg m_e$  wegen  $\vec{p}_\nu \parallel \vec{p}_e$

$$\frac{dN}{d\cos \theta} \propto (1 + \cos \theta).$$

Ebenso beobachten wir Paritätsverletzung beim Zerfall von polarisierten Neutronen. Betrachtet man alle Möglichkeiten (siehe Abb. 7.23), so erkennt man eine Asymmetrie von  $\vec{p}_e$  relativ zu Polarisationsrichtung des Neutrons ( $\uparrow\downarrow$ ).

$$A = \frac{N^{\uparrow\uparrow} - N^{\uparrow\downarrow}}{N^{\uparrow\uparrow} + N^{\uparrow\downarrow}} = -2 \frac{\lambda(\lambda + 1)}{(1 + 3\lambda^2)} \quad \text{mit } \lambda = \frac{g_A}{g_V}$$

Man misst  $A = -0,1162 \pm 0,0013$ . Daraus ergibt sich  $\lambda = -1,267 \pm 0,004$ . Erwartet wurde aus der Theorie ein Wert von  $\lambda^{\text{th}} = -5/3$ .

Die Tatsache, dass die Formel  $g_A = c_A \cdot \cos \vartheta_c$  nicht gilt, nennt man auch *Partially conserved Axial Current* oder kurz *PCAC*.

**Experimentelle Bestimmung der n-Lebensdauer:** Sie läuft stets nach folgendem Prinzip ab: Man bestimmt die zeitliche Abnahme eines Ensembles von Neutronen aufgrund des  $\beta$ -Zerfalls. Die „lange“ Lebensdauer von ca. 15 Minuten stellt in der Praxis jedoch ein großes Problem dar. Eine Methode, um damit zurechtzukommen, ist die Speicherung von VCN (very cold neutrons,  $V_n \approx 50 \text{ m/s}$ ) oder UCN (ultra cold neutrons,  $V_n \approx 5 \text{ m/s}$ ,  $E_{\text{kin}} \approx 10^{-7} \text{ eV}$ ) in magnetischen Ringen, Materieflaschen oder im Gravitationsfeld.

Als Beispiel ist in Abb. 7.24 die Speicherung von VCN in einem magnetischen Speicherring gezeigt. Dabei wird die Anzahl der nach der Zeit  $t$  überlebenden Neutronen gemessen. Die zugehörige Meßkurve findet sich in Abb. 7.25.

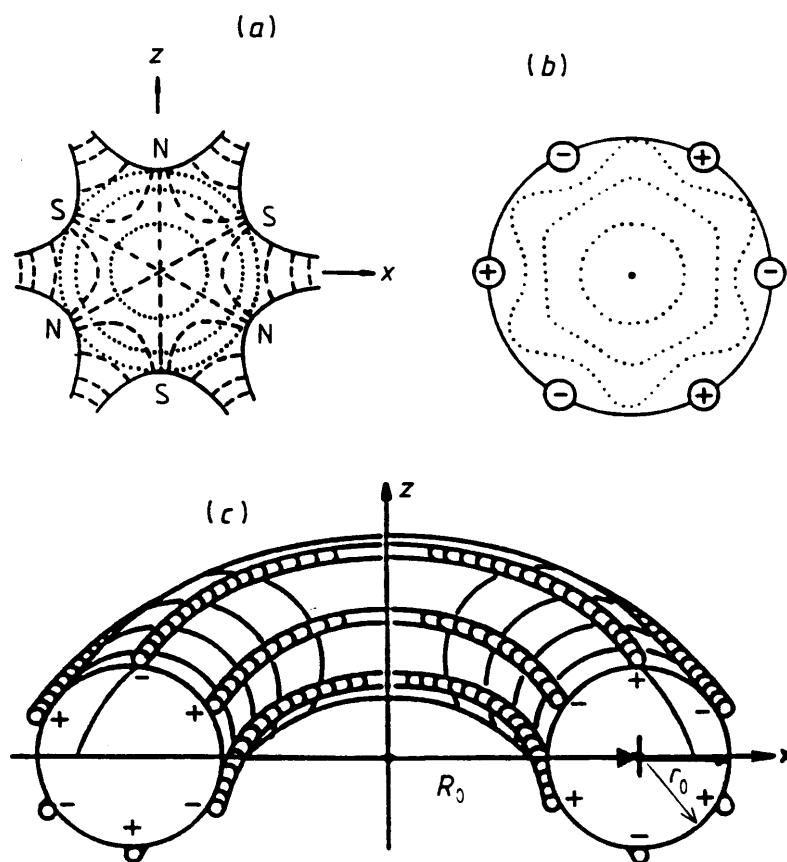


Abb. 7.24: Magnetische Speicherung von Neutronen in einem magnetischen Torus

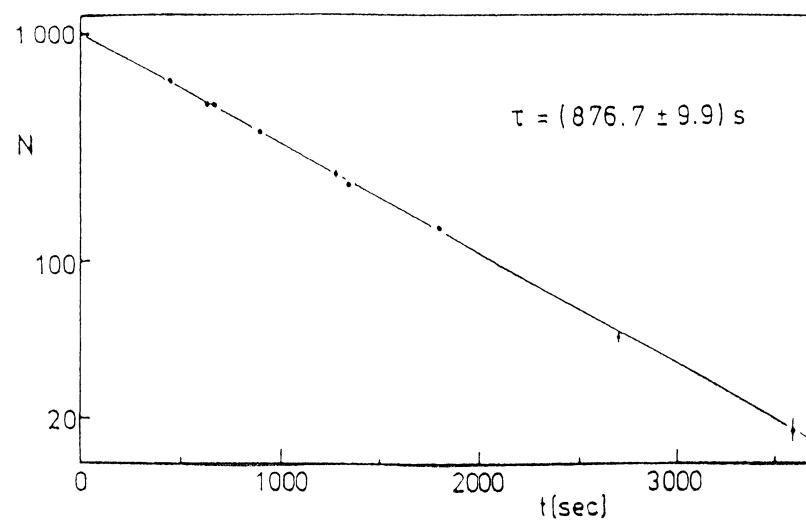
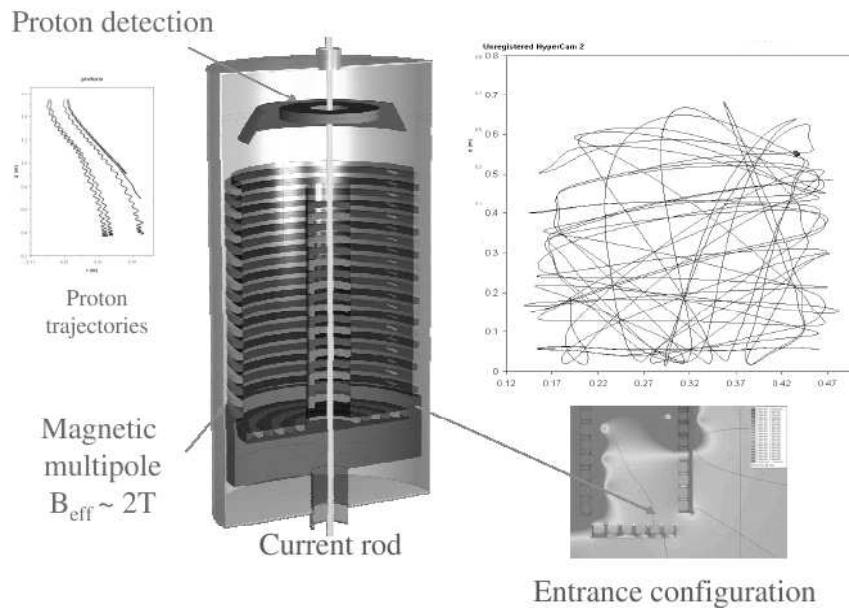


Abb. 7.25: Neutronenlebensdauer im Speicherring (normiert auf  $N = 1000$ )



**Abb. 7.26:** Magnetspeicherring des UCN Experiments am E18

**Speicherung von Neutronen:** Das Neutron hat zwar keine Ladung ( $q = 0$ ), aber ein magnetisches Moment von  $\mu = -1.9\mu_K$ . Somit ergibt sich in einem inhomogenen Magnetfeld eine Kraft auf das Neutron:

$$F_r = \frac{\partial}{\partial r}(\mu \cdot B) = \pm \mu \frac{\partial B}{\partial r}$$

Für lineare rücktreibende Kraft  $F \propto -kr$  muss gelten:

$$\Rightarrow B \propto -r^2 \quad \text{Sextupolfeld, Abb. 7.24}$$

Im Speicherring müssen sich die rücktreibende und die Zentripetalkraft genau aufheben.

$$F_{\text{zentr}} = \frac{mV^2}{r} = F_{\text{rück}} = -kr$$

Aus der Messung der Anzahl der Neutronen in Abhängigkeit von der Zeit ( $N(t)$ ) folgt die Halbwertszeit.

Als Ergebnis auf vielen Messungen hat man  $\tau_n = 885,7 \pm 0,8$  s erhalten. Die neuste Messung (Stand Mai 2006) hat aber einen Wert von  $\tau_n = 878,5 \pm 0,7$  s ergeben.

Ein weiters unabhängiges Experiment wird am Lehrstuhl E18 der TU München durchgeführt (siehe u.a. Abb. 7.26). Hierbei werden UCN in einer magnetischen Falle gespeichert und die Zerfälle mit sehr hoher Präzession bestimmt.

**Messung von  $g_V$  und  $g_A$ :** Aus der Bestimmung der totalen Zerfallsrate  $\Gamma^{\text{tot}}$  und der Halbwertszeit  $\tau_n$  ist der Faktor  $g_V^2 + 3g_A^2$  bestimmbar.

$g_V^2$  ergibt sich aus der totalen Zerfallsrate  $\tau_{n_{\text{Kern}}}$  von Kernzerfällen. Hierbei wählt man Kerne mit den Anfangs- und Endzuständen  $0^+$ . Somit sind nur Fermi-Übergänge möglich.

## 7.7 Hadronische Zerfälle seltsamer Teilchen

### 7.7.1 $\Delta I = 1/2$ – Regel

Als Beispiel betrachten wir den Zerfall des  $\Lambda = |\text{uds}\rangle$ . Mögliche Zerfälle sind:

$$\begin{aligned} d &\rightarrow u + \ell \bar{\nu}_\ell \\ d &\rightarrow u + q_i \bar{q}_j \\ \text{oder } s &\rightarrow u + \ell \bar{\nu}_\ell \\ s &\rightarrow u + q_i \bar{q}_j \end{aligned}$$

Da  $\Gamma_q \propto (m_q c^2)^5$  und  $m_s \gg m_d$  können wir die Zerfälle  $d \rightarrow \dots$  vernachlässigen. Der Grund dafür, dass wir nicht auch  $s \rightarrow d + \dots$  betrachten, ist folgende Eigenschaft der schwachen Wechselwirkung: Es gibt keine flavour-ändernden Zerfälle ohne Ladungsänderung. Die Ursache hierfür werden wir später kennenlernen (siehe Gleichung (7.80)). Das Ergebnis der Be trachtung der obigen Zerfälle ist, dass schwache Hyperonzerfälle ( $\underset{\text{uds}}{\Lambda}, \underset{\text{uds}}{\Sigma}, \underset{\text{uss}}{\Xi}, \underset{\text{sss}}{\Omega}$ ) mit  $\Delta S = 1$  ablaufen. Dies bedeutet, dass die Erhaltung der Quarkflavourquantenzahl, welche in der starken und der elektromagnetischen Wechselwirkung gilt, in der schwachen Wechselwirkung verletzt wird. Der gleiche Sachverhalt ist uns auch schon bei  $\pi$ -, K-, und n-Zerfällen begegnet.

Da Quarks in Hadronen gebunden sind, ist anzunehmen, dass bei ihrem Zerfall auch die starke Wechselwirkung eine Rolle spielt. Wir wenden uns deshalb nun dem Isospin zu:

$$\begin{aligned} s &\rightarrow u + X \\ I = 0 &\rightarrow I = \frac{1}{2} \quad \text{d. h. } \Delta I = \frac{1}{2} \\ I_3 = 0 &\rightarrow I_3 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Wir können uns nun überlegen, ob dies Auswirkungen auf die Selektion möglicher Endzustände hat:

	$\Lambda$	$\rightarrow$	$p$	$\pi^-$	$\Lambda$	$\rightarrow$	$n$	$\pi^0$
$Q$	0		0	0	0		0	0
$I$	0		1/2	1	0		1/2	1
$I_3$	0		1/2	-1	0		-1/2	0

Der Endzustand  $N\pi$  ist ein Gemisch aus:

$$\vec{I}_{1/2} + \vec{I}_{3/2} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

Welche Anteile  $I = 1/2$  und  $I = 3/2$  an den Kombinationen  $p\pi$  bzw.  $n\pi$  haben, sagen uns die Clebsch-Gordan-Koeffizienten:

	$\Lambda \rightarrow p \pi^-$	$\Lambda \rightarrow n \pi^0$
$I_3$	1/2 -1	-1/2 0
$I = 1/2$	2/3 Gewicht	1/3 Gewicht
$I = 3/2$	1/3 Gewicht	2/3 Gewicht

Nehmen wir nun an, dass  $\Delta I = 1/2$ . Dann müßte das  $R$ -Verhältnis sein:

$$R_{\frac{1}{2}}^{\Lambda,\text{th}} = \frac{\Gamma(\Lambda \rightarrow n\pi^0)}{\Gamma(\Lambda \rightarrow n\pi^0) + \Gamma(\Lambda \rightarrow p\pi^-)} = \frac{1}{3} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Phasenraum-} \\ \text{Korrektur}}}{(1+x)}$$

Die Tatsache, dass dies gut mit dem gemessenen Wert von

$$R_{\frac{1}{2}}^{\Lambda,\text{exp}} = 0.358 \pm 0.005$$

übereinstimmt, führt zu der sogenannten  $\Delta I = \frac{1}{2}$ -Regel.

Für **semileptonische Zerfälle**, etwa  $\Lambda \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$ , ist die Isospinregel jedoch nicht definiert. Hier heißt die Auswahlregel:

$$\Delta Q = \Delta S$$

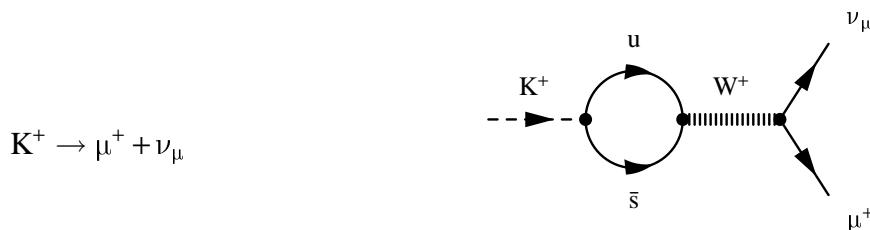
Es gibt aber auch Prozesse, bei denen man eine Abweichung von der  $\Delta I = \frac{1}{2}$ -Regel beobachtet:

$$R_{\frac{1}{2}}^{\Omega,\text{exp}} = \frac{\Gamma(\Omega^- \rightarrow \Xi^0 \pi^-)}{\Gamma(\Omega^- \rightarrow \Xi^- \pi^0)} = 2.94 \pm 0.35 \neq R_{\frac{1}{2}}^{\Omega,\text{th}} = 2$$

Offenbar gibt es eine  $\Delta I = \frac{3}{2}$  Amplitude, die jedoch unterdrückt ist. Man interpretiert dies als Effekt der starken Wechselwirkung, welcher den schwachen Quarkzerfall begleitet. Man beachte: Das  $\Omega$  gehört zum Baryon-Dekuplett, während die anderen Hyperonen zum Oktett gehören. Es handelt sich also nicht um Isospinpartner.

## 7.7.2 $\Delta S = 1$ – Übergänge

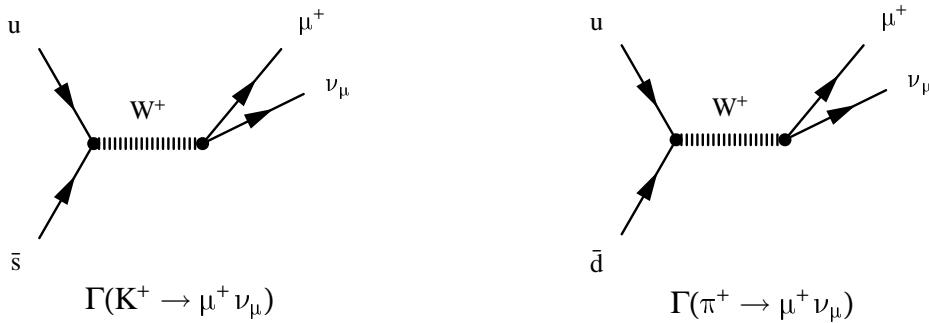
Schwache Zerfälle seltsamer Teilchen laufen auf Quarkniveau analog zum Pionzerfall  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$  ab:



Vergleicht man die beiden Zerfälle (Abb. 7.27), so erwartet man wegen des größeren Phasenraumes beim Kaonzerfall:

$$R^{K,\pi} = \frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)} = \frac{m_\pi^3}{m_K^3} \frac{(m_K^2 - m_\mu^2)^2}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} \approx 20$$

Gemessen hat man jedoch einen Wert von  $R^{K,\pi} = 1.35$ , d. h.  $\Delta S = 1$  Übergänge sind stark unterdrückt. Ähnliche Unterdrückungen findet man auch beim Vergleich der semileptonischen Zerfälle  $\Lambda \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$  kleinere für  $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$ .

Abb. 7.27: Schwache Zerfälle von  $K^+$  und  $\pi^+$ 

## 7.8 Kopplung der W-Bosonen an die Quarkfamilien

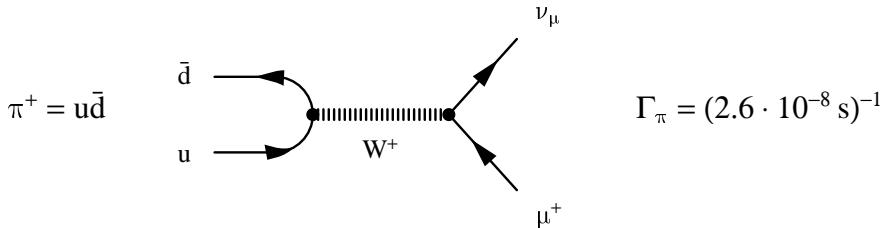
Wie wir inzwischen verstanden haben, vermitteln geladene  $W^\pm$ -Bosonen Übergänge innerhalb der linkshändigen Leptondoublets:

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \left( \begin{array}{c} \nu_e \\ e^- \end{array} \right)_L \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \left( \begin{array}{c} \nu_\mu \\ \mu^- \end{array} \right)_L \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \left( \begin{array}{c} \nu_\tau \\ \tau^- \end{array} \right)_L \\ \downarrow \end{array} \quad Q = 0 \quad Q = -1$$

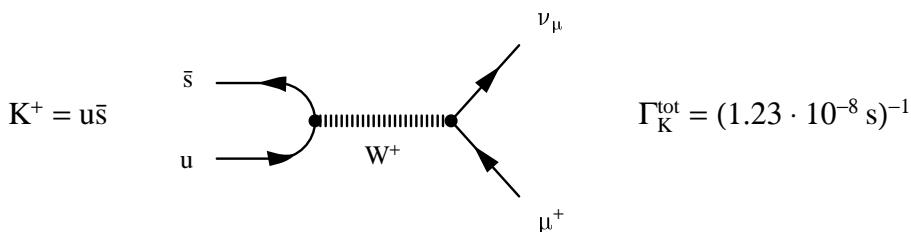
Wir kennen drei separat erhaltene Leptonzahlen; die Fermikonstante  $G_F$  ist universell. Entsprechend den Leptondoublets erwartet man auch Übergänge innerhalb der drei Quarkfamilien:

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \left( \begin{array}{c} u \\ d \end{array} \right)_L \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \left( \begin{array}{c} c \\ s \end{array} \right)_L \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \left( \begin{array}{c} t \\ b \end{array} \right)_L \\ \downarrow \end{array} \quad Q = +\frac{2}{3} \quad Q = -\frac{1}{3}$$

Dadurch würde der Pion-Zerfall  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$  erklärt:



Bei dieser Betrachtungsweise wäre jedoch kein Platz für den semileptonischen Kaon-Zerfall  $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ , der immerhin ein Verzweigungsverhältnis von 63,5% hat:



### 7.8.1 Cabibbo-Hypothese

Umgehen kann man dieses Problem mit der Cabibbo-Hypothese: Man nimmt an, dass das W-Boson Übergänge zwischen dem u-Quark und einer *Linearkombination* aus d- und s-Quark vermittelt:

$$|d'\rangle = \cos \theta_C |d\rangle + \sin \theta_C |s\rangle \quad (7.28)$$

$|d'\rangle$  und  $|s'\rangle$  sind dabei die Eigenzustände der Quarks d und s bezüglich der schwachen Wechselwirkung. Die ungestrichenen Zustände  $|d\rangle$  und  $|s\rangle$  stellen die Masseneigenzustände dar, sprich Eigenzustände zur starken Wechselwirkung. Der Mischungswinkel  $\theta_C$  heißt *Cabibbo-Winkel*. Mit dieser Hypothese lässt sich für die Zerfallsbreite des Kaons zeigen:

$$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell)} \approx \tan^2 \theta_C \left( \frac{m_\pi}{m_K} \right)^3 \left( \frac{m_K^2 - m_\ell^2}{m_\pi^2 - m_\ell^2} \right)^2$$

Experimentell findet man:  $\theta_C \approx 13^\circ$   $\begin{cases} \sin \theta_C = 0.22 \\ \cos \theta_C = 0.97 \end{cases}$

Aus der Cabibbo-Hypothese gelangen wir zu folgender wichtigen Feststellung: Die Masseneigenzustände der Quarks sind *nicht* gleich den schwachen Eigenzuständen, an welche die  $W^\pm$ -Bosonen universell koppeln.

Analog zu (7.28) gibt es auch eine orthogonale Linearkombination,

$$|s'\rangle = -\sin \theta_C |d\rangle + \cos \theta_C |s\rangle, \quad (7.29)$$

die an das c-Quark koppelt.

Betrachtet man beispielsweise den Zerfall des  $D^+$ -Mesons mit  $m_{D^+} = 1869$  MeV, so erwartet man, dass der Übergang  $c \rightarrow s\bar{u}\bar{d} \propto \cos^2 \theta_C$  Cabibbo-erlaubt, der Übergang  $c \rightarrow d\bar{u}\bar{s} \propto \sin^2 \theta_C$  dagegen Cabibbo-verboten ist (man mache sich beide Möglichkeiten an Hand der entsprechenden Diagramme klar). Somit sollten bevorzugt Antikaonen, welche das im erlaubten Übergang erzeugte s-Quark enthalten als Zerfallsprodukte des  $D^+$  auftreten. Experimentell findet man nun folgende Verzweigungsverhältnisse:

$$\begin{aligned} BR(D^+ \rightarrow K^- \dots) &= (24.2 \pm 2.8)\% \\ BR(D^+ \rightarrow K^+ \dots) &= (-5.8 \pm 1.4)\% \\ BR(D^+ \rightarrow \bar{K}^0/K^0 \dots) &= (59.0 \pm 7.0)\% \end{aligned}$$

**GIM-Mechanismus: (1970).** Man fand, dass der Zerfallskanal  $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$  ein sehr kleines Verzweigungsverhältnis, nämlich  $\Gamma(K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-)/\Gamma_{\text{tot}}(K^0) \approx 10^{-7}$ , hat. Außerdem wissen wir, dass flavourändernde neutrale Ströme unterdrückt sind (Kap. 7.7.1). Um zu erklären, warum der Zerfall auch beim geladenen Strom unterdrückt ist, führten Glashow, Iliopoulos und Maiani 1970 hypothetisch das Charm-Quark ein. In Abbildung 7.28 sind die beiden dann möglichen

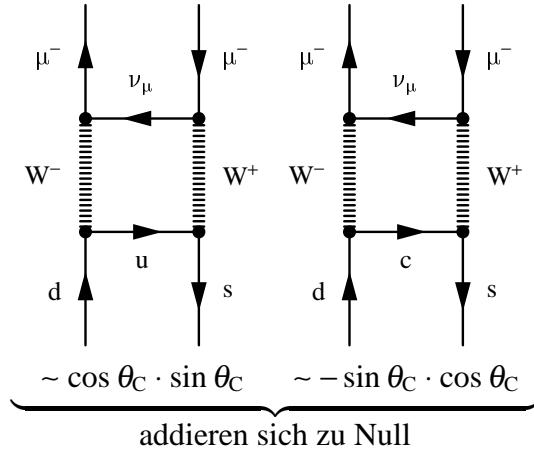


Abb. 7.28: Mögliche CC-Zerfallskanäle bei  $K \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Prozesse gezeigt. Einer alleine hätte eine zu große Wahrscheinlichkeit, um das beobachtete Verzweigungsverhältnis zu erklären. Für  $m_u \approx m_c \ll m_W$  addieren sich jedoch die beiden Amplituden zu Null, so dass das Problem gelöst ist. Der erstmalige experimentelle Nachweis des c-Quarks gelang schließlich 1974 bei der Reaktion

$$e^+ + e^- \rightarrow J/\psi = c\bar{c} \quad (\text{gebundenes System}).$$

Zusammenfassend schreiben wir die Linearkombinationen (7.28) und (7.29) als *Rotation im Flavourraum*:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

schwache Eigenzustände    Masseneigenzustände

Dabei ist es reine Konvention, dass d und s und nicht u und c rotiert werden.

Als  $V-A$ -Ansatz für die schwache Wechselwirkung der Quarks ergibt sich:

$$\mathcal{L}_{\text{Weak}}^{\text{Quarks}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ \bar{\Psi}_u \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \Psi_{d'} + \bar{\Psi}_c \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \Psi_{s'} \right] W_\mu^+ + \left[ \bar{\Psi}_u \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \Psi_{d'} + \bar{\Psi}_c \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \Psi_{s'} \right]^\dagger (W_\mu^+)^{\dagger} \right\}$$

mit

$$\begin{pmatrix} \Psi_{d'} \\ \Psi_{s'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_d \\ \Psi_s \end{pmatrix}$$

### 7.8.2 Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix

Dieses Schema lässt sich auch auf drei Quarkfamilien erweitern. Man erhält dann die *Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix* (1973):

$$\left( \begin{array}{c} d' \\ s' \\ b' \end{array} \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}}_{\text{CKM-Matrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}}_{\text{Massen-eigenzustände}}$$
(7.31)

Die CKM-Matrix ist *unitär*, d. h.  $VV^\dagger = \mathbb{1}$ . Sie wird durch drei Winkel und eine Phase  $\delta$  parametrisiert (kanonische Form). Die Winkel sind die Mischungswinkel zwischen den verschiedenen Generationen  $1 \rightarrow 2$ ,  $1 \rightarrow 3$  und  $2 \rightarrow 3$ . Mit  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  und  $s_{ij} = \sin \theta_i$  gilt für die verschiedenen Drehungen der Zustände:

$$R_1(\theta_{12}) = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Mischung zw. Generation } 1 \leftrightarrow 2} \quad R_2(\theta_{23}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}}_{\text{Mischung zw. Generation } 2 \leftrightarrow 3}$$

$$R_3(\theta_{13}) = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix}}_{\text{Mischung zw. Generation } 1 \leftrightarrow 3}$$

$$V_{CKM} = R_1 R_2 R_3 = \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{-i\delta} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{13} s_{23} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & -c_{12} s_{23} - c_{23} s_{12} s_{13} e^{i\delta} & c_{13} c_{23} \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

$$\left( |V_{ij}| \right) = \begin{pmatrix} 0.9745 \dots 0.9760 & 0.217 \dots 0.224 & 0.0018 \dots 0.0045 \\ 0.217 \dots 0.224 & 0.9737 \dots 0.9752 & 0.036 \dots 0.042 \\ 0.004 \dots 0.013 & 0.035 \dots 0.042 & 0.9991 \dots 0.9994 \end{pmatrix}$$

Wir stellen fest:

- Aus der Unitarität der Matrix folgt z.B.

$$|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 = 1 \quad \text{usw.}$$

- Empirische Informationen über die Matrixelemente:

$\beta$ -Zerfall von Kernen und Myonen  $V_{ud} = 0,9735 \pm 0,0008$

K-Zerfall  $V_{us} = 0,2196 \pm 0,0023$

B-Zerfall  $V_{ub} < 0,01$

D-Zerfall  $V_{cs} = 1.04 \pm 0,16$

$B \rightarrow D$ -Zerfall  $V_{cb} = 0,0402 \pm 0,0019$

- Hierarchie der Generationen:

- Hauptdiagonalelemente  $\approx 1$ : starke Übergänge innerhalb derselben Quarkgeneration
- Elemente neben der Diagonalen klein: schwache Übergänge zur nächsten Generation
- Eckelemente sehr klein: sehr schwache Übergänge zur übernächsten Generation
- Generation 1  $\leftrightarrow$  Generation 2 :  $\approx 0.2$   
 Generation 2  $\leftrightarrow$  Generation 3 :  $\approx 0.04$   $\approx (0, 2)^2$   
 Generation 1  $\leftrightarrow$  Generation 3 :  $\approx 0.008$   $\approx (0, 2)^3$

## 7.9 Axiale und vektorielle Ladung beim Nukleon

Die Übergangsrate des Neutronenzerfalls  $n \rightarrow e^- p \bar{\nu}_e$  ist uns aus Abschn. 7.6 schon bekannt:

$$dW(E_e) = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \underbrace{\frac{d\rho_f(E_0, E_e)}{dE_e}}_{\text{Dichte der Endzustände } e\bar{\nu}_e} dE_e$$

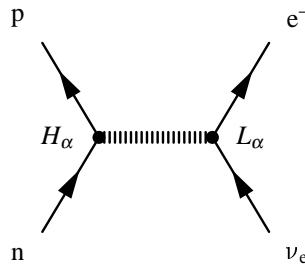
mit  $E_0$  = Gesamtenergie und  $E_e$  = Elektronenenergie.

In diesem Kapitel soll nun näher auf die Details von  $|\mathcal{M}_{fi}|$  eingegangen werden. Aus den letzten Abschnitten wissen wir, daß bei der schwachen Wechselwirkung Vektor- (V) und Axialvektor- (A) Übergänge auftreten.

### Bei Leptonen:

$$L_\alpha = \langle \ell | \underbrace{\gamma_\mu (c_V - c_A \gamma_5)}_{\text{leptonischer Strom}} | \nu_\ell \rangle e^{-ikx} = \bar{u}_\ell(p) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_\ell}(p)$$

Wobei sich aus den Konstanten  $c_V = 1$  und  $c_A = 1$  der Name V-A-Wechselwirkung ableitet.  $c_V$  und  $c_A$  werden auch als schwache vektorielle bzw. axiale Ladung bezeichnet.



**Bei Hadronen:** Beim hadronischen Anteil der schwachen Wechselwirkung agiert sie auf Quarkniveau, wobei die Quarks in den Nukleonen gebunden sind. Hier stellt sich die Frage, ob sie auch im gebundenen System der starken Wechselwirkung immer noch durch V – A beschrieben wird und wie groß die schwachen Ladungen dann sind. Für den hadronischen Anteil des Matrixelements gilt:

$$H_\alpha = V_\alpha - A_\alpha = \bar{u}_p(p)\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma_5)u_n(p) = \left( \underbrace{\langle f | \bar{u} \gamma_\alpha d | i \rangle \cdot g_V}_{\text{Quarkstrom}} - \underbrace{\langle f | \bar{u} \gamma_\alpha \gamma_5 d | i \rangle \cdot g_A}_{\text{Fermizerfall: } S_{e\bar{v}_e} = 0} \right) e^{-ikx}$$

Gamow-Teller-Zerfall:  $S_{e\bar{v}_e} = 1$

Wie groß ist hierbei  $g_V/g_A$ ?

1. Matrixelement für den Fermizerfall:

$$|\mathcal{M}_{fi}|_F = \frac{G_F}{V} c_V \left| \left\langle uud \left| \sum_{i=1}^3 T_i^+ \right| udd \right\rangle \right|$$

Summe über 3 Quarks

Dabei sind:

$V$  Normierungskonstante der Wellenfunktion von e und  $\nu$  (jeweils  $1/\sqrt{V}$ )

$T_i^+$  Isospinleiteroperator (verknüpft  $|u\rangle$  und  $|d'\rangle = \cos \theta_C |d\rangle$ )

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \langle u | T^+ | d \rangle &= \underbrace{\langle u | I^+ | d \rangle}_{\text{starker Isospin}} \cos \theta_C \\ \left\langle uud \left| \sum_i I_i^+ \right| udd \right\rangle &= \mathbb{1} \\ |\mathcal{M}_{fi}|_F &= \frac{G_F}{V} c_V \cos \theta_C \cdot \mathbb{1} \end{aligned}$$

Hierbei tritt also kein Struktureffekt der starken Wechselwirkung auf.

Vektorstrom bleibt erhalten

2. Gamow-Teller-Übergang:

$S_{e\bar{v}_e} = 1$  (Drehimpuls wird weggetragen).

$$|\mathcal{M}_{fi}|_{GT} = \frac{G_F}{V} c_A \left| \left\langle uud \left| \sum_{i=1}^3 T_i^+ \vec{\sigma} \right| udd \right\rangle \right|$$

Wobei  $\vec{\sigma}$  den Spinoperator bezeichnet. Es gilt:

$$\left\langle \sum_i \sigma_{ix} \right\rangle^2 = \left\langle \sum_i \sigma_{iy} \right\rangle^2 = \left\langle \sum_i \sigma_{iz} \right\rangle^2$$

Man kann zeigen, daß

$$\left\langle uud \left| \sum_{i=1}^3 I_i^+ \sigma_{iz} \right| udd \right\rangle \cos \theta_C = \frac{5}{3} \cos \theta_C$$

Hiermit und mit

$$g_A = G_F \cos \theta_C c_A \cdot \frac{5}{3}$$

$$g_V = G_F \cos \theta_C c_V$$

ergibt sich:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{g_V^2}{V^2} |\langle p | I_+ | n \rangle|^2 + \frac{g_A^2}{V^2} |\langle p | I_+ \vec{\sigma} | n \rangle|^2$$

$$= \frac{g_V^2 + 3g_A^2}{V^2}$$

Der Faktor drei folgt aus dem Spinoperator.

p und n befinden sich im Isospindublett:

$$|p\rangle = I_+ |n\rangle$$

**Messung:**  $g_V^2 + 3g_A^2$  wird durch die Bestimmung der totalen Zerfallsrate des freien Neutrons gemessen, d. h. durch  $\tau_{n_{\text{frei}}} = (887 \pm 1)$  s.  $g_V$  wird aus Kernübergängen bestimmt, d. h. durch den Zerfall des gebundenen Neutrons. Durch die Auswahl der Anfangs und Endzustände  $0^+ \rightarrow 0^+$  wird  $S_{(ev)} = 0$ , d. h. der Fermiübergang ausgesucht. Aus dem Zerfall des polarisierten Neutrons und der Bestimmung der  $e^-$ -Winkelverteilung erhält man  $g_V/g_A$ .

Aus all diesen Ergebnissen zusammen ergibt sich:

$$\frac{g_A}{g_V} = +1.2601 \pm 0.0025 \neq 1$$

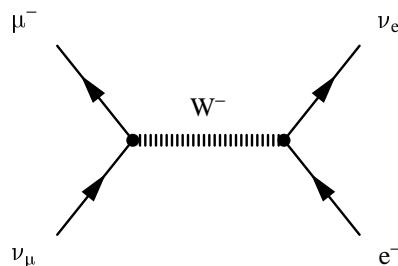
Dies nennt man teilweise erhaltenen Axialvektorstrom, da  $g_A \neq c_A \cdot \cos \theta_C$ :

Partially conserved axial current = PCAC

Hinweis: In manchen Textbüchern wird  $g_A/g_V$  mit negativem Vorzeichen angegeben, wobei die Wechselwirkung als  $g_V V + g_A A$  dargestellt wird.

## 7.10 $\nu$ -Lepton-Streuung

Im folgenden betrachten wir die Streuung eines  $\nu_\mu$  an einem  $e^-$  im Rahmen der V-A-Theorie:



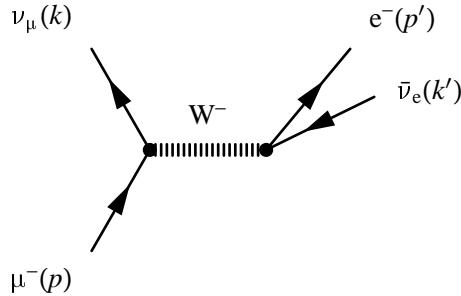


Abb. 7.29: Myonenzerfall

Das Elektron wechselwirkt an dem Neutrino über den geladenen Strom<sup>9</sup>, der die negative Ladung vom rechten in den linken Vertex überträgt. Nun stellt sich die Frage nach dem Wirkungsquerschnitt für ein solches Ereignis. Hierfür liefert Fermis goldene Regel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 \cdot s} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (7.33)$$

Der numerische Faktor  $\frac{1}{64\pi^2 \cdot s}$  kommt durch den zugänglichen Phasenraum sowie durch Flußnormierung zustande, weiterhin haben wir hierbei die Masse der Neutrinos und der Elektronen  $m_\nu = m_e \sim 0$  angenommen.

Zur Bestimmung des Matrixelements  $|\mathcal{M}_{fi}|^2$  nutzen wir die Analogie der Neutrino- Lepton-Streuung zum Myonenzerfall aus (siehe Abb. 7.29:  $\mu^- \rightarrow \nu_\mu \bar{\nu}_e e^-$ , Kap. 7.5.1)

Wir betrachten Streuung bei einer Schwerpunktsenergie  $s \ll M_W^2 c^4$  und berechnen wie beim Myonzerfall:

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = 64 G_F^2 (\vec{k} \cdot \vec{p})(\vec{k}' \cdot \vec{p}')$$

mit der Schwerpunktsenergie  $s = (k + p)^2 = \underbrace{m_{\nu_\mu}^2 + m_e^2}_{\sim 0} + 2\vec{k} \cdot \vec{p} \sim 2\vec{k} \cdot \vec{p} = 2\vec{k}' \cdot \vec{p}'$

Hieraus erhalten wir dann den differentiellen Wirkungsquerschnitt zu:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 \cdot s} \frac{64G_F^2 \cdot s^2}{4} = \frac{G_F^2 \cdot s}{4\pi^2} \quad (7.34)$$

- Der Wirkungsquerschnitt ist isotrop, wegen der kurzreichweiten Wechselwirkung  
Nach der Integration über den Raumwinkel  $\int d\Omega = 4\pi$  erhalten wir:

$$\sigma(\nu_\mu e^-) = \frac{G_F^2}{\pi} \cdot s \quad (7.35)$$

- Der Wirkungsquerschnitt steigt also linear mit der Schwerpunktsenergie  $s$  an.

<sup>9</sup>Bei der Streuung eines  $\nu_e$  wäre zusätzlich der Austausch eines ungeladenen  $Z^0$  möglich, was zu Interferenzen zwischen den beiden Diagrammen führen könnte.



**Abb. 7.30:** Die Impulserhaltung verbietet die Rückwärtsstreuung von rechtshändigen Antineutrinos an linkshändigen Elektronen

Betrachten wir als Beispiel eine Streuung an Eisen im Laborsystem, bei welcher die Elektronen gebunden im Target vorliegen. Die Schwerpunktsenergie ergibt sich zu:

$$s = 2m_e E_\nu + m_e^2 \sim 2m_e E_\nu$$

und wir erhalten für den totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma(\nu_\mu e^-) = \frac{2}{\pi} G_F^2 m_e E_\nu$$

Wächst nun der Wirkungsquerschnitt stets immer weiter an, wenn die Neutrinos höhere Energien haben? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir den Propagator des W- Bosons  $\underbrace{\frac{1}{Q^2 c^2 + M_W^2 c^4}}_{=s}$  und beachten, daß die Fermikopplungskonstante  $G_F \sim \frac{1}{M_W^2 c^4}$  ist (welches aus der Niederenergiennäherung des Propagators hervorgegangen ist):

$$\sigma(\nu_\mu e^-) = \frac{G_F^2}{\pi} \frac{M_W^2 c^4}{s + M_W^2 c^4} \cdot s \rightarrow \text{const.} \quad \text{für } s \rightarrow \infty \quad (7.36)$$

Der Wirkungsquerschnitt wird also für sehr hochenergetische Neutrinos konstant.

Man beachte hier, daß die Streuung eines Elektroneneutrinos an einem Elektron auch noch über den Austausch eines  $Z^0$  Bosons ablaufen kann. Beide Streuprozesse interreferieren daher kohärent. Als numerischen Wert für den totalen Wirkungsquerschnitt der Myonneutrino-Elektron-Streuung erhält man in etwa:  $\sigma(\nu_\mu e^-) \approx 1,7 \cdot 10^{-41} \text{ cm}^2 \cdot E_\nu [\text{GeV}]$ . Dieser Wirkungsquerschnitt ist sehr klein. Um ein Gefühl für den Wirkungsquerschnitt zu erhalten wollen wir überlegen, ob es möglich ist, Neutrinos zu stoppen.

Betrachten wir die Wechselwirkung eines Neutrinos im Eisen mit einer Elektronendichte von  $n_e = \frac{Z}{A} \cdot \rho \cdot N_A = 22 \cdot 10^{23} \frac{\text{e}^-}{\text{cm}^3}$  bei einer Neutrinoenergie von  $E_\nu \approx 1 \text{ MeV}$ , wie sie typischerweise bei Neutrinos auftritt, die bei der Fusionsreaktion unserer Sonne frei werden. Als Abschirmlänge ergibt sich somit  $L = (n_e \sigma)^{-1} \approx 2,6 \cdot 10^{17} \text{ m}$ . Dies stellt eine riesige Länge dar, welche selbst mit dem gesamten, auf der Erde vorhandenen Eisen, nicht erreicht werden kann. Somit läßt sich festhalten, daß es nahezu unmöglich ist, Neutrinos zu stoppen und ebenfalls sehr kompliziert, diese zu verlangsamen.

### 7.10.1 Was passiert bei der Streuung an Antineutrinos?

Da Antineutrinos rechtshändig und Elektronen aus der schwachen Wechselwirkung linkshändig sind, würde bei der Rückwärtsstreuung die Drehimpulserhaltung verletzt (siehe Abb. 7.30).

Somit muß diese im differentiellen Streuquerschnitt unterdrückt sein. Außerdem müssen die Spins von Antineutrino und Elektron in einen Triplettzustand koppeln, von dem nur derjenige mit positiver Spinprojektion zur Reaktion beiträgt (d.h. nur eine von drei möglichen Zwischenzuständen wird verwirklicht)<sup>10</sup>; man erwartet einen Wirkungsquerschnitt, der nur etwa ein Drittel des Wirkungsquerschnittes der Streuung von Elektron und Myonneutrino ausmacht.

Analog zur Mott-Streuung erhält man

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G_F^2(\hbar c)^2}{4\pi} p^{*2} (1 + \cos \vartheta^*)^2 = \frac{G_F^2(\hbar c)^2}{16\pi^2} s (1 - \cos \vartheta^*)^2 \quad (7.37)$$

Hier liefert die Raumwinkelintegration

$$\sigma_{\bar{\nu}e} = \frac{G_F^2(\hbar c)^2}{3\pi} s = \frac{1}{3} \sigma_{\nu e}$$

(7.38)

Diese Betrachtungen gelten aber nur für geladene Ströme. Die Streuung von  $\bar{\nu}$  und  $e^-$  ist aber auch über einen neutralen Strom möglich (siehe 7.10.2).

**Notation:** Häufig verwendet man statt des Streuwinkels die dimensionslose Größe  $y$ . Sie ist Lorentz invariant, da hier nur lorentzinvariante Größen (die Viererimpulse der einlaufenden Teilchen) eingehen.

$$y = \frac{P \cdot Q}{P \cdot K} \quad \text{mit } Q = K - K'$$

Im Laborsystem ergibt sich  $y$  zu:

$$y_{\text{Lab}} = \frac{E - E'}{E} = \frac{\nu}{E} \quad (7.39)$$

$E$  ist die Anfangs- und  $E'$  die Endenergie des Neutrinos;  $y$  ist der abgegebene Energiebruchteil des Neutrinos und läuft von 0 bis 1.

Im CM-System gilt

$$1 - y = \frac{1}{2} (1 + \cos \vartheta^*) .$$

Die obigen Streuformeln sind in dieser Notation recht einprägsam und gelten für alle geladenen Ströme:

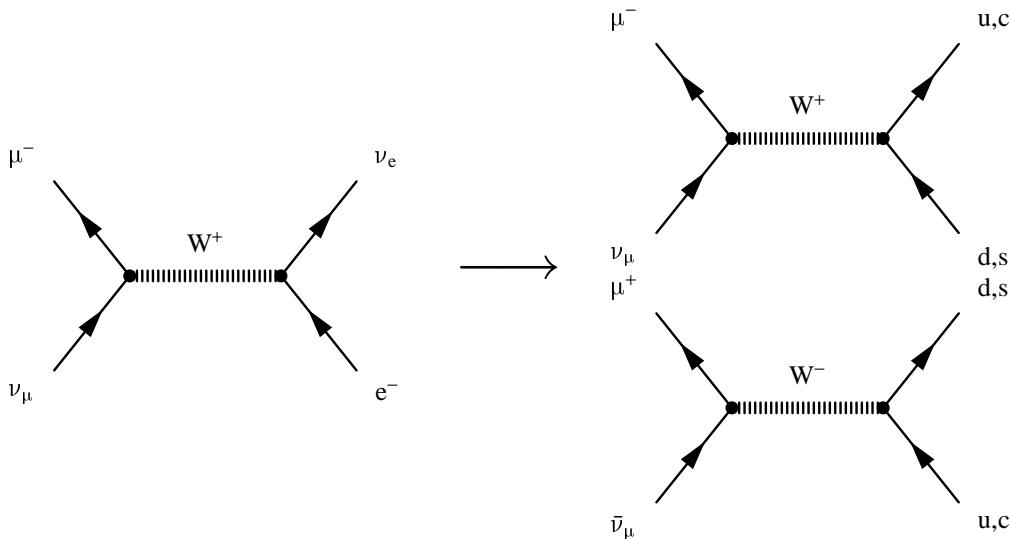
---

<sup>10</sup>Beachte: anders als bei der Multiplizität eines endzustandes, wo der Phasenraum durch  $(2s+1)$  erweitert wird, geht hier nur die “effektive“ Nutzung des Austauschteilchensein, welche reduziert ist.

$$\begin{aligned}
 \text{Antineutrino-Lepton: } & \frac{d\sigma}{dy} = \frac{G_F^2(\hbar c)^2}{\pi} (1-y)^2 s \\
 \text{Neutrino-Lepton: } & \frac{d\sigma}{dy} = \frac{G_F^2(\hbar c)^2}{\pi} s
 \end{aligned} \tag{7.40}$$

### 7.10.2 Tiefinlastische $\nu$ -Streuung

Wegen der Universalität der schwachen Wechselwirkung kann man die  $\nu$ -Quark-Streuung analog der  $\nu$ -Lepton-Streuung behandeln, so dass sich dieselben Winkelverteilungen ergeben:



Der einzige Unterschied ist, dass Quarks nicht frei vorkommen und die Streuung somit an Nukleonen durchgeführt wird. Wegen der Leptonenfamilienzahlerhaltung streuen linkshändige Quarks und rechtshändige Antiquarks nur an  $\nu_\mu$  (Ladung der Quarks negativ) bzw. rechtshändige Quarks und linkshändige Antiquarks nur an  $\bar{\nu}_\mu$  (Ladung der Quarks positiv).

Zur Beschreibung der gebundenen Quarks benutzen wir wieder die Bjorken-Skalenvariable  $x$ , die im Infinite Momentum Frame den Impulsbruchteil des Quarks im Nukleon beschreibt:

$$s \rightarrow \hat{s} \approx 2M_p c^2 x \cdot E_\nu \tag{7.41}$$

Für den nun doppelt-differentiellen Wirkungsquerschnitt ( $dx$  und  $dy$ ) erhält man (siehe Abb. 7.31):

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy} = \sum_i f_i(x) \cdot \left( \frac{d\sigma_i}{dy} \right)_{\hat{s}=s \cdot x} \tag{7.42}$$

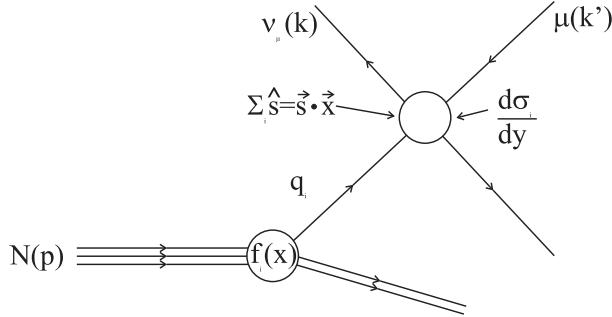


Abb. 7.31: Tiefinelastische Streuung an Nukleonen

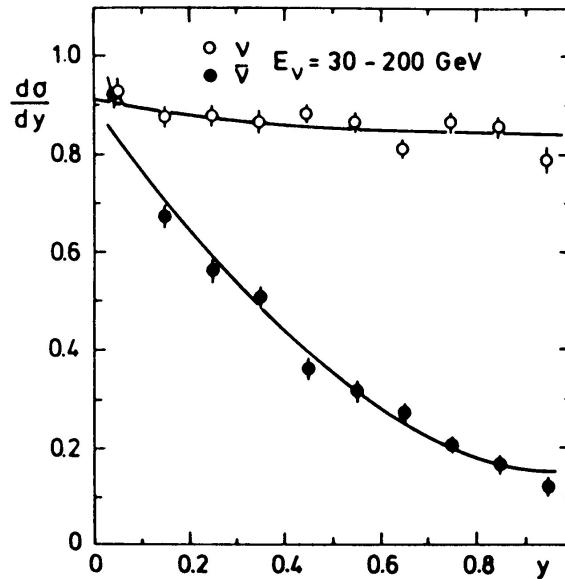


Abb. 7.32: Differentieller Wirkungsquerschnitt der tiefinelastischen Neutrino-Quark-Streuung

Dieser nun auch von den Quarkverteilungen abhängt, welche durch einen  $x$ -abhängigen Faktor  $k$  ausgedrückt wird.

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{G_F^2(\hbar c)^2}{\pi} \left( \frac{M_W^2 c^4}{Q^2 c^2 + M_W^2 c^4} \right)^2 2M_p c^2 E_\nu \cdot x \cdot K = \frac{G_F^2(\hbar c)^2}{\pi} \left( \frac{M_W^2 c^4}{Q^2 c^2 + M_W^2 c^4} \right)^2 \hat{s} \cdot K \quad (7.43)$$

$$K^\nu = d(x) + s(x) + (\bar{u}(x) + \bar{c}(x))(1-y)^2 \quad (7.44)$$

$$K^{\bar{\nu}} = \bar{d}(x) + \bar{s}(x) + (u(x) + c(x))(1-y)^2 \quad (7.45)$$

Die Faktoren  $K$  berücksichtigen die Streuung an allen möglichen Quarks im Nukleon. Integriert man über  $x$ , so erhält man den differentiellen Wirkungsquerschnitt aus Abb. 7.32. Im Falle der Neutrinostreuung erhält man einen konstant hohen Beitrag von den Quarks und einen mit  $(1-y)^2$  abfallenden Beitrag von den Antiquarks, während bei der Antineutrinostreuung die Rollen vertauscht sind und die wesentlich häufiger in Nukleonen auftretenden Quarks mit  $(1-y)^2$  gewichtet werden.

### 7.10.3 Anwendung

Aus der tiefinelastischen Streuung von Elektronen am Nukleon kennen wir die Strukturfunktionen des Nukleons im Zusammenhang mit dem doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d^2\sigma}{dq^2 dx} = \underbrace{\frac{4\pi\alpha^2}{q^4}}_{\gamma\text{-Austausch}} \left[ (1-y)F_2^{eN}(x, q^2) + \frac{y^2}{2} 2xF_1^{eN}(x, q^2) \right]. \quad (7.46)$$

Wegen der Paritätsverletzung der schwachen Wechselwirkung gibt es bei der Neutrinostreuung drei unterschiedliche Strukturfunktionen für die drei möglichen Helizitäten ( $J_z = \pm 1, 0$ ) des ausgetauschten massiven  $W^\pm$ . Bei der elektromagnetischen Wechselwirkung gibt es eine kohärente Überlagerung der Amplituden mit  $J_z = \pm 1$ , und damit ein Emission mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten für die beiden Einstellungen. Verwendet man isoskalare Targets, z. B.  $^{56}_{28}\text{Fe}$ , so kann man aus den Verteilungen der  $J_z$  gemittelte Strukturfunktionen für das Nukleon definieren:

$$F_i^{\nu N} = \frac{1}{2}(F_i^{\nu p} + F_i^{\nu n}) = \frac{1}{2}(F_i^{\bar{\nu} p} + F_i^{\bar{\nu} n}) = F_i^{\bar{\nu} N} \quad (7.47)$$

Für die dritte Strukturfunktion gilt hingegen  $F_3^{\nu N} = -F_3^{\bar{\nu} N}$ . Der Zusammenhang mit den Quarkdichteveilungen dieser Strukturfunktionen ist  $F_2^{\nu N} = 2x[q(x) + \bar{q}(x)]$  sowie  $xF_3^{\nu N} = 2x[q(x) - \bar{q}(x)]$ . Unter Verwendung der Callan-Gross-Relation  $2xF_1 = F_2$  erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dy dx} &= \frac{2G_F^2 \cdot M_N E_\nu}{\pi} \left[ (1-y)F_2^{\nu N}(x) + \frac{y^2}{2} 2xF_1^{\nu N}(x) \pm y \left(1 - \frac{y}{2}\right) F_3^{\nu N}(x) \cdot x \right] = \\ &= \frac{G_F^2 M E_\nu}{\pi} \left[ (F_2(x) + xF_3(x)) - (F_2(x) - xF_3(x))(1-y)^2 \right] \end{aligned} \quad (7.48)$$

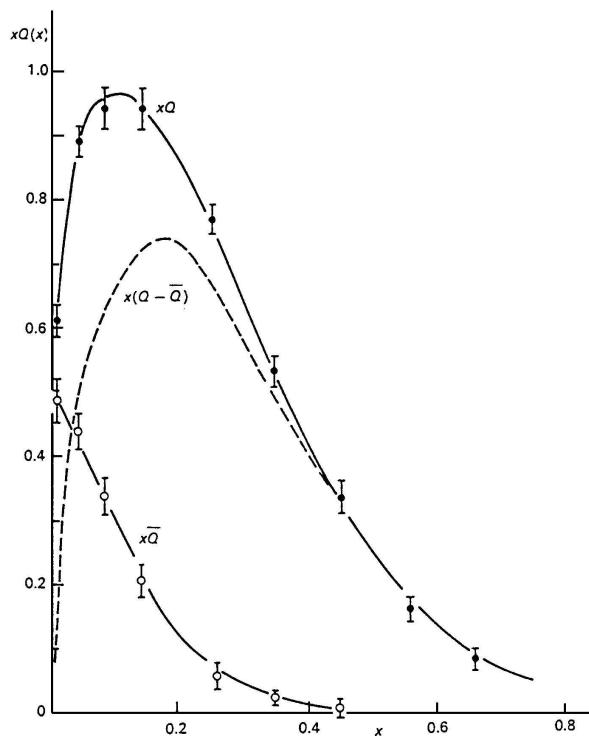
Die Quarkverteilungsfunktionen aus Abb. 7.33 erhält man durch Vergleich der Streuquerschnitte für Neutrino- und Antineutrinostrahlung für welche sich das Vorzeichen ändert. Eine Überprüfung der Konsistenz liefert der Vergleich mit der tiefinelastischen Elektronstreuung (unter Vernachlässigung der s-Quarks):

$$F_2^{\nu N} = x[u(x) + d(x) + \bar{u}(x) + \bar{d}(x)] \quad (7.49)$$

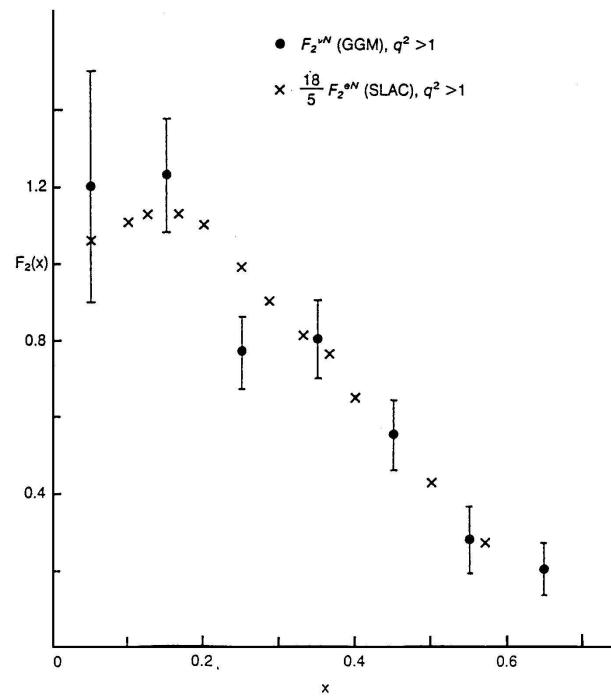
$$F_2^{eN} = x\frac{5}{18}[u(x) + d(x) + \bar{u}(x) + \bar{d}(x)] = F_2^{\nu N} \cdot \frac{5}{18} \quad (7.50)$$

Der Vorfaktor röhrt von der Tatsache her, dass die Elektronen an die drittzahligen Ladungen der Quarks koppeln, über deren Flavour hier gemittelt wurde. Abb. 7.34 zeigt die gute experimentelle Übereinstimmung der beiden Streumethoden. Abb. 7.35 zeigt nochmal zusammenfassend die beiden relevanten Strukturfunktionen. Die Zahl der Valenzquarks im Nukleon erhält man durch Integration von  $F_3^{\nu N}$  über  $x$ :

$$I = \int_0^1 x \frac{F_3^{\nu N}(x)}{x} dx = \int_0^1 F_3^{\nu N}(x) dx = 3 \quad (7.51)$$



**Abb. 7.33:** Quarkverteilungsfunktionen aus tiefinelastischer Neutrinostrahlung



**Abb. 7.34:** Zusammenhang mit tiefinelastischer Elektronenstrahlung

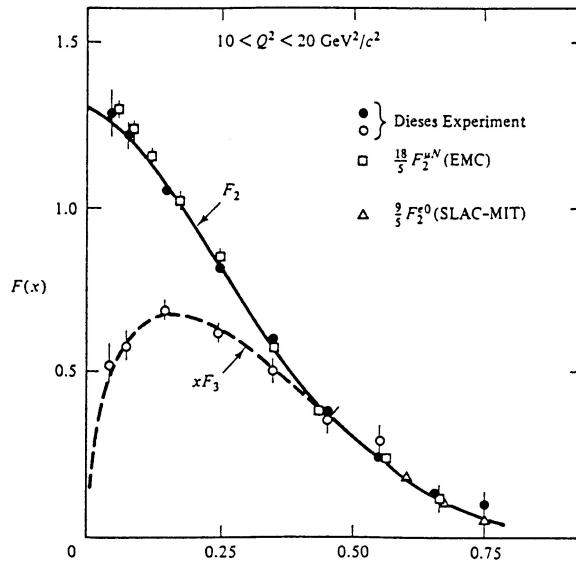


Abb. 7.35: Zusammenfassung der Strukturfunktionen

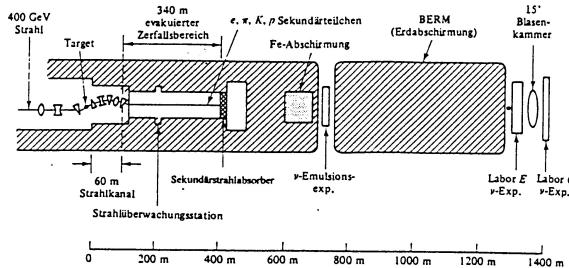


Abb. 7.36: UA2-Experiment mit einem Neutrinostrahl

Experimentell erhält man:  $I = 2.8 \pm 0.5$ .

#### 7.10.4 Wie realisiert man $\nu$ -Streuung?

Zur Erzeugung hochenergetischer  $\nu$ -Strahlen verwendet man hochenergetische  $\pi$ - oder K-Strahlen, die in einigen hundert Meter langen Vakuumröhren zerfallen:



Dies zeigt Abb. 7.36. Durch eine Preparierung des jeweiligen  $\pi$ - oder K-Strahls kann man

- per Energieselektion und Fokussierung einen schmalbandigen  $\nu$ -Strahl erzeugen; dies erlaubt eine Energiemarkierung der Neutrinos
- einen Breitbandstrahl mit hoher Intensität bereitstellen.

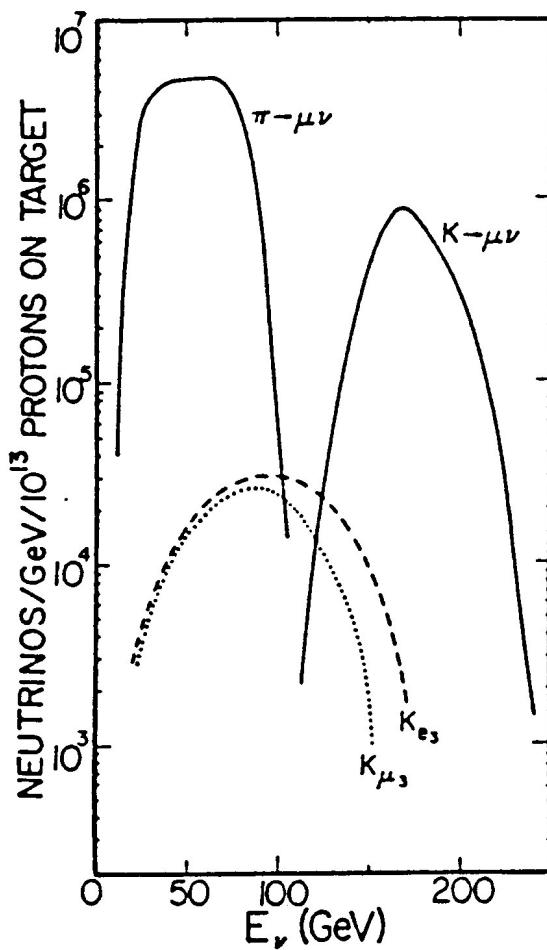
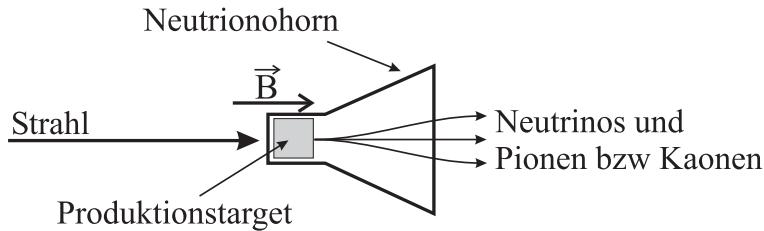


Abb. 7.37: Neutrinoenergie für die verschiedenen Produktionskanäle



**Abb. 7.38:** Aufbau eines Neutrino-Hornes

Die Fokusierung des Neutrino-Strahls erfolgt über ein ‘‘Neutrino-Horn’’. Es werden aber nicht die Neutrinos, sondern die Pionen und Kaonen fokussiert. Sind diese Strahlen gut fokussiert, so erhält man einen Neutrino-Strahl mit kleinem Querschnitt, d.h. mit hoher Intensität. Die aus den Zerfällen entstehende Neutrinos sind fokussiert (sieh Abb. 7.38).

Die Funktionsweise der Horns läuft über ein Magnetfeld, welches parallel zur Flugrichtung der Pionen bzw. Kaonen eingestellt ist. Die geladenen Teilchen werden durch Lorentzkraft auf Spiralbahnen um die Magnetfeldlinien gezwungen. Variiert man nun das Magnetfeld, so verändert man auch den Präzessionsradius der Teilchen und damit auch ihren Transversalimpuls. Ziel ist nun, diesen soweit möglich zu minimieren, da bei anschließendem Zerfall das entstehende Neutrino wegen Impulserhaltung einen Transversalimpuls kleiner/ gleich demjenigen des Ausgangsteilchens haben muß. Dies bewirkt eine Fokussierung der entstehenden Neutrinos.

## 7.11 Vereinheitlichung von elektromagnetischer und schwacher Wechselwirkung

Wir wissen, daß die Phase einer Wellenfunktion nicht meßbar ist. Man kann sie mit einer *globalen* Eichtransformation beliebig umdefinieren. Die Tatsache, daß sich dadurch nichts ändert, nennt man *globale Eichinvarianz*. In Quantenfeldtheorien fordert man darüber hinaus auch eine *lokale* Eichinvarianz, d. h. die Invarianz unter einer zeit- und ortsabhängigen Phasentransformation. Wir wollen dies Anhand der QED rekapitulieren:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\Lambda(x)} \psi(x) \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow e^{-i\Lambda(x)} \bar{\psi}(x) \quad (7.54)$$

Dabei darf  $\Lambda(x)$  eine beliebige Funktion sein. Die lokalen Eichtransformationen bilden zusammen die Gruppe  $U(1)_{\text{lokal}}$ :

$$e^{i\Lambda(x)} \quad \in \quad U(1)_{\text{lokal}}$$

Wie wir in Abschnitt 6.13.1 gesehen haben, ist jedoch die freie Dirac-Lagrangedichte,

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x) (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi(x),$$

nicht invariant gegenüber lokalen Eichtransformationen. Dies kann erst durch die Einführung eines Eichfeldes und einer kovarianten Ableitung (minimale Substitution) behoben werden:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x) \quad (7.55)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x) \quad (7.56)$$

Mit dem Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu}(x) = F^{\mu\nu}(x) = \frac{i}{e} [D^\mu(x), D^\nu(x)] = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) = -F^{\nu\mu}(x) \quad (7.57)$$

erhielten wir schließlich die Lagrangedichte der QED (6.31):

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(x) \left( \underbrace{i\gamma_\mu \partial^\mu - m}_{\substack{\text{freies} \\ \text{Diracfeld} \\ (\text{Elektron, Myon, Quark, etc.})}} + \underbrace{e \gamma_\mu A^\mu(x)}_{\substack{\text{Ankopplung} \\ \text{an Photonfeld}}} \right) \psi(x) - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)}_{\substack{\text{freies} \\ \text{Photonfeld}}} \quad (7.58)$$

Da das Photon masselos ist, enthält (7.58) *keinen* Massenterm der Form

$$\frac{m_\gamma^2}{2} A^\mu A_\mu.$$

Dieser würde auch die Eichinvarianz unter der Transformation (7.55) brechen.

### 7.11.1 Eichtheorie der elektro-schwachen Wechselwirkung

Unser Ziel ist es nun, eine Eichtheorie für die elektroschwache Wechselwirkung aufzustellen. Dabei werden wir vorerst nur die Leptonen  $\ell = e, \mu, \tau$ ,  $\nu = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  berücksichtigen – die Quarks können ganz analog behandelt werden. Die linkshändigen Zustände der Leptonen können wir als *linkshändiges Dublett* schreiben und entsprechende Projektionsoperatoren definieren:

$$\begin{aligned} \binom{\nu}{\ell}_L &= P_L \binom{\nu}{\ell} && \text{linkshändiges Dublett} \\ P_L &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5) && \text{Projektor auf linkshändiges Dublett} \\ \ell_L &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\ell && \text{linkshändiges Lepton} \end{aligned}$$

Wir fassen nun dieses linkshändige Dublett als Basisdarstellung einer neuen Symmetrie  $SU(2)_L$ , dem *schwachen Isospin*, auf. Die zugehörigen Quantenzahlen sind:

$$\begin{aligned} \nu_L : \quad T &= \frac{1}{2}, \quad T_3 = +\frac{1}{2} \\ \ell_L : \quad T &= \frac{1}{2}, \quad T_3 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Das Triplett der schwachen Isospinströme ist gegeben durch:

$$J_\mu^\alpha = (\bar{\nu}, \bar{\ell})_L \gamma_\mu \frac{\tau_\alpha}{2} \begin{pmatrix} \nu \\ \ell \end{pmatrix}_L \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (7.59)$$

Dabei sind die  $\tau_\alpha$  die Pauli-Matrizen,

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (7.60)$$

welche die Generatoren der Gruppe  $SU(2)_L$  darstellen.

Die  $W^\pm$ -Bosonen koppeln an Linearkombinationen  $\tau_\pm = \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2)$  der Komponenten des schwachen Isospinstromes, mit den Leiteroperatoren  $\tau_\pm$ :

$$J_\mu^+ = (\bar{\nu}, \bar{\ell})_L \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ \ell \end{pmatrix}_L = \bar{\nu}_L \gamma_\mu \ell_L = \bar{\nu}_L \gamma_\mu P_L \ell$$
  

$$J_\mu^- = (\bar{\nu}, \bar{\ell})_L \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ \ell \end{pmatrix}_L = \bar{\ell}_L \gamma_\mu \nu_L = \bar{\ell}_L \gamma_\mu P_L \nu$$

Diese beiden Viererströme stellen die geladenen Ströme der schwachen Wechselwirkung dar.

Auf die Relevanz des neutralen schwachen Stromes  $J_\mu^3$ ,

$$J_\mu^3 = (\bar{\nu}, \bar{\ell})_L \gamma_\mu \tau_3 \begin{pmatrix} \nu \\ \ell \end{pmatrix}_L = (\bar{\nu}, \bar{\ell})_L \gamma_\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ \ell \end{pmatrix}_L = \frac{1}{2} \bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - \frac{1}{2} \bar{\ell}_L \gamma_\mu \ell_L, \quad (7.61)$$

werden wir später eingehen (s. Seite 363).

Im Gegensatz zur schwachen Wechselwirkung (hier ist derjenige Wechselwirkungsanteil gemeint, welcher durch die  $W^\pm$  vermittelt wird) koppelt die elektromagnetische Wechselwirkung auch an *rechtshändige* geladene Leptonen  $\ell_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\ell$ . Um dies zu berücksichtigen, zerlegen wir zunächst den elektromagnetischen Vektorstrom in rechts- und linkshändigen Anteil:

$$J_\mu^{\text{elm}} = -\bar{\ell} \gamma_\mu \ell = -\bar{\ell}_L \gamma_\mu \ell_L - \bar{\ell}_R \gamma_\mu \ell_R$$

Dabei führen wir das rechtshändige Singulett  $\ell_R = \frac{1+\gamma_5}{2}\ell$  ein, dem wir bezüglich  $SU(2)_L$  die Quantenzahlen  $T = 0, T_3 = 0$  zuordnen und der somit einen Singulett-Zustand bezüglich

$SU(2)_L$  bildet. Hier tritt das Problem auf, daß der elektromagnetische Strom nicht mit den bisher betrachteten geladenen Strömen zusammenpaßt. Da unser Ziel jedoch eine Vereinheitlichung der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung ist, sind wir gezwungen, zu einem Trick zu greifen. Wir betrachten die schwache Hyperladung  $Y$  mit zugehöriger Symmetrie  $U(1)_Y$ . Letztendlich werden wir nun im Folgenden nicht die Symmetriegruppe  $U(1)_Y$  mit  $SU(2)_L$  zusammenfassen (nicht die  $U(1)$  der e.m. WW, welche das Photon als Generator besitzt). Die schwache Hyperladung ist über die Gell-Mann-Nishina-Relation (7.62) mit der elektrischen Ladung und dem schwachen Isospin verknüpft:

$$\boxed{Q = T_3 + \frac{1}{2}Y} \quad (7.62)$$

Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} \binom{\nu}{\ell}_L &: T = \frac{1}{2}, \quad T_3 = \pm\frac{1}{2}, \quad Y = -1 \quad \text{linkshändiges Dublett} \\ \bar{\ell}_R &: T = 0, \quad T_3 = 0, \quad Y = -2 \quad \text{rechtshändiges Singulett} \end{aligned}$$

Analog zu (7.59) ergibt sich der schwache Hyperladungsstrom zu:

$$J_\mu^Y = -2\bar{\ell}_R \gamma_\mu \ell_R - \bar{\ell}_L \gamma_\mu \ell_L - \bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L \quad (7.63)$$

$Y$  wird durch  $SU(2)_L$  Transformationen *nicht* geändert, somit kommutiert  $Y$  mit den  $T^i$  (wegen der Definition der schwachen Hyperladung mittels Linearkombination). Wir generieren also eine neue Symmetriegruppe  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ .

**Eichprinzip:** Wir fordern nun für die freie Lagrangedichte der Leptonen (bei vernachlässigter Masse)

$$\mathcal{L}_{\text{Lepton}} = (\bar{\nu}_L, \bar{\ell}_L) i \gamma_\mu \partial^\mu \begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \end{pmatrix} + \bar{\ell}_R i \gamma_\mu \partial^\mu \ell_R, \quad (7.64)$$

eine Invarianz unter *lokalen*  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  Transformationen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \end{pmatrix} &\rightarrow \underbrace{e^{i\frac{\vec{\alpha}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x)}}_{\substack{\text{SU}(2)_L \\ 3 \text{ Parameter}}} \times \underbrace{e^{-i\lambda(x)}}_{\substack{\text{U}(1)_Y \\ 1 \text{ Parameter}}} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \end{pmatrix} \\ \ell_R &\rightarrow e^{-2i\lambda(x)} \ell_R \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die (noch masselosen) Eichbosonen

$$\begin{array}{lll} SU(2)_L & 3 \text{ Vektorbosonen} & W_\mu^i \quad i = 1, 2, 3 \\ U(2)_Y & 1 \text{ Vektorboson} & B_\mu \end{array}$$

Wie üblich führt man dazu eine minimale Substitution durch:

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \end{pmatrix}: i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - g \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu + \frac{g'}{2} B_\mu$$

$$\ell_R : i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu + g' B_\mu$$

Dabei sind  $\vec{W}_\mu$  bzw.  $B_\mu$  die  $SU(2)_L$ - bzw.  $U(1)_Y$ -Eichfelder und  $g$  bzw.  $g'$  die zugehörigen Kopplungskonstanten. Die Feldstärketensoren lauten dann analog wie in QED (7.57) und QCD (6.33):

$$\vec{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu - g \underbrace{\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu}_{[\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu, \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\nu] \neq 0} \quad (7.65)$$

nichtabelsches Eichfeld

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (7.66)$$

Die Lagrangedichte der elektroschwachen Wechselwirkung lautet dann:

$$\mathcal{L}_{\text{weak}} = (\bar{\nu}, \bar{\ell})_L \gamma^\mu \left( i\partial_\mu - g \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu + \frac{g'}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} \nu \\ \ell \end{pmatrix}_L + \bar{\ell}_R \gamma^\mu (i\partial_\mu + g' B_\mu) \ell_R -$$

$$\frac{1}{4} \underbrace{\vec{W}_{\mu\nu} \cdot \vec{W}^{\mu\nu}}_{(*)} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} \cdot B^{\mu\nu} \quad (7.67)$$

Hierbei bewirkt der Term  $(*)$  in (7.67) eine Selbstwechselwirkung der Eichfelder, nämlich die Kopplungen von drei und vier  $W$ -Feldern. Es sei hier nochmals angemerkt, daß bis hierher alle 4 Eichbosonen der  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  Eichsymmetriegruppe noch *masselos* sind. Diesen offensichtlich fehlerhaften Sachverhalt werden wir später über spontane Symmetriebrechung und Higgs- Formalismus beheben.

### 7.11.2 Wechselwirkung mit geladenen Strömen:

$$\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu = \sqrt{2}(\tau_+ W_\mu^+ + \tau_- W_\mu^- + \tau_3 W_\mu^3) = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} W_\mu^+ \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (7.68)$$

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp i W_\mu^2) \quad (7.69)$$

Die geladenen  $W^\pm$ -Bosonen sind die  $W_\mu^\pm$ -Eichfelder in (7.69), womit sich die bekannte V-A-Theorie für Leptonen ergibt:

$$\mathcal{L}_{\text{CC}} = -\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \gamma^\mu \ell_L W_\mu^+ + \bar{\ell}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^-) \quad (7.70)$$

**Wechselwirkung mit neutralen Strömen:**

$$\mathcal{L}_{NC} = -\frac{g}{2}(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L - \bar{\ell}_L \gamma^\mu \ell_L) W_\mu^3 + \frac{g'}{2}(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L + \bar{\ell}_L \gamma^\mu \ell_L + 2\bar{\ell}_R \gamma^\mu \ell_R) B_\mu \quad (7.71)$$

Die Lagrangedichte (7.71) enthält auch die Kopplung des Photonfeldes  $A_\mu$  an den elektromagnetischen Strom. Photon und  $Z^0$  sind durch eine Drehung mit  $B_\mu$  und  $W_\mu^3$  verbunden:

$$\text{Photon: } A_\mu = B_\mu \cos \vartheta_W + W_\mu^3 \sin \vartheta_W \quad (7.72)$$

$$\text{Z-Boson: } Z_\mu = -B_\mu \sin \vartheta_W + W_\mu^3 \cos \vartheta_W \quad (7.73)$$

Der Drehwinkel  $\vartheta_W$  heißt *Weinberg-Winkel*. Experimentell erhält man:

$$\sin^2 \vartheta_W \approx 0.23120 \pm 0,00035 \quad \vartheta_W \approx 28.74^\circ$$

Aus (7.71) ergibt sich mit (7.72) und (7.73) die Lagrangedichte des neutralen Stromes:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NC} = & \frac{g}{2}(\bar{\ell}_L \gamma^\mu \ell_L - \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L)(\cos \vartheta_W Z_\mu + \sin \vartheta_W A_\mu) + \\ & + \frac{g'}{2}(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L + \bar{\ell}_L \gamma^\mu \ell_L + 2\bar{\ell}_R \gamma^\mu \ell_R)(\cos \vartheta_W A_\mu - \sin \vartheta_W Z_\mu) \end{aligned} \quad (7.74)$$

Da Neutrinos nicht an Photonen koppeln, muß gelten:

$$-\frac{g}{2} \sin \vartheta_W + \frac{g'}{2} \cos \vartheta_W = 0 \quad (7.75)$$

Photonen koppeln gleich an links- und rechtshändige geladene Leptonen, d. h. rein vektoriell. Deshalb muß gelten:

$$\frac{g}{2} \sin \vartheta_W + \frac{g'}{2} \cos \vartheta_W = e \quad (7.76)$$

Aus (7.75) und (7.76) ergibt sich:

$$g \sin \vartheta_W = g' \cos \vartheta_W = e \quad (7.77)$$

$$\frac{g'}{g} = \tan \vartheta_W \quad (7.78)$$

Die Lagrangedichte (7.74) kann damit auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\mathcal{L}_{NC} = -e J_\mu^{\text{elm}} A^\mu - \frac{e}{\sin \vartheta_W \cos \vartheta_W} \left( \begin{array}{c} J_\mu^3 \\ \uparrow \\ \text{elektrom. Strom,} \\ \text{reiner Vektorstrom} \end{array} - \sin^2 \vartheta_W J_\mu^{\text{elm}} \right) Z^\mu \quad (7.79)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{V-A-Strom} \\ \text{neutral} \end{array}$$

An (7.79) kann man erkennen, daß auch die  $Z^0$ -Lepton-Kopplung paritätsverletzend ist (wegen  $\sin^2 \vartheta_W < 1$ ). Anders als bei  $W^\pm$  ist hier jedoch die Paritätsverletzung nicht maximal, sondern nur teilweise. Wie wir nun gesehen haben, kann die elektromagnetische nicht vollständig von der schwachen Wechselwirkung getrennt werden, beide hängen über den Weinberg-Winkel zusammen. Somit ergeben sich Interferenzeffekte bei elektromagnetischer Wechselwirkung, hervorgerufen durch die Schwache. Solche Effekte sind beispielsweise bereits bei der Präzessionspektroskopie von Atomen erkennbar. Hierbei kann eine Polarisationsasymmetrie von emittierten Photonen, welche aus Relaxationen zwischen langlebigen, verbotenen Übergängen entstehen, beobachtet werden. Diese Effekte sind allerdings sehr klein, zumal die hierbei verwendeten Energieskalen im Bereich von eV liegen.

### Feynman-Regeln:

The figure shows two Feynman diagrams. The top diagram illustrates the decay of a  $Z^0$  boson into two neutrinos ( $\nu$  and  $\nu$ ). The bottom diagram shows a  $Z^0$  boson interacting with an electron ( $e^-$ ) to produce a virtual photon ( $\gamma$ ), which then decays into an electron-positron pair ( $e^-e^+$ ). The vertex correction term for the  $Z^0$  boson is given by:

$$-i \frac{e}{\sin 2\vartheta_W} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2}$$

Below this, the vertex correction term for the electron is shown as a sum of contributions:

$$-i \frac{2e}{\sin 2\vartheta_W} \gamma^\mu \left( \frac{1}{2} \frac{1 - \gamma_5}{2} - \sin^2 \vartheta_W (-1) \right) =$$

$\uparrow T_3 \quad \uparrow Q$

$$= -i \frac{e}{2 \sin 2\vartheta_W} \gamma^\mu \underbrace{\left( 4 \sin^2 \vartheta_W - 1 + \gamma_5 \right)}_{\substack{\text{Axialvektorkopplung} \\ \text{Vektorkopplung}}}$$

### 7.11.3 Einbeziehung der Quarks

Da die Konstruktion von  $\mathcal{L}_{\text{weak}}$  allein auf Symmetrieprinzipien basiert, müssen wir nur die Quantenzahlen der Quarks bezüglich des schwachen Isospins und der schwachen Hyperladung festlegen.

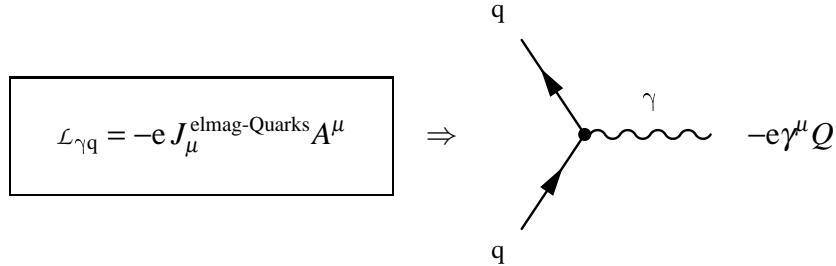
$$\underbrace{\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L}_{\text{linkshändige Dublette}} \quad T = \frac{1}{2}, \quad T_3 = \pm \frac{1}{2}, \quad Y = \frac{1}{3}, \quad Q = T_3 + \frac{Y}{2}$$

$Y$  ist gleich der Summe der elektrischen Ladungen in einem Dublett.

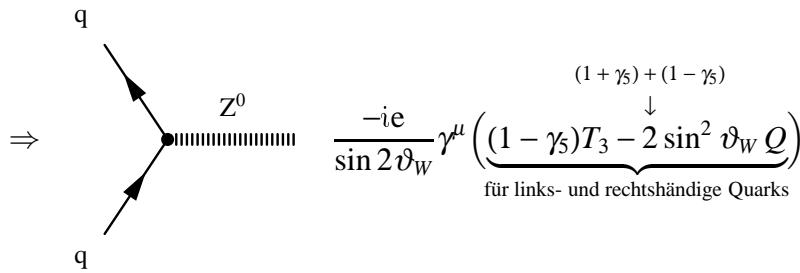
$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

CKM-Matrix

$$\begin{array}{ll} \text{rechtshändige} & \left\{ \begin{array}{l} u_R, c_R, t_R \\ d'_R, s'_R, b'_R \end{array} \right. \\ \text{Singuletts} & \left\{ \begin{array}{l} T = 0, \quad T_3 = 0, \quad Y = \frac{4}{3} \\ T = 0, \quad T_3 = 0, \quad Y = -\frac{2}{3} \end{array} \right. \end{array}$$



$$\mathcal{L}_{Z^0 q} = -\frac{e Z^\mu}{\sin \vartheta_W \cos \vartheta_W} (J_\mu^{3,\text{Quarks}} - \sin^2 \vartheta_W J_\mu^{\text{elm,Quarks}})$$



Da die CKM-Matrix unitär ist ( $V_{CKM}^\dagger V_{CKM} = 1$ ), hat sie keinen Einfluß auf den neutralen schwachen Strom bzw. die  $Z^0$ -Quark-Kopplung:

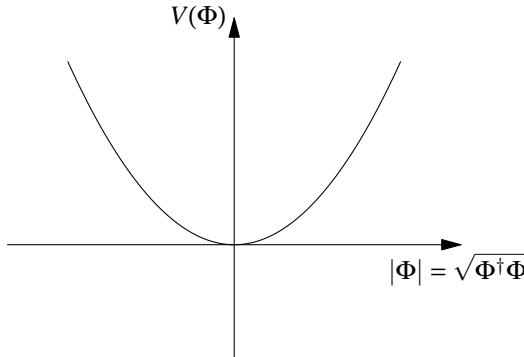
$$\begin{aligned} J_\mu^{3,\text{Quarks}} &= \frac{1}{2} (\bar{u}_L \gamma_\mu u_L + \bar{c}_L \gamma_\mu c_L + \bar{t}_L \gamma_\mu t_L - \bar{d}'_L \gamma_\mu d'_L - \bar{s}'_L \gamma_\mu s'_L - \bar{b}'_L \gamma_\mu b'_L) = \\ &= \frac{1}{2} (\bar{u}_L \gamma_\mu u_L + \bar{c}_L \gamma_\mu c_L + \bar{t}_L \gamma_\mu t_L - \bar{d}_L \gamma_\mu d_L - \bar{s}_L \gamma_\mu s_L - \bar{b}_L \gamma_\mu b_L) \end{aligned} \tag{7.80}$$

#### 7.11.4 Masse des $W^\pm$ - und $Z^0$ -Bosons: der Higgs-Mechanismus

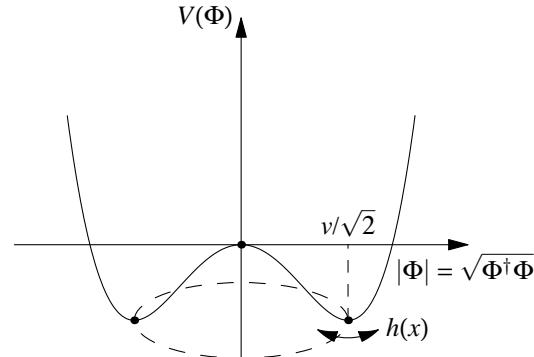
Noch nicht behandelt haben wir das Problem, daß bislang alle vier Eichbosonen  $W^\pm$ ,  $Z^0$  und  $\gamma$  *masselos* sind. Dies ist eine Konsequenz der  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichsymmetrie: Die Massenterme

$$\frac{M_W^2}{2} \vec{W}_\mu \cdot \vec{W}^\mu, \quad \frac{M_B^2}{2} B_\mu B^\mu \tag{7.81}$$

verletzen die  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichsymmetrie. Lösen läßt sich dieses Problem durch *spontane Symmetriebrechung*. Der Preis für diese Lösung ist allerdings die Einführung neuer skalarer *Higgsfelder*, die bislang experimentell nicht nachgewiesen wurden. Wir definieren nun:



**Abb. 7.39:** Das Higgspotential in der Frühphase des Universums vor der elektroschwachen Symmetriebrechung bei  $T \approx 100 \text{ GeV}$



**Abb. 7.40:** Das Higgspotential heute bei  $T \approx 0$

Komplexes skalares Higgsdublett:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad T = \frac{1}{2}, \quad T_3 = \pm \frac{1}{2}, \quad Y = 1$$

Lagrangedichte mit Selbstwechselwirkung:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - V(\Phi) \quad (7.82)$$

Mit dem Potential:

$$V(\Phi) = - \underbrace{\mu^2 \Phi^\dagger \Phi}_{\text{Massentern } m_H = \sqrt{\mu}} + \underbrace{\lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2}_{\text{Rückstellkraft}} \quad (7.83)$$

Man stellt sich vor, daß das Potential  $V$  im Frühstadium des Universums nur ein Minimum bei  $\Phi = 0$  hatte (Abb. 7.39). Später kam es nach einiger Abkühlung zu einer spontanen Symmetriebrechung (Abb. 7.40), die mit der beim Ferromagnetismus vergleichbar ist.

Im heutigen Grundzustand ist nach Abb. 7.40 der Vakuumerwartungswert  $\langle \Phi \rangle_0 \neq 0$ . Er wird von  $v = \sqrt{2} \langle \Phi \rangle_0$ , den Erwartungswert des skalaren Higgs- Feldes im Grundzustand des Universums, repräsentiert.

$$\langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial V}{\partial v} = 0 = -\mu^2 v + \lambda v^3, \quad v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Die Ankopplung der elektroschwachen Eichfelder  $\vec{W}_\mu$  und  $B_\mu$  an das Higgsdublett erfolgt wieder durch minimale Substitution

$$\partial_\mu \Phi \rightarrow \partial_\mu \Phi + ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu \Phi + i \frac{g'}{2} B_\mu \Phi \quad (7.84)$$

Die eichinvariante Lagragedichte lautet dann:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs+Kopplung}} = \left[ \left( \partial_\mu - i \frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu - i \frac{g'}{2} B_\mu \right) \Phi^\dagger \right] \left[ \left( \partial_\mu + i \frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + i \frac{g'}{2} B_\mu \right) \Phi \right] - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (7.85)$$

Die vier Higgs-Freiheitsgrade lassen sich durch  $\vec{\xi}(x)$  und  $h(x)$  parametrisieren:

$$\Phi(x) = \underbrace{e^{i \vec{\tau} \cdot \vec{\xi}(x)}}_{\substack{\text{SU}(2)_L^- \\ \text{Eichtransformation}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (7.86)$$

$h(x)$  beschreibt dabei die Elementaranregungen des Higgsfeldes.

Alle  $e^{i \vec{\tau} \cdot \vec{\xi}(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$  sind mit  $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$  entartete, gleichwertige Grundzustände (Vakua), da das Potential  $V$  für alle diese Zustände den gleichen Wert annimmt. Die drei Freiheitsgrade  $\vec{\xi}(x)$  beschreiben sogenannte masselose Goldstone-Bosonen. Diese können jedoch weggeeicht werden. Vernachlässigt man die Higgsteilchen  $h(x)$ , so erhält man:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Higgs+Kopplung}} &= \frac{v^2}{8} (0, 1) \left( g \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + g' B_\mu \mathbb{1} \right)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{v^2}{8} \left( g^2 \vec{W}_\mu \cdot \vec{W}^\mu + g'^2 B_\mu B^\mu - 2gg' B^\mu W_\mu^3 \right) \\ &= \frac{v^2}{8} \left( 2g^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \underbrace{\left( g W^{3\mu} - g' B^\mu \right)^2}_{= \frac{g}{\cos \vartheta_W} (\cos \vartheta_W W^{3\mu} - \sin \vartheta_W B^\mu)} \right) \\ &= \frac{g}{\cos \vartheta_W} (\cos \vartheta_W W^{3\mu} - \sin \vartheta_W B^\mu) = \\ &= \frac{g}{\cos \vartheta_W} Z^\mu \end{aligned} \quad (7.87)$$

Dies sind genau Massenterme der Art (7.81) für  $W^\pm$ - und  $Z^0$ -Bosonen mit folgenden Massen:

$W^\pm$ -Boson Masse:

$$M_{W^\pm} = \frac{gv}{2}$$

$Z^0$ -Boson Masse:

$$M_{Z^0} = \frac{gv}{2 \cos \vartheta_W}$$

Theoretisch ergibt sich also die Massenrelation:

$$\frac{M_{W^\pm}}{M_{Z^0}} = \cos \vartheta_W = 0.877$$

Experimentell findet man:

$$\frac{M_{W^\pm}}{M_{Z^0}} = 0.881 \pm 0.005$$

Mit der Fermikonstante  $G_F = \sqrt{2}g^2/(8M_W^2)$  erhält man außerdem als Erwartungswert des Higgsfeldes:

$$v = \frac{2M_W}{g} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}G_F}} \approx 250 \text{ GeV}$$

Die orthogonale Linearkombination

$$A_\mu = B_\mu \cos \vartheta_W + W_\mu^3 \sin \vartheta_W \quad (7.88)$$

ist masselos und kann mit dem Photon identifiziert werden.

Der Higgsmechanismus liefert also eine

Spontane Brechung der Eichsymmetrie

$$\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y \rightarrow \text{U}(1)_{\text{elmag}}$$

**Higgsmasse:** Durch Einsetzen in (7.83) und Entwicklung nach  $h(x)$  erhält man:

$$\begin{aligned} V\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right) &= -\frac{\mu^2}{2}(v+h(x))^2 + \frac{\mu^2}{4v^2}(v+h(x))^4 = \\ &= \text{const} + \underbrace{\left(-\frac{\mu^2}{2} + \frac{3\mu^2}{2}\right)}_{\frac{1}{2}m_H^2} h(x)^2 + \dots \end{aligned}$$

Die Higgsmasse

$$m_H = \sqrt{2}\mu$$

ist ein freier Parameter der Theorie. Die aus elektroschwachen Strahlungskorrekturen bestimmte empirische Untergrenze liegt bei

$$300 \text{ GeV} > m_H > 110 \text{ GeV} \quad (\text{Stand: Mai 2006})$$

**Vollständiges Standardmodell der Teilchenphysik:** Als das Standardmodell der Teilchenphysik bezeichnet man nun gewöhnlich die vereinheitlichte elektroschwache Wechselwirkung zusammen mit der Theorie der starken Wechselwirkung:  $\Rightarrow$  Eichgruppe:

$$\underbrace{\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y}_{\text{elektroschwache Wechselwirkung}} \times \underbrace{\text{SU}(3)_C}_{\text{QCDStarke Wechselwirkung}} \xrightarrow{\downarrow \text{spontane Symmetriebrechung}}$$

## 7.12 Bestimmung einiger Parameter des Standardmodells

### 7.12.1 Bestimmung des Weinberg-Winkels für neutrale Ströme

Der neutrale Strom in der elektroschwachen Wechselwirkung ist eine Mischung aus elektromagnetischen und schwachen Komponenten, die durch den Weinberg-Winkel ausgedrückt wird. Für die Kopplungsstärke des  $Z^0$  an Fermionen gilt daher:

$$g_L = I_3 - Q \sin^2 \vartheta_W \quad (7.89)$$

$$g_R = -Q \sin^2 \vartheta_W \quad (7.90)$$

Die erste Zeile entspricht dem linkshändigen Strom  $J_\mu^3 - \sin^2 \vartheta_W J_\mu^{\text{em}}$ .

Der schwache Isospin der rechtshändigen Fermionen ist null, da diese nicht an  $W_\mu^i$  koppeln können.

Hieraus ergeben sich zwei orthogonale Linearkombinationen für den neutralen Vektor- und den Axialvektorstrom:

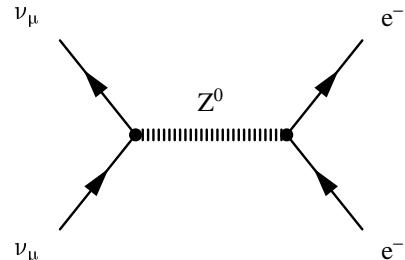
$$C_V = g_L + g_R = I_3 - 2Q \sin^2 \vartheta_W \quad (7.91)$$

$$C_A = g_L - g_R = I_3 \quad (7.92)$$

Da es in der elektromagnetischen Wechselwirkung keinen Axialvektorstrom gibt, kommt kein Term mit  $Q$  in  $C_A$  vor. Für die Kopplungsstärke<sup>11</sup> des  $Z^0$  an Fermionen erhält man nun

	$2C_V$	$2C_A$
$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	1	1
$e, \mu, \tau$	$-1 + 4 \sin^2 \vartheta_W$	-1
$u, c, t$	$1 - \frac{8}{3} \sin^2 \vartheta_W$	1
$d, s, b$	$-1 + \frac{4}{3} \sin^2 \vartheta_W$	-1

Beispiel für einen neutralen Strom ist die Reaktion  $\nu_\mu e^- \rightarrow \nu_\mu e^-$ , die auch zu dessen Entdeckung geführt hat.



Der Wirkungsquerschnitt für diese Reaktion ist gegeben durch

$$\frac{d\sigma^{\nu e}}{dy} = \frac{2G_F^2 m E(\hbar c)^2}{\pi} (g_L^2 + g_R^2(1-y)^2) \quad (7.93)$$

<sup>11</sup>Beachte: da das  $Z^0$  mit einer Komponente des Hyperladungssystems verknüpft ist, können auch rechtshändige geladene Fermionen an das  $Z^0$  koppeln, anders als für die  $W^\pm$ .

Im Unterschied zum geladenen Strom muß hier auch die Kopplung an rechtshändige Fermionen berücksichtigt werden. Für den geladenen Strom gilt dagegen  $g_L = 1$  und  $g_R = 0$ . Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung am Nukleon berechnet sich ganz analog unter Verwendung der Bjorken-Skalenvariable  $x$  und der Quarkverteilungen. Allerdings werden wir diesmal in einer einfachen Näherung nur u- und d-Quarks mitnehmen. Der doppelt differentielle Wirkungsquerschnitt lautet analog zur Gleichung Gl. (7.48):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma^{\nu p}}{dxdy} &= \frac{2G_F^2 M x E}{\pi} \left( g_L^2 u(x) + g_L^2 d(x) + (1-y)^2 (g_R^2 u(x) + g_R^2 d(x)) \right) \\ &= \frac{G_F^2 M x E}{2\pi} \left( \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \vartheta_W\right)^2 u(x) + \left(-1 + \frac{2}{3} \sin^2 \vartheta_W\right)^2 d(x) \right. \\ &\quad \left. + (1-y)^2 \left(\left(-\frac{4}{3} \sin^2 \vartheta_W\right)^2 u(x) + \left(\frac{2}{3} \sin^2 \vartheta_W\right)^2 d(x)\right)\right) \end{aligned} \quad (7.94)$$

Um den Wirkungsquerschnitt für die Streuung an Neutronen zu erhalten, müssen nur  $u(x)$  und  $d(x)$  vertauscht werden. Benutzt man als Target isoskalare Kerne, d. h. Kerne, die gleich viele Protonen und Neutronen enthalten, so ergibt sich der doppelt differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einem Nukleon unter Austausch eines neutralen Stromes ( $NC$ )

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_{NC}^{\nu N}}{dxdy} &= \frac{G_F^2 M x E (\hbar c)^2}{2\pi} (u(x) + d(x)) \\ &\quad \times \left( (1 - 2 \sin^2 \vartheta_W + \frac{10}{9} \sin^4 \vartheta_W) + (1-y)^2 \frac{10}{9} \sin^4 \vartheta_W \right) \end{aligned} \quad (7.95)$$

Da die Streuung an Antineutrinos die Rolle von  $g_R$  und  $g_L$  vertauscht, zieht man in diesem Fall einfach den Faktor  $(1-y)^2$  vor den ersten Ausdruck. Wir vergleichen dies mit dem entsprechenden ausdruck für den geladenen Strom ( $CC$ ), den iwr aus Gl. (7.40) unter Berücksichtigung der Quarkverteilungen  $u(x)$  und  $d(x)$  erhalten.

$$\frac{d^2\sigma_{CC}^{\nu N}}{dxdy} = \frac{G_F^2 M x E (\hbar c)^2}{\pi} (u(x) + d(x)) \quad (7.96)$$

$$\frac{d^2\sigma_{CC}^{\bar{\nu} N}}{dxdy} = \frac{G_F^2 M x E (\hbar c)^2}{\pi} (u(x) + d(x)) (1-y)^2 \quad (7.97)$$

Um diese Berechnungen für Experimente einfacher nutzbar zu machen, definiert man das Verhältnis  $R$  als Quotient der totalen Wirkungsquerschnitte für den neutralen und den geladenen Strom. Die beiden Streuprozesse kann man in der Auswertung eines Streuexperimentes durch Ausnutzung der Ereignischarakteristika voneinander trennen und so  $R$  direkt messen. Man erhält nach Integration und Division

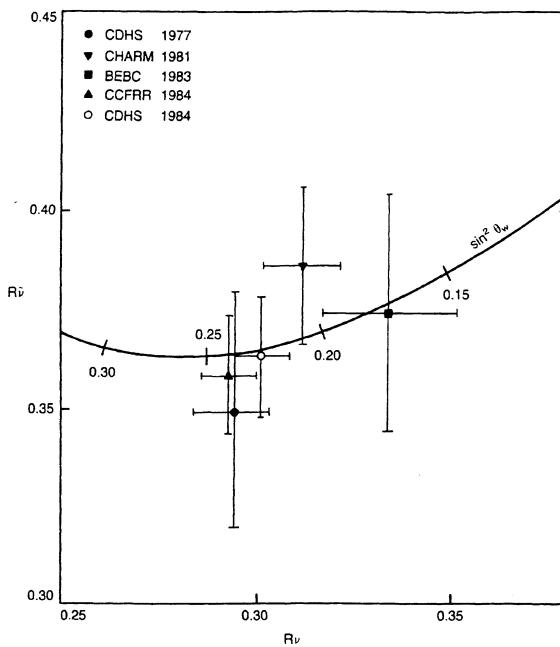


Abb. 7.41: Bestimmung des Weinbergwinkels

$$R = \frac{\sigma_{NC}^{vN}}{\sigma_{CC}^{vN}} = \frac{1}{2} - \sin^2 \vartheta_W + \frac{20}{27} \sin^4 \vartheta_W \quad (7.98)$$

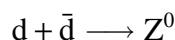
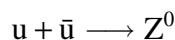
$$\bar{R} = \frac{\sigma_{NC}^{\bar{v}N}}{\sigma_{CC}^{\bar{v}N}} = \frac{1}{2} - \sin^2 \vartheta_W + \frac{20}{9} \sin^4 \vartheta_W \quad (7.99)$$

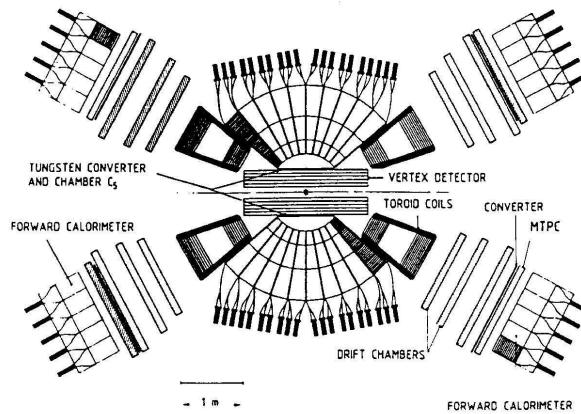
Aus den Messungen für  $R$  und  $\bar{R}$  ergibt sich, daß der Weinberg-Winkel ähnlich der starken Kopplungskonstante  $\alpha$  von der Energie abhängt, bei der man das Experiment durchführt. Das Resultat der Messung aus Abb. 7.41 ist  $\sin^2 \vartheta_W = 0.233 \pm 0.003$ . Nimmt man alle Meßmethoden zusammen, so ergibt sich der Grand Average zu

$$\sin^2 \vartheta_W = 0.2227 \pm 0.0004 \quad \text{bei } Q^2 = M_{Z^0}^2 c^4 \quad (7.100)$$

### 7.12.2 Bestimmung der Massen von $W^+$ , $W^-$ und $Z^0$

Zur Erzeugung eines realen  $W$ - oder  $Z^0$ -Bosons kollidiert man Quarks oder Leptonen, die die notwendige Schwerpunktsergie aufweisen. Diese liegt etwa im Bereich von 80–90 GeV, der sich empirisch aus den Experimenten zu schwachen Wechselwirkung ergibt. Die Reaktionen für Quarkkollisionen sehen so aus:





**Abb. 7.42:** Querschnitt des  $4\pi$ -Detektors zur Messung der  $Z^0$ -Masse

**Die Masse des  $Z^0$ :** Analog zur Messung der Strukturfunktionen oder der  $\nu$ -Nukleon-Streuung ergibt sich für die Produktion realer  $Z^0$ -Bosonen die Bedingung

$$M_{Z^0}c^2 = \sqrt{\hat{s}} = \sqrt{\langle x_u \rangle \langle x_{\bar{u}} \rangle \cdot s} \quad (7.101)$$

Im Proton ergibt sich der Mittelwert der  $u$ -Verteilung zu 0,12 und der der  $\bar{u}$ -Verteilung zu 0,04. Dieser Unterschied röhrt daher, daß die Antiquarks im Proton nur als Seequarks vorkommen. Mit diesen Werten ergibt sich die Schwellenenergie für die p-p-Kollision zu ca. 650 GeV. Benutzt man statt dessen für die Antiquarks Antiprotonen, so erhält man gleiche Mittelwerte für die Verteilungen von  $q$  und  $\bar{q}$ ; die Schwellenenergie sinkt hierdurch auf ungefähr 375 GeV. Man beachte allerdings, daß es sich hierbei lediglich um Richtwerte handelt, da die Impulsbruchteile  $x$  der Quarks im Nukleon breit gestreut sind. Die Idee und deren Verwirklichung am CERN (das SPS wurde kurzerhand zu einem Collider umfunktioniert) brachte Carlo Rubbia und Simon van der Meer den Nobelpreis<sup>12</sup>. Seit 1985 werden ähnliche Experimente am FNAL mit einer Strahlenergie von etwa 1 TeV durchgeführt.

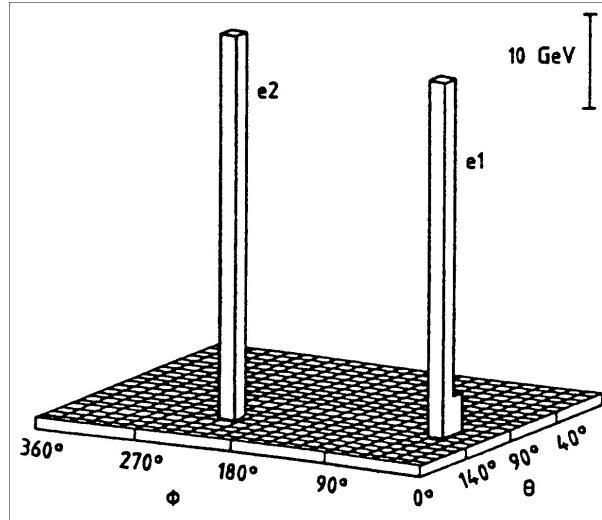
Der Nachweis solcher Prozesse unter der Vielzahl von anderen auftretenden Ereignissen wird dadurch erleichtert, dass das  $Z^0$  sofort in ein  $\mu^+ \mu^-$ -Paar oder ein  $e^+ e^-$ -Paar zerfällt<sup>13</sup>. Aufgrund der geringen kinetischen Energie des  $Z^0$  werden diese Paare im Laborsystem diametral auseinanderfliegen, um der Impulserhaltung zu genügen. Die Masse des  $Z^0$ -Bosons ergibt sich so zu

$$M_{Z^0}c^2 = \sqrt{(P_{\mu^+} + P_{\mu^-})^2} \quad (7.102)$$

Abb. 7.42 zeigt den für dieses Experiment verwendeten Detektor UA2 am CERN. Der Legoplot 7.43 zeigt die Energie der nachgewiesenen Elektronen aus einem  $Z^0$ -Zerfall in der  $\theta, \phi$ -Ebene des Detektors, die Teilchen werden in gegenüberliegenden Teilen des Detektors nachgewiesen.

<sup>12</sup><http://www.nobel.se/laureates/physics-1984.html>

<sup>13</sup>Auch der Zerfall  $Z^0 \rightarrow q\bar{q}$  ist natürlich möglich.



**Abb. 7.43:** Legoplot eines sehr schönen  $Z^0$ -Events: die Elektronen fliegen diametral

**Die Masse des W:** Die Reaktion zur Erzeugung eines W-Bosons läuft analog zur  $Z^0$ -Produktion ab, jedoch zerfällt dies statt in ein Lepton-Antilepton-Paar in ein Lepton-Neutrino-Paar. Wegen seiner extrem schwachen Wechselwirkung mit Materie ist das Neutrino praktisch nicht nachweisbar, weshalb man allein aus der Kinematik des Leptons (Abb. 7.44) die gesuchte Information gewinnen muß.

Des Weiteren ist auch hier der Wirkungsquerschnitt der Reaktion sehr klein. In der Resonanz ergibt sich:

$$\sigma_{\max}(u\bar{d} \rightarrow W^+ \rightarrow e^+\nu_e) = \underbrace{\frac{1}{N_c}}_{\text{Anzahl der Farben da } u\bar{d} \text{ farbneutral sein muß}} \cdot \text{BW}(\Gamma_{u\bar{d}} \cdot \Gamma_{e^+\nu_e}) \cdot \frac{2J+1}{3} = 5,2 \text{ nbarn}$$

$$\sigma_{\text{tot}}(p\bar{p} \rightarrow X) \approx 40 \text{ mbarn} \approx 10^7 \sigma_{\max}(u\bar{d} \rightarrow W^+ \rightarrow e^+\nu_e)$$

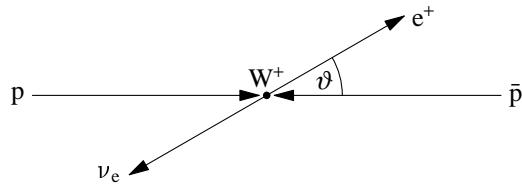
Integriert man über die gesamte Breite des W-Bosons und berücksichtigt man alle Strukturfunktionen, so erhält man auf Grund des  $\sin^2 \vartheta_W$  in der Kopplungsstärke:

$$\begin{aligned}\sigma(p\bar{p} \rightarrow W \rightarrow e\nu_e) &\approx 1 \text{ nbarn} \quad \text{bei } 340 \text{ GeV} \\ \sigma(p\bar{p} \rightarrow Z^0 \rightarrow e^-e^+) &\approx 0,1 \text{ nbarn} \quad \text{bei } 340 \text{ GeV}\end{aligned}$$

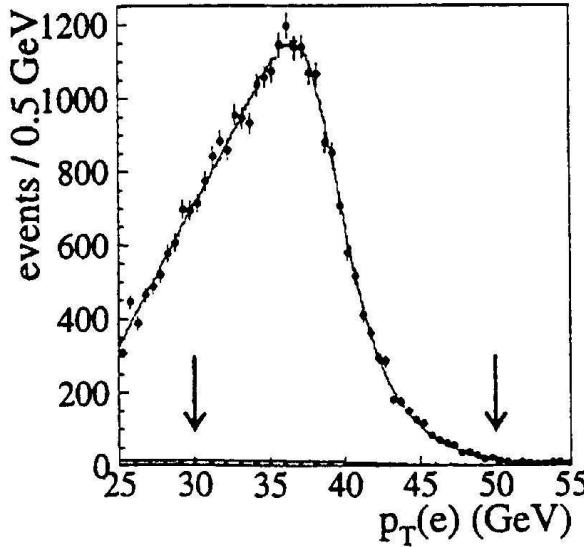
Um nun nur aus der Kinematik des Leptons alle benötigten Größen bestimmen zu können, definiert man den Transversalimpuls des Positrons im Ruhesystem des  $W^+$

$$p_\perp = p_\perp^{e^+} = \frac{1}{2} M_{Wc} c \cdot \sin \vartheta . \quad (7.103)$$

Dabei ist  $M_{Wc}/2$  der Impuls des Positrons im Ruhesystem des  $W^+$ . Da die Energie des Positrons groß ist gegen seine Ruhemasse, kann  $c$  als gute Näherung für seine Geschwindigkeit



**Abb. 7.44:** Kinematik der Reaktion  $p\bar{p} \rightarrow W^+ \rightarrow e^+\nu_e$ . Das W-Boson wird praktisch in Ruhe produziert.



**Abb. 7.45:** Transversalimpuls des Elektrons beim W-Zerfall. Die Pfeile zeigen den für den Fit verwendeten Datenbereich (Daten aus FNAL)

gelten und der Transversalimpuls ist nur abhängig vom Streuwinkel  $\vartheta$ . Deshalb ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt zu

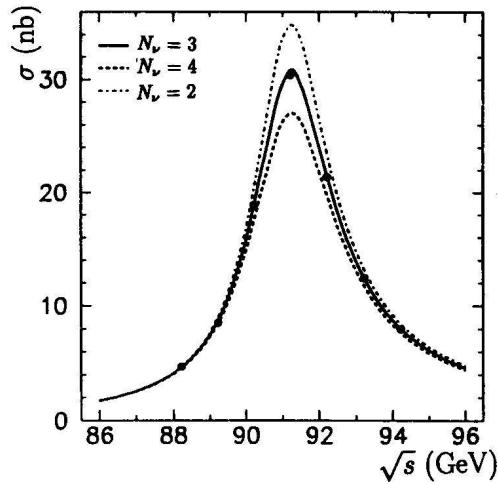
$$\frac{d\sigma}{dp_{\perp}} = \frac{d\sigma}{d\cos \vartheta} \cdot \frac{d\cos \vartheta}{dp_{\perp}} = \left( \frac{d\sigma}{d\cos \vartheta} \right)_{V-A} \cdot \frac{2p_{\perp}}{M_W c} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}M_W c\right)^2 - p_{\perp}^2}} \quad (7.104)$$

Dies bedeutet, daß der Wirkungsquerschnitt bei  $P_{\perp} = \frac{1}{2}M_W c$  ein Maximum besitzt, welches allerdings mit der W-Breite verschmiert ist. Auf Grund der Breite wird die Gleichung auch nicht singulär. Die halbe W-Masse kann man deshalb an der Mitte der Hochenergieflanke der Transversalimpulsverteilung aus Abb. 7.45 ablesen. Unter Ausnutzung dieses Zusammenhangs liefern Messungen an Collidern die Werte:

$$M_W = (80,364 \pm 0,029) \text{ GeV} \quad (7.105)$$

$$\Gamma_W = (2,05 \pm 0,05) \text{ GeV} \quad (7.106)$$

**Bestimmung der Masse und Breite des  $Z^0$ :** Die genauesten Messungen für die Masse des  $Z^0$  stammen aus der Kollision von  $e^+e^-$ -Paaren am LEP. Aus der Reaktion  $e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow X$



**Abb. 7.46:** Vergleich der Meßdaten mit Standardmodellvorhersagen

(z.B.  $q\bar{q}$ ,  $e^+e^-$ ,  $\mu^+\mu^-$ , ...) wurde aus der Resonanzkurve, d.h. einer Variation der Strahlenergie über den Massenbereich der  $Z^0$ -Resonanz, die Masse und die Breite des Bosons bestimmt.

$$M_{Z^0} = (91.187 \pm 0.0007) \text{ GeV} \quad (7.107)$$

$$\Gamma_{Z^0} = (2.4974 \pm 0.0038) \text{ GeV} \quad (7.108)$$

**Vergleich mit dem Standardmodell:** Das Standardmodell macht keine Vorhersagen bezüglich der absoluten Massen, gibt jedoch das Verhältnis vor:

$$\left( \frac{M_W}{M_{Z^0}} \right)_{\text{th.}} = \cos \vartheta_W = 0.881 \quad (7.109)$$

$$\left( \frac{M_W}{M_{Z^0}} \right)_{\text{exp.}} = 0.880 \pm 0.003 \quad (7.110)$$

Diese gute Übereinstimmung liefert eine weitere Bestätigung für das Standardmodell.

**Breite des  $Z^0$ :** Wir betrachten die Kopplung des  $Z^0$  an Fermionen in der Reaktion  $Z^0 \rightarrow f\bar{f}$ :

$$\Gamma_{f\bar{f}} = \Gamma_0 \left[ (g_L^f)^2 + (g_R^f)^2 \right] ,$$

mit  $g^f = T_3 - Q_f \cdot \sin^2 \vartheta_W$  und  $\Gamma_0 = \frac{G_F}{3\pi\Gamma_{Z^0}} M_{Z^0}^2 c^6 \approx 663 \text{ MeV}$ . Für linkshändige Neutrinos gilt:

$$T_3 = \frac{1}{2} \quad Q_f = 0 \quad g_L = \frac{1}{2} .$$

Rechtshändige Neutrinos existieren nicht, also gilt:

$$T_3 = \text{nicht definiert} \quad Q_f = \text{nicht definiert} \quad g_R = 0 .$$

Damit trägt jedes Neutrino-Antineutrino-Paar, in das das W zerfallen kann (d.h.  $m_\nu \lesssim M_{Z^0}/2$ ) einen Betrag von  $\Gamma_{\nu\bar{\nu}} = 165,8 \text{ MeV}$  zur Gesamtbreite des  $Z^0$  bei. Außerdem erhält man mit

$$g_L^d = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sin^2 \vartheta_W \quad g_R^d = \frac{1}{3} \sin^2 \vartheta_W \quad : \quad$$

$$\Gamma^{d,s,b} = 122,4 \text{ MeV} \cdot 3 \quad (7.111)$$

$$\Gamma^{u,c,t} = 94,9 \text{ MeV} \cdot 3 \quad (7.112)$$

$$\Gamma^{e,\mu,\tau} = 83,3 \text{ MeV} \quad (7.113)$$

Der Faktor 3 berücksichtigt die möglichen Farben der Quarks.

Die gesamte Breite  $\Gamma_{\text{tot}}^{Z^0}$  ergibt sich aus der Summe aller partiellen Breiten. Die partielle Breite für Neutrinos ist aber nicht messbar, da die  $\nu$  selber nicht nachweisbar sind. Aber aus der direkten Messung von  $\Gamma_{\text{tot}}^{Z^0}$  und der Kenntnis aller Breiten (mit Ausnahme der Neutrinos) ist  $\Gamma_{Z^0}^{\nu\bar{\nu}}$  bestimmbar.

$$n_\nu \Gamma^{\nu\bar{\nu}} = \Gamma_{\text{tot}}^{Z^0} - (\Gamma^{d,s,b} + \Gamma^{u,c} + \Gamma^{e,\mu,\tau})$$

Die t-Quarks werden nicht berücksichtigt, da das  $Z^0$  nicht genug Masse besitzt, um in ein  $t\bar{t}$ -Quarkpaar zu zerfallen.  $n_\nu$  gibt die Anzahl der Neutrinosorten an, in die das  $Z^0$  zerfallen kann. Da Neutrinos generell verschwindende Massen haben, lässt sich so eine Aussage über die gesamte Anzahl der  $\nu$ -Flavors treffen.

Unter der Annahme  $n_\nu = 3$  ergibt sich:

$$\Gamma_{Z^0}^{\text{Theorie}} = 2497 \pm 6 \text{ MeV} \approx \Gamma_{Z^0}^{\text{Experiment}}$$

Bestimmt man  $n_\nu$  direkt aus dem Experiment (Abb. 7.46), so erhält man:

$$n_\nu = 2,995 \pm 0,012 .$$

Es gibt als genau 3 leichten Neutrinos und somit auch nur 3 Familien der Leptonen.

## Übungen zu Kapitel 7

### Übung 7.1: Dirac-Gleichung.

a) Zeigen Sie, daß eine Lösung der freien Dirac-Gleichung

$$(i\gamma_\mu \cdot \partial^\mu - m)\psi(x) = 0$$

durch die Wellenfunktionen

$$\psi(x) = u(K)e^{-iK \cdot x} \quad \text{mit} \quad u(K) = \sqrt{K_0 + m} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{K}}{K_0 + m} \end{pmatrix} \chi$$

gegeben ist.

b) Die 2-komponentigen Pauli-Spinoren  $\chi$  können als Eigenzustände der Helizität  $\sigma \cdot \hat{K}$  gewählt werden, so daß

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{K} \chi_\pm = \pm \chi_\pm$$

Die Richtung von  $\hat{K}$  sei durch den Polarwinkel  $\theta$  und den Azimutalwinkel  $\phi$  festgelegt:

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, daß die Helizitätseigenspinoren dann folgende Gestalt haben:

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ e^{i\phi} \sin \theta/2 \end{pmatrix}, \quad \chi_- = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 \end{pmatrix}.$$

**Übung 7.2: Helizität und Chiralität.** Zeigen Sie, daß für freie masselose Dirac-Teilchen die Helizität gleich der Chiralität ist, d. h. die Wirkung von

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\Sigma} \cdot \hat{K} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{K} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{K} \end{pmatrix}$$

ist dieselbe. Überzeugen Sie sich, daß dies für  $m \neq 0$  nicht mehr gilt.

**Übung 7.3: Drei-Teilchen-Phasenraum.** Beim Dreikörperzerfall eines Teilchens ist über den lorentzinvarianten Phasenraum des Endzustands zu integrieren,

$$\int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2 - p_3)$$

mit

$$P = (M, 0), \quad p_i^\mu = (E_i, \vec{p}_i), \quad p_i^2 = m_i^2, \quad (i = 1, 2, 3).$$

a) Was bedeuten die einzelnen Faktoren? Führen Sie die „triviale“  $d^3 p_3$ -Integration sowie die verbleibenden Winkelintegrationen aus.

- b) Gehen Sie zu Integrationen bzgl.  $E_1$ ,  $E_2$  und  $z$ , dem Kosinus des Winkels zwischen  $\vec{p}_1$  und  $\vec{p}_2$  über. Als Ergebnis erhalten Sie

$$\frac{1}{32\pi^3} \int dE_1 dE_2.$$

- c) Durch welche Ungleichungen ist das erlaubte Integrationsgebiet (*Dalitz-Plot*) bestimmt?

**Übung 7.4: Zerfall des freien Neutrons.** Welche Auswirkungen hat die Paritätsverletzung auf den  $\beta$ -Zerfall polarisierter Neutronen in Ruhe?

**Übung 7.5: Axial- und Vektorkopplung im Neutronzerfall** Berechnen Sie das Verhältnis  $g_A/g_V$  von Vektor- und Axialvektorkopplung im Neutronzerfall im Rahmen des Quarkmodells. Verwenden Sie hierzu die Quarkwellenfunktionen von Proton und Neutron, wie sie in Übung 11.2 behandelt wurden. Berechnen Sie damit die Matrixelemente des Fermi-Operators

$$V = \sum_{q=1}^3 \tau^-(q)$$

und des Gamow-Teller-Operators

$$A = \sum_{q=1}^3 \vec{\sigma}(q) \tau^-(q)$$

Hierbei ist  $\tau^-$  der Isospin-Absteigeoperator, für den gilt:

$$\tau^- |d\rangle = |u\rangle .$$

Das Verhältnis  $g_A/g_V$  ist dann gegeben durch das Verhältnis der Fermi- und Gamow-Teller-Matrixelemente:

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{\langle p, m_s = \frac{1}{2} | A | n, m_s = \frac{1}{2} \rangle}{\langle p, m_s = \frac{1}{2} | V | n, m_s = \frac{1}{2} \rangle}.$$

**Übung 7.6:  $\Delta I = 1/2$ -Regel.** Zerfälle, die die Strangeness ändern, erhalten die Quantenzahl Isospin ( $I$ ) nicht, aber folgen der Regel, daß  $\Delta I = 1/2$  ist. Verwenden Sie diese Regel um die folgenden Verhältnisse zu berechnen:

$$R_1 = \frac{K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-}{K_S \rightarrow \pi^0 \pi^0} \quad R_2 = \frac{K_L \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0}{K_L \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0}$$

$$R_3 = \frac{K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-}{K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0} \quad R_4 = \frac{\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 \pi^-}{\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 \pi^0}$$

**Übung 7.7: Neutrinostreuung.** Erklären Sie, warum die Beobachtung des Prozesses

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_\mu$$

einen eindeutigen Beweis für die Existenz von neutralen schwachen Strömen darstellt, der Prozeß

$$\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$$

dagegen nicht.

Zeigen Sie, daß der maximale Winkel zwischen dem Rückstoßelektron und dem  $\bar{\nu}_\mu$ -Strahl  $\sqrt{2m/E}$  ist, wobei  $m$  die Elektronenmasse und  $E$  die Energie des Elektrons ist.

**Übung 7.8: Neutrino-Nukleon-Streuung.** In der  $V - A$ -Theorie der schwachen Wechselwirkung wird die elastische Streuung von Neutrinos an Elektronen für Reaktionen, die durch geladene Ströme vermittelt werden, mit den folgenden differentiellen Wirkungsquerschnitten beschrieben:

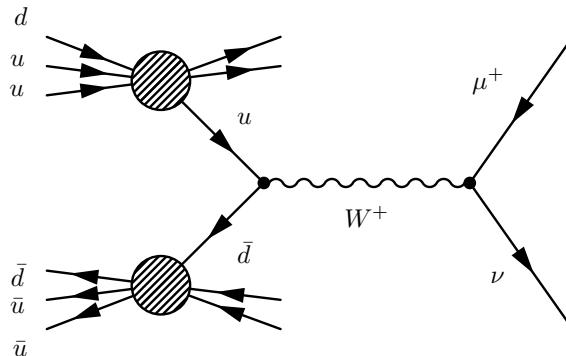
$$\frac{d\sigma^{\nu e}}{dy} = \frac{d\sigma^{\bar{\nu} \bar{e}}}{dy} = \frac{2G^2 m_e E_\nu}{\pi},$$

$$\frac{d\sigma^{\bar{\nu} e}}{dy} = \frac{d\sigma^{\nu \bar{e}}}{dy} = \frac{2G^2 m_e E_\nu}{\pi} (1-y)^2,$$

wobei  $G$  die Fermi-Kopplungskonstante und  $y = (E_e - E'_e)/E_\nu$  der fraktionelle Energieübertrag auf das Elektron ist. Benützen Sie diese Beziehungen, um die differentiellen Wirkungsquerschnitte für die Streuung von Neutrinos an einem System von punktförmigen Partonen  $q$  und Antipartonen  $\bar{q}$  der Masse  $m = xM$  anzugeben.

Das Verhältnis der totalen Wirkungsquerschnitte für die Streuung von Neutrinos bzw. Antineutrinos an Nukleontargets werde in einem Experiment zu  $R = 0.5$  gemessen. Bestimmen Sie das Verhältnis der Anteile am Nukleonimpuls, die von Quarks bzw. Antiquarks getragen werden, und berechnen Sie den Mittelwert von  $y$  für Neutrino- und Antineutrinoereignisse.

**Übung 7.9:  $W^+$ -Produktion in  $p\bar{p}$ -Stoßen**



Nehmen Sie an, daß die Impulsverteilungen der u-Quarks im Proton und der d-Quarks im Antiproton die Form

$$F_u(x) = xu(x) = a_1(1-x)^3, \quad (7.114)$$

$$F_{\bar{d}}(x) = x\bar{d}(x) = a_2(1-x)^3 \quad (7.115)$$

haben, wobei  $x$  der Anteil am Nukleonimpuls ist, der von den Quarks getragen wird (Bjorkensche Skalenvariable). Bestimmen Sie (durch Integration der Impulsverteilungen) die Koeffizienten  $a_1$  und  $a_2$  für den Fall, daß die Quarks insgesamt die Hälfte des Nukleonenimpulses tragen. Im Partonmodell des Nukleons hat der doppelt-differentielle Wirkungsquerschnitt für die Produktion eines  $W^+$ -Bosons in einer  $p\bar{p}$ -Kollision die „Drell-Yan“-Form

$$\frac{d^2\sigma}{dx_1 dx_2} = \sigma_{u\bar{d}}(\hat{s}) u(x_1) \bar{d}(x_2) \delta(1 - x_1 x_2 s/M_W^2), \quad \hat{s} = x_1 x_2,$$

wobei  $u(x_1)$  und  $\bar{d}(x_2)$  die Verteilungen der u- bzw.  $\bar{d}$ -Quarks mit relativen Impulsanteilen  $x_1$  und  $x_2$  (aus Gleichung (7.114) und (7.115) mit  $a_1 = 2 a_2 = 4/3$ ) beschreiben. Berechnen Sie daraus den Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  für die Reaktion  $p\bar{p} \rightarrow W^+ + X$  als Funktion der  $p\bar{p}$ -Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$ , indem Sie über die oben angegebenen Quarkverteilungen sowie über die Breit-Wigner-Form des elementaren Quarkwirkungsquerschnitts  $\sigma_{u\bar{d}}(\hat{s})$  (Maximum  $\sigma_0$ ) integrieren. Drücken Sie  $\sigma$  durch  $\sigma_0$ ,  $p = x_1 x_2 = M_W^2/s$ , die totale Breite  $\Gamma_W$  und die Masse  $M_W$  des  $W^+$ -Bosons aus. Berechnen Sie  $\sigma$  für  $\sqrt{s} = 0.3, 1.0$  und  $10 \text{ TeV}$ . ( $\sigma_0 = 12 \times 5.2 \text{ nb}$ ,  $M_W = 83 \text{ GeV}$ ,  $\Gamma_W = 2.7 \text{ GeV}$ ).

**Übung 7.10: Nichtabelsche Eichtransformationen (für theoretisch Ambitionierte).** Wir betrachten ein Dublett von Fermionfeldern,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$$

mit den zugehörigen globalen SU(2)-Transformationen

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = U\psi(x) \\ U &= \exp\left(\frac{i}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{\Theta}\right) \in \text{SU}(2), \end{aligned}$$

wobei  $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  die Pauli-(Isospin-)matrizen sind.

Wie transformiert sich die freie Lagragedichte  $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x) [\not{i}\gamma_\mu \partial^\mu - m] \psi(x)$  unter lokalen SU(2)-Transformationen  $U(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{\Theta}(x)\right)$ ?

Zeigen Sie: Wenn das Triplet von Vektorfeldern  $\vec{A}_\mu(x)$  folgende inhomogene Eichtransformation besitzt,

$$\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}_\mu(x) \rightarrow \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}'_\mu(x) = \mathbf{U}(x) \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}_\mu(x) \mathbf{U}^{-1}(x) + \frac{i}{g} (\partial_\mu \mathbf{U}(x)) \mathbf{U}^{-1}(x),$$

so ist die Wechselwirkungs-Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(x) \left\{ \gamma^\mu \left[ i\partial_\mu - g \frac{\vec{\tau}}{2} \vec{A}_\mu(x) \right] - m \right\} \psi(x)$$

lokal SU(2)-eichinvariant ( $g$  Kopplungskonstante).

Weisen Sie nach, daß der nichtabelsche Feldstärketensor

$$\vec{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \vec{A}_\nu(x) - \partial_\nu \vec{A}_\mu(x) - g \vec{A}_\mu(x) \times \vec{A}_\nu(x)$$

sich homogen gemäß

$$\vec{\tau} \cdot \vec{F}_{\mu\nu}(x) \rightarrow \vec{\tau} \cdot \vec{F}'_{\mu\nu}(x) = U(x) \vec{\tau} \cdot \vec{F}_{\mu\nu}(x) U^{-1}(x)$$

transformiert.

**Übung 7.11: Zerfallsbreite des  $Z^0$ -Bosons.** Die partiellen Zerfallsbreiten des  $Z^0$ -Bosons in Lepton-Antilepton, bzw. Quark-Antiquark sind unter Vernachlässigung der Massen der Endzustände gegenüber der  $Z^0$ -Masse gegeben durch

$$\Gamma_f = \frac{G_F M_Z^3 c^6}{3\pi \sqrt{2}(\hbar c)^3} \left[ (g_V^f)^2 + (g_A^f)^2 \right]$$

wobei

$$g_V^f = T_3^f - 2q_f \sin^2 \theta_W \quad \text{und} \quad g_A^f = T_3^f$$

die Vektor- und Axialvektorkopplungen des Fermions f sind, die durch den schwachen Isospin  $T_3^f$  und die Ladung  $q_f$  des Fermions f sowie  $\sin^2 \theta_W$  bestimmt sind.

Bestimmen Sie für alle Quarks und Leptonen die partiellen Zerfallsbreiten und ermitteln Sie die totale Zerfallsbreite  $\Gamma = \sum_f \Gamma_f$  des  $Z^0$ .

Hinweis:  $M_Z = 91.91 \text{ GeV}/c^2$ ,  $\sin^2 \theta_W = 0.232$ ,  $G_F/(\hbar c)^3 = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ .

**Übung 7.12: Selbstwechselwirkung von W- und Z<sup>0</sup>-Bosonen und Higgs-Kopplung.** Die Lagrangedichte der Eichbosonen des Standardmodells, die deren kinetische Energie und Selbstwechselwirkung beschreibt, ist gegeben durch:

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4} \mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu},$$

wobei die physikalischen Eichbosonen gegeben sind als:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad A_\mu = \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W W_\mu^3, \quad Z_\mu = -\sin \theta_W B_\mu + \cos \theta_W W_\mu^3.$$

Die Lagrangedichte, die Higgs- mit Eichbosonen koppelt, ist

$$\mathcal{L}_2 = \left| \left( i\partial_\mu - \frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu - g \tan \theta_W \frac{Y}{2} B_\mu \right) \phi \right|^2.$$

- a) Geben Sie die Wechselwirkung von W<sup>±</sup>, Z<sup>0</sup> und γ untereinander an und skizzieren Sie die dazugehörigen Feynman-Graphen. Welche Kopplungskonstanten treten auf?
- b) Zeigen Sie, daß die Lagrangedichte für das skalare Higgs-Boson Terme der Art hW<sup>+</sup>W<sup>−</sup> und hhW<sup>+</sup>W<sup>−</sup> enthält, wobei das Higgs-Dublett gegeben ist durch

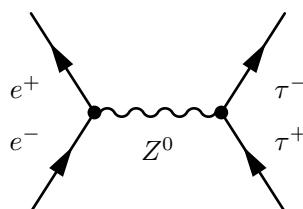
$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix}$$

und h die Anregung des Higgs-Feldes ist.

- c) Skizzieren Sie die Feynman-Diagramme für W<sup>+</sup>W<sup>−</sup> → W<sup>+</sup>W<sup>−</sup>.

**Übung 7.13: Bestimmung des Weinberg-Winkels aus der Polarisation von τ-Leptonen aus Z<sup>0</sup>-Zerfällen.** Wir betrachten den Zerfall von Z<sup>0</sup>-Bosonen, die resonant in e<sup>+</sup>e<sup>−</sup>-Vernichtung erzeugt werden, in τ<sup>+</sup>τ<sup>−</sup>-Paare. Die Paritätsverletzung durch die schwache Wechselwirkung bewirkt, daß die aus dem Zerfall hervortretenden τ-Leptonen polarisiert sind. Die Polarisation ist definiert als

$$P_\tau = -\frac{\sigma_R - \sigma_L}{\sigma_R + \sigma_L}$$



wobei  $\sigma_R$  der Wirkungsquerschnitt für rechtshändige  $\tau^-$  und linkshändige  $\tau^+$  ist und  $\sigma_L$  der Wirkungsquerschnitt für linkshändige  $\tau^-$  und rechtshändige  $\tau^+$ . Die Helizitäten der  $\tau$ -Leptonen aus dem  $Z^0$ -Zerfall sind antikorreliert, die einlaufenden  $e^+$  und  $e^-$  sind unpolarisiert. Die  $\tau$ -Polarisation ist eine Funktion des Polarwinkels  $\theta$ , dem Winkel zwischen der  $e^+e^-$ -Strahlachse und den auslaufenden  $\tau$ -Leptonen:

$$P_\tau(\cos \theta) = -\frac{\alpha(1 + \cos^2 \theta) + 2\alpha \cos \theta}{(1 + \cos^2 \theta) + 2\alpha^2 \cos \theta}$$

Der auftretende Asymmetrieparameter  $\alpha$  ist hierbei durch die Vektor- und Axialvektorkopplung des  $Z^0$  an die  $\tau$ -Leptonen gegeben:

$$\alpha = \frac{2g_V g_A}{g_V^2 + g_A^2}$$

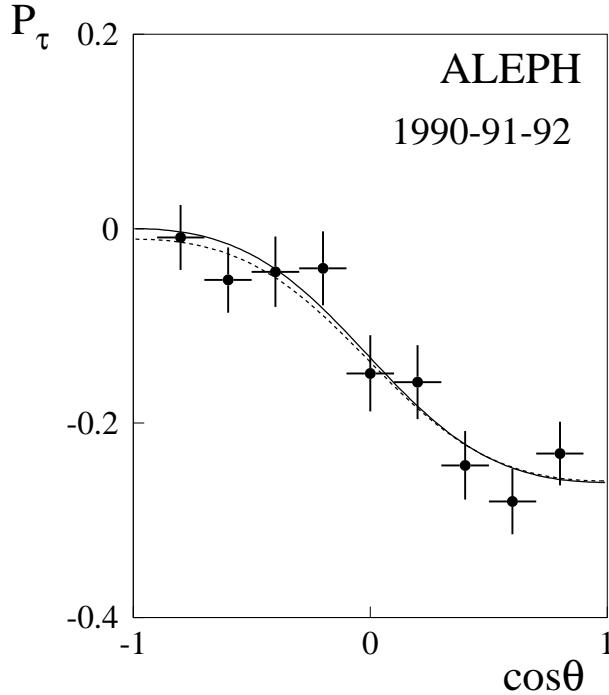
- a) Berechnen Sie aus dem Asymmetrieparameter  $\alpha$  den Weinberg-Winkel  $\theta_W$ . Benutzen Sie hierzu die Beziehung:

$$\frac{g_V}{g_A} = 1 - \sin^2 \theta_W$$

- b) Zusatz (Mini-Fopra): Analysieren Sie die folgenden Daten des ALEPH-Experiments zur  $\tau$ -Polarisation. Führen Sie hierzu einen  $\chi^2$ -Fit der Daten durch (unter Vernachlässigung der Fehler), um die Asymmetrie zu bestimmen. Hieraus können Sie dann einen Meßwert für  $\sin^2 \theta_W$  bestimmen.

Hinweis: Verwenden Sie die Daten aus folgender, aus [Bu96] entnommenen Wertetabelle:

$\cos \theta$	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
$P_\tau$	-0.0092	-0.052	-0.045	-0.041	-0.148	-0.159	-0.245	-0.281	-0.232



### Übung 7.14: Elektrisches Dipolmoment des Neutrons

- Zeigen Sie, daß das elektrische Dipolmoment (EDM) des Neutrons  $\vec{d}_n$ , falls es existiert, parallel oder antiparallel zur Spinrichtung des Neutrons sein muß. Welche Symmetrien würde die Existenz eines EDM verletzen?
- Versuchen Sie, aus Dimensionsüberlegungen eine obere Grenze für das EDM des Neutrons abzuschätzen.
- Zur Messung des EDM werden Neutronen in ein kombiniertes elektrisches und magnetisches Feld gebracht. Wie groß ist die Aufspaltung der Spinzustände  $m = -1/2$  und  $m = +1/2$  für den Fall, daß das Neutron kein EDM besitzt, wie groß für den Fall eines nichtverschwindenden EDM?
- Schlagen Sie ein Meßprinzip vor, auf dessen Basis ein Experiment mit ultrakalten Neutronen zur Messung des EDM des Neutrons durchgeführt werden könnte.

### Übung 7.15: Spontane Symmetriebrechung.

Gegeben sei die Lagrangedichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - V \\ &= \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2\end{aligned}$$

mit dem komplexen Skalarfeld

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$$

- a) Drücken Sie  $\mathcal{L}$  durch die Felder  $\phi_1, \phi_2$  aus.  
b) Sei  $\mu^2 < 0, \lambda > 0$ . Bestimmen Sie die Minima des Potentials  $V(r)$ , wobei  $r = \phi_1^2 + \phi_2^2$ .  
c) Definieren Sie das Vakuum als

$$\phi_1 = r_0, \quad \phi_2 = 0$$

wobei  $r_0^2$  das in 2. berechnete Minimum sein soll. Ersetzen Sie  $\phi_1(x)$  durch  $r_0 + \eta(x)$ , wobei  $\eta$  eine Anregung des Vakuums ist, und berechnen sie  $\mathcal{L}$  in diesen neuen Variablen. Wie lauten die Massenterme (d. h. die quadratischen Terme) für  $\eta$  und  $\phi_2$ ? Was folgt daraus für die Massen?

**Übung 7.16: CKM-Matrix.** Im Standardmodell hängen die Quarkzustände  $d', s'$  und  $b'$ , die an der schwachen Wechselwirkung teilnehmen, in folgender Weise mit den Masseneigenzuständen zusammen:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $V$ , genannt Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix, ist eine unitäre Matrix, die durch drei Winkel und eine komplexe Phase parametrisiert werden kann.

- a) Betrachten Sie den Lagrangian für die schwache Wechselwirkung der Quarks mit geladenen W-Bosonen:

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ g V_{u;d} \bar{u}_i \gamma_\mu W^{+\mu} (1 - \gamma_5) d_j + g V_{u;d}^* \bar{d}_j \gamma_\mu W^{-\mu} (1 - \gamma_5) u_i \right] \quad (u_i = u, c, t; d_j = d, s, b)$$

Unter der  $\mathcal{CP}$ -Transformation gilt:

$$\bar{\psi}_i \psi_j \rightarrow \bar{\psi}_j \psi_i \quad \text{und} \quad \bar{\psi}_i \gamma_\mu W^{\pm\mu} \psi_j \rightarrow \bar{\psi}_j \gamma_\mu W^{\mp\mu} \psi_i.$$

Zeigen Sie durch Anwendung der  $\mathcal{CP}$ -Transformation auf den Lagrangian, daß  $\mathcal{CP}$ -Verletzung nur auftreten kann, wenn nicht alle Elemente der CKM-Matrix reell sind.

- b) Zeigen Sie, daß aus der Unitarität der CKM-Matrix ( $V V^\dagger = \mathbb{1}$ ) unter anderem die unten angegebenen Beziehungen folgen:

$$\begin{aligned} V_{ud} V_{us}^* + V_{cd} V_{cs}^* + V_{td} V_{ts}^* &= 0 \\ V_{us} V_{ub}^* + V_{cs} V_{cb}^* + V_{ts} V_{tb}^* &= 0 \\ V_{ud} V_{ub}^* + V_{cd} V_{cb}^* + V_{td} V_{tb}^* &= 0 \end{aligned} \tag{7.116}$$

Wie kann man diese Beziehungen graphisch in der komplexen Ebene darstellen?

- b) Die Absolutwerte der Elemente der CKM-Matrix sind im Rahmen der Meßfehler gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9751(6) & 0.221(3) & 0.0032(13) \\ 0.221(3) & 0.9745(8) & 0.039(3) \\ 0.009(4) & 0.039(3) & 0.9992(2) \end{pmatrix}$$

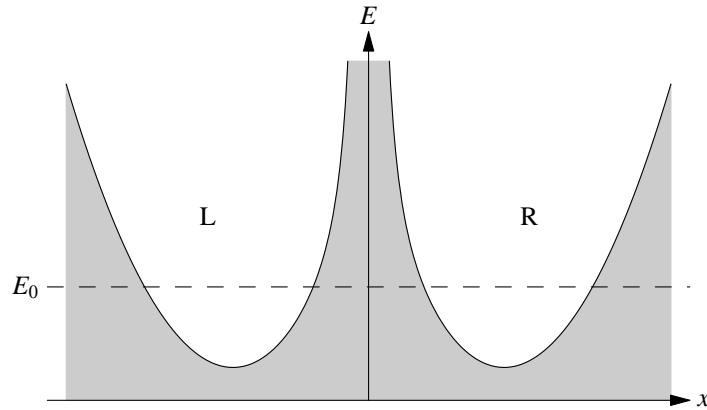
Zeichnen Sie die Unitaritätsdreiecke der Beziehungen (7.116) auf. Welche Rückschlüsse erlauben diese auf die Wahl der Teilchen für eine aussichtsreiche Suche nach  $\mathcal{CP}$ -Verletzung?

# Kapitel 8

## Teilchenoszillationen

### 8.1 Das Zweizustandsproblem

Wir betrachten zunächst zwei identische getrennte Potentialtöpfe:



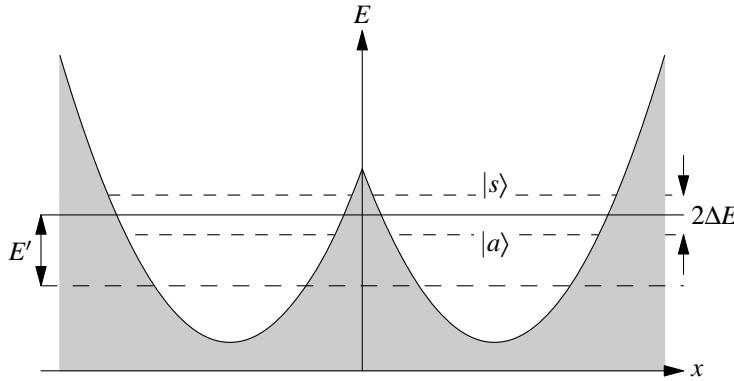
Die in ihnen liegenden Zustände haben dann die gleiche Energie, d.h. es gilt:

$$\mathcal{H}_0|L\rangle = E_0|L\rangle \quad \text{und} \quad \mathcal{H}_0|R\rangle = E_0|R\rangle$$

$|L\rangle$  und  $|R\rangle$  sind also entartet. Da die Barriere unendlich hoch ist, sind keine Übergänge zwischen den Zuständen möglich:

$$\langle L|\mathcal{H}_0|R\rangle = \langle R|\mathcal{H}_0|L\rangle = 0$$

Nun schalten wir eine Wechselwirkung ein, die Übergänge zwischen  $|L\rangle$  und  $|R\rangle$  induziert und die Barriere zwischen den Töpfen L und R reduziert.



Hier ist:

$$\mathcal{H} |\psi\rangle = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}) |\psi\rangle = E |\psi\rangle$$

Was sind nun die Eigenfunktionen von  $\mathcal{H}$ ? Die Lösungen sind Linearkombinationen von  $|L\rangle$  und  $|R\rangle$ . Um die genaue Art der Lösungen zu erhalten, nützen wir aus, daß das Problem spiegel-symmetrisch ist. Der Paritätsoperator  $\mathcal{P}$  muß also mit  $\mathcal{H}$  vertauschen und  $|L\rangle$  und  $|R\rangle$  ineinander überführen.

$$[\mathcal{H}, \mathcal{P}] = [\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}, \mathcal{P}] = 0$$

$$\mathcal{P}|L\rangle = |R\rangle \quad \mathcal{P}|R\rangle = |L\rangle$$

Die Eigenfunktionen von  $\mathcal{H}$  und  $P$  sind folglich symmetrische und antisymmetrische Linear-kombinationen der ungestörten Zustände  $|L\rangle$  und  $|R\rangle$ .

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle + |R\rangle) \quad \mathcal{P}|S\rangle = |S\rangle$$

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle - |R\rangle) \quad \mathcal{P}|A\rangle = -|A\rangle$$

Man kann leicht zeigen, daß  $\langle A | \mathcal{H}_0 | S \rangle = 0$  ist. Bei  $\mathcal{H}_{\text{int}} \ll \mathcal{H}_0$  erhält man dann mit Störungstheorie:

$$\langle S | \mathcal{H}_{\text{int}} | S \rangle = E' + \Delta E \quad \langle A | \mathcal{H}_{\text{int}} | A \rangle = E' - \Delta E$$

Daraus folgt sogleich:

$$\langle L | \mathcal{H}_{\text{int}} | L \rangle = \langle R | \mathcal{H}_{\text{int}} | R \rangle = E'$$

$$\langle L | \mathcal{H}_{\text{int}} | R \rangle = \langle R | \mathcal{H}_{\text{int}} | L \rangle = \Delta E$$

Die Wechselwirkung verschiebt also den Energiedurchschnitt auf  $E'$  und hebt die Entartung auf. Es kommt zu einer Energieaufspaltung um  $2\Delta E$ .

**Gedankenexperiment:** Wir werfen nun als Gedankenexperiment ein Teilchen zum Zeitpunkt  $t = 0$  in den linken Topf. Sein Zustand ist dann:

$$|\psi(0)\rangle = |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|S\rangle + |A\rangle)$$

Das Teilchen besitzt jedoch *keine* definierte Parität. Wir betrachten nun die Zeitabhängigkeit des Zustandes:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}) |\psi(t)\rangle$$

Wir wissen, daß  $|\psi(t)\rangle$  eine Linearkombination von  $|L\rangle$  und  $|R\rangle$  sein muß:

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|L\rangle + \beta(t)|R\rangle \quad \alpha(t), \beta(t) \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad |\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 = 1 \quad (8.1)$$

Mit  $\alpha(0) = 1$  und  $\beta(0) = 0$  läßt sich dann zeigen, daß

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i(E_0+E')t/\hbar} \left( \cos \frac{\Delta Et}{\hbar} |L\rangle + i \sin \frac{\Delta Et}{\hbar} |R\rangle \right) \quad (8.2)$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen nach der Zeit  $t$  im rechten Topf zu finden ist das Betragsquadrat der Projektion von (8.2) auf  $|R\rangle$ , also

$$P(R) = \sin^2 \frac{\Delta Et}{\hbar}.$$

Das heißt, das Teilchen oszilliert zwischen  $|L\rangle$  und  $|R\rangle$  mit der Frequenz

$$\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \langle L | \mathcal{H}_{\text{int}} | R \rangle.$$

Diese allgemeinen Betrachtungen gelten für viele physikalische Zweizustandssysteme und sind auf Dreizustandssysteme erweiterbar.

Beispiele:  $K^0$  ( $K^0 = d\bar{s}$ ,  $\bar{K}^0 = \bar{d}s$ )-,  $B^0$  ( $B^0 = d\bar{b}$ ,  $\bar{B}^0 = \bar{d}b$ )- und  $\gamma$ -Systeme

## 8.2 Das $K^0$ -System

Wir betrachten  $K^0$  und  $\bar{K}^0$  zunächst nur bezüglich der starken und der elektromagnetischen Wechselwirkung. Die schwache Wechselwirkung wird also vorerst nicht berücksichtigt. Unter dieser Voraussetzung ist die Hyperladung  $Y = B + S$  (= Baryonenzahl + Strangeness) erhalten.

$$Y(K^0) = 1, \quad Y(\bar{K}^0) = -1 \quad (8.3)$$

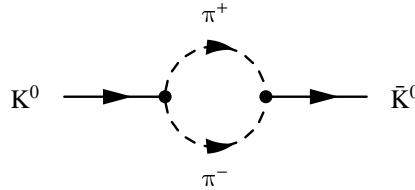
Da sie für  $K^0$  und  $\bar{K}^0$  verschieden ist, handelt es sich um zwei deutlich verschiedene Teilchen, die auch verschieden an der starken Wechselwirkung teilnehmen:

$$\begin{aligned} K^0 p &\rightarrow K^0 p, \quad K^0 p \rightarrow K^+ n \\ \bar{K}^0 p &\rightarrow \bar{K}^0 p, \quad \bar{K}^0 n \rightarrow K^- p \quad \bar{K}^0 p \rightarrow \Lambda \pi^+ \end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir zusätzlich die schwache Wechselwirkung. Dies entspricht dem „Einschalten“ von  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  in Abschnitt 8.1. Untersuchen wir zunächst den  $K^0$ -Zerfall:

$$K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \quad \Delta S = -1, \quad \bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \quad \Delta S = +1$$

Im Zerfall sind  $K^0$  und  $\bar{K}^0$  *nicht* unterscheidbar, d.h. man kann denselben Endzustand erhalten, egal mit welchem Teilchen man beginnt. Bezuglich der schwachen Wechselwirkung sind  $K^0$  und  $\bar{K}^0$  aber keine Eigenzustände, da hier die Strangeness keine gute Quantenzahl ist. Man sieht dies u.a. in Abb. 8.1, wobei an jedem Vertex des Loops eine Strangenessdifferenz von  $\Delta S = -1$  auftritt. Solche Prozesse führen zu Übergängen  $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ . Die Oszillation von einem  $K^0$  - System in ein  $\bar{K}^0$  - System bedingt somit eine Differenz von  $\Delta S = -2$  in der Strangeness, läuft also über 2. Ordnung der schwachen Wechselwirkung (vgl. Kapitel 7). Analog zur Mechanik oder Wellenoptik ergibt eine kohärente Überlagerung von gekoppelten Zuständen ( $K^0$  und  $\bar{K}^0$ ) die Eigenzustände der schwachen Wechselwirkung.



**Abb. 8.1:**  $K^0$ - $\bar{K}^0$ -Übergänge über einen virtuellen  $\pi\pi$ -Zwischenzustand. Erstmals 1955 vorhergesagt von M. Gell-Mann und A. Pais.

Kommen wir wieder auf Kapitel 8.1 zurück, so ist offenbar:

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{\text{stark}} + \mathcal{H}_{\text{em}}, \quad \mathcal{H}_{\text{int}} = \mathcal{H}_{\text{schwach}} \quad (8.4)$$

Da der Ladungsparitätsoperator  $c$  Teilchen und Antiteilchen vertauscht, wissen wir außerdem:

$$c |K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle, \quad c |\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle \quad (8.5)$$

Die Kaonen sind also keine Eigenzustände des  $c$ - Operators. Nehmen wir die Invarianz unter Zeitumkehr  $\mathcal{T}$  als erfüllt an, so wissen wir aufgrund des (stets gültigen)  $CPT$ -Theorems (Abschn. 6.5.4), daß auch die  $C\mathcal{P}$ -Invarianz gegeben sein muß, d. h.

$$[\mathcal{H}, C\mathcal{P}] = 0 \quad (8.6)$$

Wegen der Paritätsverletzung der schwachen Wechselwirkung gilt dies freilich nicht für die Ladungssymmetrie alleine. Die Eigenparität des  $K^0$  ist konventionsgemäß negativ<sup>1</sup>, also  $P|K^0\rangle = -|K^0\rangle$  und  $P|\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$ . Damit und mit (8.5) ergibt sich für die mit  $\mathcal{CP}$  operierten Zustände:

$$\mathcal{CP}|K^0\rangle = \eta|\bar{K}^0\rangle, \quad \mathcal{CP}|\bar{K}^0\rangle = \eta'|K^0\rangle$$

Mit den beliebig wählbaren Phasenfaktoren  $\eta$  und  $\eta'$ , die wir zu  $\eta = \eta' = 1$  wählen.

Wegen (8.6) können wir nun Eigenzustände zu  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  aus (8.4) angeben:

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \quad |K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad (8.7)$$

$$\mathcal{CP}|K_1^0\rangle = |K_1^0\rangle, \quad \mathcal{CP}|K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle$$

Dabei sind die Vorzeichen lediglich Konvention und werden in manchen Büchern (und in mancher Vorlesung) vertauscht. Zusammen haben wir also:

- $K^0$  und  $\bar{K}^0$  sind Eigenzustände der starken und der elektromagnetischen Wechselwirkung mit wohldefinierter Strangeness. Sie sind näherungsweise auch Masseneigenzustände, da, wie wir in (8.14) sehen werden, die Masse im wesentlichen von der starken Wechselwirkung bestimmt wird.
- $K_1^0$  und  $K_2^0$  sind  $\mathcal{CP}$ -Eigenzustände und Eigenzustände der schwachen Wechselwirkung.

Wir haben es also mit einem analogen Phänomen zur Quark-Mischung zu tun, die wir in Abschn. 7.8 kennengelernt hatten.

Aus unserer Analyse des quantenmechanischen Systems können wir nun folgende Schlußfolgerungen ziehen:

- $K^0$  und  $\bar{K}^0$  sind Teilchen und Antiteilchen mit  $m_{K^0} = m_{\bar{K}^0}$  und  $\tau_{K^0} = \tau_{\bar{K}^0}$ .  $K_1^0$  und  $K_2^0$  sind dagegen *verschiedene* Teilchen mit unterschiedlichen Eigenschaften.
- Es gibt Hyperladungssoszillationen. Startet man nämlich mit  $K^0$  ( $Y = 1$ ) und wartet, so induziert die schwache Wechselwirkung  $K^0 \rightarrow \bar{K}^0$ -Übergänge. Wegen  $Y(\bar{K}^0) = -1$  sind folglich Übergänge mit  $\Delta Y = \pm 2$  möglich.
- $K_1^0$  und  $K_2^0$  können unterschiedliche Massen haben, genau wie  $|S\rangle$  und  $|A\rangle$  aus Kapitel 8.1 oder die Energiezustände gekoppelter Schwingungen.

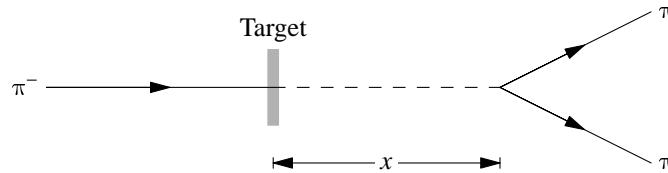
### 8.2.1 Lebensdauer von $K^0$

Der Hauptzerfall von  $K^0$  erfolgt in Pionen. Wir wissen, dass ein Zweipionsystem immer  $\mathcal{CP} = +1$  hat, falls der Bahndrehimpuls  $L = 0$  ist.

Beim Kaonzerfall ist dies wegen der kurzen Reichweite der schwachen Wechselwirkung immer erfüllt. Da  $K_1^0$  der  $\mathcal{CP} = +1$  Eigenzustand ist, ist sein Zerfall in zwei Pionen möglich. Das  $K_2^0$

---

<sup>1</sup>Kaonen sind  $0^-$ -Mesonen.



**Abb. 8.2:** Experiment zur Untersuchung des  $K^0 \rightarrow 2\pi$ -Zerfalls

hat dagegen  $\mathcal{CP} = -1$ , so dass der  $\pi\pi$ -Zerfall verboten ist und mindestens drei Pionen entstehen müssen. Die Massendifferenz zwischen Anfangs- und Endzustand ist dann natürlich wesentlich kleiner:

$$\Delta m(K \rightarrow 2\pi) = 220 \text{ MeV}$$

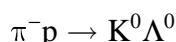
$$\Delta m(K \rightarrow 3\pi) = 80 \text{ MeV}$$

Wegen des unterschiedlichen Phasenraumes ist folglich  $\tau_{K_1^0} \ll \tau_{K_2^0}$ . Da bei der Produktion aus der starken Wechselwirkung der Zustand

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle) \quad (8.8)$$

erzeugt wird, hat das neutrale Kaon *zwei* Lebensdauern: Die starke WW erzeugt den Zustand  $|K^0\rangle$ , welcher ein wohldefinierter Eigenzustand zu dieser ist. Den Zerfall des neutralen Kaons vollbringt allerdings die schwach WW, deren Eigenzustände  $|K_1^0\rangle$  und  $|K_2^0\rangle$  zwei unterschiedliche Lebensdauern besitzen. Hierdurch kann das neutrale Kaon entweder mit der Lebensdauer  $\tau_{|K_1^0\rangle}$  oder mit  $\tau_{|K_2^0\rangle}$  schwach Zerfallen  $\rightarrow 2$  unterschiedliche Lebensdauern.

Diese eigenartige Tatsache wollen wir nun genauer untersuchen. Experimentell lassen sich  $K^0$  aus der Reaktion

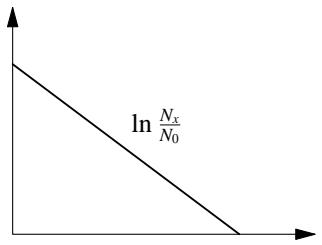


erzeugen. Zum Zeitpunkt der Erzeugung hat man nach (8.8) je 50%  $K_1^0$  und  $K_2^0$ . Die Wahrscheinlichkeiten für die Oszillationen haben wir schon in Kap. 8.1 bestimmt.

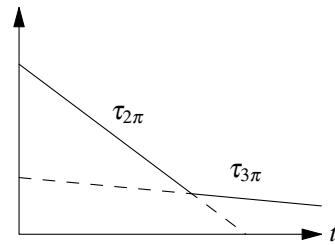
Nun beobachtet man die Verteilung der Zerfallsprodukte in Abhängigkeit von der Entfernung  $x = \beta \gamma c \tau^{\text{Eigenzeit}}$  vom Target (Abb. 8.2). Die Steigung des logarithmisch aufgetragenen Spektrums (Abb. 8.3) ergibt dann die Lebensdauer:

$$\tau_{K_1^0} = 0.894 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

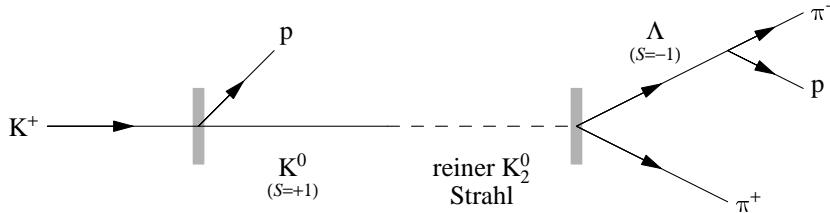
Ein weiteres Experiment ergab, dass auch bei einer Detektorentfernung von  $x \approx 100 \beta \gamma c \tau$  vom Target noch  $K^0$ -Zerfälle auftreten. Es handelte sich aber ausschließlich um Zerfälle in drei Pionen. Das gesamte Lebensdauerspektrum muß also wie in Abbildung 8.4 gezeigt aussehen. Für die Lebensdauer der  $K_2^0$  ergab sich:



**Abb. 8.3:** Zeitliche Verteilung der Zerfallsprodukte bei  $K^0 \rightarrow 2\pi$ -Zerfalls



**Abb. 8.4:** Zeitliche Verteilung der Zerfallsprodukte bei  $K^0 \rightarrow 3\pi$ -Zerfalls



**Abb. 8.5:** Nachweis der entstehenden  $\bar{K}^0$

$$\tau_{K_2^0} = 0.517 \cdot 10^{-7} \text{ s} \approx 580 \cdot \tau_{K_1^0}$$

Wir haben nun also herausgefunden, daß das  $K^0$  eine kurzlebige ( $K_1^0$ ) und eine langlebige ( $K_2^0$ ) Komponente hat. Eine weitere Konsequenz ergibt sich aus der Tatsache, daß  $K^0$  und  $\bar{K}^0$  verschiedene Strangeness haben.

### 8.2.2 Seltsamkeitsoszillationen

Wir gehen wieder von einem  $K^0$ -Strahl ( $S = +1$ ) zum Zeitpunkt  $t = 0$  aus. Aus der Quantenmechanik erwarten wir Oszillationen, wie sie in Abschnitt 8.1 beschrieben wurden. Kompliziert wird das Ganze aber dadurch, daß das  $K^0$  zeitlich nicht stabil ist. Nachdem wir uns nun einige Zeit nicht um unseren  $K^0$ -Strahl gekümmert haben (d.h. wir haben einige  $\tau_{K_1^0}$  gewartet), sind (fast) nur noch  $K_2^0$  im Strahl. Vom Anfangszustand (8.8) gelangen wir also zu:

$$|K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$$

Damit haben wir auf einmal einen  $\bar{K}^0$ -Anteil von 50%. Dies kann man mit dem in Abbildung 8.5 gezeigten Experiment nachweisen. Dabei wird ausgenutzt, dass sich  $K^0$  und  $\bar{K}^0$  in der starken Wechselwirkung wegen verschiedener Seltsamkeit unterschiedlich verhalten. Es kann nämlich nur aus einem  $\bar{K}^0$  ein  $\Lambda$  entstehen:

$$\bar{K}^0 p \rightarrow \Lambda \pi^+, \quad K^0 p \not\rightarrow \Lambda \pi^+ \quad (8.9)$$

Für eine quantitative Diskussion der Oszillationen betrachten wir die zeitliche Entwicklung der Zustände. Im Ruhesystem kann man  $E_1$  durch  $m_1$  ersetzen.

$$|K_1^0(t)\rangle = |K_1^0(0)\rangle \underbrace{e^{-iE_1 t}}_{\text{freie Propagation}} \underbrace{e^{-\Gamma_1 t/2}}_{\text{Zerfall}} = |K_1^0(0)\rangle e^{-(im_1 + \Gamma_1/2)t} \quad (8.10)$$

Aus dem Zerfallsterm ergibt sich genau das radioaktive Zerfallsgesetz,  $\left| |K_1^0(t)\rangle \right|^2 = e^{-\Gamma_1 t}$ . Entsprechend gilt natürlich:

$$|K_2^0(t)\rangle = |K_2^0(0)\rangle e^{-(im_2 + \Gamma_2/2)t} \quad (8.11)$$

Wir berechnen nun die Amplitude dafür, in einem ursprünglich aus  $K^0$  bestehenden Strahl nach der Zeit  $t$  wieder ein  $K^0$  zu finden.

$$\begin{aligned} A_{K^0}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\left( \langle K_1^0(0) | + \langle K_2^0(0) | \right)}_{\langle K^0 |} \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\left( |K_1^0(t)\rangle + |K_2^0(t)\rangle \right)}_{|K^0(t)\rangle} = \\ &= \frac{1}{2} \left( e^{-(im_1 + \Gamma_1/2)t} + e^{-(im_2 + \Gamma_2/2)t} \right) \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist wie gewöhnlich das Quadrat der Amplitude:

$$P_{K^0}(t) = \left| A_{K^0}(t) \right|^2 = \frac{1}{4} \left( e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} + 2e^{-(\Gamma_1 + \Gamma_2)t/2} \cos((m_1 - m_2)t) \right) \quad (8.12)$$

Genauso berechnen wir Amplitude und Wahrscheinlichkeit, ein  $\bar{K}^0$  zu finden:

$$\begin{aligned} A_{\bar{K}^0}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \langle K_2^0(0) | - \langle K_1^0(0) | \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |K_1^0(t)\rangle + |K_2^0(t)\rangle \right) \\ P_{\bar{K}^0}(t) &= \frac{1}{4} \left( e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} - 2e^{-(\Gamma_1 + \Gamma_2)t/2} \cos((m_1 - m_2)t) \right) \quad (8.13) \end{aligned}$$

Der Verlauf der Wahrscheinlichkeiten ist in Abb. 8.6 gezeigt. Aus den Meßwerten erhielt man eine Massendifferenz von

$$m_2 - m_1 = \Delta m = (3.489 \pm 0.009) \cdot 10^{-6} \text{ eV}$$

Das ergibt einen relativen Massenunterschied von

$$\frac{\Delta m}{m_{K^0}} = 0.7 \cdot 10^{-14} \quad (8.14)$$

Der Effekt ist so klein, weil er nur durch die zweite Ordnung der schwachen Wechselwirkung zustande kommt. Die Massenaufspaltung ergibt sich, weil bei  $K_1^0$  bzw.  $K_2^0$  virtuelle Zwischenzustände aus zwei bzw. drei Pionen auftreten, die Beiträge zur Selbstenergie liefern. Die Prozesse sind in Abb. 8.7 dargestellt. Einen analogen Sachverhalt haben wir schon bei der Strahlungskorrektur zum  $g$ -Faktor des Elektrons kennengelernt (Abschn. 4.4).

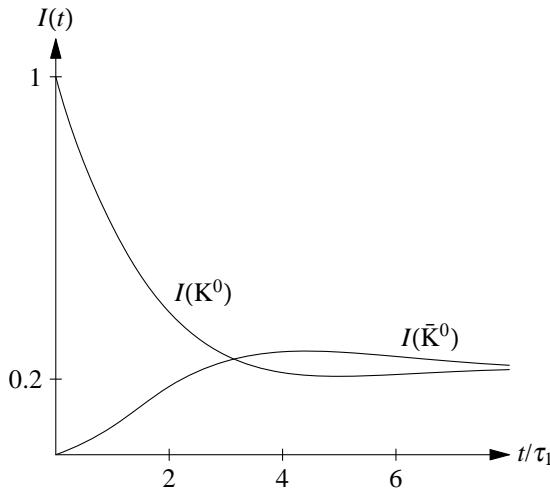


Abb. 8.6: Die Wahrscheinlichkeiten,  $K^0$  bzw.  $\bar{K}^0$  zu finden.

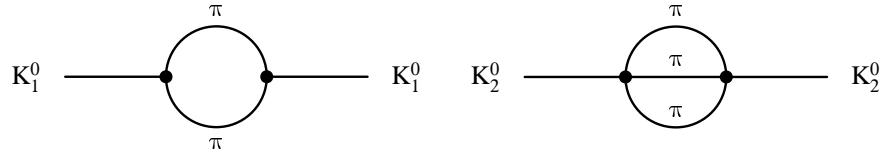


Abb. 8.7: Langreichweitige Beiträge zur Selbstenergie bei  $K_1^0$  und  $K_2^0$

Außer beim  $K^0$ -System gibt es auch bei B-Mesonen Oszillationen:

$$\begin{array}{c} B^0 \longleftrightarrow \bar{B}^0 \\ \bar{b}d \qquad \bar{b}\bar{d} \end{array} \qquad \begin{array}{c} B_s^0 \longleftrightarrow \bar{B}_s^0 \\ \bar{b}s \qquad \bar{b}\bar{s} \end{array}$$

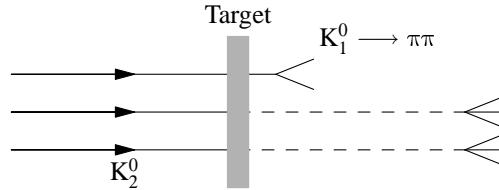
Da Berechnungen bei schwereren Quarks einfacher sind, kann man einige Aussagen über die Massenkorrekturen machen:

$$\begin{aligned} \Delta m_{B^0} &\approx 100 \cdot \Delta m_{K^0} \\ \Delta m_{B_s^0} &\geq 50 \cdot \Delta m_{B^0} \end{aligned}$$

Daraus läßt sich folgern, daß die Oszillationen wesentlich schneller als beim  $K^0$  sind. Außerdem ist  $\tau(B^0, B_s^0)$  deutlich kleiner als  $\tau(K^0)$ , wodurch die Dämpfung erhöht wird.

### 8.2.3 Regeneration

Hier wollen wir zeigen, daß man  $K_1^0$  „beliebig“ verschwinden lassen und wiedererzeugen kann. Das klingt zwar wie Magie, ist aber als Kunststück für David Copperfield et al. doch eher weniger geeignet. Wie gehen wir dazu vor? Wir erzeugen uns wieder einen  $K_2^0$ -Strahl, indem wir einen  $K^0$ -Strahl herstellen und dann erstmal nichts tun (ca.  $10\tau_{K_1^0}$ ). Schon bald ist die kurzlebige

Abb. 8.8: Regeneration von  $K_1^0$ 

$K_1^0$ -Komponente ausgestorben. Diesen  $K_2^0$ -Strahl schießen wir dann auf ein Target, vornehm „Regenerator“ genannt (Abb. 8.8). Vor dem Regenerator haben wir noch je 50%  $K^0$  und  $\bar{K}^0$ :

$$|K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$$

Die starke Wechselwirkung von  $K^0$  und  $\bar{K}^0$  im Regenerator behandelt die Komponenten verschieden:

$$\begin{array}{ccc} |K^0\rangle & \rightarrow f|K^0\rangle, & |\bar{K}^0\rangle \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{nur Streuung} & & \text{auch Absorption} \end{array} \quad f, \bar{f} \in \mathbb{C}$$

In Gleichung (8.9) haben wir gesehen, daß die  $K^0$  nur gestreut werden, wohingegen die  $\bar{K}^0$  auch absorbiert werden können (Bildung von  $\Lambda$ - Hyperionen). Folglich muß gelten:

$$f \neq \bar{f}$$

Damit können wir nachrechnen, welche Teilchen den Regenerator wieder verlassen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(f|K^0\rangle - \bar{f}|\bar{K}^0\rangle) &= \frac{f - \bar{f}}{2\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) + \frac{f + \bar{f}}{2\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(f - \bar{f})}_{!!!}|K_1^0\rangle + \underbrace{\frac{1}{2}(f + \bar{f})}_{!!}|K_2^0\rangle \end{aligned}$$

Und siehe da! Nach der Regeneration sind die  $K_1^0$  wieder da. Die starke Wechselwirkung hat also die  $K^0$  und die  $\bar{K}^0$  neu gemischt.

Experimentell läßt sich das überprüfen, indem man den erzeugten  $K^0$ -Strahl nach einer Flugstrecke von etwa  $100 c\beta\gamma\tau_{K_1^0}$  auf einen Detektor treffen läßt. Man sieht dann:

ohne Regenerator:	keine $2\pi$ -Zerfälle
mit Regenerator:	wieder $2\pi$ -Zerfälle

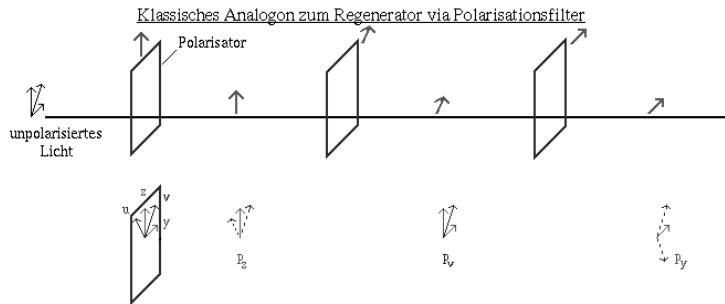


Abb. 8.9: Kalssisches Analogon zur Regeneration

Als “klassisches“ Analogon kann man sich den Durchgang von unpolarisiertem Licht durch mehrere hintereinander aufgestellte Polarisationsfilter betrachten (siehe Abb. 8.9). Nach dem ersten Filter ist nur noch die Komponente in vertikaler Richtung vorhanden. Nach dem zweiten Filter sind wieder Anteile in vertikaler und horizontaler Richtung enthalten. So kann man mit dem letzten Filter nur horizontal polarisiertes Licht erhalten, das auf den Weg zwischen dem ersten und zweiten Filter nicht vorhanden war, jedoch mit niedrigerer Intensität.

### 8.3 CP-Verletzung im $K^0$ -System

Die schwache Wechselwirkung erhält die Strangeness  $S$  (bzw. die schwache Hyperladung  $Y$ ) nicht:

$$(d\bar{s})_{S=+1} K^0 \rightarrow \begin{pmatrix} \pi^+ \pi^- \\ \pi^0 \pi^0 \\ \pi^+ \pi^- \pi^0 \\ \pi^0 \pi^0 \pi^0 \end{pmatrix}_{S=0} \leftarrow \bar{K}^0_{S=-1} (s\bar{d})$$

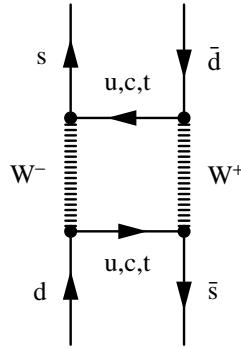
In zweiter Ordnung der schwachen Wechselwirkung können sich  $K^0$  und  $\bar{K}^0$  ineinander umwandeln. Diese *Strangeness-Oszillationen*, Teilchen-Antiteilchen-Mischung, lässt sich anschaulich im Quarkbild in sogenannten *Boxgraphen* betrachten (Abb. 8.10).

Unter Ladungs- bzw. Paritätskonjugation gilt:

$$\begin{aligned} C |K^0\rangle &= -|\bar{K}^0\rangle & C |\bar{K}^0\rangle &= -|K^0\rangle \\ P |K^0\rangle &= -|K^0\rangle & P |\bar{K}^0\rangle &= -|\bar{K}^0\rangle \end{aligned}$$

$$P |\pi^+ \pi^-\rangle = +|\pi^+ \pi^-\rangle \quad \text{für } L=0$$

**$CPT$ -Theorem:** Falls die Zeitumkehr-Invarianz  $T$  und die  $CPT$ -Invarianz immer erfüllt ist, ist auch  $CP$  stets erhalten.

**Abb. 8.10:** Boxgraph

Da die schwache Wechselwirkung nicht paritätserhaltend ist, ist auch  $\mathcal{C}$  nicht erhalten.

Es folgt die  $\mathcal{CP}$ -Konjugation.

$$\mathcal{CP}|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \quad \mathcal{CP}|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle$$

Die  $\mathcal{CP}$ -Eigenzustände sind:

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \quad |K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad (8.7')$$

$$\begin{array}{ll} \mathcal{CP}|K_1^0\rangle = +|K_1^0\rangle, & \mathcal{CP}|K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle \\ \mathcal{CP}\text{-gerader Zustand} & \mathcal{CP}\text{-ungerader Zustand} \end{array}$$

### 8.3.1 $\mathcal{CP}$ -Verletzung

Betrachten wir nun allgemein den  $\Delta S = 2$ -Hamiltonian im  $K^0\bar{K}^0$ -System (ruhende Teilchen):

$$|K^0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\bar{K}^0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dieser hat aufgrund der  $K^0\bar{K}^0$ -Mischung die Matrixform:

$$\mathcal{H}_2 = \begin{pmatrix} \langle K^0 | \hat{\mathcal{H}}_2 | K^0 \rangle & \langle K^0 | \hat{\mathcal{H}}_2 | \bar{K}^0 \rangle \\ \langle \bar{K}^0 | \hat{\mathcal{H}}_2 | K^0 \rangle & \langle \bar{K}^0 | \hat{\mathcal{H}}_2 | \bar{K}^0 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & A \end{pmatrix}$$

Das  $\mathcal{CP}\mathcal{T}$ -Theorem besagt: Die Diagonalelemente sind gleich:  $\langle K^0 | \hat{\mathcal{H}}_2 | K^0 \rangle = \langle \bar{K}^0 | \hat{\mathcal{H}}_2 | \bar{K}^0 \rangle$ . Die Nichtdiagonalelemente von  $\mathcal{H}_2$  sollten gleich sein,  $B = C$ , falls  $\mathcal{CP}$ -Invarianz vorliegt. Die Eigenwerte von  $\mathcal{H}_2$  sind:

$$\lambda_{1,2} = A \pm \sqrt{BC}$$

und entsprechend ergeben sich die Eigenvektoren:

$$|K_S\rangle \sim \begin{pmatrix} \sqrt{B} \\ \sqrt{C} \end{pmatrix}, \quad |K_L\rangle \sim \begin{pmatrix} \sqrt{B} \\ -\sqrt{C} \end{pmatrix}$$

Physikalisch entsprechen diese Vektoren den Eigenzuständen der schwachen Wechselwirkung mit wohldefinierten Massen und Zerfallsbreiten (Lebensdauern). Sie werden als K<sub>S</sub> (short) und K<sub>L</sub> (long) bezeichnet.

$$|K_1\rangle \equiv |K_S\rangle \quad |K_2\rangle \equiv |K_L\rangle$$

$$\lambda_1 = m_S - \frac{i}{2}\Gamma_S, \quad \lambda_2 = m_L - \frac{i}{2}\Gamma_L$$

Die beiden Eigenzustände sind orthogonal, falls  $\mathcal{CP}$  erhalten ist.

$$\langle K_1 | K_2 \rangle = 0 = \langle K_S | K_L \rangle$$

Aus der Massendifferenz  $m_L - m_S = 3.5 \cdot 10^{-6}$  eV erhält man bei einer K<sup>0</sup>-Masse von  $m_{K^0} = 497.7$  MeV gerade einen Faktor der Größe  $1.4 \cdot 10^{-14}$ , um den sich die Massen von K<sub>S</sub> und K<sub>L</sub> unterscheiden. Betrachten wir dagegen den Unterschied der Lebensdauern von K<sub>S</sub> und K<sub>L</sub>, ergibt sich gerade ein relativer Faktor 580. Lebensdauern und Zerfallskanäle von K<sub>S</sub> und K<sub>L</sub> sind in folgender Übersicht zusammengefaßt.

$$\begin{aligned} \tau_S &= \Gamma_S = 8.92 \cdot 10^{-11} \text{ s} \\ K_S \rightarrow &\left\{ \begin{array}{ll} \pi^+ \pi^- & 68.4\% \\ \pi^0 \pi^0 & 31.4\% \end{array} \right. \text{ Endzustand } \mathcal{CP} = +1 \\ \tau_L &= \Gamma_L = 5.17 \cdot 10^{-8} \text{ s} \\ K_L \rightarrow &\left\{ \begin{array}{ll} \pi^\pm e^\pm \nu_e & 38.7\% \\ \pi^\pm \mu^\pm \nu_\mu & 27.0\% \\ \pi^0 \pi^0 \pi^0 & 21.6\% \\ \pi^+ \pi^- \pi^0 & 12.4\% \\ \pi^+ \pi^- & 0.2\% \\ \pi^0 \pi^0 & 0.09\% \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathcal{CP} = -1 \\ \mathcal{CP} = +1 \end{array} \end{aligned}$$

**Indirekte  $\mathcal{CP}$ -Verletzung:** Wir wollen Ausdrücke für die normierten Zustände  $|K_S\rangle$  und  $|K_L\rangle$  finden, anhand derer wir feststellen können, ob  $|K_S\rangle$  und  $|K_L\rangle$   $\mathcal{CP}$ -verletzend sind. Dazu definieren wir zunächst:

$$\sqrt{\frac{B}{C}} =: \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad \text{mit } \varepsilon = |\varepsilon| e^{i\Phi(\varepsilon)},$$

um dadurch  $|K_S\rangle$  und  $|K_L\rangle$  auszudrücken.

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\varepsilon|^2)}} [(1+\varepsilon)|K^0\rangle + (1-\varepsilon)|\bar{K}^0\rangle] = \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} [|K_1\rangle + \varepsilon|K_2\rangle] \quad (8.15)$$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\varepsilon|^2)}} [(1+\varepsilon)|K^0\rangle - (1-\varepsilon)|\bar{K}^0\rangle] = \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} [\varepsilon|K_1\rangle + |K_2\rangle] \quad (8.16)$$

Falls nun  $\varepsilon \neq 0$  ( $B \neq C$ ), sind die Eigenzustände  $|K_S\rangle$ ,  $|K_L\rangle$  der schwachen Wechselwirkung *keine CP*-Eigenzustände: Man spricht von *indirekter CP-Verletzung*, und meint damit die Beimischung der „falschen“ CP-Parität in die physikalischen Zustände  $|K_S\rangle$  und  $|K_L\rangle$ . Bemerkenswert ist im Übrigen, dass die beiden Zustände nicht orthogonal sind:

$$\langle K_L | K_S \rangle \approx 2\text{Re}(\varepsilon) \neq 0$$

### 8.3.2 Der Parameter $\varepsilon$ in der CP-Verletzung

Überlegen wir uns, wie wir den komplexen Parameter  $\varepsilon$  experimentell bestimmen können. Hierzu nehmen wir zunächst an, der schwache Hamilton-Operator  $\mathcal{H}_1$  für  $\Delta S = 1$ -Übergänge sei CP-erhaltend:

$$CP |\pi^+ \pi^- \rangle = +|\pi^+ \pi^- \rangle, \quad \pi^+ \pi^- \text{ in relativer s-Welle}$$

$$\begin{array}{l} \langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{H}_1 | K_2 \rangle = 0, \\ \hline CP = +1 \quad CP = -1 \end{array} \quad (8.17)$$

Diese Gleichung spiegelt also gerade die CP-erhaltende Eigenschaft des Hamiltonian wieder. Mit (8.15–8.17) lässt sich dann  $\varepsilon$  bestimmen:

$$\frac{\langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{H}_1 | K_L \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{H}_1 | K_S \rangle} = \frac{\varepsilon \langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{H}_1 | K_1 \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{H}_1 | K_1 \rangle} = \varepsilon \quad (8.18)$$

Für den *Betrag* von  $\varepsilon$  findet man:

$$|\varepsilon| = \sqrt{\frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)}} = (2.28 \pm 0.02) \cdot 10^{-3}$$

Die CP-Verletzung ist also ein Effekt im Promille-Bereich.

Um die *Phase* von  $\varepsilon$  zu bestimmen, betrachtet man einen Strahl, der zur Zeit  $t = 0$  nur aus  $K^0$  besteht, und mißt die  $\pi^+ \pi^-$ -Paare als Funktion der Zeit:

$$|K^0\rangle \sim |K_S\rangle + |K_L\rangle$$

Schreiben wir die Zeitentwicklung an:

### 8.3 CP-Verletzung im $K^0$ -System

$$|K^0(t)\rangle \sim e^{-im_S t - \Gamma_S t/2} |K_S\rangle + e^{-im_L t - \Gamma_L t/2} |K_L\rangle,$$

so erhalten wir für die Amplitude für  $\pi^+\pi^-$ -Paare:

$$A(\pi^+\pi^-) = \langle \pi^+\pi^- | \mathcal{H}_1 | K^0(t) \rangle \sim e^{-im_S t - \Gamma_S t/2} + \varepsilon e^{-im_L t - \Gamma_L t/2}$$

Die Wahrscheinlichkeit für  $\pi^+\pi^-$ -Paare ist also:

$$P(t) = |A(\pi^+\pi^-)|^2 \sim e^{-\Gamma_S t} + |\varepsilon|^2 e^{-\Gamma_L t} + 2|\varepsilon| e^{-(\Gamma_S + \Gamma_L)t} \cos [\Phi(\varepsilon) - t(m_L - m_S)] \quad (8.19)$$

mit  $\varepsilon = |\varepsilon| \exp(i\Phi(\varepsilon))$ . Man erhält als experimentelles Ergebnis:

$$\Phi(\varepsilon) = (43,5 \pm 0,5)^\circ \quad \text{bzw.} \quad \tan \Phi(\varepsilon) = \frac{2(m_L - m_S)}{\Gamma_L - \Gamma_S} \approx 0.95$$

#### 8.3.3 Zerfall von $K^0$ und $\bar{K}^0$ in $\pi^+\pi^-$ : Zeitevolution

Zur Zeit  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} |K^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_S\rangle + |K_L\rangle) \\ |\bar{K}^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_S\rangle - |K_L\rangle) \end{aligned}$$

Zeitentwicklung:

$$\begin{aligned} |K^0(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-(im_S + \Gamma_S/2)t} |K_S\rangle + e^{-(im_L + \Gamma_L/2)t} |K_L\rangle) \\ |\bar{K}^0(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-(im_S + \Gamma_S/2)t} |K_S\rangle - e^{-(im_L + \Gamma_L/2)t} |K_L\rangle) \end{aligned}$$

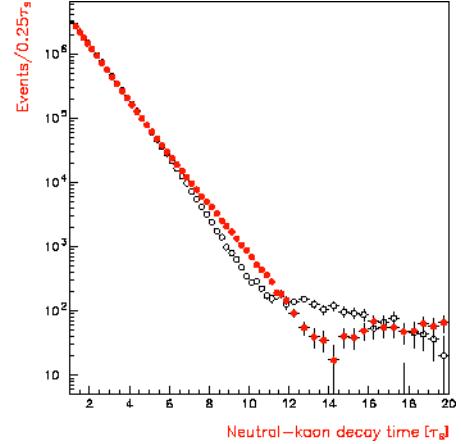
Für die Amplitude von  $K^0$  nach der Zeit  $t$  gilt:

$$A_{K^0}(t) = \langle K^0(0) | K^0(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle K_S(0) + K_L(0) | K_S(t) + K_L(t) \rangle = \frac{1}{2} (e^{-(im_S + \Gamma_S/2)t} + e^{-(im_L + \Gamma_L/2)t})$$

Die Wahrscheinlichkeit nach der Zeit  $t$  ein  $K^0$  bzw. ein  $\bar{K}^0$  zu finden ist:

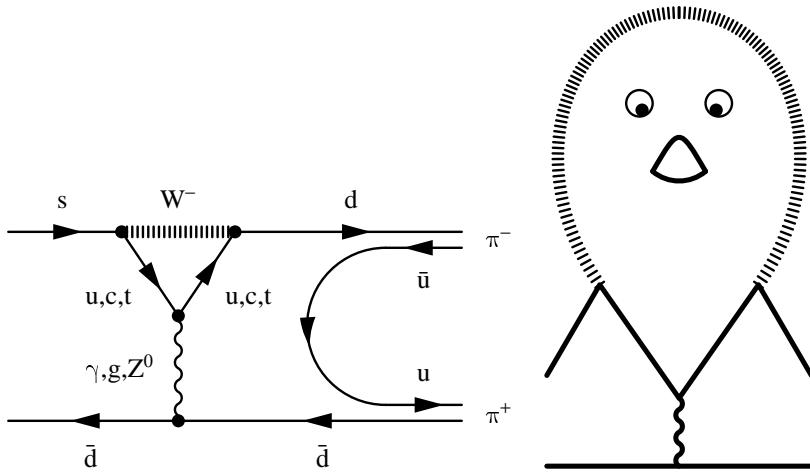
$$P_{K^0}(t) = |A_{K^0}(t)|^2 = \frac{1}{4} (e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + 2e^{-(\Gamma_L + \Gamma_S)t/2} \cos ((m_L - m_S)t)) \underbrace{\langle K_L | K_S \rangle}_{2\Re\varepsilon} \quad (8.20)$$

$$P_{\bar{K}^0}(t) = |A_{\bar{K}^0}(t)|^2 = \frac{1}{4} (e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - 2e^{-(\Gamma_L + \Gamma_S)t/2} \cos ((m_L - m_S)t)) \underbrace{\langle K_S | K_L \rangle}_{2\Re\varepsilon} \quad (8.21)$$



Zerfall von  $K^0$  und  $\bar{K}^0$  gemessen am Experiment CPLEAR.

Die Oszillationen ergeben sich aus den verschiedenen Vorzeichen in  $P_{K^0}(t)$  und  $P_{\bar{K}^0}(t)$ .



**Abb. 8.11:** Links: „Pinguin“-Graph des in (8.22) gezeigten Zerfalls. An den Vertizes, an denen das  $W^-$ -Boson entsteht und verschwindet, kommt die CKM-Matrix ins Spiel. Rechts: Wie der „Pinguin“-Graph zu seinem Namen kam: Ellis hatte gegen einen Kollegen eine Wette verloren, und nun mußte er in seiner nächsten Veröffentlichung das Wort „Pinguin“ einbauen. Was lag also näher, als einem unschuldigen Feynmangraphen, der sich nicht wehren konnte, diesen Namen zu verpassen? Wer noch weitere künstlerisch wertvolle Variationen des Pinguin-Graphen bewundern möchte, kann das auf den Postern vor Prof. Buras Büro tun.

### 8.3.4 Direkte $\mathcal{CP}$ -Verletzung.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, einen  $\Delta S = 1$ -Hamiltonoperator anzunehmen, der  $\mathcal{CP}$ -verletzend ist. Man spricht dann von *direkter  $\mathcal{CP}$ -Verletzung*. Beim  $\Delta S = 1$ -Zerfall der  $\mathcal{CP}$ -Eigenzustände  $|K_1\rangle$  und  $|K_2\rangle$  tritt im Gegensatz zu (8.17)  $\mathcal{CP}$ -Verletzung auf:

$$\langle \pi\pi | \mathcal{H}_1 | K_2 \rangle \neq 0 \quad (8.22)$$

$\mathcal{CP} = +1$     $\mathcal{CP} = -1$

Im Standardmodell wird dieser Zerfallskanal durch sogenannte *Pinguingraphen* nach J. Ellis beschrieben, wie in Abb. 8.11 gezeigt.

Wir betrachten nun  $|K_L\rangle = \varepsilon|K_1\rangle + |K_2\rangle$  und  $|K_S\rangle = |K_1\rangle + \varepsilon|K_2\rangle$  und die Amplitudenverhältnisse:

$$\begin{aligned}\eta_{\pm} &= \frac{\langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{H}_1 | K_L \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{H}_1 | K_S \rangle} = \frac{\langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{H}_1 | (\varepsilon|K_1\rangle + |K_2\rangle) \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{H}_1 | (|K_1\rangle + \underbrace{\varepsilon|K_2\rangle}_{=0, \text{ da } \varepsilon \ll 1}) \rangle} \approx \varepsilon + \frac{\langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{H}_1 | K_2 \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{H}_1 | K_1 \rangle} =: \varepsilon + \varepsilon' \\ \eta_{00} &= \frac{\langle \pi^0 \pi^0 | \mathcal{H}_1 | K_L \rangle}{\langle \pi^0 \pi^0 | \mathcal{H}_1 | K_S \rangle} \approx \varepsilon + \frac{\langle \pi^0 \pi^0 | \mathcal{H}_1 | K_2 \rangle}{\langle \pi^0 \pi^0 | \mathcal{H}_1 | K_1 \rangle} = \varepsilon - 2\varepsilon'\end{aligned}$$

Die erste Zeile definiert dabei  $\varepsilon'$ . Der relative Faktor  $-2$  leitet sich unter anderem aus Clebsch-Gordan-Koeffizienten ab. Für  $|\varepsilon'| \ll |\varepsilon|$  gilt:

$$\text{Re} \left( \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right) \approx \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{1}{6} \left[ 1 - \frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^0 \pi^0) \Gamma(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^0 \pi^0) \Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-)} \right]$$

Am CERN und am Fermilab fand man experimentell einen *grand average* von:

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = (2.2 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}$$

Mit grand average bezeichnet man im allgemeinen einen Mittelwert verschiedener Experimente. Nicht erwähnt werden muß, daß solche Mittelungen mit Vorsicht zu genießen sind, da hier ja verschiedenste Meßaufbauten und -methoden mit im allgemeinen unterschiedlichsten Fehlerquellen einfließen. Der Mittelwert, den die Particle Data Group (PDG)<sup>2</sup> ([PD00a, PD00b]) angibt, beträgt:

$$\Phi(\varepsilon') - \Phi(\varepsilon) = (0.3 \pm 0.8)^\circ \approx 0$$

Ende Juni 1999 schließlich wurden folgende Werte für  $\text{Re}(\varepsilon'/\varepsilon)$  veröffentlicht. Fermilab:  $(28 \pm 4.1) \cdot 10^{-4}$ , CERN:  $(18.5 \pm 7.3) \cdot 10^{-4}$ . Damit ist die direkte CP-Verletzung bestätigt.

CP-Verletzung tritt neben dem hier repräsentativ betrachteten Kaonsystem auch bei seltsamen Zerfällen wie  $K_L \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}$ ,  $K_L \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$  oder im  $\bar{B}^0 B^0$ -System ( $B^0 = (d\bar{b})$ ,  $\bar{B}^0 = (\bar{d}b)$ ) auf. Schwere Quarks sind für die Theorie einfacher zu betrachten.

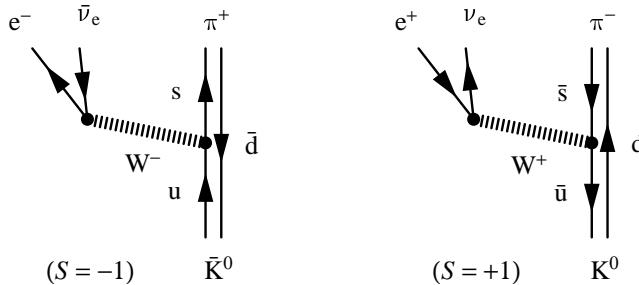
Die **Ladungsasymmetrie beim semileptonischen  $K_L$ -Zerfall** ist eine weitere Folgerung der CP-Verletzung.

$$\delta = \frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e) - \Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e) + \Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e)} \quad (8.23)$$

Antimaterie  $\neq$  Materie

Für  $\delta \neq 0$  ist die CP-Invarianz verletzt. Nach der  $\Delta S = \Delta Q$ -Regel gilt für die beiden Komponenten von  $K_L$ :

<sup>2</sup><http://www-pdg.lbl.gov/>



$$\langle \pi^+ e^- \bar{\nu}_e | \mathcal{H}_{\text{weak}} | K_L \rangle \sim (\varepsilon - 1) \underbrace{\langle \pi^+ e^- \bar{\nu}_e | \mathcal{H}_{\text{weak}} | \bar{K}^0 \rangle}_{=} \\ \langle \pi^- e^+ \nu_e | \mathcal{H}_{\text{weak}} | K_L \rangle \sim (\varepsilon + 1) \underbrace{\langle \pi^- e^+ \nu_e | \mathcal{H}_{\text{weak}} | K^0 \rangle}$$

Die beiden Zerfallsraten auf der rechten Seite müssen nach dem CPT-Theorem gleich sein. Damit wird (8.23) zu

$$\delta = \frac{|1 + \varepsilon|^2 - |1 - \varepsilon|^2}{|1 + \varepsilon|^2 + |1 - \varepsilon|^2} \approx 2\text{Re}(\varepsilon) \approx \sqrt{2}|\varepsilon|,$$

da die Phase  $\phi(\varepsilon) \approx 45^\circ$ . Gemessen hat man für diesen Effekt der indirekten  $\mathcal{CP}$ -Verletzung folgende Werte:

$\delta(e) = (3.33 \pm 0.14) \cdot 10^{-3}$	für Elektronen
$\delta(\mu) = (3.04 \pm 0.25) \cdot 10^{-3}$	für Myonen
$\delta = (3.27 \pm 0.12) \cdot 10^{-3}$	gewichtetes Mittel
$\sqrt{2} \varepsilon  = (3.23 \pm 0.03) \cdot 10^{-3}$	zum Vergleich

Die  $\mathcal{CP}$ -Verletzung im Standard-Modell ist übrigens auch die Ursache für die Materie-Antimaterie-Asymmetrie im Universum.

## 8.4 Neutrino-Oszillationen

Unsere bisherigen Betrachtungen zum Standardmodell gingen von der Annahme aus, die Neutrinosmasse  $m_\nu$  sei Null. Direkte Messungen von Neutrinosmassen blieben bisher erfolglos, d. h. man kann davon ausgehen, daß eine eventuell vorhandene Masse klein ist. Weiß man auch über die einzelnen Massen wenig, so sind sie doch mit folgender Hierarchie kompatibel:

$$\begin{array}{ccc} m_{\nu_e} & \leq & m_{\nu_\mu} & \leq & m_{\nu_\tau} \\ < 2,2 \cdot 10^{-6} & & < 0,17 & & < 15,5 \text{ MeV} \end{array}$$

Aus experimenteller Sicht müssen die Neutrinos also keinesfalls masselos sein. In der Tat, einige Beobachtungen des Neutrino-Flusses von der Sonne (*solare Neutrinos*), welcher um den Faktor 2 zu klein ist, und in der Atmosphäre (*atmosphärische Neutrinos*), sowie dunkler Materie im Weltraum könnten mit der Existenz einer endlichen Neutrinomasse erklärt werden.

### 8.4.1 Zustandsmischung bei Neutrinos

Bisher betrachteten wir die Neutrinos als Eigenzustand zum Leptonzahloperator  $L_i: \nu_L = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ . Betrachten wir nun die  $\nu_i$  ( $i = 1 \dots$ ) als Eigenzustände des Massenoperators

$$\mathcal{M} |\nu_i\rangle = m_i |\nu_i\rangle \quad |\nu_i(t)\rangle = e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)} |\nu_i\rangle$$

für freie  $\nu$ , so können wir in Analogie zur CKM-Matrix mit einer unitären Transformation  $U$  schreiben:

$$\nu_L = U^\dagger \nu_M$$

Zur Vereinfachung wollen wir uns auf zwei Neutrinosorten beschränken. Mit drei funktioniert es vollkommen analog.

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (8.24)$$

Hierbei soll uns zunächst nicht interessieren, welche Wechselwirkung die Massen der Neutrinos erzeugt, wir gehen einfach davon aus, diese kämen irgendwo her – sie fallen gewissermaßen erstmal vom Himmel (letztlich ist dieser Punkt auch momentan noch nicht geklärt). In obiger Transformation (8.24) ist  $\vartheta$  analog zum Cabibbo-Winkel zu verstehen. Dann ergeben sich:

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos \vartheta |\nu_1\rangle + \sin \vartheta |\nu_2\rangle \\ |\nu_\mu\rangle &= -\sin \vartheta |\nu_1\rangle + \cos \vartheta |\nu_2\rangle \end{aligned}$$

Da unsere Physik von der gewählten Basis unabhängig sein sollte, muß gelten:

$$\bar{\nu}_L M_\nu \nu_L = \bar{\nu}_M \underbrace{M_\nu^{\text{Diag}}}_{\text{diagonalisierte Massenmatrix}} \nu_M \quad (8.25)$$

mit  $M_\nu$  und  $M_\nu^{\text{Diag}}$ :

$$M_\nu = \begin{pmatrix} m_{\nu_e \nu_e} c^2 & m_{\nu_e \nu_\mu} c^2 \\ m_{\nu_e \nu_\mu} c^2 & m_{\nu_\mu \nu_\mu} c^2 \end{pmatrix} \quad M_\nu^{\text{Diag}} = \begin{pmatrix} m_1 c^2 & 0 \\ 0 & m_2 c^2 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir schließlich:

$$m_{\nu_\mu} = m_1 \cos^2 \vartheta + m_2 \sin^2 \vartheta \quad (8.26)$$

$$m_{\nu_e} = m_1 \sin^2 \vartheta + m_2 \cos^2 \vartheta \quad (8.27)$$

$$m_{\nu_e \nu_\mu} = (m_2 - m_1) \sin \vartheta \cos \vartheta \quad (8.28)$$

Mit (8.28) sind Übergänge  $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_e$  möglich, sobald  $m_1 \neq m_2$ .

**Die Kopplung zwischen den Neutrino-Flavours:** Betrachten wir nochmals das Analogon Kaonsystem.  $|K_1\rangle$  und  $|K_2\rangle$  waren dort  $\mathcal{CP}$ -Eigenzustände, jetzt sind  $|\nu_e\rangle$  und  $|\nu_\mu\rangle$  Eigenzustände des Leptonenzahl-Operators  $L_i$ .  $K^0$  und  $\bar{K}^0$  waren ebenso, wie es hier  $\nu_1$  und  $\nu_2$  sind, Masseneigenzustände. Allerdings waren  $K^0$  und  $\bar{K}^0$  adjungierte Zustände, welche über den  $\mathcal{CP}$ -Operator verbunden und ineinander überführbar waren. Die  $\mathcal{CP}$ -Symmetrie war invariant bezüglich der starken Wechselwirkung. Solche Voraussetzungen liegen für  $\nu_1$  und  $\nu_2$  *nicht* vor.  $\nu_e$  und  $\nu_\mu$  bilden zwar wie  $\nu_1$  und  $\nu_2$  eine unabhängige Basis, aber eine  $\nu$ -Mischung ist a priori nicht vorgesehen, und entsprechend sind  $\nu_e$  und  $\nu_\mu$  *nicht* die entarteten Eigenzustände zum selben Operator, da

$$\begin{aligned} L_e |\nu_\mu\rangle &= 0 & L_\mu |\nu_e\rangle &= 0 \\ L_e |\nu_e\rangle &= 1 \end{aligned}$$

Die Mischung von  $\nu_e$  und  $\nu_\mu$  ist also nicht maximal wie im Kaonsystem, sondern muß vielmehr ad hoc eingeführt werden. Gehen wir also davon aus, die  $\nu_e$ - $\nu_\mu$ -Mischung sei durch eine unbekannte Wechselwirkung über den Winkel  $\vartheta$  bestimmt. Allerdings gilt analog zum Zweizustandsproblem:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \alpha(t)|L\rangle + \beta(t)|R\rangle \\ \text{mit } |\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 &= 1, \end{aligned}$$

wobei  $L$  und  $R$  ganz allgemein Symbole für orthogonale Zustände seien. Der Massenterm in (8.28) bewirkt die Kopplung zwischen  $\nu_e$  und  $\nu_\mu$ : Erzeugt man zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  am Ort  $x_0$  ein Elektron-Neutrino  $\nu_e$ , so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit  $t$  ein Myon-Neutrino  $\nu_\mu$  anzutreffen, zu:

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) = 2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta - 2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \cdot \cos \left( \frac{\Delta m^2 c^4}{2 p_\nu} \frac{ct}{\hbar c} \right) \quad (8.29)$$

Gehen wir davon aus, alles bewege sich mit Lichtgeschwindigkeit, können wir auch angeben, an welchem Ort  $x = tc$  wir uns dann befinden:

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(x) = \sin^2(2\vartheta) \sin^2 \left( \frac{\pi x}{4\pi p_\nu c} \frac{\Delta m^2 c^4}{\hbar} \right) \quad (8.30)$$

Der Vorfaktor  $\sin^2(2\vartheta)$  kann als Beschreibung der ad-hoc-Mischung der Neutrino-Zustände aufgefaßt werden. Definieren wir nun die *charakteristische Länge*

$$L = \frac{4\pi p_\nu \hbar c}{\Delta m^2 c^4} = \frac{4\pi E_\nu \hbar}{\Delta m^2 c^4} \approx \frac{0,4}{\Delta m^2 [\text{eV}]} \cdot E_{\text{kin}} [\text{GeV}]$$

wird damit aus (8.30):

$$\boxed{P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(x) = \sin^2(2\vartheta) \sin^2 \frac{\pi x}{L}} \quad (8.31)$$

Dies kann mit dem Resultat des gekoppelten Pendels verglichen werden:

$$P(R) = \sin^2 \left( \frac{\Delta E \cdot t}{\hbar} \right), \quad (8.32)$$

$|L\rangle$  bzw.  $|R\rangle$  bezeichnen dabei Zustände, bei denen nur das linke bzw. das rechte von zwei gekoppelten Pendeln schwingt. In (8.32) sei angenommen, man hätte bei  $t = 0$  nur  $|L\rangle$ . Der Vorfaktor aus (8.30) tritt deshalb nicht auf. Exponentiell abfallende Vorfaktoren wie in (8.12) und (8.13) finden sich weder beim Pendel-Analogon, noch bei Neutrino-Oszillationen beschreibenden Gleichungen, weil wir jeweils keine Zerfälle beobachten.

Der allgemeine Ausdruck für alle drei Generationen ist:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{k=1}^3 U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle$$

Dabei beschreibt  $\alpha$  den Flavor und  $\nu_k$  die Masseneigenzustände. Für die zeitliche Entwicklung gilt:

$$|\nu_\alpha(x, t)\rangle = \sum_{k=1}^3 U_{\alpha k}^* e^{-i(E_k t - \vec{p}_k \vec{x})} |\nu_k\rangle$$

Man kann die Masseneigenzustände über die unitäre Rücktransformation angeben:

$$|\nu_k\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} U_{\beta k} |\nu_\beta\rangle$$

Unter Verwendung dieser Zustände erhalten wir somit für den zeitlich und räumlich propagierenden Mischungszustand:

$$|\nu_\alpha(x, t)\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left( \sum_{k=1}^3 U_{\alpha k}^* e^{-i(E_k t - \vec{p}_k \vec{x})} \right) U_{\beta k} |\nu_\beta\rangle$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit ergibt sich nun wieder unter Bildung der Betragsquadrates der Übergangsmatrixelemente für die relevanten Zustände zu:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(x, t) = |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(x, t) \rangle|^2 = \left| \sum_{k=1}^3 U_{\alpha k}^* e^{-i(E_k t + \vec{p}_k \cdot \vec{x})} U_{\beta k} \right|^2$$

## 8.4.2 Experimente

Bereits seit vielen Jahrzehnten wird intensiv nach Neutrino-Oszillationen gesucht.

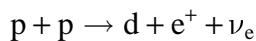
Derzeit gibt es vier Kategorien von Experimenten zur Suche von Neutrinooszillationen: In *Reaktorexperimenten* werden Neutrinos aus  $\beta$ -Zerfällen von Spaltprodukten erzeugt. *Beschleunigerexperimente* arbeiten mit Neutrinos aus Zerfällen von Pionen und Myonen, die zuvor in hochenergetischen Hadronenkollisionen erzeugt wurden. Nachdem man so  $\bar{\nu}_e$  (in Reaktoren) oder  $\nu_\mu$  und  $\bar{\nu}_\mu$  (in Beschleunigern) erzeugt hat, sucht man nach dem Verschwinden (*disappearance*) von Neutrinos im Abstand  $x$  von der Quelle, man weist also  $N_{\bar{\nu}_e}(t)$  nach. Disappearance-Experimente gestalten sich allerdings von Aufbau und Durchführung her schwierig, da genaue Meßmethoden und lange Flugstrecken benötigt werden. Einfacher und effektiver freilich ist die Suche nach Auftreten eines Neutrino-Flavours in gewisser Entfernung, welches nicht in der Primärreaktion erzeugt wurde (beispielsweise  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ ). Derlei *appearance*-Experimente wurden vor kurzem am CERN abgeschlossen. Verschiedene Ergebnisse sind in Abb. 8.12 im  $\sin^2(2\vartheta)$ - $\Delta m^2 c^4$ -Raum dargestellt.

Bisher unbestätigte Experimente haben dabei Signale beobachtet, welche zum Teil mit dem in Abb. 8.12 ausgeschlossenen Bereich überlappen.

Neben Beschleuniger- und Reaktorexperimenten gibt es auch Experimente mit *atmosphärischen Neutrinos*, die Zerfallsprodukte von hochenergetischer Höhenstrahlung nutzen. *Sonnenneutrinos* schließlich werden bei der Kernfusion im Sonneninnern erzeugt und können in hochempfindlichen Detektoren auf Basis von Chlor, Gallium oder Wasser nachgewiesen werden. Auf diesem Gebiet werden Experimente wie GALLEX und BOREXINO u.a. am Lehrstuhl E15<sup>3</sup> des Physik-Departments durchgeführt.

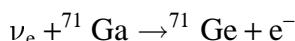
### A) Solare Neutrinos

Solare Neutrinos entstehen bei Brennprozessen in der Sonne z.B. bei der Kernfusion:



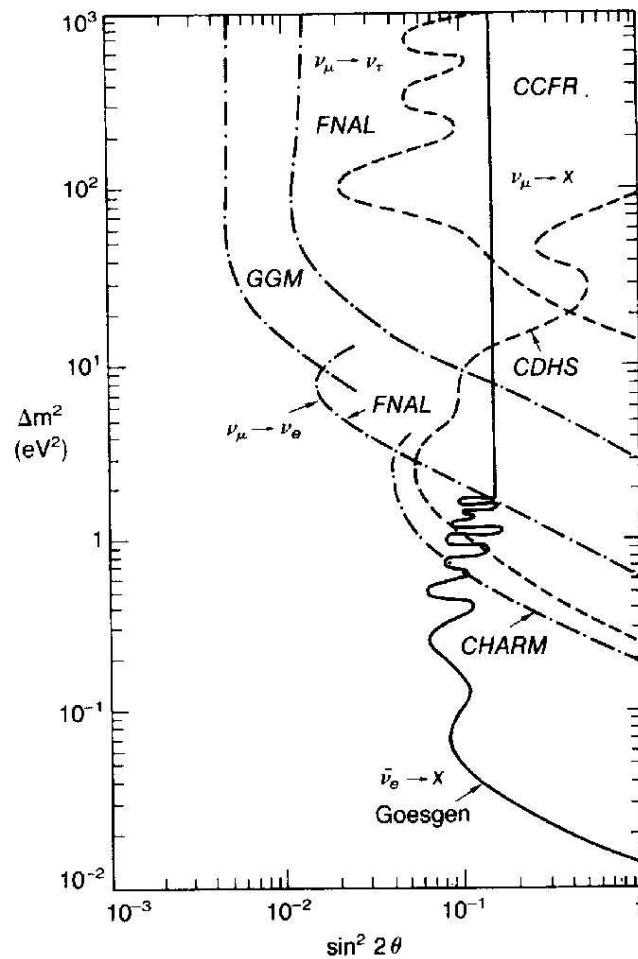
Die Neutrinos haben dabei eine Energie von etwa  $E_\nu \approx 0,42 \text{ MeV}$ .

Am Gallex in Gran Sasso und dem Nachfolgeexperiment GNO werden diese solaren Neutrinos nachgewiesen, wobei man sich folgender Reaktion bedient:




---

<sup>3</sup><http://www.e15.physik.tu-muenchen.de/>



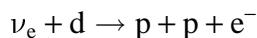
**Abb. 8.12:** Grenzen für Neutrino-Oszillationen. Die Differenz der Massenquadrate ist gegen  $\sin^2 2\vartheta$  aufgetragen. Das  $\bar{\nu}_e$ -Ergebnis (ausgezogene Linie) stammt von einem Reaktor (Gösgen, Schweiz), alle anderen Ergebnisse von Beschleunigern. Die Gebiete rechts von den Kurven sind mit 90% Wahrscheinlichkeit ausgeschlossen (nach [Bo84]).

Das Germanium kann radiochemisch nachgewiesen werden. Der gemessene  $\nu_e$ -Fluss stimmt aber nicht mit den theoretischen Vorhersagen überein:

$$\frac{\Phi_{\text{Ga}}}{\Phi_{\text{Ga}}^{\text{theo}}} = 0,56 \pm 0,03$$

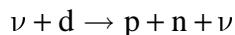
Am SNO-Experiment in Kanada werden die Neutrinos bei verschiedenen Reaktionen nachgewiesen:

**Geladene Ströme (CC):** Hier wird die Reaktion

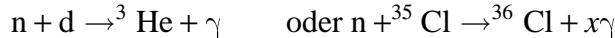


betrachtet. Die kinetischen Parameter des Elektrons werden über Cherenkov-Licht gemessen. Diese Reaktion hat die Eigenschaft, dass nur  $\nu_e$  nachgewiesen werden können, aber nicht  $\nu_\mu$  oder  $\nu_\tau$ , wobei die minimal Energie der Neutrinos  $E_{\nu_e}^{\min} = 8,2 \text{ MeV}$  beträgt.

**Neutrale Ströme (NC):** Hier wird die Reaktion



betrachtet. Hier können alle Flavors nachgewiesen werden und die Minimalenergie liegt bei  $E_\nu^{\min} = 2,2 \text{ MeV}$ . Die Neutronen werden über die Reaktionen



mit charakteristischen Photonenenergien ( $E_\gamma \approx 6,25 \text{ MeV}$  für die linke Reaktion) aufgespürt. Aus den gemessenen Reaktionsraten ergibt sich ein relativer Fluss von:

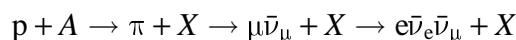
$$\frac{\Phi_{\text{CC}}^{\text{SNO}}}{\Phi_{\text{NC}}^{\text{SNO}}} = 0,306 \pm 0,035$$

was nicht mit der theoretischen Vorhersage  $\Phi_{\text{CC}}^{\text{theo}}/\Phi_{\text{NC}}^{\text{theo}} = 1$  übereinstimmt. Es müssen sich also auf dem Weg von der Sonne zur Erde einige  $\nu_e$  in Neutrinos anderer Flavor gewandelt haben.

## B) Atmosphärische Neutrinos

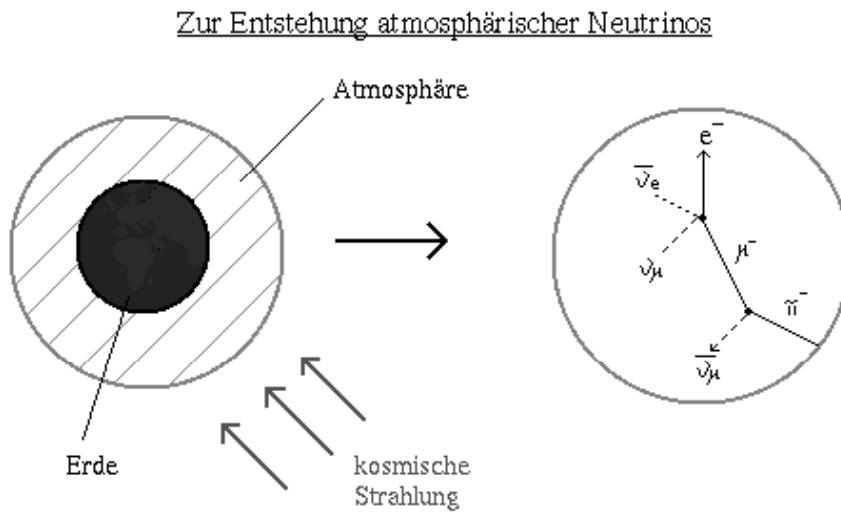
Diese entstehen in der Atmosphäre, wenn die Gasmoleküle von kosmischer Strahlung getroffen werden (siehe Abb. 8.13).

1. Eine Reaktion ist z.B.



Die Energien liegen im GeV-Bereich. Für das Verhältnis der Anzahl von  $\nu_\mu$  zur Anzahl der  $\nu_e$  erwartet man:

$$\frac{N_\nu(\nu_\mu)}{N_\nu(\nu_e)} \approx 2$$



**Abb. 8.13:** Entstehung von atmosphärischen Neutrinos

Vergleicht man das gemessene Verhältnis mit dem theoretisch erwarteten, so erhält man nach einer Mittelung über alle Energien:

$$R = \frac{[N_{\nu_\mu}/N_{\nu_e}]_{\text{Exp}}}{[N_{\nu_\mu}/N_{\nu_e}]_{\text{Theo}}} \approx 0,65 \pm 0,06$$

Die Ereignisraten liegen im Bereich von 1 Ereignis pro Tag auf 3000t Detektormasse.

## 2. Verbesserung des Experiments:

Hier wird nun zwischen Neutrinos, die direkt auf den Detektor treffen und Neutrinos die zuerst die Erde durchqueren unterschieden (siehe Abb. 8.14). Wir finden:

$$R = \frac{N_{\nu_\mu}^{\text{up}} - N_{\nu_\mu}^{\text{down}}}{N_{\nu_\mu}^{\text{up}} + N_{\nu_\mu}^{\text{down}}} = -0,31 \pm 0,04$$

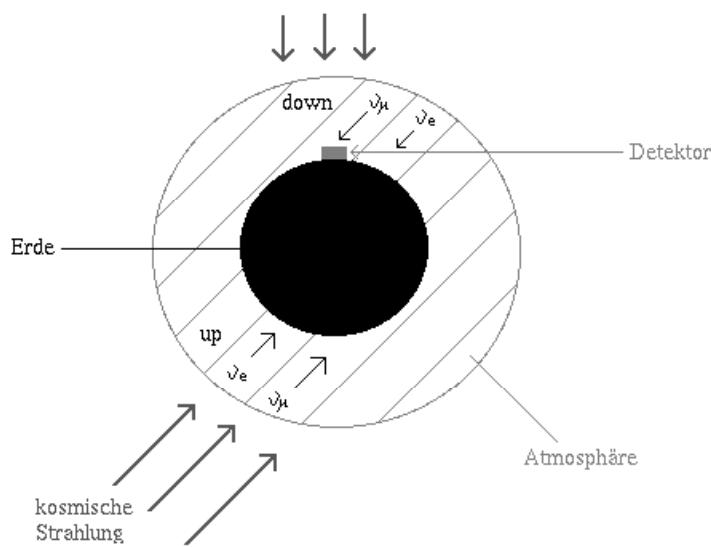
Die "up" Neutrinos legen zwischen Erzeugungspunkt und Detektor etwa 2700 bis 12800 km zurück, die "down" Neutrinos etwa 20 bis 100 km.

Aus  $R \neq 0$  kann man auf eine  $\nu_\mu$ -Oszillation schließen, da einige der Neutrinos verschwinden. Bei hohen Energien ist die Flugzeit für  $\nu^{\text{down}}$  zu klein für eine Oszillation (relativistische Zeitdilatation), bei kleinen Energien ist die Flugzeit  $t_{\text{Osz}}$  in der das Teilchen oszillieren kann wesentlich größer, so dass sich eine Energieabhängigkeit von  $R$  ergibt.

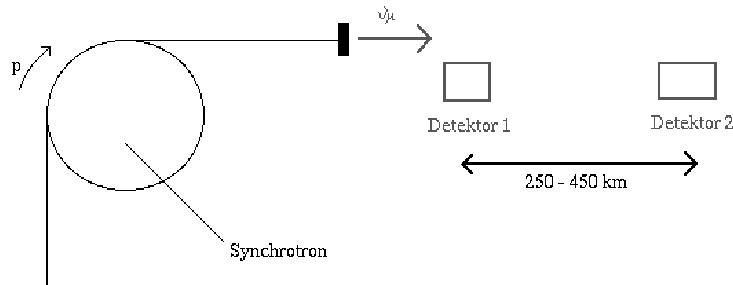
## C) Beschleunigerexperimente

### 1. K2K: Japan

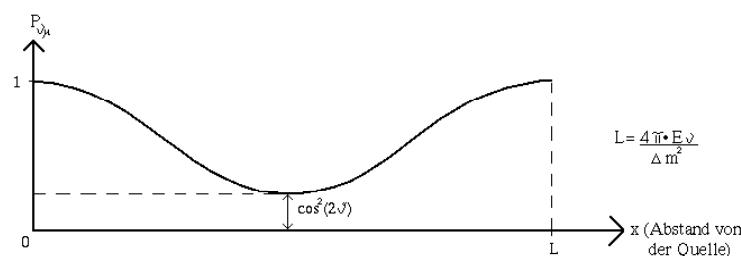
Es werden  $\nu_\mu$  mit einer Energie von  $E_{\nu_\mu} \approx 1,3 \text{ GeV}$  erzeugt und in einer Entfernung von  $\Delta x = 250 \text{ km}$  am Superkaminokande detektiert. Gemessen wurde eine Anzahl von  $N(\nu_\mu) = 56$ , erwartet wurde aber  $N^{\text{theo}}(\nu_\mu) = 80, 1^{+6,2}_{-5,4}$ .



**Abb. 8.14:** Messung von atmosphärischen Neutrinos



**Abb. 8.15:** Schematischer Aufbau eines Neutrinosozillationsexperiments unter Verwendung eines Beschleunigers



**Abb. 8.16:** Wahrscheinlichkeit der Oszillation einer bestimmten Neutrino-Flavour

2. Am Minos in der USA (Fermilab) wurde mit zwei Detektoren (eine nahe an der Quelle (1kt) und einer weiter entfernt (750 km, 5,4 kt) die Neutrinooszillation gemessen. Es wurden der Mischungswinkel  $\vartheta_{23}$  und der Massenunterschied  $\Delta m_{23}$  bestimmt.

**$\nu$ -Regeneration:** Ähnlich wie bei Kaonen gibt es auch bei den Neutrinos einen Regenerationseffekt. Bei den Kaonen fanden wir ja, daß  $K^0$  und  $\bar{K}^0$  aufgrund der starken Wechselwirkung unterschiedliche Wirkungsquerschnitte beim Durchgang durch Materie hatten. Folglich änderten sich ihre Amplituden unterschiedlich bei Überlagerung ihrer Phasen, und damit änderte sich auch die Superposition der Zustände. Gleiches gilt nun auch im Falle der Neutrinos: Die Streuung an Quarks ist natürlich für alle Flavours dieselbe, aber die Streuung an Elektronen in Materie für  $\nu_e$  und  $\nu_\mu$  ist unterschiedlich:

$$\begin{aligned}\nu_e e &\rightarrow \nu_e e \quad \text{via } W^\pm, Z^0\text{-Austausch} \\ \nu_\mu e &\rightarrow \nu_\mu e \quad \text{nur via } Z^0\text{-Austausch}\end{aligned}$$

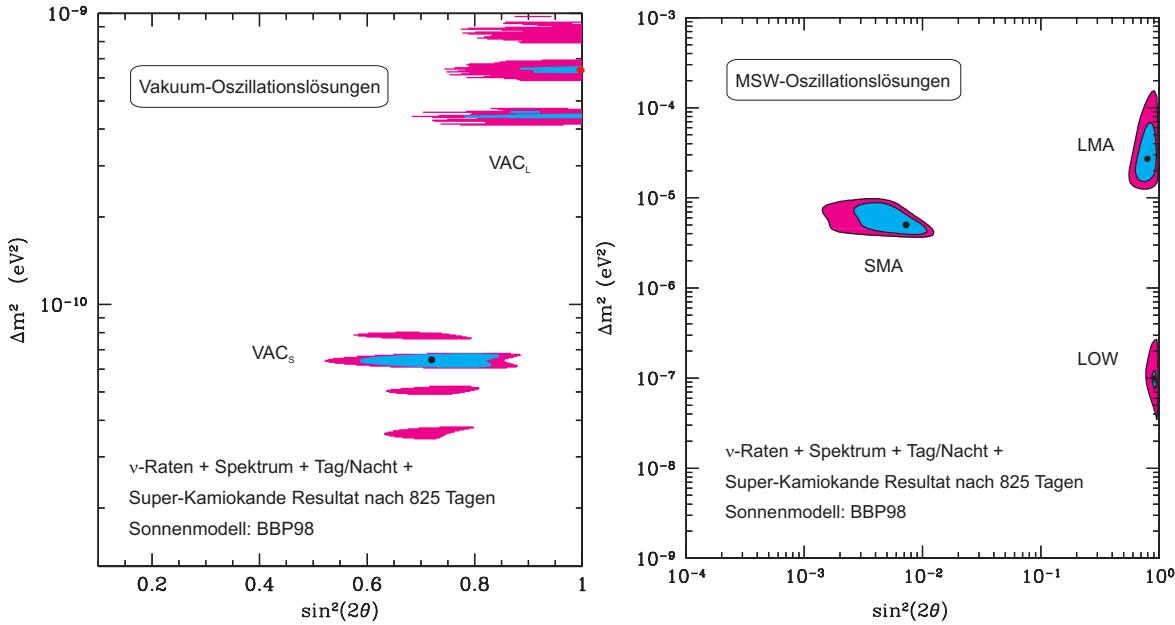
Die sich so ergebende Amplitudenveränderung (und Phasenveränderung) ändert die Neutrino-Mischung und spiegelt sich natürlich so auch in veränderten Lepton-Familienzahlen wieder. Diesen Effekt nennt man *MSW-Effekt*, nach Mikheyev, Smirnow und Wolfenstein. Zwar ist die Änderung der Neutrino-Mischung zu gering, um einen Meßeffekt in Beschleunigern zu sehen; aus dem Defizit an solaren Elektron-Neutrinos, die hier auf der Erde ankommen, kann aber sehr wohl auf die Größe des MSW-Effekts geschlossen werden: Auf der Erde kommen etwa nur die Hälfte der ohne Neutrino-Oszillationen erwarteten  $\nu_e$  an.

## Übungen zu Kapitel 8

**Übung 8.1:  $K^0$ - $\bar{K}^0$ -Oszillationen.** Wie kann man experimentell einen reinen, monoenergetischen Strahl von  $K^0$ -Teilchen erzeugen? Wenn ein kurzer Puls solcher Teilchen ein Vakuum durchquert, berechnen Sie die Intensität der  $K^0$  und  $\bar{K}^0$  als Funktion der Eigenzeit unter der Annahme, daß der Massenunterschied  $\Delta m$  a) gleich  $\frac{\hbar}{2\tau_1}$ , und b) gleich  $\frac{2\hbar}{\tau_1}$  ist, wobei  $\tau_1 = 0.9 \times 10^{-10}$  s die Lebensdauer von  $K_1$  ist, dem  $K^0$ -Eigenzustand mit  $C\mathcal{P} = +1$ . Stellen Sie die Phänomene graphisch dar.

**Übung 8.2:  $C\mathcal{P}$ -Verletzung.** Nehmen Sie an, Sie hätten Verbindung mit Physikerinnen in einer anderen Galaxie. Sie können jedoch nur Informationen austauschen. Können Sie feststellen, ob diese Physikerinnen aus Materie oder Antimaterie bestehen? Können Sie sich über eine eindeutige Definition von positiver und negativer Ladung, links und rechts verständigen? Untersuchen Sie hierzu die folgenden Möglichkeiten:

- a)  $C$ ,  $\mathcal{P}$  und  $\tau$  bleiben bei allen Wechselwirkungen erhalten.
- b)  $C$  und  $\mathcal{P}$  werden bei der schwachen Wechselwirkung verletzt.
- c)  $C$ ,  $\mathcal{P}$  und  $C\mathcal{P}$  werden verletzt.



**Abb. 8.17:** Aktuelle Lösungsbereiche für Neutrino-Oszillationen in der  $\Delta m^2$ - $\sin^2 2\vartheta$ -Ebene aus dem Superkamiokande-Experiment. Links: Vakuum-Oszillationslösungen, rechts: MSW-Oszillationslösungen. Hier bezeichnet SMA Lösungen mit kleinem Mischungswinkel (*small mixing angle*), LMA entsprechend solche mit grossem Mischungswinkel (aus [Ha00]).

**Übung 8.3: Neutrinomasse und Neutrinooszillationen.** Die Einführung eines Massenterms für Neutrinos in den Lagrangian der elektroschwachen Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_\nu = - \sum_{\ell\ell'} \overline{\nu_{\ell R}} M_{\ell\ell'} \nu_{\ell' L} \quad (\ell = e, \mu, \tau)$$

führt zu der Möglichkeit, daß die Neutrinozustände bezüglich der schwachen Wechselwirkung nicht identisch mit den Masseneigenzuständen sind. Die Matrix  $M$  kann diagonalisiert werden durch

$$M = V \hat{M} U^\dagger,$$

wobei  $V$  rechtshändige Antineutrinos transformiert und  $U^\dagger$  linkshändige Neutrinos. Allgemein lautet daher die Mischung von Neutrinos

$$|\nu_\ell\rangle = \sum_{k=1}^n U_{\ell k}^* |\nu_k\rangle \quad (\ell = e, \mu, \tau)$$

Im folgenden wollen wir uns auf die Mischung von Elektron- und Myonneutrinos beschränken:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

- a) Die Existenz der Mischung von Neutrinos führt zu Neutrinooszillationen. Berechnen Sie unter Verwendung der Lösungen der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$|\nu_\ell\rangle = \sum_{k=1}^2 U_{\ell k}^* \exp^{-iE_k t} |\nu_k\rangle \quad (\ell = e, \mu)$$

die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein Neutrino einer Sorte  $A$  nach einer Zeit  $t$  bzw. einer Flugstrecke  $L = ct$  in eine andere Sorte  $B$  umgewandelt hat. Nähern Sie hierbei die Energie  $E_k$  durch  $E_k = \sqrt{p^2 + m_k^2} \approx p + \frac{m_k^2}{2p}$  an.

- b) Bei Oszillationen in dichter Materie (z. B. im Sonneninnern) hat die Wechselwirkung zwischen Elektronen und Elektronenelektronen mittels des geladenen schwachen Stroms einen Einfluß auf die Oszillationswahrscheinlichkeit. Das effektive Wechselwirkungspotential ist hierbei

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \sqrt{2} G_F N_e,$$

mit der Elektronendichte  $N_e$ , so daß dann die zugehörige Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{i\partial}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \left( p + \frac{M^2 + 2p\mathcal{H}_{\text{int}}}{2p} \right) \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$$

lautet. Definieren Sie zunächst die Matrix  $M'^2 = M^2 + 2p\mathcal{H}_{\text{int}} \approx M^2 + 2E\mathcal{H}_{\text{int}}$ .

Berechnen Sie damit die kritische Elektronendichte  $N_e^c$ , bei der sich die Energieniveaus von  $\nu_e$  und  $\nu_\mu$  kreuzen (d. h.  $M'^2_{11} = M'^2_{22}$ ).

Was bedeutet dies für den effektiven Mischungswinkel in Materie  $\vartheta_M$ , der durch

$$\tan 2\vartheta_M = \frac{2M'^2_{12}}{M'^2_{22} - M'^2_{11}}$$

definiert ist, in Bezug auf den wahren Mischungswinkel  $\vartheta$ ?

- c) Schätzen Sie für Reaktorexperimente, Beschleunigerexperimente, Experimente mit atmosphärischen Neutrinos und solchen mit Sonnenneutrinos typische Neutrinoenergien und Längenskalen für Oszillationen ab. Welche Sensitivitäten für die Massendifferenz  $\Delta m^2$  ergeben sich daraus? Wie könnte man diese im Falle von Reaktor- und Beschleunigerexperimenten verbessern?
- d) Zusatz (Mini-Fopra): Bestimmen Sie aus den in Tab. 8.1 angegebenen Daten der Sonnenneutrinoexperimente die besten Werte für  $\sin^2 2\theta$  und  $\Delta m^2$ . Hinweis: es gibt zwei mögliche Wertepaare.

Experiment	Target	$E_{\text{th}}$ (MeV)	Resultat	Theorie	$\langle P(\nu_e \rightarrow \nu\mu) \rangle$
Homestake	Chlor	0.8	$2.56 \pm 0.23$	$7.7^{+1.2}_{-1.0}$	$0.33^{+0.06}_{-0.05}$
GALLEX	Gallium	0.2	$78 \pm 8$	$129^{+8}_{-6}$	$0.60 \pm 0.07$
SAGE	Gallium	0.2	$67 \pm 8$	$129^{+8}_{-6}$	$0.52 \pm 0.07$
Kamiokande	Wasser	7.5	$2.80 \pm 0.38$	$5.15^{+1.0}_{-0.7}$	$0.54 \pm 0.07$
Super-Kamiokande	Wasser	6.5	$2.44^{+0.10}_{-0.09}$	$5.15^{+1.0}_{-0.7}$	$0.47^{+0.07}_{-0.09}$

**Tab. 8.1:** Daten aktueller Sonnenneutrinoexperimente

# **Teil II**

## **Kerne**



# Kapitel 9

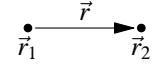
## Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung

Die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung ist die Kernkraft, die im selben Sinne verantwortlich für den Aufbau der Atomkerne ist, wie es die Coulombwechselwirkung für den Aufbau der Atomhülle ist. Wie wir sehen werden, sind die Nukleonen im Kern nur schwach gebunden; man kann den Kern somit als System von fast freien Teilchen in einem Potentialtopf verstehen. Aus solch einem System von fast freien Teilchen aber wird man über die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung nicht viel Informationen erhalten... In der Atomphysik kannte man wenigstens die Kräfte, die die Teilchen in der Coulomb-Wechselwirkung aufeinander ausübten.

Folglich wird es sich als sinnvoll erweisen, zum Studium der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung auf die einfachsten Nukleon-Systeme, nämlich die aus zwei Nukleonen, zurückzugreifen: Empirische Informationen wird man aus pp-Streuung sowie dem Deuteron erhalten, welches das einzige gebundene Zwei-Nukleon-System darstellt.

Wie wir Tab. 9.1 entnehmen können, haben Nukleonen Isospin  $T = \frac{1}{2}$  und Spin  $\frac{1}{2}$ :  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ . Ähnliches gilt für den Gesamtspin.

Betrachten wir den Bahndrehimpuls der Relativbewegung.  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  stelle den Verbindungsvektor der beiden betrachteten Nukleonen da. Die Wellenfunktion lässt sich in Radial- und Winkelanteil separieren:  $\psi(\vec{r}) = R(r)\gamma_{LM_L}(\hat{r})$ , wobei  $\gamma_{LM_L}$  bekannterweise die Kugelflächenfunktionen sind.



Unter Teilchenaustausch  $1 \leftrightarrow 2$ ,  $\vec{r} \leftrightarrow -\vec{r}$  ergibt sich für ungerade  $L$  eine antisymmetrische Wellenfunktion und entsprechend für gerade  $L$  eine symmetrische Wellenfunktion.

Für Fermionen verlangt das Pauli-Prinzip eine antisymmetrische Gesamtwellenfunktion (siehe z. B. [Ka99]):

$$-1 = (-1)^{L+S+1+T+1} \quad (9.1)$$

Damit (9.1) erfüllt wird, muß  $T + S + L$  ungerade sein. Nur solche Zustände sind also erlaubt. Wie in der Atomphysik gibt es auch in der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung eine Spin-Bahn-Kopplung, d. h. der Gesamtdrehimpuls ist eine Erhaltungsgröße, nicht  $\vec{\ell}$  oder  $\vec{S}$ :

$$\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{S} = \vec{\ell} + \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \quad (9.2)$$

Gesamt-Isospin	$T = 0$	$T = 1$
$\vec{T} = \frac{1}{2}\vec{\tau}_1 + \frac{1}{2}\vec{\tau}_2$ , $\vec{T}^2$ hat Eigenwert $T(T+1)$	$1/\sqrt{2}( p\rangle n\rangle -  n\rangle p\rangle)$ antisymmetrisch unter Teilchenaustausch	$ p\rangle p\rangle$ $1/\sqrt{2}( p\rangle n\rangle +  n\rangle p\rangle)$ $ n\rangle n\rangle$ symmetrisch unter Teilchenaustausch
Gesamtspin	$S = 0$	$S = 1$
$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}_1 + \frac{1}{2}\vec{\sigma}_2$ , $\vec{S}^2$ hat Eigenwert $S(S+1)$	$1/\sqrt{2}( \uparrow\rangle \downarrow\rangle -  \downarrow\rangle \uparrow\rangle)$ Spin-Singulett antisymmetrisch unter Teilchenaustausch	$ \uparrow\rangle \uparrow\rangle$ $1/\sqrt{2}( \uparrow\rangle \downarrow\rangle +  \downarrow\rangle \uparrow\rangle)$ $ \downarrow\rangle \downarrow\rangle$ Spin-Triplett symmetrisch unter Teilchenaustausch

**Tab. 9.1:** Mögliche Gesamt-Isospins (oben) und Gesamtspins (unten) von zusammengesetzten Nukleonen

Der Eigenwert von  $\vec{j}^2$  ist  $J(J+1)$ , und  $J$  ist die gute Quantenzahl. Damit erhält man folgende Zustände:

$$\begin{aligned} \text{Singlett: } & S = 0; L = J \\ \text{Triplet: } & S = 1; L = J-1, J, J+1 \end{aligned}$$

Die allgemein übliche *spektroskopische Notation* verwendet folgendes Symbol:  ${}^{2S+1}L_J$ . Konkret stellt sich dies so dar (in Klammern ist jeweils der Gesamtisospin  $T$  angegeben):

$$\begin{aligned} \text{S-Wellen: } & {}^1S_0(1), {}^3S_1(0) \leftarrow \text{wesentlich für Grundzustand des Deuterons} \\ \text{P-Wellen: } & {}^1P_1(0), {}^3P_0(1), {}^3P_1(1), {}^3P_2(1) \\ \text{D-Wellen: } & {}^1D_2(1), {}^3D_1(0), {}^3D_2(0), {}^3D_3(0) \end{aligned}$$

wobei  $T$  bereits vollständig bestimmt ist.

## 9.1 Struktur des Nukleon-Nukleon-Potentials

Solange man sich energetisch unterhalb der  $\pi$ -Produktionsschwelle ( $NN \rightarrow NN\pi$ ,  $E_{\text{kin}} < 280 \text{ MeV}$ ) befindet, kann die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung durch ein lokales (abstandabhängiges) Potential beschrieben werden: Hierfür fordern wir alle wichtigen Symmetrien, wie Isospin-Invarianz, Rotationsinvarianz, Paritätsinvarianz und die Symmetrie unter Teilchenaustausch.

Ferner soll die Wechselwirkung nur vom Gesamt-Isospin abhängen. Man verwendet folgenden Ansatz für das Potential:

## 9.1 Struktur des Nukleon-Nukleon-Potentials

$$V_{NN} = V_{NN}^{(1)} + V_{NN}^{(2)} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \quad (9.3)$$

isovektoriell, gleich für pp und nn      isoskalar, verschieden für pn- und np-Streuung

$$V_{NN}^{(i)} = V_C^{(i)}(r) + V_S^{(i)}(r) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_{SO}^{(i)}(r) \vec{\ell} \cdot \vec{S} + V_T^{(i)}(r) \underbrace{(3\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r} \vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)}_{= \text{Tensoroperator} = S_{12}(\hat{r})} \quad (9.4)$$

Die *Tensorkraft* kann man analog zum Wechselwirkungspotential zweier elektrischer oder magnetischer Dipole verstehen:

$$V_{\text{Dipol}}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi r^3} [3\vec{\mu}_1 \cdot \hat{r} \vec{\mu}_2 \cdot \hat{r} - \vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2] \quad (9.5)$$

Eine besondere Eigenschaft des Tensoroperators ist, daß er nicht mit dem Quadrat des Bahndrehimpulses kommutiert:

$$[S_{12}(\vec{r}), \vec{\ell}^2] \neq 0 \quad (9.6)$$

Die Bahndrehimpulsquantenzahl  $L$  ist also keine gute Quantenzahl. Zustände mit (um 2) verschiedenen  $L$  können mischen. Wegen der Beziehung

$$S_{12}(\vec{r}) = 6(\vec{S} \cdot \hat{r})^2 - 2\vec{S}^2, \quad \vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \quad (9.7)$$

sieht man sofort, daß der Tensoroperator nur in Triplettzuständen wirkt:

$$S_{12}(\vec{r}) | \text{Singulett} \rangle = 0 \quad (9.8)$$

Der Tensoroperator koppelt also Triplettzustände mit  $\Delta L = 2$ :  ${}^3S_1 \leftrightarrow {}^3D_1$  (D-Zustandsbeimischung im Deuteron),  ${}^3P_2 \leftrightarrow {}^3F_2$ .

Der Ein-Pion-Austausch zwischen Nukleonen erzeugt ein isovektorielles Tensorpotential: Das Pion ist ein pseudoskalares Teilchen mit  $J^P = 0^-$ . Damit können wir im Impulsraum anschreiben:

$$V_{1\pi}(\vec{q}) = \left( \frac{g_{\pi N}}{2M} \right)^2 \frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q}}{\vec{q}^2 + m_\pi^2} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \quad (9.9)$$

Fouriertransformiert in den Ortsraum ergibt sich:

$$\begin{aligned} V_{1\pi}(\vec{r}) &= - \int_0^\infty \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} V_{1\pi}(\vec{q}) \\ &= \frac{g_{\pi N}^2}{48\pi M^2} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \left[ \frac{e^{-m_\pi r}}{r^3} (3 + 3m_\pi r + m_\pi^2 r^2) S_{12}(\hat{r}) + \left( -4\pi \delta^3(\vec{r}) + m_\pi^2 \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \right) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \right] \\ &\quad \text{sog. Yukawa-Potential} \end{aligned} \quad (9.10)$$

## 9.2 Nukleon-Nukleon-S-Wellen-Streuphasen

Aus der quantenmechanischen Potentialstreutheorie (z. B. [Sc98], [Ga99]) wissen wir, daß der differentielle Wirkungsquerschnitt durch das Quadrat der Streuamplitude gemäß

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vartheta, k)|^2 \quad (9.11)$$

ausgedrückt werden kann.  $k$  stellt dabei den Impuls dar. Setzen wir nun eine Partialwellenzerlegung an:

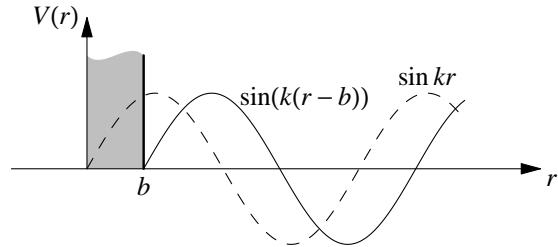
$$f(\vartheta, k) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) e^{i\delta_\ell(k)} \sin \delta_\ell(k) P_\ell(\cos \vartheta) \quad \delta_\ell(k) = \text{Streuphase} \quad (9.12)$$

Wenn wir von einem Potential der Reichweite  $a$  ausgehen, sind nach klassischer Betrachtung nur die Partialwellen mit  $\ell \leq ka$  wesentlich. Dies resultiert daraus, daß wir den Drehimpuls klassisch durch den Wellenvektor  $\vec{k}$  und den Stoßparameter  $\vec{b}$  ausdrücken können:  $L = kb$ . Hat nun die Wechselwirkung eine endliche Reichweite  $a$ , so tritt Streuung (und damit Wechselwirkung) nur für Stoßparameter  $b \leq a$  auf, wodurch automatisch die obige Bedingung für den Drehimpuls folgt. Für die Kernbindung sind also die S-Wellen maßgebend.

Die Streuphase in (9.12) stellt die asymptotische Phasenverschiebung gegenüber der freien Kugelwelle dar.

Die Situation für ein repulsives Hard-Core-Potential veranschaulicht Abb. 9.1.

Potential	Streuphase
attraktiv $V(r) < 0$	$\delta_0(k) > 0$
repulsiv $V(r) > 0$	$\delta_0(k) < 0$



Tab. 9.2: Zusammenhang von Potential und Streuphase

Abb. 9.1: Repulsives Hard-Core Potential

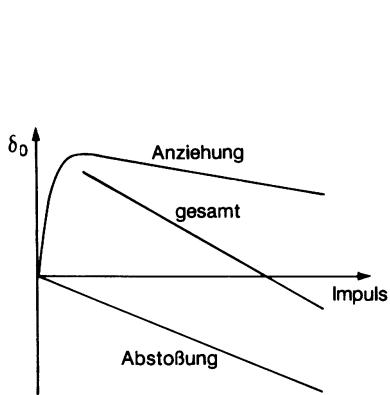
Die Schrödingergleichung kann man in diesem Fall mit  $u(r) = r\psi(r)$  folgendermaßen schreiben:

$$u'' + \left( k^2 - \frac{MV(r)}{\text{red. Masse}} \right) u(r) = 0$$

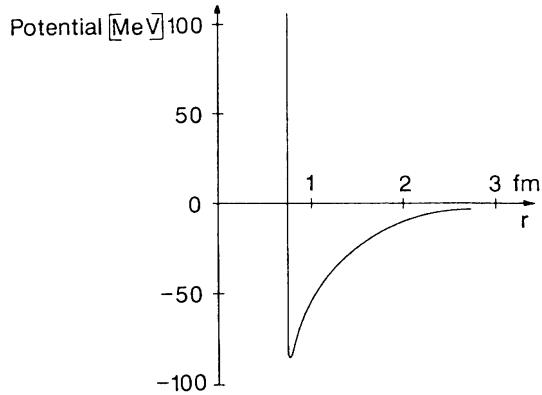
Als Lösung ergibt sich:  $u(r) = \sin(k(r-b)) = \sin(kr + \delta_0)$ . Man erhält eine negative Streuphase:

$$\delta_0(k) = -bk < 0$$

Für ein attraktives Kastenpotential ist dagegen die Streuphase  $\delta_0(k)$  positiv und fällt mit steigendem Impuls ab.



**Abb. 9.2:** Überlagerung von negativem und positivem Anteil der Streuphase (aus [Po99])



**Abb. 9.3:** Nukleon-Nukleon-Potential im  ${}^1S_0$ -Zustand, gewonnen aus einer vollständigen Streuphasenanalyse. Den repulsiven Anteil bezeichnet man als *Hard-Core*. (aus [Po99])

$$q = \sqrt{k^2 + MV_0}$$

$$\delta_0(k) = \arctan \left[ \frac{k}{q} \tan(qa) \right] - ka > 0$$

Die Kombination eines kurzreichweitig abstoßenden und eines langreichweitig anziehenden Teils des Nukleon-Nukleon-Potentials ergibt für die Streuphase insgesamt den in Abb. 9.2 gezeigten Verlauf. Das zugehörige Potential ist in Abb. 9.3 dargestellt.

Wir wollen uns noch überzeugen, daß das  $1-\pi$ -Austauschpotential (9.10) in der Singlett-Partialwelle in der Tat attraktiv ist. Dazu betrachten wir den Erwartungswert des Operators:

$$\left\langle {}^1S_0 \left| \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \right| {}^1S_0 \right\rangle = -3 \cdot 1 = -3 \quad (9.13)$$

Dabei haben wir folgende Beziehungen ausgenutzt:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 &= 2 \left( \vec{S}^2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) = 2S(S+1) - 3 \\ \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 &= 2 \left( \vec{T}^2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) = 2T(T+1) - 3 \end{aligned} \quad (9.14)$$

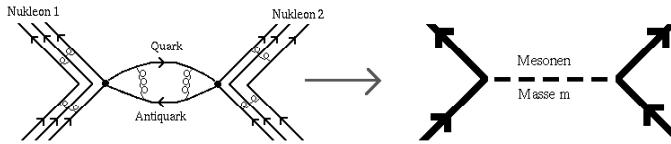


Abb. 9.4: Ein-Pion-Austausch

## 9.3 Das Ein-Pion-Austausch-Potential (OPE)

### 9.3.1 Wechselwirkung durch Bosonen (-Mesonen) Austausch

Wir betrachten die starke Wechselwirkung von zwei Nukleonen, welche in Abb. 9.4 dargestellt ist.

Für die Reichweite  $\lambda$  der Wechselwirkung ist die Comptonwellenlänge des ausgetauschten Mesons maßgeblich:

$$\lambda \simeq \frac{\hbar}{mc} \hat{=} \frac{1}{m}$$

Für das Potential machen wir den Yukawa-Ansatz:

$$V(r) \propto \frac{e^{-mr}}{r}$$

Somit bestimmt das leichteste Meson (längste Reichweite) das Verhalten der Wechselwirkung bei großen Abständen.

### 9.3.2 Pion-Austausch und langreichweitige NN-Wechselwirkung

Das leichteste Meson ist das *Pion* mit einer Masse von  $m_\pi = 0,14\text{GeV}$  (exakt:  $m_{\pi^\pm} = 139,6\text{MeV}$  und  $m_{\pi^0} = 135,0\text{MeV}$ ). Es hat einen Isospin von  $I = 1$  und eine Spinparität von  $J^\pi = 0^-$ .



Für das Potential im Impulsraum gilt:

$$\tilde{V}_\pi(\vec{q}) = - \left( \frac{g_{\pi N}}{2M} \right)^2 \frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q}}{\vec{q}^2 + m_\pi^2} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$$

Das Potential im Ortsraum ergibt sich aus einer Fouriertransformation

$$\begin{aligned} V_\pi(\vec{r}) &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \tilde{V}_\pi(\vec{q}) = \\ &= \frac{g_{\pi N}^2}{48\pi M^2} \left\{ \left[ m_\pi^2 \frac{e^{-m_\pi r}}{r} - 4\pi \delta^3(\vec{r}) \right] \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 + \left( 1 + \frac{3}{m_\pi r} + \frac{3}{m_\pi^2 r^2} \right) m_\pi^2 \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \underbrace{S_{12}(\hat{r}) \vec{\tau}_2 \cdot \vec{\tau}_2}_{\text{Tensorterm}} \right\} \end{aligned}$$

**Ergänzung** OPE-Potential im Impulsraum

$$\begin{aligned} V_\pi(\vec{q}) &= \left( \frac{g_{\pi N}}{2M} \right)^2 \frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q}}{\vec{q}^2 + m_\pi^2} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 = \\ &= \frac{g_{\pi N}^2}{2M^2} \left[ \frac{1}{3} \underbrace{\frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q}}{\vec{q}^2 + m_\pi^2}}_{\left( 1 - \frac{m_\pi^2}{\vec{q}^2 + m_\pi^2} \right) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2} + \frac{1}{3} \underbrace{(3\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)}_{S_{12}(\vec{q})} \frac{\vec{q}^2}{\vec{q}^2 + m_\pi^2} \right] \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \end{aligned}$$

### 9.3.3 Pion-Nukleon-Kopplungskonstante und Goldberger-Treiman-Relation

$g_{\pi N}$  ist nicht beliebig, sondern durch Symmetriebeziehungen mit dem Axialvektorstrom verknüpft. Die Basis hierfür ist die QCD mit (nahezu) masselosen u- und d-Quarks. Die chirale Symmetrie führt zu einem erhaltenen Axialvektorstrom.

Daraus folgt nun die Goldberger-Treimann-Relation:

$$g_{\pi N} = \frac{g_A}{f_\pi} M_N$$

mit der Axialvektor-Kopplungskonstante des Nukleons  $g_A = 1,27$  (gemessen beim Neutron-Betazerfall). Die Riemann-Zerfallskonstante ist  $f_\pi = 92,4 \text{ MeV}$  (aus der Reaktion  $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu$ ) und der Nukleonmasse  $M_N = 1/2(M_p + M_n) = 939 \text{ MeV}$ .

Somit ergibt sich für  $g_{\pi N}$  ein Wert von:

$$g_{\pi N} = 12,9$$

Der empirische Wert aus Streuphasen-Analysen ist:

$$g_{\pi N} = 13,2 \pm 0,1 \quad \Rightarrow \quad \frac{g_{\pi N}^2}{4\pi} = 13,9$$

### 9.3.4 Spin-Isospin-Struktur des OPE-Potentials

Der Operator  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$  hat den Erwartungswert:

$$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 = 4 \left[ S(S+1) - \frac{3}{2} \right] \left[ T(T+1) - \frac{3}{2} \right] = \begin{cases} 9 & \dots S = T = 0 \\ 1 & \dots S = T = 1 \\ -3 & \dots (S, T) = (0, 1) \text{ oder } (1, 0) \end{cases}$$

Daraus folgen die Potentiale in Zuständen mit verschiedenen Spins und Isospins:

$$\begin{aligned} V_\pi(S = T = 0, L \text{ ungerade}) &= \frac{3}{16\pi} \frac{g_{\pi N^2}}{M^2} m_\pi^2 \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \\ V_\pi(S = 0, T = 1, L \text{ gerade}) &= -\frac{1}{16\pi} \frac{g_{\pi N^2}}{M^2} m_\pi^2 \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \\ V_\pi(S = 1, T = 0, L \text{ gerade}) &= -\frac{1}{16\pi} \frac{g_{\pi N^2}}{M^2} m_\pi^2 \left[ 1 + \left( 1 + \frac{3}{m_\pi r} + \frac{3}{m_\pi^2 r^2} \right) S_{12}(\hat{r}) \right] \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \\ V_\pi(S = T = 1, L \text{ ungerade}) &= \frac{1}{48\pi} \frac{g_{\pi N^2}}{M^2} m_\pi^2 \left[ 1 + \left( 1 + \frac{3}{m_\pi r} + \frac{3}{m_\pi^2 r^2} \right) S_{12}(\hat{r}) \right] \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \end{aligned}$$

Es zeigt sich eine starke Isospin-Abhängigkeit und ein attraktives Potential im “Deuteron“-Kanal mit  $S = 1$  und  $T = 0$ .

## 9.4 Das Deuteron

**Eigenschaften.** Das Deuteron ist der einzige (sehr schwach) gebundene Zustand des Nukleon-Nukleon-Systems mit einer Bindungsenergie  $B = 2.224573$  MeV. Dieses Proton-Neutron-Paar hat Isospin  $T = 0$ , Spin  $S = 1$  und Gesamtdrehimpuls  $J = 1$ . Geben wir die Schrödinger-Gleichung für die Wellenfunktion des Deuterons an:

$$\left[ -\frac{\vec{\nabla}^2}{2m} + V_{NN}(\vec{r}) \right] \psi_D(\vec{r}) = E \psi_D(\vec{r}) \quad (E = -B)$$

mit der allseits bekannten reduzierten Masse

$$m = \frac{M_p M_n}{M_p + M_n} \approx \frac{M}{2}$$

Bei Auslassung des Spin-Bahn-Terms schreibt sich das Nukleonpotential wie folgt:

$$V_C^{(1)}(r) + V_C^{(2)}(r) \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 + V_S^{(1)}(r) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_S^{(2)}(r) \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_T^{(1)}(r) S_{12}(\hat{r}) + V_T^{(2)}(r) S_{12}(\hat{r}) \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$$

Für das Deuteron mit  $S = 1, T = 0$  gilt gemäß (9.14):  $\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle = 1, \langle \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \rangle = -3$ .

Damit kann das Potential zusammengefaßt werden in der Form:

$$V_{\text{NN}}^{\text{Deut}}(\vec{r}) = U_C(r) + U_T(r) S_{12}(\hat{r})$$

Zentral-, Tensorpotential

### 9.4.1 Wellenfunktion des Deuterons

Ansatz für die Wellenfunktion des Deuterons:

$$\psi_D = \frac{1}{\sqrt{4\pi r}} \left[ \begin{array}{c} u(r) + \frac{w(r)}{\sqrt{8}} S_{12}(\hat{r}) \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{S-Welle} \quad \text{D-Welle} \\ \ell=0 \quad \ell=2 \end{array} \right] \chi_{1M}$$

Spin-Triplett-Funktionen

mit der Normierung  $\int_0^\infty dr [u^2(r) + w^2(r)] = 1$ . Man beachte, daß in  $S_{12}^2(\hat{r}) = 6 + 2\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 - 2S_{12}(\hat{r}) = 8 - 2S_{12}(\hat{r})$  der letzte Term bei der Winkelmitteilung wegfällt. Dies ist der Grund für die Einführung des Faktors  $1/\sqrt{8}$ .

**Bedeutung der Tensorkraft.** Die Tensorkraft verkoppelt S-Welle ( $u(r)$ ) und D-Welle ( $w(r)$ ) miteinander. Es gelten die folgenden gekoppelten Eigenwertgleichungen:

$$u''(r) = M \left[ (-E + U_C(r)) u(r) + \sqrt{8} U_T(r) w(r) \right] \quad (9.15)$$

$$w''(r) = M \left[ \left( -E + \frac{6}{Mr^2} + U_C(r) \right) w(r) + \sqrt{8} U_T(r) u(r) \right] \quad (9.16)$$

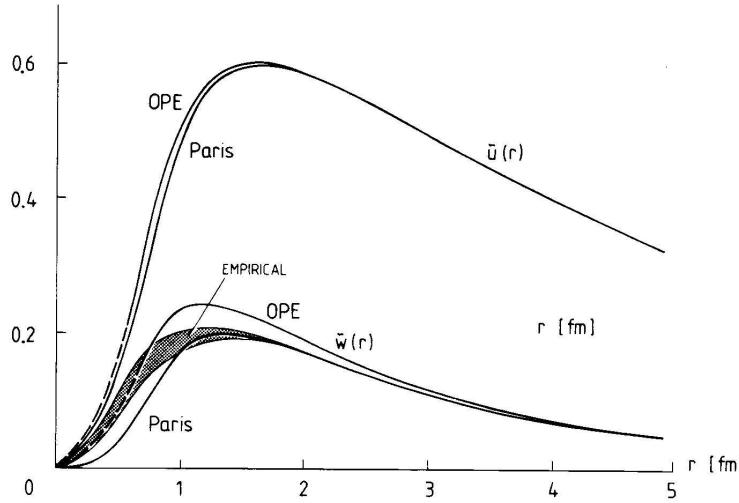
Die s- bzw. d-Wellenfunktion  $u(r)$  und  $w(r)$  des Deuterons sind in Abb. 9.5 dargestellt.

Der Faktor 6 in (9.16) ergibt sich aus dem Zentrifugalterm  $\ell(\ell+1)$ , wenn man für D-Wellen  $\ell = 2$  einsetzt. Für das asymptotische Verhalten der Funktionen  $u(r)$  und  $w(r)$  gilt, falls  $r$  gegen unendlich strebt ( $r \rightarrow \infty$ ):

$$u(r) \sim e^{-\sqrt{M \cdot |E|} r}$$

$$w(r) \sim e^{-\sqrt{M \cdot |E|} r} \eta$$

Experimentell findet man:  $\eta = 0.027$ .



**Abb. 9.5:** Deuteron-Wellenfunktionen  $\bar{u}(r)$  und  $\bar{w}(r)$  eines modernen Nukleon-Nukleon-Potentials (Paris-Potential) verglichen mit denen des Ein-Pionen-Austausches (*one pion exchange*, OPE). Die Wellenfunktionen wurden normiert, so daß  $\bar{u}(r) \rightarrow e^{-\alpha r}$  für  $r \rightarrow \infty$  (aus [Er88]).

## 9.4.2 Radius und Quadrupolmoment

**Mittlerer quadratischer Ladungsradius.**

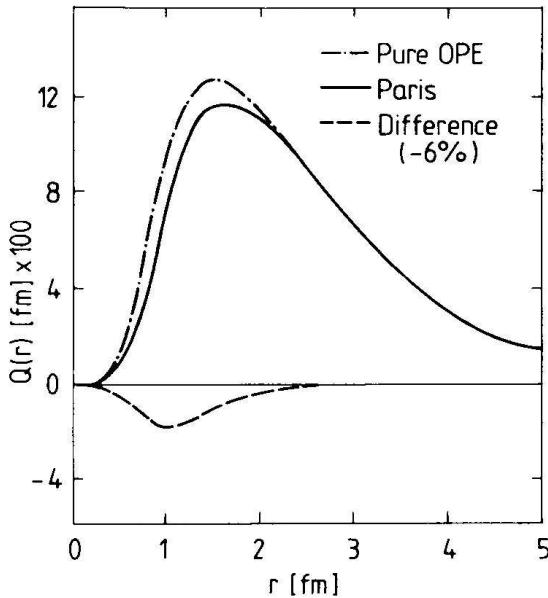
$$\begin{aligned} \langle r_D^2 \rangle &= \int d^3r \left(\frac{r}{2}\right)^2 |\psi_D(\vec{r})|^2 \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\infty dr r^2 [u^2(r) + w^2(r)] \end{aligned}$$

Das Auftreten von  $r/2$  erklärt sich daraus, daß das elektrisch geladene Proton den Abstand  $r/2$  vom Schwerpunkt des Deuteron-Systems hat. Als empirischen Wert findet man  $\langle r_D^2 \rangle = (1.963 \pm 0.004) \text{ fm}$ .

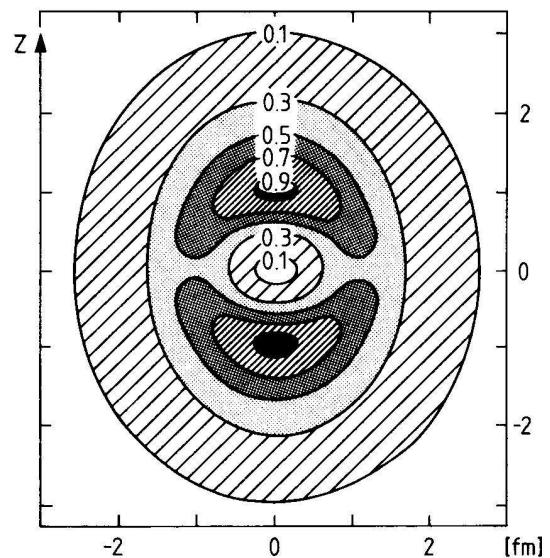
**Elektrisches Quadrupolmoment des Deuterons.**

$$\begin{aligned} Q_D &= \frac{1}{4} \int d^3r (3z^2 - r^2) |\psi_{D,J=M=1}(\vec{r})|^2 \\ &= \frac{1}{20} \int_0^\infty dr r^2 w(r) (\sqrt{8}u(r) - w(r)) \end{aligned}$$

Der empirische Wert beträgt hier:  $Q_D = (0.2859 \pm 0.0003) \text{ fm}^2 > 0$ . Daß  $Q_D$  nicht verschwindet, ist eine direkte Evidenz für die Tensorkraft (Abb. 9.6). Mit reinem Ein-Pionen-Austausch erhält man:  $Q_D^{1\pi} = 0.284 \text{ fm}^2$ .



**Abb. 9.6:** Quadrupolmomentdichte  $Q(r)$  für reines Ein-Pionen-Austausch-Potential und Paris-Potential (als Vertreter eines modernen Nukleon-Nukleon-Potentials). Der eingezeichnete Unterschied beider Modelle ist wiederum auf Basis des Zwei-Pionen-Austausches verstanden (aus [Er88]).



**Abb. 9.7:** DichteVerteilung im Deuteron (Konturlinien), falls man typische s- und d-Wellenfunktionen  $u(r)$  und  $w(r)$  verwendet und den Spin parallel zur  $z$ -Achse annimmt (aus [Er88]).

### 9.4.3 Magnetisches Moment des Deuterons

Der experimentelle Wert ergibt sich zu  $\mu_D = 0.8574$  und ist damit etwas kleiner als  $\mu_p + \mu_n = 2.793 - 1.913 = 0.880$  (in Einheiten von  $\frac{e\hbar}{2Mc}$ ). Wir betrachten den Operator des magnetischen Moments:

$$\vec{\mu} = \mu_p \vec{\sigma}_p + \mu_n \vec{\sigma}_n + \frac{1}{2} \vec{\ell} \quad \text{Einheiten von } \frac{e\hbar}{2Mc}$$

Er setzt sich aus Protonen- und Neutronenspin sowie dem Proton-Bahndrehimpuls zusammen. Das magnetische Moment des Deuterons ist durch folgenden Erwartungswert definiert:

$$\mu_D = \langle J = 1, M = 1 | \mu_z | J = 1, M = 1 \rangle$$

Wir wollen nun dieses Matrixelement im Detail berechnen. Terme in  $\vec{\mu}$  proportional zu  $\vec{\sigma}_p - \vec{\sigma}_n$  können aus Symmetriegründen nicht beitragen, denn der Triplettzustand ist symmetrisch unter Teilchenaustausch:

$$\langle S = 1 | \underset{\text{sym}}{\vec{\sigma}_p} - \underset{\text{antisym}}{\vec{\sigma}_n} | S = 1 \rangle = 0$$

Daher können wir für den Operator des magnetischen Moments die Form



**Abb. 9.8:** prolate Verformung (zigarrenförmig)

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_p + \mu_n}{2} (\vec{\sigma}_p + \vec{\sigma}_n) + \frac{\vec{\ell}}{2} = (\vec{\mu}_p + \vec{\mu}_n) \vec{j} - \left( \vec{\mu}_p + \vec{\mu}_n - \frac{1}{2} \right) \vec{\ell}$$

benutzen. Dabei haben wir  $\vec{j} = (\vec{\sigma}_p + \vec{\sigma}_n)/2 + \vec{\ell}$  verwendet. Nach dem Vektorprojektionstheorem ist das Matrixelement eines Vektoroperators gleich der Projektion dieses Operators auf den Gesamtdrehimpuls  $\vec{j}$ .

$$\langle JM | \vec{\mu} | JM \rangle = \frac{\langle JM | (\vec{\mu} \cdot \vec{j}) \vec{j} | JM \rangle}{J(J+1)}, \quad J = 1$$

Das Skalarprodukt  $\vec{\mu} \cdot \vec{j}$  lässt sich nun folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \vec{\mu} \cdot \vec{j} &= \frac{1}{2} (\mu_p + \mu_n) \vec{j}^2 - \frac{1}{2} \left( \mu_p + \mu_n - \frac{1}{2} \right) \vec{j} \cdot \vec{\ell} \\ &= \frac{1}{2} (\mu_p + \mu_n) \vec{j}^2 - \frac{1}{4} \left( \mu_p + \mu_n - \frac{1}{2} \right) \left( \vec{j}^2 + \vec{\ell}^2 - \vec{s}^2 \right) \end{aligned}$$

Für das Deuteron findet man ( $J = 1, S = 1, L = 0, 2$ ):

$$\begin{aligned} \mu_D &= \frac{1}{2} (\mu_p + \mu_n) 2 - \frac{1}{4} \left( \mu_p + \mu_n - \frac{1}{2} \right) [(1 - P_D) \underset{\text{D-Zustandswahrscheinlichkeit}}{\uparrow} (2 + 0 - 2) + P_D (2 + 6 - 2)] \\ &= \mu_p + \mu_n - \frac{3}{2} \left( \mu_p + \mu_n - \frac{1}{2} \right) P_D \end{aligned}$$

Damit ergibt sie die D-Zustandswahrscheinlichkeit zu:

$$P_D = \int_0^\infty dr w^2(r) \simeq 4\%$$

Die Deuteron-Wellenfunktion ist entsprechend eine Mischung aus S- und D-Welle (Abb. 9.7):

$$|D\rangle = 0.98|{}^3S_1\rangle + 0.20|{}^3D_1\rangle$$

**Kurze Zusammenfassung:** Als zentrale Ergebnisse zur Nukleon- Nukleon- Wechselwirkung lassen sich folgende 3 Grenzwerte festhalten:

- Der langreichweite Anteil der Wechselwirkung wird durch den Ein- Pion- Austausch vermittelt. Dieser Anteil hat eine Reichweite  $r > 1 \text{ fm}$ .
- Bei mittleren Reichweiten in der Region von  $r \approx 1 \text{ fm}$ , tritt der Zwei- Pion- Austausch auf. Dieser genügt dem Potential:

$$V_{2\pi}(r) \sim \frac{e^{-2m_\pi r}}{r^3} \underbrace{P(m_\pi r)}_{\substack{\text{Polynom in } x = m_\pi r \\ \text{analog zum} \\ \text{van der Waals Potential}}}$$

- Der kurzreichweite Anteil, für Abstände  $r < 0,5 \text{ fm}$ , wird schließlich über den Austausch schwererer Mesonen (Vektormesonen, etc.) vermittelt und birgt eine komplexe Quark- Gluon- Dynamik in sich.

## Übungen zu Kapitel 9

**Übung 9.1: Deuteron-Theorie.** Behandeln Sie das Deuteron als dreidimensionales Kastenpotential mit einer Tiefe  $-V_0$  und einer Reichweite  $R$ .

- Geben Sie die Schrödinger-Gleichung an. Begründen Sie den verwendeten Massenwert in der Schrödinger-Gleichung.
- Nehmen Sie an, daß der Grundzustand kugelsymmetrisch ist. Bestimmen Sie die Wellenfunktion innerhalb und außerhalb des Potentials. Bestimmen Sie die Bindungsenergie  $B$  als Funktion von  $V_0$  und  $R$ . Zeigen Sie, daß  $B$  nur das Produkt  $V_0 R^2$  festlegt.
- Zeichnen Sie die Grundzustandswellenfunktionen. Schätzen Sie den Anteil der Zeit ab, den Neutron und Proton außerhalb ihrer gegenseitigen Anziehung verbringen. Warum zerfällt das Deuteron nicht in dieser Zeit?

**Übung 9.2: Meson-Austauschpotential in Orts- und Impulsraum.** Gegeben sei das Meson-Austauschpotential im Impulsraum

$$V_\pi(\vec{q}) = \frac{g_{\pi N}^2}{4M^2} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \frac{\vec{\sigma}_1 \vec{q} \vec{\sigma}_2 \vec{q}}{m_\pi^2 + \vec{q}^2}.$$

Hierbei ist  $g_{\pi N}$  die Pion-Nukleon-Kopplungskonstante und  $M$  die Nukleonmasse. Das Ortsraumpotential ist definiert als

$$V_\pi(\vec{r}) = - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{r}} V_\pi(\vec{q}).$$

Berechnen Sie  $V_\pi(\vec{r})$ . Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache, daß der Faktor  $\vec{q}$  im Integranden durch Anwendung von  $-i\vec{\nabla}_r$  auf das Integral ersetzt werden kann. Verwenden Sie weiterhin die Beziehung  $\vec{\nabla} f(r) = \frac{\vec{r}}{r} f'(r)$ .



# Kapitel 10

## Kernmodelle

Kerne sind zusammengesetzte Systeme aus Protonen und Neutronen. Wie wir in Kap. 9 sahen, ist eine Beschreibung solcher Systeme durch die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung im allgemeinen zu komplex, wir haben sie dort nur für den besonders einfachen Fall des Deuterons diskutiert. In anderen Kernen hat man es mit zu vielen Teilchen mit zu vielen Freiheitsgraden zu tun. Daher greift man hier zu Modellen.

Bei der Beschreibung von Kernen bedient man sich zweier Klassen von Modellen:

- *Independent particle models*: Dabei geht man von der quasifreien Bewegung der Nukleonen als unabhängige Teilchen in einem gemeinsamen Potentialtopf aus.
- Kollektive Modelle (*strong interaction models*)

Als Beispiele für Modelle mit unabhängigen Teilchen wollen wir das Fermigas-Modell und das Schalenmodell besprechen, als Vertreter eines kollektiven Modells das Tröpfchenmodell, mit dem wir auch beginnen werden. An den Anfang jedoch wollen wir einige experimentelle Beobachtungen stellen:

### 10.1 Experimentelle Beobachtungen

#### 10.1.1 Radien

Kernradien lassen sich via Elektronenstreuung am Nukleon bestimmen, wie wir es bereits in Kap. 5 besprochen haben. Der Kernradius  $R$  wächst mit der Nukleonenzahl  $A = Z + N$  des Systems gemäß

$$R = R_0 A^{1/3} \quad R_0 = 1.21 \text{ fm} \quad (3.17'')$$

Gehen wir in erster Näherung von kugelförmigen Kernen aus, so können wir für das Kernvolumen  $V$  schreiben:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 A \quad (10.1)$$

Das Volumen eines Kernes wächst also linear mit seiner Nukleonenzahl  $A$  an und besitzt deshalb insbesondere eine konstante Dichte:

$$\frac{V}{A} = \text{konst.} = 0.17 \frac{\text{Nukleonen}}{\text{fm}^3} \hat{=} 3 \cdot 10^{14} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \quad (10.2)$$

Man beachte, daß dies im Vergleich zu makroskopischen Dichten wie z. B. der von Eisen,  $\rho_{\text{Fe}} = 8 \text{ g/cm}^3$ , ein ausgesprochen großer Wert ist.

### 10.1.2 Bindungsenergien

Die Bindungsenergien der Nukleonen im Kern sind experimentell zugänglich durch den Unterschied der Massen der einzelnen Konstituenten einerseits und der Masse des zusammengesetzten Systems andererseits:

$$B(Z, A) = \left[ \underbrace{Z}_{\text{Anzahl } p} \cdot M_p + \underbrace{(A - Z)}_{\text{Anzahl } n} \cdot M_n - M(A, Z) \right] c^2 \quad (\text{Definition der Bindungsenergie}^1) \quad (10.3)$$

Experimentell wird  $B$  im Massenspektrometer bestimmt, in welchem  $Q/M$  durch gleichzeitige Messung von Energie und Impuls von Ionen bestimmt werden kann. Das Prinzip eines Massenspektrometers illustriert Abb. 10.1.

Die Energie der Ionen erhält man durch deren Ablenkung im  $\vec{E}$ -Feld:

$$|\vec{F}| = Q|\vec{E}| = \frac{MV^2}{r} \quad (10.4)$$

Aus diesem Kräftegleichgewicht folgt unmittelbar der Krümmungs- oder Ablenkradius:

$$r_E = \frac{M}{Q} \frac{V^2}{|\vec{E}|} \quad (10.5)$$

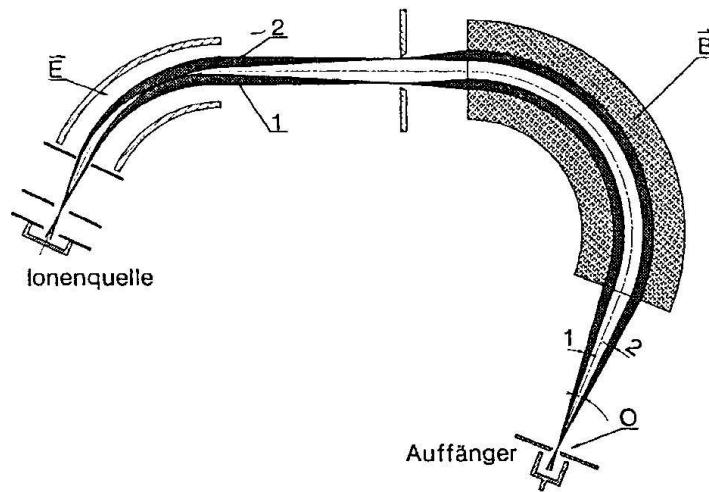
Der Teilchenimpuls liegt über dessen Ablenkung im Magnetfeld  $B$  gemäß der Standardgleichung für Teilchen im Magnetfeld (2.6) fest:

$$M \cdot V = p = Q \cdot B \cdot r \quad (10.6)$$

Daraus ergibt sich sofort:

---

<sup>1</sup>Dabei wird die Masse des Elektrons vernachlässigt



**Abb. 10.1:** Doppelfokussierendes Massenspektrometer. Das Spektrometer fokussiert Ionen einer bestimmten spezifischen Ladung  $Q/M$ . Zur besseren Darstellung sind nur die Teilchenbahnen vom Rand des Bündels gezeichnet (1 und 2). Das elektrische und das magnetische Sektorfeld bilden die Ionen aus der Ionenquelle in den Auffänger ab. Ionen mit einer anderen spezifischen Ladung werden im magnetischen Feld von den gezeichneten Bündeln getrennt und treten nicht durch den Spalt O hindurch (nach [Br64]).

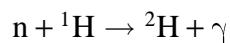
$$r_B = \frac{M V}{Q B} \quad (10.7)$$

A wird gemeinhin in atomaren Masseneinheiten angegeben, wobei man als Meßstandard das Kohlenstoffisotop  $^{12}\text{C}$  verwendet:

$$1\text{u} = \frac{1}{12}m(^{12}\text{C}) = 931.481 \frac{\text{MeV}}{\text{c}^2} = 1.66043 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

### 10.1.3 Massenbestimmung in Kernreaktionen

Hier kann man den Einfang von thermischen Neutronen mit  $E_n \approx 1/40 \text{ eV}$  (d.h. vernachlässigebare kinetische Energie) gemäß folgender Reaktion betrachten:

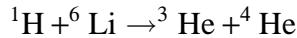


dann  $E_\gamma \sim B(^2\text{H})$  wegen

$$B = (M_{\text{n}} + M_{^1\text{H}} - M_{^2\text{H}})c^2 = E_\gamma + \underbrace{\frac{E_\gamma^2}{2M_{^2\text{H}}c^2}}_{\text{Rückstoß des } ^2\text{H}} = 2.25 \text{ MeV} \quad (10.8)$$

Den Rückstoßterm kann man sich einfach klarmachen: Wegen Impulserhaltung wird auf den Deuteron-Kern ein Impuls des Betrags  $p_\gamma = E_\gamma/c$  übertragen. Setzt man dies in die Beziehung  $E_{\text{Rückstoß}} = p_\gamma^2/(2M_{^2\text{H}})$  ein, erhält man unmittelbar die Rückstoßenergie. Diese Rechnung kann übrigens auch für die Bestimmung des Rückstoßes (relativistischer)  $\beta$ -Teilchen auf die sie emittierenden Kerne benutzt werden.

Anstelle des Neutroneneinfangs kann man auch den Protoneneinfang über p-induzierte Reaktionen betrachten:



### 10.1.4 Massenbestimmung mit Penning-Falle

Diese Methode eignet sich besonders für Messungen an sehr kurzlebigen Isotopen. Die Funktionsweise einer Penning-Falle wurde bereits in Abschn. 4.4.1.1 genau besprochen. Zur Massenbestimmung mißt und bestimmt man die Zyklotronfrequenz ( $\omega_c = \frac{QB}{Mc}$ ) der betrachteten Teilchen. Trifft man diese, so schießt das Teilchen aus der Falle und kann nachgewiesen werden. Diese Methode findet bei ISOLDE<sup>2</sup> (*Isotope Separator On Line Facility for Production of Radioactive Ion-Beams*) am CERN Anwendung.

Hier können Auflösungen von  $\Delta M/M \approx 10^{-10}$  erreicht werden.

### 10.1.5 Schlußfolgerungen

1. Die Bindungsenergie pro Nukleon ist nahezu konstant für alle vorkommenden Kerne (Abb. 10.2). Abweichungen sind nur bei leichten Kernen festzustellen. Es ist:

$$B/A \approx 7.5 \dots 8.5 \text{ MeV} \quad (10.9)$$

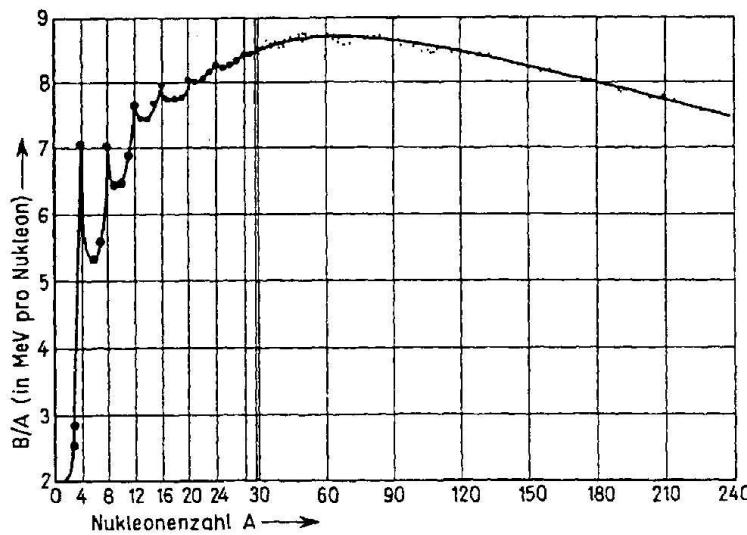
Ausnahmen gibt es nur für Kerne mit  $A \leq 10$ .

2. Die Bindungsenergie pro Nukleon weist ein, wenn auch nicht sehr ausgeprägtes, Maximum bei  $A \approx 60$  auf. Dies ist aber die Ursache für die relative Häufigkeit von Eisen im Universum. Es impliziert, daß eine Elementherstellung, die zu Energiegewinn führt, einerseits durch *Fusion* von  $A_1 + A_2 \rightarrow A_x; A_1, A_2 \ll 60, A_x \leq 60$ ; andererseits durch *Spaltung* gemäß  $A_x \rightarrow A_1 + A_2; A_x \gg 60$ , möglich ist.
3. Die Kerne weisen eine konstante Dichte auf, was als Sättigung der Kernkräfte interpretiert werden kann: Würde jedes Nukleon mit jedem anderen wechselwirken, so wäre  $B \sim A(A - 1) \approx A^2$ .

Unsere Feststellung  $B \sim A$  allerdings bedeutet: Es gibt nur Wechselwirkungen mit den nächsten Nachbarn. Kernmaterie hat also Ähnlichkeit mit einer Flüssigkeit, weswegen sich aus diesen Überlegungen das Tröpfchenmodell entwickelt hat.

---

<sup>2</sup><http://www.cern.ch/isolde/>



**Abb. 10.2:** Die Bindungsenergie pro Nukleon ist bei schweren Kernen mit  $B/A \approx 7.5 \dots 8.5 \text{ MeV}/c^2$  praktisch konstant. Bei leichten Kernen gilt diese Aussage allerdings nicht. In der Abbildung ist die Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion von  $A$  für stabile Kerne geplottet, wobei die Abszisse bis  $A = 30$  gespreizt wurde (aus [Ma84]).

## 10.2 Tröpfchenmodell

Bethe und Weizsäcker schlugen Mitte der dreißiger Jahre das Tröpfchenmodell vor. Wir wollen ihre Überlegungen nachvollziehen.

1. Beim Nukleon haben wir, wie beim Wassertropfen, zunächst einen Volumenterm:

$$E_V = +a_V \cdot A,$$

in dem  $A$  die Anzahl der Nukleonen angibt.  $a_V$  ist ein Proportionalitätsfaktor.  $E_V$  sagt aus, daß die Volumen-Energie des „Tropfens“ proportional zur Anzahl seiner Konstituenten ist.

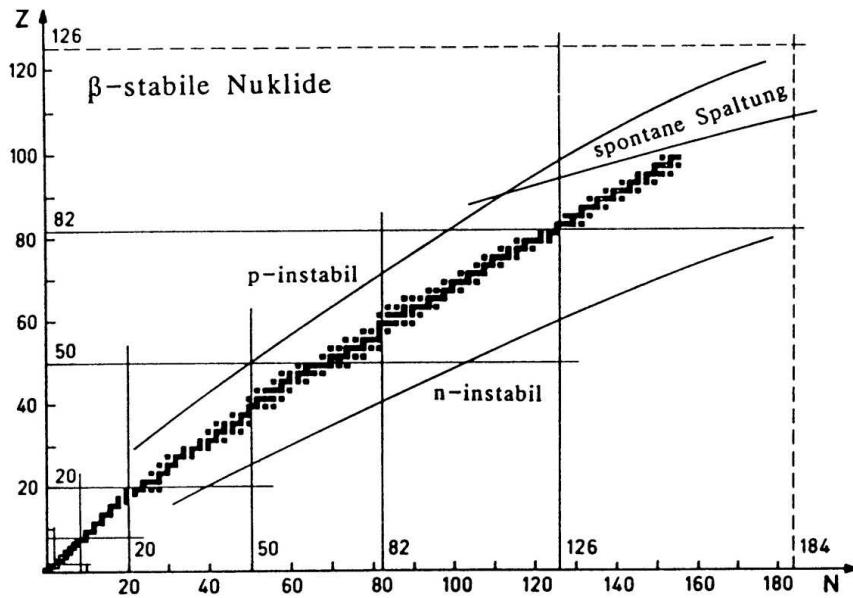
2. Nukleonen an der Oberfläche sind weniger stark gebunden, da sie im Mittel weniger Nachbarn besitzen. Dadurch wird die effektive Kraft, die die Nukleonen an der Oberfläche erfahren, reduziert. Dieser Korrektur wird durch einen negativen Term in  $R^2 \sim A^{2/3}$  Rechnung getragen:

$$E_S = -a_S \cdot A^{2/3}$$

3. Die Protonen sind geladen und somit einer Abstoßung durch Coulombkräfte unterworfen. Quantitativ: Jedes Proton sieht die Ladung  $Z - 1$ , was zu einem Term

$$E_{\text{Coul}} = \frac{3}{5} Z(Z-1) \frac{\alpha \hbar}{R} \sim \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (10.10)$$

↑  
stellt Volumeneffekt dar



**Abb. 10.3:** Die  $\beta$ -stabilen Kerne in der  $Z$ - $N$ -Ebene (nach [Bo69])

Anlaß gibt.  $Z$  bezeichnet dabei wie üblich die Anzahl der Protonen.

4. Man beobachtet stabile Nuklide nur in einem schmalen Band  $A \approx 2Z$ , und damit gilt  $N_p \approx N_n$ . Um dem Rechnung zu tragen, führt man einen Symmetrieterm ein (in der Literatur manchmal auch Asymmetrieterm genannt). Je weiter ein Kern von der Winkelhalbierenden  $Z = N$  entfernt ist, desto größer korrigiert dieser Beitrag die Bindungsenergie:

$$E_{\text{Sym}} = -a_{\text{Sym}} \cdot \frac{(Z - N)^2}{A}$$

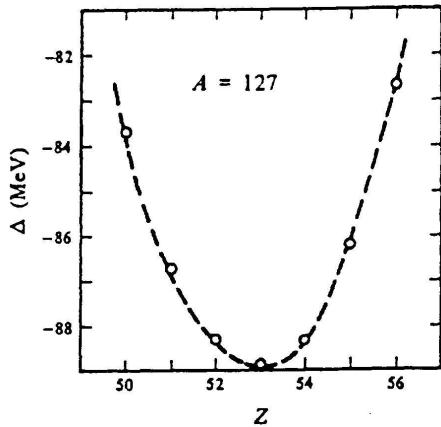
Die quadratische Abhängigkeit dieses Terms von  $Z - N$  zeigt Abb. 10.4. Der Einfluss dieses Termes wird daher mit  $1/A$  gedämpft. Für große  $A$  braucht man daher mehr Neutronen (Abb. 10.3).

5. Aus der systematischen Betrachtung der Kermassen erkannte man, daß eine gerade Anzahl von Protonen bzw. Neutronen die Stabilität eines Kernes erhöht. Man interpretiert das durch eine Kopplung von einzelnen Nukleon zu Nukleonpaaren und berücksichtigt entsprechend einen Paarungsterm:

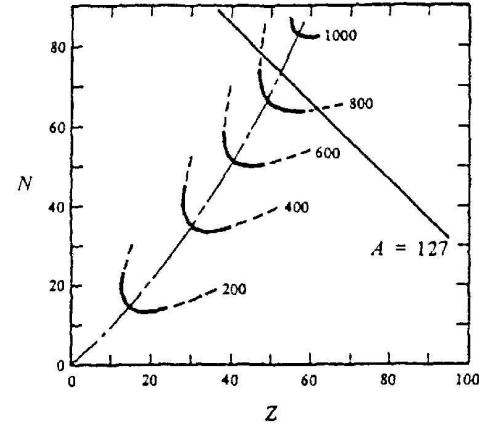
$$B_P \propto \begin{cases} +\delta & \text{für gg-Kerne} \\ 0 & \text{für ug- bzw. gu-Kerne} \\ -\delta & \text{für uu-Kerne} \end{cases} \quad (10.11)$$

Der Überlapp der Wellenfunktionen solcher Nukleonpaare wird allerdings in großen Kernen geringer – schließlich bewegen sich die Nukleonen ja dort frei in einem relativ großen Volumen.

$$B_P = \delta \cdot A^{-1/2} = a_P \cdot A^{-1/2}$$



**Abb. 10.4:** Gesamte Bindungsenergie für  $A = 127$ . Die Bindungsenergie weist ein sehr scharfes Maximum bei  $Z = 53$  auf. Die nicht-exakte Zentrierung von  $Z$  auf die halbe Nukleonenzahl liegt in Coulombabstößungseffekten begründet.



**Abb. 10.5:** Höhenlinien konstanter Gesamtbindungsenergie in der  $N$ - $Z$ -Ebene

Faßt man alle diese Terme zusammen, so ergibt sich schließlich (Abb. 10.6):

$$B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_{\text{Sym}} (Z - N)^2 A^{-1} - a_{\text{Coul}} Z^2 A^{-1/3} \pm B_P \quad (10.12)$$

und damit:

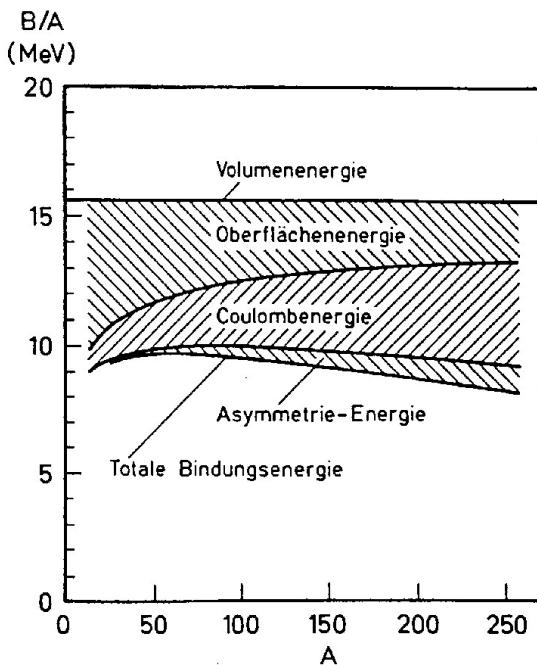
$$\frac{B}{A} = a_V - a_S A^{-1/3} - a_{\text{Sym}} \frac{(Z - N)^2}{A^2} - a_{\text{Coul}} Z^2 A^{-4/3} \pm a_P A^{-3/2} \quad (10.13)$$

mit den Koeffizienten

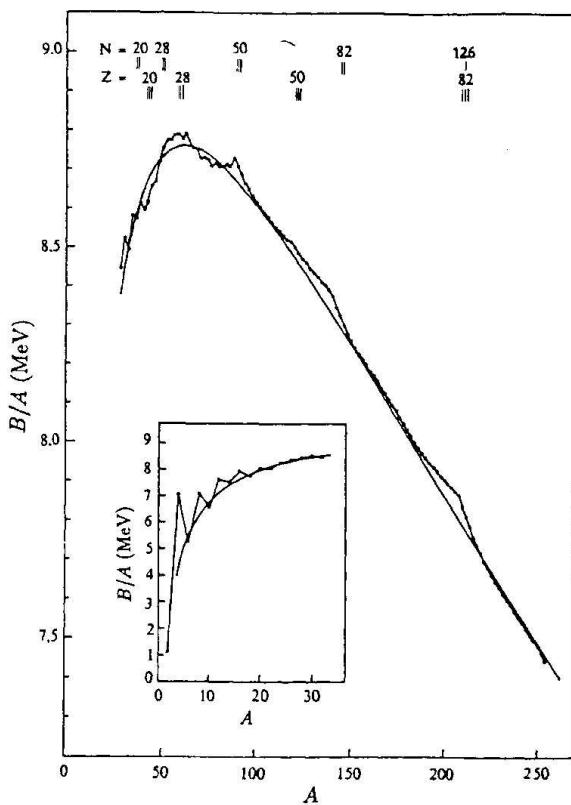
$$\begin{aligned} a_V &= 15.67 \text{ MeV}/c^2 \\ a_S &= 17.23 \text{ MeV}/c^2 \\ a_{\text{Sym}} &= 93.15 \text{ MeV}/c^2 \\ a_{\text{Coul}} &= 0.714 \text{ MeV}/c^2 \\ a_P &= 11.46 \text{ MeV}/c^2 \end{aligned}$$

Dies ist die „berühmte“ *Weizäcker-Massenformel*, welche die beobachteten Bindungsenergien sehr gut (Abb. 10.7) beschreibt. Die Parameter müssen jedoch je nach betrachteter Massenregion etwas optimiert werden. Allerdings können weder Details noch die Struktur der Kerne wiedergegeben werden.

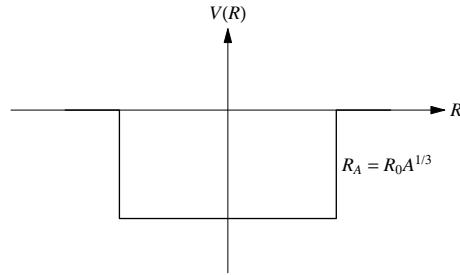
**Bedeutung der Massenformel:**  $a_V$  ist wichtig, da es eng mit den Eigenschaften der Kernenergie verbunden ist. Ferner ist mit (10.13) eine Extrapolation zu sehr schweren Kernen, sogenannten *Superheavies* mit  $Z \geq 118$ , möglich. Bisher erzeugt wurden Kerne bis zu  $Z = 114$ .



**Abb. 10.6:** Die verschiedenen Beiträge zur Bindungsenergie pro Nukleon, aufgetragen gegen die Massenzahl  $A$ . Die waagrechte Linie bei etwa 16 MeV zeigt den Beitrag der Volumenenergie, der durch die Oberflächen-, die Assymetrie- und die Coulombenergie auf die effektive Bindungsenergie von etwa 8 MeV (untere Linie) reduziert wird. Mit wachsendem  $A$  steigen die Beiträge von Assymetrie- und Coulombterm stark an, während der Beitrag des Oberflächenterm kleiner wird (aus [Po96]).



**Abb. 10.7:** Bindungsenergie pro Nukleon von Kernen mit gerader Massenzahl  $A$ . Die durchgezogene Linie entspricht der Weizsäcker-Massenformel (10.13). Kerne mit wenigen Nukleonen zeigen größere Abweichungen vom generellen Trend und müssen einzeln betrachtet werden. Auch bei schweren Kernen beobachtet man generell eine etwas stärkere Bindung pro Nukleon bei gewissen Protonen- und Neutronenzahlen. Auf diese sogenannten „magischen Zahlen“ werden wir in Abschn. 10.4 zu sprechen kommen (aus [Po96]).



**Abb. 10.8:** Im Fermigasmodell zugrundgelegtes Kernpotential. Die Breite des Topfes ist durch die angegebene Relation  $R_A = R_0 A^{1/3}$  bestimmt.

## 10.3 Fermigasmodell

Das Tröpfchenmodell ist stark auf empirische Meßwerte gestützt: Die Parameter der einzelnen Terme stammen vor allem aus Beobachtungen und Messungen. Zudem lässt dieses Modell kaum Einblicke in die Struktur und „Funktionsweise“ des Atomkerns zu. Die Eigenschaften von Kernen sind besser im Einteilchenmodell zu verstehen.

In den vorangegangenen Abschnitten betonten wir bereits mehrmals, ein Kern stelle für seine Konstituenten einen Potentialtopf dar, in welchem diese relativ leicht gebunden sind. Betrachten wir daher den Atomkern als entartetes *Fermigas* mit zwei unabhängigen Teilchensorten (p, n). Da wir es mit Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen zu tun haben, müssen wir der Fermi-Dirac-Statistik sowie dem Pauli-Prinzip Beachtung schenken.

Im Fermigasmodell bewegen sich die Nukleonen frei in einer Kugel mit Radius  $R = R_0 A^{1/3}$  gemäß (3.17’’). Wie in Abb. 10.9 gezeigt, setzen wir wegen der Unabhängigkeit der Protonen und Neutronen zwei getrennte Potentialtopfe an. Beide Töpfe sind a priori identisch, unterscheiden sich aber in der Coulombenergie, da die Protonen sich untereinander abstoßen. Das Potential ist im Kernvolumen konstant und besitzt scharfe Ränder (Abb. 10.8). Für große Abstände gleichen sich beide Potentiale – sie besitzen dieselbe Nulllinie.

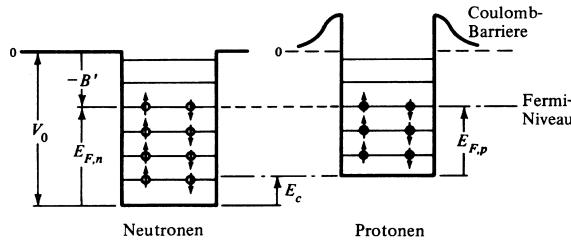
Berechnen wir die Zahl der Zustände eines Nukleons im Volumen  $V$  und im Impulsintervall  $dp$ :

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \cdot V \quad (10.14)$$

Ist der Kern im Grundzustand, bei  $T = 0$ , sind alle Zustände bis zu einem maximalen Impuls  $p_{\max} = p_F$ , dem sogenannten Fermi-Impuls, besetzt. Die Energie des Systems reicht nicht aus, um einzelne Nukleonen anzuregen. (Da somit keine Stöße möglich sind, ist die Wechselwirkung der Nukleonen nur eine kleine Störung.) Durch Integration von (10.14) findet man sofort die Anzahl der Zustände

$$n = \frac{V p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3}. \quad (10.15)$$

Das Pauli-Prinzip sagt uns, daß jeder dieser Zustände durch zwei erlaubte Spinzustände (*spin-up* und *spin-down*) besetzbar ist, nämlich



**Abb. 10.9:** Das Fermigasmodell: Zwei separate Potentialäpfel für Neutronen und Protonen mit Coulombbarriere (aus [Fr91])

$$N = \frac{V(p_F^n)^3}{3\pi^2\hbar^3}, \quad Z = \frac{V(p_F^p)^3}{3\pi^2\hbar^3}, \quad (10.16)$$

sodaß wir zunächst  $N$  Neutronen und  $Z$  Protonen unterbringen. Dabei bedeuten  $p_F^n$  und  $p_F^p$  die Fermi-Impulse der Neutronen und Protonen. Mit  $V$  aus (10.1) gelingt eine Abschätzung für  $p_F$ :

$$p_F = p_F^n = p_F^p = \frac{\hbar}{R_0} \left( \frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \approx 250 \frac{\text{MeV}}{c} \quad (10.17)$$

Dabei setzen wir freilich symmetrische Kerne  $Z = N - A/2$  voraus. Das Ergebnis, ein relativ großer Impuls  $p_F$ , überrascht wenig; Wir finden unsere Annahme von quasi-freier Beweglichkeit der Nukleonen im Kern bestätigt: In Abschn. 5.4 wurden Resultate der quasielastischen Elektronenstreuung am Kern besprochen. Wir bemerkten, daß wir anhand der Breite des Peaks in der quasielastischen Streuung (Abb. 5.25) die freie Bewegung der Nukleonen im Kern sahen. Diese Bewegung entspricht sehr gut dem hier gefundenen Fermi-Impuls. Berechnen wir noch die korrespondierende Fermi-Energie:

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} \approx 33 \text{ MeV} \quad (10.18)$$

Welche weiteren Erkenntnisse erhalten wir aus dem in Abb. 10.9 dargestellten Fermigasmodell?

1.  $B'$  ist die Energiedifferenz zwischen Fermikante und Potentialtopfkante. Mit Hilfe von (10.9) erhalten wir die Potentialtiefe

$$V_0 = E_F + B' \approx 40 \text{ MeV} \quad (10.19)$$

des Nukleons im Kastenpotential. Diese ist unabhängig von  $A$ , und entspricht in etwa der Peakposition in der quasielastischen Elektronenstreuung (Abb. 5.25).

2. Das Potential, welches ein Nukleon sieht, wird von allen anderen Nukleonen im Kern erzeugt. Möchte man mehr Nukleonen im Kernpotential unterbringen, bleibt  $E_F$  konstant, da das Kernvolumen in Gl. (10.1) linear mit  $A$  wächst. Damit steigt die Zustandsdichte, und die Niveauabstände verringern sich. Die Kerndichte bleibt dabei konstant.
3. Die Nukleonen sind nur schwach gebunden ( $E_F \gg B'$ ).

4. Wegen der gegenseitigen Coulombabstößung der Protonen ist der Protonen-Potentialtopf nicht so tief wie der der Neutronen. So ist erklärbar, warum schwere Kerne mehr Neutronen als Protonen besitzen. Die Coulombenergie, im Fermimodell ergibt sich zu:

$$E_{\text{Coul}} = (Z - 1)\alpha \frac{\hbar c}{R} \quad (10.20)$$

Hier betrachten wir das Potential für ein Teilchen, während wir es in (10.10) mit der Energie von  $Z$  Protonen zu tun hatten, und dort dementsprechend einen Faktor  $Z(Z - 1)$  verwendeten.

5. Die Fermikanten von Protonen- und Neutronen-Potentialtopf sind gleich hoch. Dies kann man sich recht einfach plausibel machen. Wären die Ferminiveaus nämlich unterschiedlich, wären ein  $\beta^+$ -Zerfall und damit ein Proton-Neutron-Übergang möglich und zu erwarten. Wenn wir von einer identischen Fermikante, aber einem weniger hohen Topf ausgehen, ergibt sich eine niedrigere mittlere Bindungsenergie für die Protonen. Wie groß ist eigentlich die mittlere kinetische Energie der Nukleonen im Kern? Nun,

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{\int_0^{p_F} E_{\text{kin}} p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{3}{5} \cdot \frac{p_F^2}{2M} \approx 24 \text{ MeV} \quad (10.21)$$

Die totale kinetische Energie im Kern ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}}(N, Z) &= N\langle E_{\text{kin}}^n \rangle + Z\langle E_{\text{kin}}^p \rangle = \frac{3}{10M} (N(p_F^n)^2 + Z(p_F^p)^2) = \\ &\stackrel{(10.17)}{=} \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}} \quad \text{für } E_{\text{Coul}} = 0, \end{aligned} \quad (10.22)$$

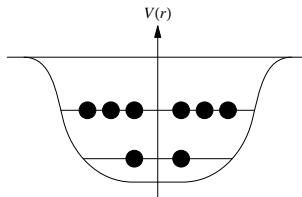
d. h. ohne Coulombenergie hat  $E_{\text{kin}}(N, Z)$  ein Minimum bei  $N = Z$ . Nun erweist es sich als nützlich, nach der Asymmetrie ( $N - Z$ ) zu entwickeln:

$$E_{\text{kin}}(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \left(A + \frac{5(N-Z)^2}{9A} + \dots\right) \quad (10.23)$$

Der Vergleich mit dem Tröpfchenmodell zeigt sehr schöne Übereinstimmungen, u. a. den Volumenterm  $\propto A = N + Z$  und macht beispielsweise den Symmetrieterm  $\propto (N - Z)^2/A$  plausibel. Dieser geht positiv in (10.23) ein, weil wir hier nicht die Gesamtenergie, sondern nur die kinetische Energie betrachten.

Bei schweren Kernen wird der Niveauabstand immer enger. Wegen der Coulombabstößung des Protonentopfes passen mehr Niveaus bis zur Fermikante in den Neutronentopf als in den Protonentopf, weswegen es mit steigender Nukleonenzahl energetisch günstiger wird, Neutronen anstelle von Protonen einzubauen.

Die in Abb. 10.9 gezeigte Coulombbarriere ist auf das Anheben des Protonentopfes zurückzuführen. Neutronen gelangen dementsprechend viel einfacher in den Potentialtopf ( $E_{\text{kin}} \approx 0$ ) als Protonen, die erst die Coulombbarriere überwinden müssen. Obwohl also  $\langle E_{\text{kin}}^p \rangle < \langle E_{\text{kin}}^n \rangle$ , ist eine gewisse kinetische Energie nötig, um ein Proton in den Potentialtopf zu bringen.



**Abb. 10.10:** Im Kernpotential werden die Einteilchenzustände gemäß dem Pauli-Prinzip besetzt

Was haben wir nun aus dem Fermigasmodell gelernt? Nun, Volumen- und Asymmetrieterm sind damit verstanden, ebenso die Favorisierung des Neutroneneinbaus bei schweren Kernen,  $N > Z$ .

## 10.4 Schalenmodell des Atomkerns

Empirische Hinweise deuten auf eine Schalenstruktur des Atomkerns hin, welche wir im Folgenden näher besprechen wollen. Eine Evidenz sind beispielsweise die sogenannten *magischen Zahlen* 2, 8, 20, 28, 50. Kerne, bei denen die Neutronenzahl  $N$  oder die Protonenzahl  $Z$  eine magische Zahl ist, erweisen sich nämlich als besonders stabil (Beispiel:  $\alpha$ -Teilchen). Solche Kerne besitzen eine besonders hohe Separationsenergie für ein einzelnes Nukleon, gleichzeitig ist die Separationsenergie für ein weiteres hinzugefügtes Nukleon wesentlich kleiner. Kurzum, solche Phänomene sind uns aus der Physik der Elektronen in der Atomhülle bekannt: Wir wissen, daß Edelgase mit abgeschlossener Valenzschale sehr große Ionisationsenergien aufweisen, während man bei Alkalimetallen, welche in ihrer Atomhülle gerade ein Elektron zuviel besitzen, sehr kleine Ionisationsenergien feststellt.

Ist nun  $Z$  oder  $N$  eine magische Zahl, so gibt es besonders viele stabile Kerne mit dieser Protonen- bzw. Neutronenzahl. Beispielsweise finden wir 6 Kerne mit  $N = 50$  bzw. 7 Kerne mit  $N = 82$ . Von Sn ( $Z = 50$ ) existieren 10 natürlich vorkommende Isotope.

Außergewöhnlich stabil sind *doppelmagische* Kerne, wie  $^4_2\text{He}$ ,  $^{16}_8\text{O}$ ,  $^{40}_{20}\text{Ca}$ ,  $^{48}_{20}\text{Ca}$  und  $^{208}_{82}\text{Pb}$ . In Analogie zur Atomphysik ist man geneigt zu vermuten, magische Zahlen entsprächen gerade Schalenabschlüssen im Kern.

**Kernpotential:** Die Nukleonen bewegen sich in einem mittleren (sphärischen) Kernpotential, in dem Einteilchenzustände gemäß dem Pauli-Prinzip besetzt werden (Abb. 10.10).

Allerdings liegt beim Kernpotential kein Analogon zum Coulombpotential einer zentralen Ladung wie in der Atomphysik vor, das mittlere Kernpotential  $V(r)$  wird vielmehr selbstkonsistent durch die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung erzeugt. Unter anderem erfuhren wir in Kap. 9 von der relativ kurzen Reichweite dieser Wechselwirkung: Wir können annehmen, das Kernpotential ist proportional zur Nukleonendichte  $\rho(r)$ :

$$V(r) \propto \rho(r) .$$

### 10.4.1 Hamilton-Operator des Kerns

Allgemein gilt für einen Hamiltonoperator:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^A \hat{T}_N(i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{NN}(i,j)$$

Nun führen wir ein mittleres Potential ein. Es gilt:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \Delta\hat{H}_{\text{Rest}} \quad \text{mit } \hat{H}_0 = \sum_{i=1}^A (\hat{T}(i) + U(i)) \quad \text{und } \Delta\hat{H}_{\text{Rest}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{NN}(i,j) - \sum_i U(i)$$

Dabei ist  $\hat{H}_0$  der Hamiltonoperator des Schalenmodells. Nun wird über Hartree-Fock-Verfahren  $U(i)$  so optimiert, dass  $\langle \Delta\hat{H}_{\text{Rest}} \rangle$  möglichst klein wird.

Gesucht sind nun die Lösungen des Schalenmodell-Hamiltonoperators  $\hat{H}_0$  mit

$$\hat{H}_0 \Psi(1, \dots, A) = E \Psi(1, \dots, A)$$

Das Pauliprinzip verlangt die totale Asymmetrie der Wellenfunktion unter Vertauschung zweier Teilchen:

$$\Psi(1, \dots, i, \dots, j, \dots, A) = -\Psi(1, \dots, j, \dots, i, \dots, A)$$

Wir nehmen nun an, dass sich  $\hat{H}_0$  aus einzelnen Einteilchen-Hamiltonoperatoren zusammensetzt:

$$\hat{H}_0 = \sum_i \hat{h}_0(i) \quad \text{mit } \hat{h}_0 = \frac{\vec{p}^2}{2M} + U(\vec{r}) = -\frac{\vec{\nabla}^2}{2M} + U(\vec{r})$$

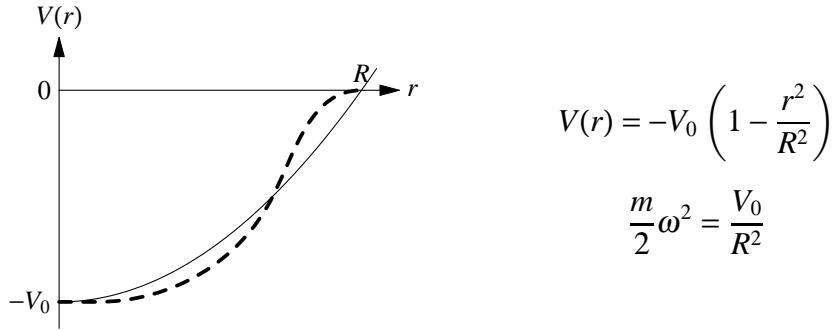
Für die Einteilchenenergien gilt:  $\hat{h}_0 \Psi_\alpha(\vec{r}) = \varepsilon_\alpha \Psi_\alpha(\vec{r})$ , womit wir schließlich die Gesamtwellenfunktion aus der Slaterdeterminante erhalten:

$$\Psi(1, \dots, A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \det |\Psi_{\alpha_i}(\vec{r}_j)| \quad E = \varepsilon_{\alpha_1} + \varepsilon_{\alpha_2} + \dots + \varepsilon_{\alpha_A} .$$

### 10.4.2 Phänomenologisches Kernpotential

Wir erhalten nun eine Einteilchen-Schrödinger-Gleichung für  $\hat{h}_0$ :

$$\hat{h}_0 \Phi(\vec{r}) = \varepsilon \Phi(\vec{r}) = \left( -\frac{\vec{\nabla}^2}{2M} + U(\vec{r}) \right) \Phi(\vec{r})$$



**Abb. 10.11:** Potential im Harmonischen Oszillatoren (ausgezogene Linie) und Woods-Saxon-Potential (gestrichelte Linie) im Vergleich

Mit dem bereits erwähnten Ansatz  $U(r) \propto \rho(r)$  lassen sich nun die Wellenfunktionen der Orbitale gemäß

$$\Phi(\vec{r}) = R_{nl}(r) \cdot Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$$

separieren. Hierbei ist  $n-1 = 0, 1, 2, 3, \dots$  die Anzahl der Knoten der Radialwellenfunktion,  $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$  stellt den Bahndrehimpuls dar. Die Entartung von  $E$  ist  $2(2\ell+1)$ , wobei der Vorfaktor 2 den zwei, nach dem Pauli-Prinzip möglichen, entarteten Spineinstellungen Rechnung trägt.

Berücksichtigt man nun auch noch den Spin, so ergibt sich mit dem Gesamtdrehimpuls  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$  die Gesamtwellenfunktion für ein Teilchen zu:

$$\psi_{nljm}(\vec{r}) = [\Phi_{nl}(\vec{r}) + \chi_{1/2}]_{jm} = R_{nl}(r) \sum_{m_l m_s} \left( l m_l \frac{1}{2} \middle| jm \right) Y_{lm_l}(\hat{r}) \chi_{1/2 m_s}$$

Welche Potentiale spannt man nun vor den Wagen, um die Schalenstruktur und insbesondere die empirisch evidenten magischen Zahlen zu erklären?

**Harmonisches Oszillatorenpotential.** Beim analytisch lösbar harmonischen Oszillatoren  $V(r) = -V_0(1 - \frac{r^2}{R^2})$ , wobei  $\frac{m}{2} \omega^2 = \frac{V_0}{R^2}$  (durchgezogene Linie in Abb. 10.11) gilt bekanntermaßen:

$$E_{nl} = -V_0 + \hbar \omega \left( \underbrace{n_x + n_y + n_z}_{2(n-1)+\ell} + \frac{3}{2} \right) = -V_0 + \hbar \omega \left( 2n + \ell - \frac{1}{2} \right)$$

Man beachte die im Dreidimensionalen natürlich dreifach vorhandene Nullpunktsenergie. Mit dem Modell des harmonischen Oszillators sind die ersten drei Zustände sofort erklärbar, danach allerdings gibt es Abweichungen.

**Woods-Saxon-Potential.** Realistischer nähert bereits ein Potential der Form

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)},$$

das Woods-Saxon-Potential, die Kernniveaus an. Hier bedeuten  $V_0 \approx 50\text{MeV}$  die Potentialtiefe,  $R = r_0 A^{1/3}$  den Kernradius und  $a \approx 0,65\text{fm}$  ist ein Oberflächenparameter, der die Randunschärfe angibt. Man erhält zunächst eine Aufspaltung im harmonischen Potential noch entarteter Niveaus; dies ist bei Wegnahme von Symmetrie auch nicht weiter verwunderlich. Die magischen Zahlen ändern sich beim Übergang vom harmonischen zum Woods-Saxon-Potential allerdings nicht. Wie auch immer man sich beim Drehen an Potentialformen anstellt, mehr als die Erklärung der ersten drei magischen Zahlen wird man nicht zustande bringen.

### 10.4.3 Spin-Bahn-Kopplung

Die grundlegende, neue Idee zum Verständnis der Schalenstruktur in Kernen entstand vor etwa 50 Jahren: Göppert-Mayer, Jensen (beide Nobelpreis<sup>3</sup> 1963), Haxel und Suess vermuteten ganz richtig, die Wechselwirkungsenergie zwischen Spin und Bahndrehimpuls der Nukleonen spielt eine entscheidende Rolle. Aus der schon des öfteren bemühten Analogie zur Atomphysik wissen wir, daß dort die Spin-Bahn-Wechselwirkung zur Feinstrukturaufspaltung führt (Abb. 10.13).

Dementsprechend setzt sich das mittlere Kernpotential aus einem Zentralpotential und einem auf Spin-Bahn-Kopplung zurückzuführenden Potential zusammen:

$$V_{\text{Kern}}(r) = V_C(r) + V_{\ell s}(r) \vec{\ell} \cdot \vec{s}$$

Der Gesamtdrehimpuls beträgt

$$\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$$

mit  $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ . Die Zustände werden als  $n\ell_j$  angeschrieben, und ihre Entartung beträgt  $2j+1$ .

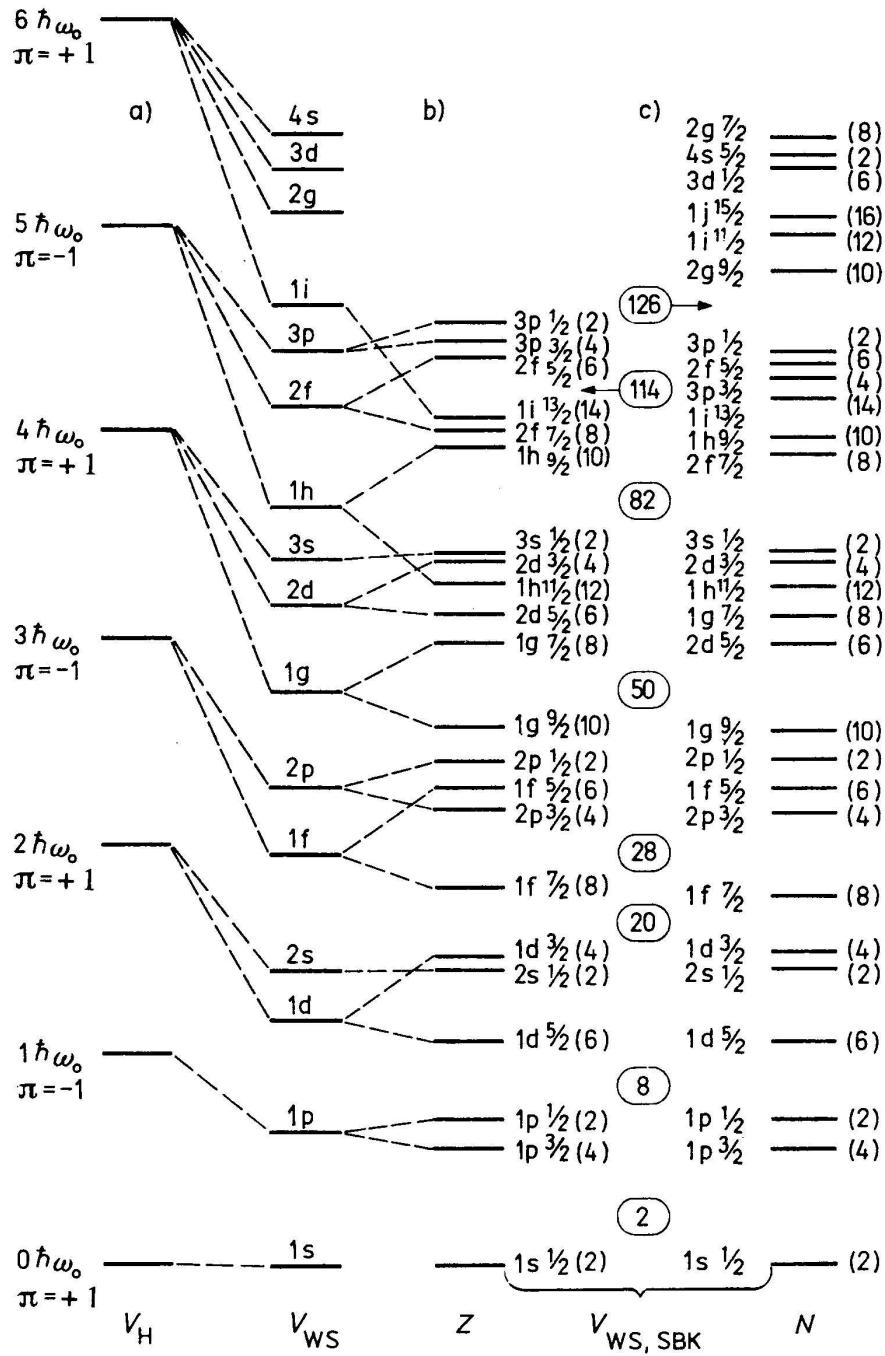
$$\vec{\ell} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2} [\vec{j}^2 - \vec{\ell}^2 - \vec{s}^2] = \frac{1}{2} \left[ j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right] = \begin{cases} \ell/2 & \text{für } j = \ell + 1/2 \\ -(\ell+1)/2 & \text{für } j = \ell - 1/2 \end{cases}$$

Somit ergibt sich eine Spin-Bahn-Aufspaltung von  $\Delta E_{\ell s} = (l + 1/2)\langle V_{\ell s}(r) \rangle$ .

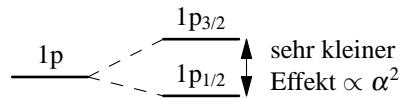
Im Atomkern sind die Verhältnisse gerade umgekehrt (bezüglich  $\vec{\ell} \cdot \vec{s}$ ) zu denen in der Atomhülle:

- Ein Zustand mit  $j = \ell + 1/2$  wird abgesenkt, ein Zustand mit  $j = \ell - 1/2$  wird angehoben; d. h.  $\langle V_{\ell s}(r) \rangle < 0$ .
- Die Spin-Bahn-Aufspaltung ist groß, so groß, daß sie die Niveauparziale im Kern wesentlich beeinflußt. Beispielsweise wird das  $1f_{7/2}$ -Niveau stark abgesenkt, was die magische Zahl 28 erklärt.

<sup>3</sup><http://www.nobel.se/laureates/physics-1963.html>



**Abb. 10.12:** Zustandsschema im Schalenmodell (a) für isotropes harmonisches Oszillatorenpotential  $V_H$  (b) für Woods-Saxon-Potential  $V_{WS}$  (c) mit Spin-Bahn-Kopplung und Coulomb-Korrektur  $V_{WS,SBK}$ . Angegeben sind jeweils auch die magischen Zahlen, die sich bei Besetzung bis zum jeweiligen Niveau ergeben (aus [Mu95]).



**Abb. 10.13:** Feinstrukturaufspaltung in der Atomphysik

**Diskussion der Spin-Bahn-Wechselwirkung in der Kernphysik:** Zunächst stellen wir einen Vergleich mit der schon bekannten Spin-Bahn-Wechselwirkung aus der Atomphysik an. Dort war die Aufspaltung ein sehr kleiner Effekt. Dieser kam durch die “Thomas-Präzession“ des Elektrons im Coulombfeld des Atomkerns zustande. Das Potential war:

$$U_{ls}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{2m_e^2 r} \frac{dV_{coul}(r)}{dr}}_{V_{ls}(r)} \vec{l} \cdot \vec{s}.$$

Mit dem bekanntem Coulombpotential  $V_{Coul}(r) = -Ze^2/(4\pi r)$  ergibt sich:

$$U_{ls}(\vec{r}) = \frac{Ze^2}{8\pi m_e^2 r^2} \vec{l} \cdot \vec{s}$$

**Empirische Stärke von  $U_{ls}$  in Kernen:** Wir parametrisieren nun das Zentralpotential im Kern durch:

$$V(r) = -V_0 f(r) \quad \text{mit z.B. } f(r) = \left[ 1 + \exp \left( \frac{r-R}{a} \right) \right]^{-1}$$

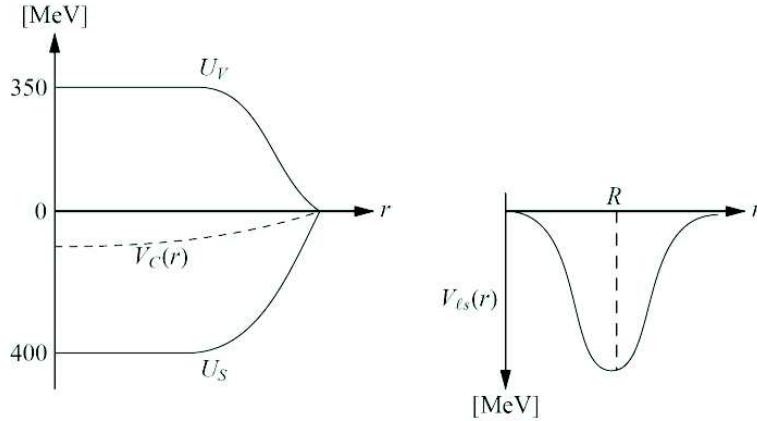
Mit dem eben bestimmten Spin-Bahn-Potential  $U_{ls}(\vec{r}) = V_{ls}^0 \frac{r_0^2}{r} df(r)/dr$  und den bekannten Werten von  $V_0 \approx 50\text{MeV}$  und  $r_0 = 1,25\text{fm}$  ergibt sich für  $V_{ls}^0$  ein enorm großer Wert von  $V_{ls}^0 \approx 20\text{MeV}!$

**Versuch mit der Thomas-Präzession:** Mit dem Ansatz

$$U_{ls}(\vec{r}) = \frac{1}{2M_N^2 r} \frac{dV(r)}{dr} \vec{l} \cdot \vec{s} = -\frac{V_0}{2M_N^2 r} \frac{df(r)}{dr} \vec{l} \cdot \vec{s}$$

ergibt sich der Wert  $V_{ls}^0 = -\frac{V_0}{2(M_N r)^2} \approx -1\text{MeV}$ . Dieser Wert hat das falsche Vorzeichen und ist etwa um den Faktor 20 zu klein!

Wie kann also eine relativistische Korrektur so groß sein?

Abb. 10.14: Veranschaulichung von  $U_V$ ,  $U_S$  sowie  $V_{ls}$ 

#### 10.4.4 Relativistisches (Dirac-)Schalenmodell

Diese Umkehrung und die große Aufspaltung lassen sich wie folgt erklären. Die relativistischen Dirac-Nukleonen bewegen sich in starken mittleren Skalar- und Vektorfeldern. Gehen wir von der Dirac-Gleichung aus,

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - \gamma^0 U_V(r) - M - U_S(r)] \psi(x) = 0$$

mit der nichtrelativistischen Reduktion

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}, t) &= e^{-iEt} \begin{pmatrix} \varphi(\vec{r}) \\ \chi(\vec{r}) \end{pmatrix} \quad E = M + E', \quad E' \ll M \\ \begin{pmatrix} E - U_V - M - U_S & -i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \\ i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} & -E + U_V - M - U_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Entwicklung von  $\chi$  nach Potenzen von  $1/M$  ausgedrückt durch  $\varphi$  liefert:

$$\begin{aligned} (E' - U_S - U_V)\varphi &= i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\chi \\ i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\varphi &= (2M + E' - U_V + U_S)\chi \\ [E' - (U_S + U_V)]\varphi &= -\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \left[ \left( \frac{1}{2M} + \frac{U_V - U_S - E'}{4M^2} \right) \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\varphi \right] \\ &= -\frac{\vec{\nabla}^2}{2M}\varphi + \vec{\sigma} \cdot \vec{r} \frac{U'_S - U'_V}{4M^2 r} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\varphi + \dots \end{aligned}$$

und erhalten mit  $\vec{\sigma}\vec{r} \cdot \vec{\sigma}\vec{\nabla} = \vec{r} \cdot \vec{\nabla} + \underbrace{i\vec{\sigma} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla})}_{-2\vec{J}_S}$  die äquivalente Schrödinger-Gleichung für die obere Komponente der Dirac-Wellenfunktion  $\varphi(\vec{r})$ :

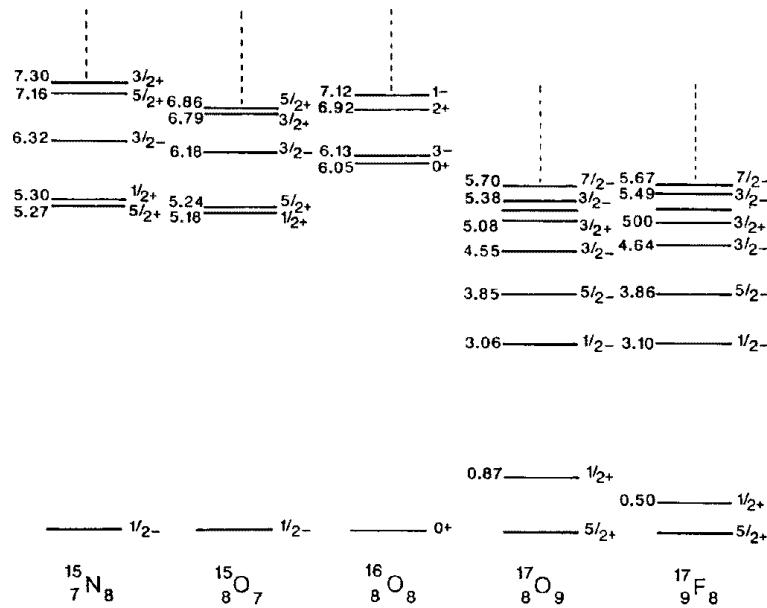
$$\left[ -\frac{\vec{\nabla}^2}{2M} + V_{\text{central}}(r) + V_{ls}(r) + \dots \right] \varphi(\vec{r}) = E' \varphi(\vec{r})$$

$$V_{\text{centr}}(r) = U_V(r) + U_S(r)$$

$$V_{ls}(r) = \frac{1}{2M^2 r} \frac{d}{dr} [U_V(r) - U_S(r)]$$

### 10.4.5 Einfache Vorhersagen des Schalenmodells

Wir nehmen ein zentralesymmetrisches mittleres Potential sowie vernachlässigbare Restwechselwirkungen der Nukleonen an. Das Schalenmodell wird folglich besonders gut anwendbar sein auf sphärische Kerne in der Nähe von Schalenabschlüssen. Wir werden sehen, daß Ein-Teilchen- und Ein-Loch-Zustände wesentliche Kerneigenschaften erklären können (Tab. 10.1).



**Tab. 10.1:** Einfache Vorhersagen des Schalenmodells: Ein-Teilchen- und Ein-Loch-Zustände können wesentliche Kerneigenschaften erklären. Im  $^{16}\text{O}$  (Mitte) koppeln die Drehimpulse zu Null, Neutron- und Protonenschalen sind jeweils vollbesetzt. Die rechts und links aufgetragenen Kerne zeichnen sich jeweils durch Proton-/Neutronloch bzw. zusätzliches Proton/Neutron, sogenannte Leuchtnukleonen, aus. Ihre Quantenzahlen werden somit ausschließlich durch das Loch bzw. Leuchtnukleon bestimmt. In Analogie zu den Alkalimetallen in der Atomphysik sind die Leuchtnukleonen von  $^{17}\text{O}$  bzw.  $^{17}\text{F}$  (rechts) relativ leicht aus dem Kernverband entfernbare.

**Magnetische Momente:** Die Spins und Bahndrehimpulse der Nukleonen in einer vollgefüllten  $j$ -Schale koppeln zu Null. Drehimpuls und magnetisches Moment des Kerns werden dann einzigt vom *Leuchtnukleon* (bzw. vom Nukleon-Loch) bestimmt.

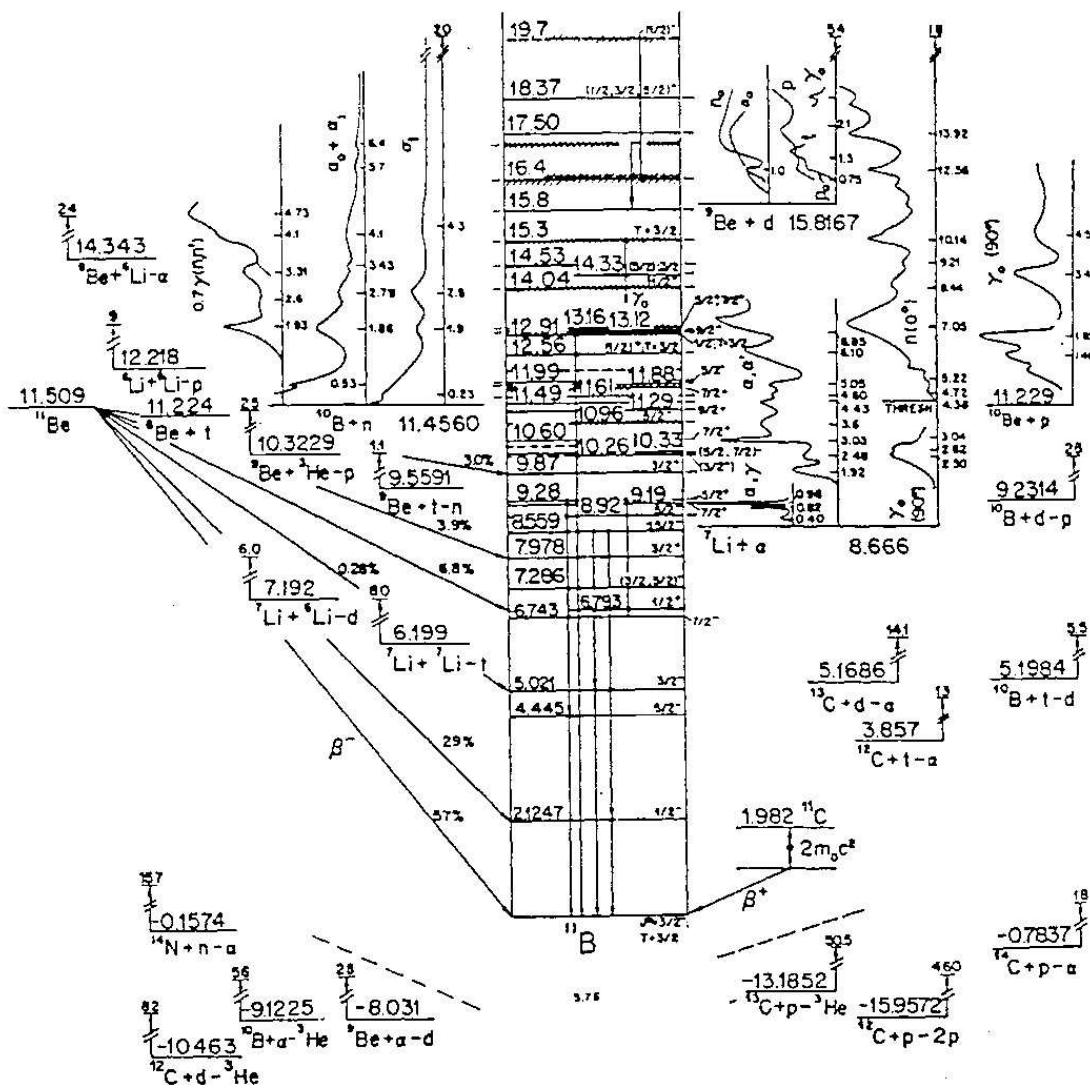


Abb. 10.15: Tatsächliches Termschema von  $^{11}\text{B}$ , wie man es in der Literatur findet (aus [Aj75]).

$$\frac{\hat{\vec{\mu}}_{\text{Kern}}}{\mu_N} = g_\ell \vec{\ell} + g_s \vec{s} \quad (\text{Operator}) \quad \text{mit } \mu_N = \frac{e\hbar}{2M_p c}$$

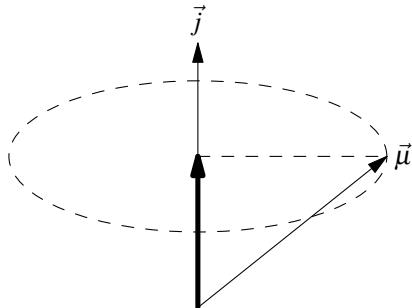
mit den gyromagnetischen Faktoren:

$$g_\ell = \begin{cases} 1 & \text{für Protonen} \\ 0 & \text{für Neutronen} \end{cases}$$

$$g_s = \begin{cases} 5.58 & \text{für Protonen} \\ -3.82 & \text{für Neutronen} \end{cases}$$

Das magnetische Moment des Kerns ist folgenden Erwartungswert gegeben:

$$\mu_{\text{Kern}} = \langle j, m=j | \hat{\mu}_{\text{Kern}}^z | j, m=j \rangle = g_{\text{Kern}} \langle jj | j^z | jj \rangle \mu_N = g_{\text{Kern}} \mu_N \cdot j$$



Mit Hilfe des Vektorprojektions-Theorems berechnen wir den  $g$ -Faktor des Kerns:

$$g_{\text{Kern}} = \frac{\langle jj | \hat{\mu}_{\text{Kern}} \cdot j | jj \rangle}{\underbrace{\langle jj | j^2 | jj \rangle}_{j(j+1)}}$$

Mit folgenden Beziehungen, die man wegen  $\vec{s}^2 = (\vec{j} - \vec{\ell})^2$  einsehen kann,

$$2\vec{\ell} \cdot \vec{j} = \vec{j}^2 + \vec{\ell}^2 - \vec{s}^2$$

$$2\vec{s} \cdot \vec{j} = \vec{j}^2 + \vec{s}^2 - \vec{\ell}^2$$

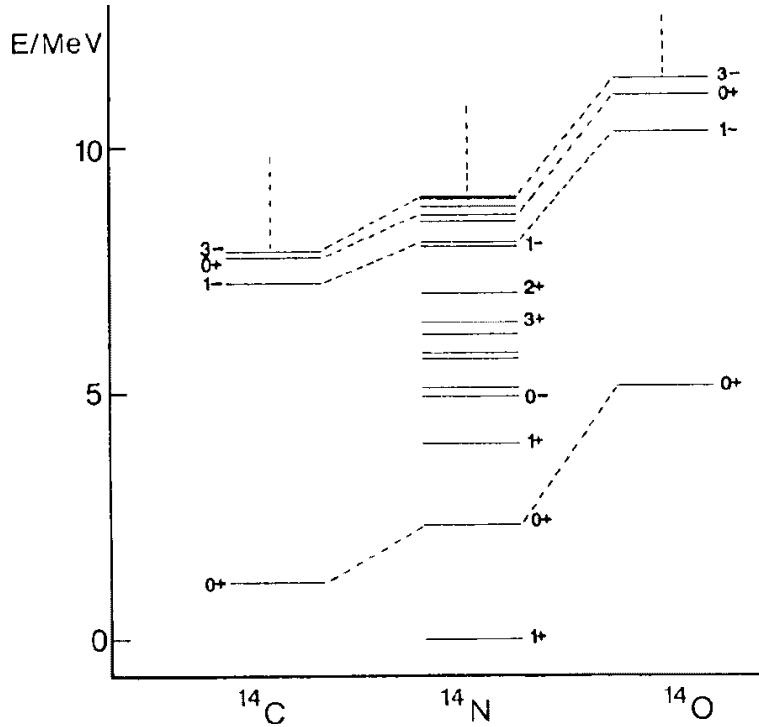
erhält man:

$$g_{\text{Kern}} = \frac{1}{2}(g_\ell + g_s) + \frac{1}{2}(g_\ell - g_s) \frac{\ell(\ell+1) - s(s+1)}{j(j+1)}$$

Der letzte Faktor lautet explizit:

$$j = \ell + \frac{1}{2} : \quad \frac{\ell(\ell+1) - \frac{3}{4}}{(\ell + \frac{1}{2})(\ell + \frac{3}{2})} = 1 - \frac{2}{2\ell+1}$$

$$j = \ell - \frac{1}{2} : \quad \frac{\ell(\ell+1) - \frac{3}{4}}{(\ell - \frac{1}{2})(\ell + \frac{1}{2})} = 1 + \frac{2}{2\ell+1}$$



**Abb. 10.16:** Niveauschema der isobaren Analogzustände bei  $^{14}_6\text{C}$ ,  $^{14}_7\text{N}$  und  $^{14}_8\text{O}$ . Angegeben ist zu jedem Niveau seine Spin-Parität  $J^P$  (aus [Po96])

$$g_{\text{Kern}} = g_\ell \pm \frac{g_s - g_\ell}{2\ell + 1} \quad \text{für } j = \ell \pm \frac{1}{2}$$

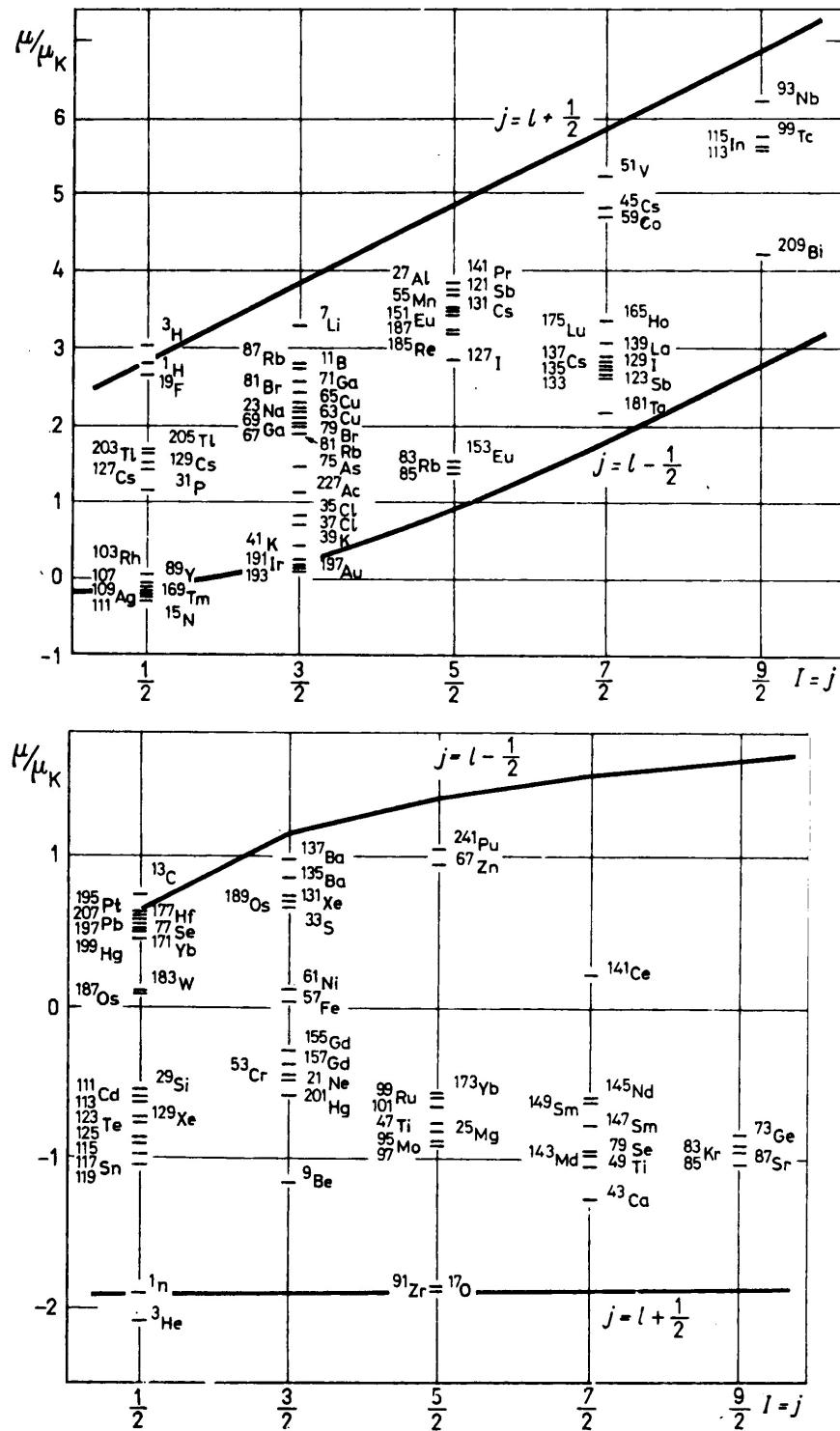
So ergeben sich die sogenannten *Schmidtschen Linien*, wie sie in Abb. 10.17 gezeigt sind.

Die folgende Aufstellung gibt die vom Schalenmodell vorausgesagten und die entsprechenden experimentell bestimmten Werte für  $|\vec{\mu}_{\text{Kern}}|/\mu_N = g_{\text{Kern}} \cdot j$  an. Diese sind im jeweiligen Einteilchenzustand erklärt: Das Schalenmodell liefert für Einteilchenzustände (also für ein Teilchen außerhalb abgeschlossener Schalen) vernünftige Vorhersagen.

Kern	Grundzustand	$J^P$	Schalenmodell	experimentell
$^{15}\text{N}$	p-1p $^{-1}_{1/2}$	$1/2^-$	-0.264	-0.283
$^{15}\text{O}$	n-1p $^{-1}_{1/2}$	$1/2^-$	+0.638	+0.719
$^{17}\text{O}$	n-1d $_{5/2}$	$5/2^+$	+1.913	+1.894
$^{17}\text{F}$	p-1d $_{5/2}$	$5/2^+$	+4.722	+4.793

Abweichungen ergeben sich bei schwereren Kernen mit mehr Nukleonen bzw. Löchern außerhalb geschlossener Schalen: Der Rumpf wird dort durch die Valenz-Nukleonen polarisiert.

## 10.4 Schalenmodell des Atomkerns



**Abb. 10.17:** Schmidtsche Linien und magnetische Dipolmomente. Oben: für Kerne mit ungerader Protonenzahl  $Z$ , unten: für Kerne mit ungerader Neutronenzahl  $N$  (aus [Mu95]).

### 10.4.6 Isospin von Atomkernen

Für Proton und Neutron wurden im Isospin-Formalismus folgende Quantenzahlen eingeführt:

$$\begin{array}{ll} \text{Proton:} & T = \frac{1}{2} \quad T_3 = +\frac{1}{2} \\ \text{Neutron:} & T = \frac{1}{2} \quad T_3 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Für einen Kern mit  $Z$  Protonen und  $N$  Neutronen (somit Massenzahl  $A = Z+N$ ) ergibt sich also:

$$T_3 = \frac{1}{2}(Z - N)$$

Was ist der Gesamt-Isospin  $T$  des Kerns?

$$\frac{|Z - N|}{2} \leq T \leq \frac{A}{2} = \frac{Z + N}{2}$$

Ein kleinerer Wert als  $|Z - N|/2$  ist nicht möglich, da  $T_3 = \frac{1}{2}(Z - N)$  vorkommt, ein größerer als  $(Z+N)/2$  ebenfalls nicht, da dieser Maximalwert einfach  $A \cdot \frac{1}{2}$  (Isospin des Nukleons) entspricht.

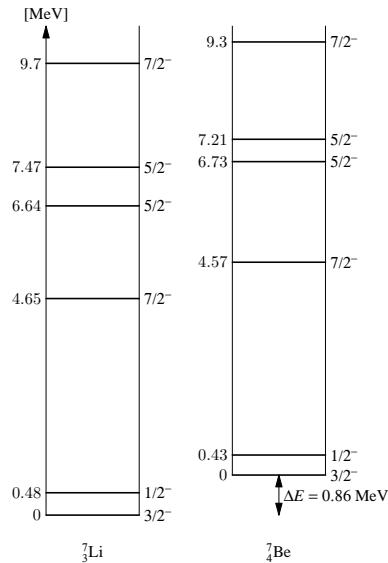
Beim Abschalten der elektromagnetischen Coulombwechselwirkung und des Proton-Neutron-Massenunterschiedes von 1.3 MeV wird die Isospinsymmetrie exakt. Ein Kernzustand (Energieniveau) mit Gesamt-Isospin  $T$  ist in diesem Fall  $(2T+1)$ -fach entartet und sollte in isobaren Nachbarkernen ( $A = N+Z$  gleich,  $Z-N$  verschieden) auftreten. Solche Isospinmultipletts nennt man *isobare Analogzustände*. Ein Beispiel ist in Abb. 10.16 gezeigt. Korrekturen ergeben sich wegen des tatsächlich vorhandenen Massenunterschieds  $\Delta M = N_n - M_p = 1.293$  MeV sowie wegen der Coulombenergie der Protonen,

$$\Delta E_{\text{Coulomb}} \simeq \frac{3Z^2 e^2}{5R},$$

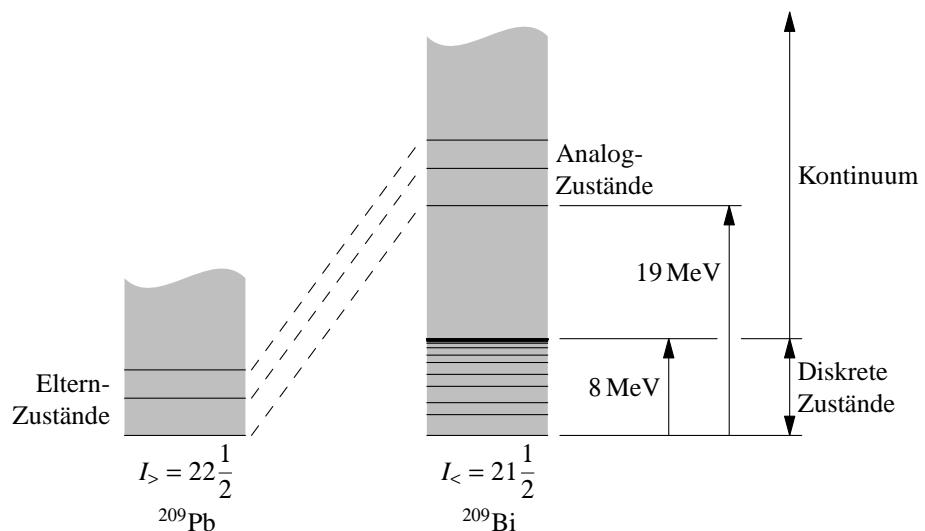
wenn man von einer homogen geladenen Kugel ausgeht. Betrachten wir die isobaren Analogzustände in Abb. 10.16 etwas eingehender: Der Grundzustand von  $^{14}_7\text{N}$  mit  $J^P = 1^+$  ist ein Isospinsinglett ( $T = 0$ ). Falls dem nicht so wäre, gäbe es in  $^{14}_6\text{C}$  einen aufgrund der geringeren Coulombenergie tieferliegenden  $1^+$ -Zustand.  $^{14}_6\text{C}$  und  $^{14}_8\text{O}$  haben  $T_3 = -1$  und  $T_3 = +1$ . Ihre  $0^+$ -Grundzustände bilden zusammen mit dem ersten angeregten Zustand in  $^{14}_7\text{N}$  ( $T_3 = 0$ ) ein Isospintriplett. Betrachten wir als anderes Beispiel Abb. 10.18. Der Grundzustand und die ersten fünf angeregten Zustände von  $^7\text{Li}$  und  $^7\text{Be}$  bilden Isospindoubletts. Bei schweren Kernen liegen solche bzgl. Isospin entarteten Zustände oft im Kontinuum. Man spricht dann von *isobaren Analogresonanzen* (Abb. 10.19).

## Übungen zu Kapitel 10

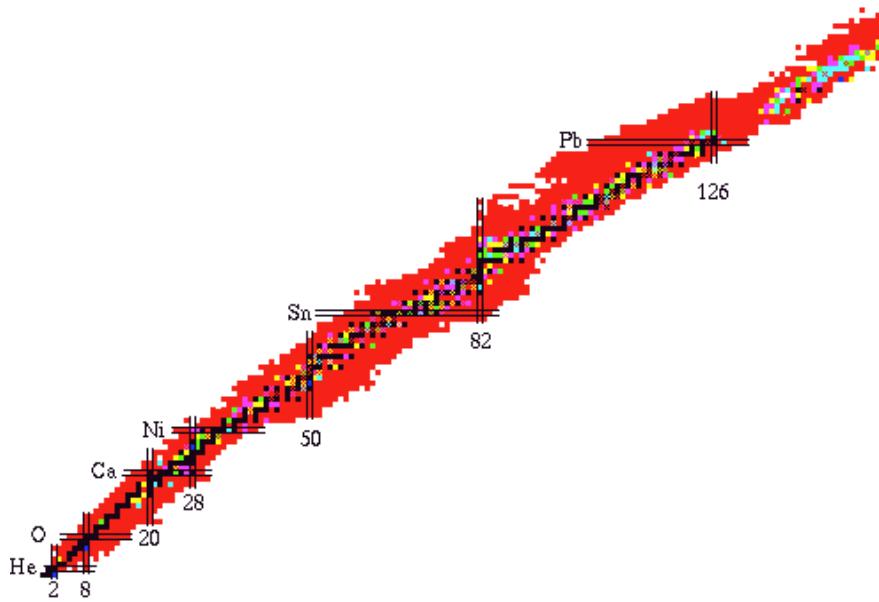
**Übung 10.1: Fermigasmodell.** Nehmen Sie an, daß die Nukleonen im Kern nicht untereinander wechselwirken. Die Nukleonen seien freie Teilchen in einem Rechteckpotential von der Form eines Würfels mit der Kantenlänge  $a$ .



**Abb. 10.18:** Niveauschemata von  ${}^7_3\text{Li}$  und  ${}^7_4\text{Be}$



**Abb. 10.19:** Isobare Analogresonanzen bei schweren Kernen: Energiediagramm für die Isobaren ( $Z, N$ ) und ( $Z + 1, N - 1$ ) bei  $A = 209, Z = 82$



**Abb. 10.20:** In der Nuklidkarte sind alle bekannten Nuklide in der  $Z$ - $N$ -Ebene geplottet.

- a) Lösen Sie die dazugehörige Schrödinger-Gleichung für ein einzelnes Teilchen unter der Annahme, daß sich die Teilchen nur innerhalb des Kerns befinden. Wie lauten die möglichen Energien eines Teilchens?
- b) Geben Sie die Zustandsdichte für ein freies Teilchen an, d. h. die Anzahl der möglichen Zustände pro Energieintervall.
- c) Betrachten Sie den Kern als eine Ansammlung unabhängiger Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen im Potentialtopf.  
Die Fermienergie  $E_F$  ist definiert als Grenzenergie des Kerngrundzustands bis zu der alle Zustände gefüllt sind. Berechnen Sie die Fermienergie in Abhängigkeit von der Teilchenzahldichte, d. h. der Anzahl der Teilchen pro Kernvolumen.

**Übung 10.2: Weizsäckersche Massenformel.** Im Jahre 1935 stellte C. F. v. Weizsäcker eine phänomenologische Formel (10.12) zur Beschreibung der Kernmassen auf, die empirische Zusammenhänge bei der Beobachtung von Isotopen wiedergibt.

- a) Betrachten Sie Kerne mit gleicher Massenzahl  $A$  (Isobare) und geben Sie die Massenformel reduziert auf die Abhängigkeit von  $Z$  an. Skizzieren Sie den Verlauf der Bindungsenergie in Abhängigkeit von  $Z$  für die Isobaren der Massenzahlen  $A = 101, 40$  und  $76$  und geben Sie an welche Kerne stabil sind.
- b) Wann ist ein  $\beta^+$ -Zerfall, d. h. der Zerfall eines Protons in ein Neutron im Kernmedium, möglich? Unter welchen Bedingungen kann es zum Einfang eines Hüllenelektrons durch ein Proton kommen? Beschreiben Sie den Zusammenhang der Energien der beteiligten Teilchen.

- c) Abb. 10.20 zeigt eine Karte aller bekannten Nuklide. Schwarze Punkte entsprechen stabilen Kernen, dunkelgraue instabilen und hellgraue Kernen mit einer meßbaren Lebensdauer im Bereich von Sekunden bis Jahren. In der Nuklidkarte ist  $Z$  nach oben und  $N$  nach rechts aufgetragen. Versuchen Sie, sich einige der Terme der Massenformel anhand der Eigenschaften der Nuklidkarte zu verdeutlichen. Finden Sie Diskrepanzen zwischen der Massenformel und den realen Kernen.

**Übung 10.3: Schalenmodell der Kerne.**

- a) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Neutronenschalen  $1p_{1/2}$  und  $1d_{5/2}$  für Kerne der Massenzahl  $A \approx 16$  aus den totalen Bindungsenergien der Atome  $^{15}\text{O}$  (111.9556 MeV),  $^{16}\text{O}$  (127.6193 MeV) und  $^{17}\text{O}$  (131.7627 MeV).
- b) Wie vereinbart sich das mit der Energie des ersten angeregten Zustandes von  $^{16}\text{O}$ ?
- c) Welche Information erhält man aus der Energie des entsprechenden Zustandes von  $^{17}\text{O}$  (Tab. 10.1 auf Seite 451)?
- d) Wie interpretieren Sie den Unterschied in der totalen Bindungsenergie zwischen  $^{17}\text{O}$  und  $^{17}\text{F}$  (128.2196 MeV)? Schätzen Sie den Radius dieser Kerne ab.
- e) Der erste angeregte Zustand in  $^{17}\text{F}$  liegt niedriger als der entsprechende Zustand in  $^{17}\text{O}$ . Eine mögliche Erklärung dafür ist, daß das ungepaarte Nukleon im angeregten Zustand eine andere räumliche Ausdehnung (größer? kleiner?) hat als im Grundzustand. Was erwarten Sie aus den Quantenzahlen?

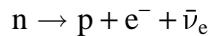


# Kapitel 11

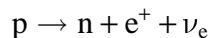
## Zerfälle

Wie Abb. 10.3 zeigt, existiert nur ein schmales Band von stabilen Kernen in der  $Z$ - $N$ -Ebene; außerhalb dessen sprechen wir von instabilen Kernen, die auf Grund verschiedener Mechanismen zerfallen. Welche dieser Mechanismen zur Anwendung kommen, hängt dabei maßgeblich ab von der Konfiguration des Gesamtsystems im Vergleich zum Optimum der Bindungsenergie. Betrachten wir nun also verschiedene Zerfallsarten.

**$\beta$ -Zerfall.** Besteht in einem Kern Neutronenüberschüß, kann es günstig sein, Neutronen in Protonen zu „verwandeln“, und zwar durch den  $\beta^-$ -Zerfall:



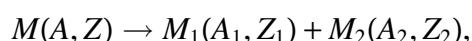
Genauso besteht die Möglichkeit, daß ein Kern zuviele Protonen besitzt. Hier wird ein Austausch von Protonen in Neutronen favorisiert:



Dieser Zerfall kann nur im Kern stattfinden, da ja Energieerhaltung gewährleistet sein muß ( $m_p < m_n$ ). Die Massendifferenz muß durch einen entsprechenden Gewinn an Bindungsenergie aufgebracht werden. Der freie Protonenzerfall besitzt eine Halbwertzeit von mindestens  $\tau = 10^{33}$  a, ist bisher noch nicht beobachtet worden, und liegt im übrigen auch jenseits des Standardmodells.



**$\alpha$ -Zerfall.** Bei schweren Kernen nimmt die Coulombwechselwirkung zu und mithin die Bindungsenergie ab. Möglich sind hier Reaktionen der Art



solange die Energieerhaltung vermöge  $M(A, Z) > M_1(A_1, Z_1) + M_2(A - A_1, Z - Z_1)$  gewährleistet ist. Ein beliebtes Spaltprodukt ist  ${}^4\text{He}$  wegen dessen besonders hoher Bindungsenergie (Abb. 10.2). Diesen Zerfall nennt man  $\alpha$ -Zerfall, wobei das  $\alpha$ -Teilchen genau dem Helium-4-Kern entspricht.

**Spontane Spaltung.** Zerfällt der Kern in zwei etwa gleich große Bruchstücke, so spricht man von spontaner Spaltung. Diese ist besonders für Kerne mit  $Z > 110$  von Bedeutung.

**Stabile Kernen** Kerne mit Halbwertszeiten länger als die Lebensdauer der Sonne nennt man stabil:

$$\tau_A \geq T_\odot \approx 4,6 \cdot 10^9 \text{ a}$$

## 11.1 $\beta$ -Zerfall

Im Gegensatz zu Abschn. 7.2 wollen wir diesmal den  $\beta$ -Zerfall nicht im Rahmen der schwachen Wechselwirkung behandeln. Stattdessen betrachten wir Kerne gleicher Massenzahl (Isobare), da der  $\beta$ -Zerfall nur eine Nukleon-Nukleon-Umwandlung darstellt und damit die Massenzahl konstant hält.

Wir wollen mit der Weizsäcker-Massenformel (10.13) arbeiten, die wir nach Potenzen von  $Z$  geordnet anschreiben:

$$M(A, Z) = \alpha A - \beta Z + \gamma Z^2 \pm B_P \quad (11.1)$$

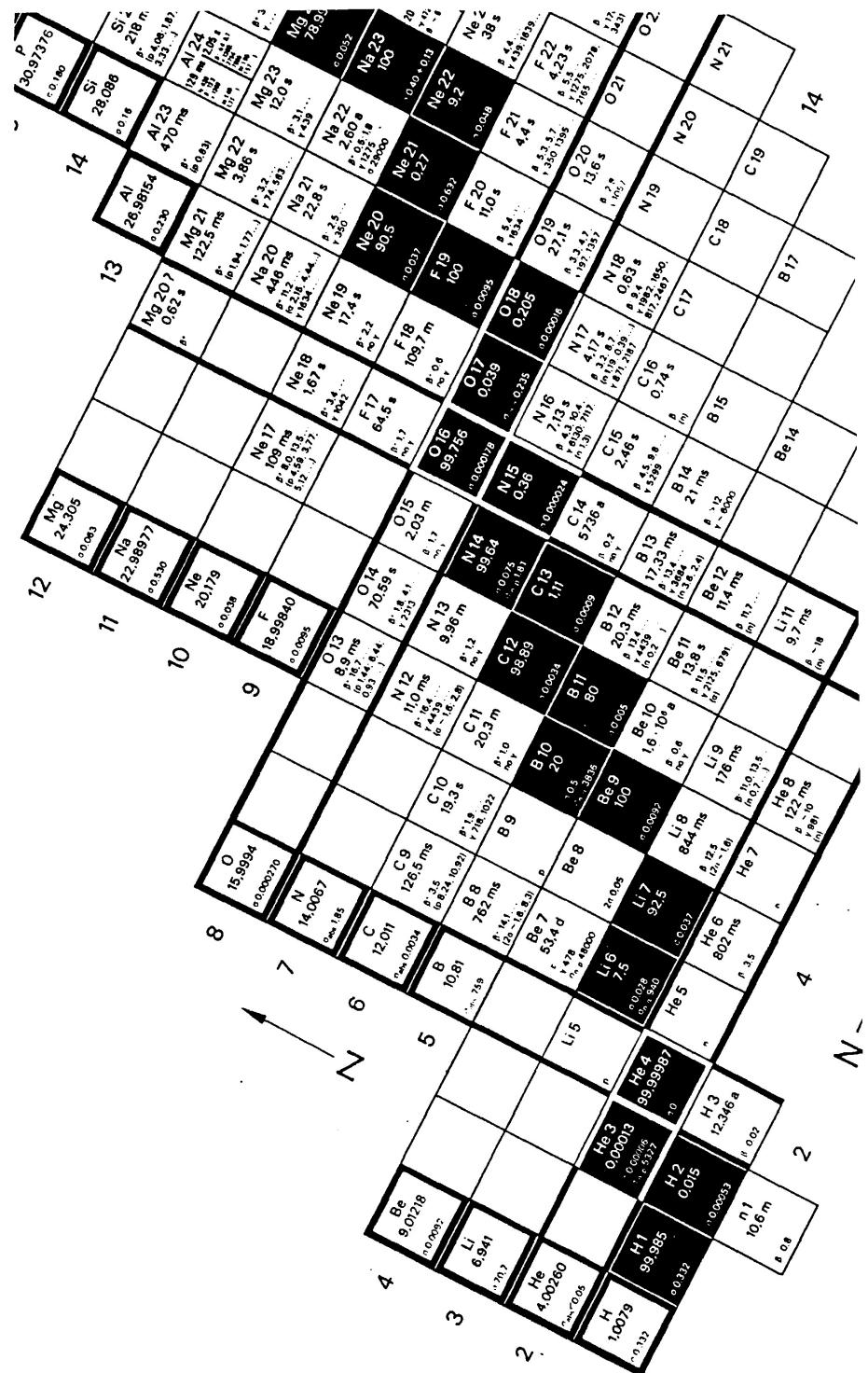
Für die Koeffizienten ergibt sich im Vergleich mit (10.13):

$$\begin{aligned} \alpha &= M_n - a_V + a_S A^{-1/3} + \frac{a_{\text{Sym}}}{4} \\ \beta &= a_{\text{Sym}} + M_n - M_p - m_e \\ \gamma &= \frac{a_{\text{Sym}}}{A} + \frac{a_{\text{Coul}}}{A^{1/3}} \\ B_P &= a_P A^{1/2} \text{ bzw. } 0 \quad \text{gemäß (10.11)} \end{aligned}$$

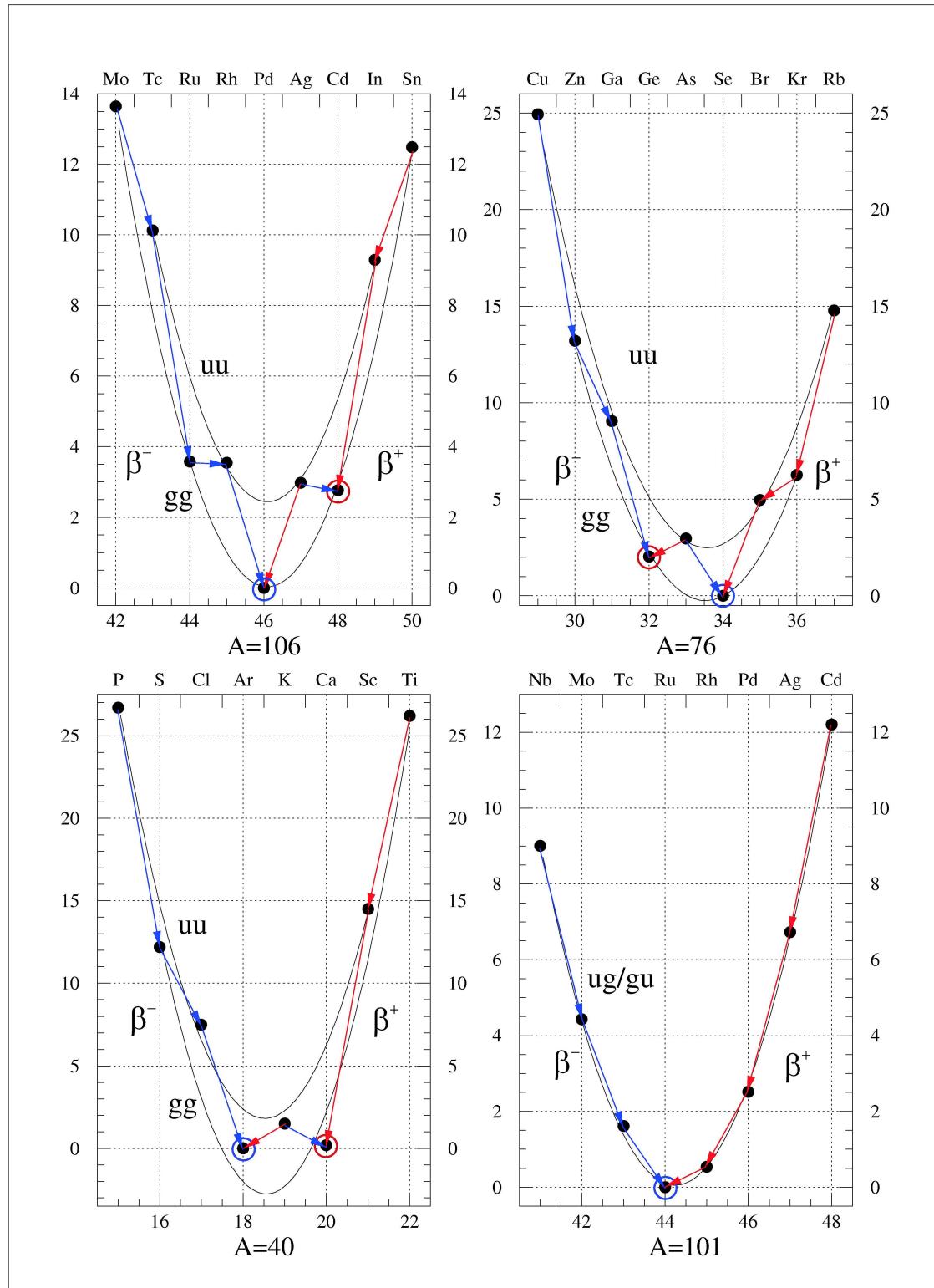
Die Kernmasse zeigt eine parabelartige Abhängigkeit, deren Minimum für Isobaren ( $A+Z = \text{konst}$ ) durch die beiden ersten Terme gegeben ist.

Betrachten wir die Fälle von ug- bzw. gu- sowie gg- und uu-Kernen einzeln!

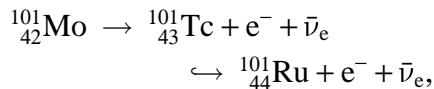
**Kerne mit ungerader Massenzahl.** Als Beispiel für „ug“- bzw. „gu“-Kerne wollen wir isobare Kerne mit  $A = 101$  betrachten, für die  $E(Z)$  in Abb. 11.2d skizziert ist. Das Energieminimum liegt beim Ruthetium-Isotop  ${}^{101}_{44}\text{Ru}$ . Dessen Isobare  ${}^{101}_{42}\text{Mo}$  und  ${}^{101}_{43}\text{Tc}$  zerfallen „von links“ via  $\beta^-$ -Zerfall zum Ruthetium hin:

11.1  $\beta$ -Zerfall

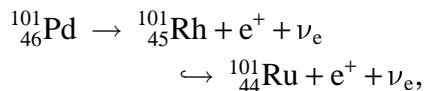
**Abb. 11.1:** Ausschnitt aus der Karlsruher Nuklidkarte. Stabile Kerne sind schwarz gezeichnet mit Angabe der Isotopenhäufigkeit und des Einfangquerschnitts für thermische Neutronen. Unterhalb der stabilen Kerne befinden sich die  $\beta^-$ -Strahler, oberhalb die  $\beta^+$ -Strahler. Angegeben sind Halbwertzeit und wichtigste Zerfallsenergie.



**Abb. 11.2:** Massenparabeln für  $A = 106, 76, 101, 40$ . Die umkreisten Kerne sind jeweils die stabilsten, und können durch einfachen  $\beta$ -Zerfall nicht weiter zerfallen. Liegt die Masse eines Kerns über dem Isobar, welches am stärksten gebunden ist, jedoch auch über den beiden Nachbarn, so kann es nur durch doppelten  $\beta$ -Zerfall zerfallen. Es ist also recht stabil (gilt nur für uu- und gg-Systeme, Parabeln für  $A = 106, 40$ );  $^{76}\text{Se}$  dagegen ist stabil.

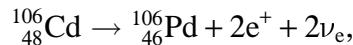


da auf der linken Seite der gezeigten Parabel  $M(A, Z) > M(A, Z + 1)$  gilt, wobei die Elektronenmasse beinhaltet ist. Bei Protonenüberschuss dagegen zerfallen die entsprechenden Kerne über den  $\beta^+$ -Zerfall:



weil diesmal  $M(A, Z) > M(A, Z - 1) + 2m_e$  gilt.

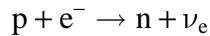
**Kerne mit gerader Massenzahl.** Für uu- und gg-Kerne gibt es zwei ähnliche Parabeln (Abb. 11.2(a-c)), welche sich gerade durch  $\Delta E = 2B_P$  unterscheiden. Stabile Kerne liegen im Minimum der Parabel, bei  $Z = \beta/(2\gamma)$ . Für  $A > 70$  existiert oftmals mehr als ein stabiles Isobar. Betrachten wir diesmal Elemente mit  $A = 106$ .  ${}^{106}_{48}\text{Cd}$  und  ${}^{106}_{46}\text{Pd}$  liegen auf der gg-Parabel unterhalb des Minimums der uu-Parabel. Damit können sie nicht  $\beta$ -zerfallen und sind  $\beta$ -stabil;  ${}^{106}_{48}\text{Cd}$  kann nur durch doppelten  $\beta$ -Zerfall in  ${}^{106}_{46}\text{Pd}$  übergehen:



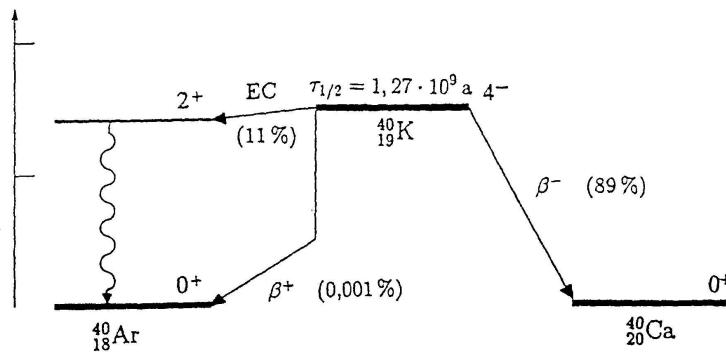
was aber eine sehr unwahrscheinliche Reaktion darstellt. Alle uu-Kerne dagegen haben mindestens einen gg-Kern als Nachbarn im Isobarenspektrum, der stärker gebunden ist, und sind daher  $\beta$ -instabil. Ausnahmen:  ${}^2_1\text{D}$ ,  ${}^6_3\text{Li}$ ,  ${}^{10}_5\text{B}$ ,  ${}^{14}_7\text{N}$ .

## 11.2 Elektroneneinfang

Wie wir aus der Quantenmechanik und der Atomphysik wissen, haben Elektronen, vor allem solche aus der K-Schale mit s-Wellenfunktion, eine hohe Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Kerninnern. Traut sich nun ein Elektron etwas zu nah an ein dort befindliches Proton heran, dann isses eh es sich versieht weg, und ein Elektroneneinfang (EC = *electron capture*, inverser  $\beta$ -Zerfall) hat stattgefunden:



Solch ein EC-Prozeß kommt vor allem bei schweren Kernen mit großem Kernradius vor. Meistens liegt K-Einfang (Elektron stammt aus einer K-Schale) vor. Nach dem Einfangprozeß wird das Loch in der entsprechenden Schale durch Übergänge von Elektronen aus höheren Schalen gefüllt. Diese Elektronenkaskade emittiert charakteristische Röntgenstrahlung. Möglich ist ein Elektroneneinfang immer dann, wenn



**Abb. 11.3:** Der  $\beta$ -Zerfall von  $^{40}\text{K}$ . Bei dieser Kernumwandlung konkurrieren  $\beta^-$ - und  $\beta^+$ -Zerfall sowie der Elektroneneinfangprozeß miteinander. Die relativen Häufigkeiten dieser Zerfälle sind jeweils in Klammern angegeben. Der geknickte Pfeil beim  $\beta^+$ -Zerfall deutet an, daß die Erzeugung eines  $e^+$  zuzüglich des überzähligen Elektrons im  $^{40}\text{Ar}$ -Atom 1.022 MeV kostet und der Rest in kinetische Energie des Positrons und des Neutrinos umgewandelt wird. Der aus dem Elektroneneinfang hervorgehende angeregte Zustand von  $^{40}\text{Ar}$  zerfällt durch Photonemission in seinen Grundzustand (aus [Po96]).

$$M(A, Z) > M(A, Z - 1) + E_{\text{Hülle}},$$

wobei  $E_{\text{Hülle}}$  die Anregungsenergie der Atomhülle darstellt. Dieser Prozeß konkurriert mit dem im vorigen Abschnitt besprochenen  $\beta^+$ -Zerfall.

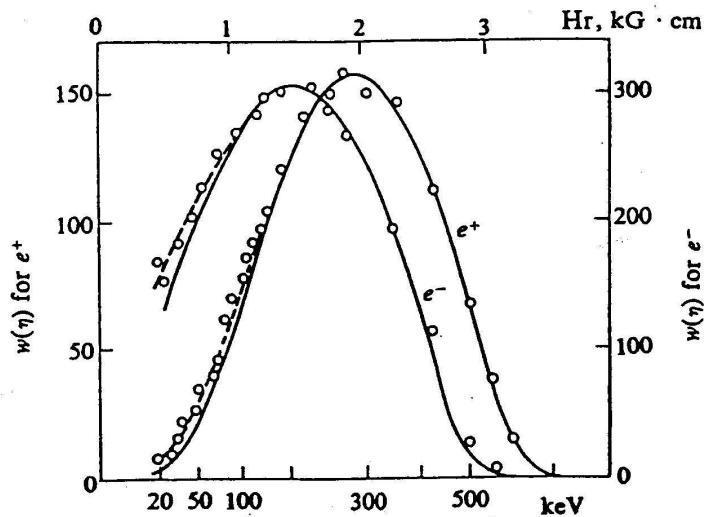
### 11.3 Typische $\beta$ -Zerfalls-Lebensdauern

Das Neutron zerfällt mit  $\tau_{1/2} = (887 \pm 1) \text{ s}$ . Für Kern- $\beta$ -Zerfälle variiert jedoch die typische Lebensdauer zwischen  $10^{-3} \text{ s}$  und  $10^{16} \text{ a}$ . Dieser gewaltige Bereich hat eine Ursachen unter anderem am Phasenraum sowie am Zusammenhang  $1/\tau \propto E_0^5$  (Sargent-Regel, vgl. Abschn. 7.5.1), wobei  $E_0$  die beim Zerfall freiwerdende maximale Elektronenenergie darstellt. Betrachten wir als Beispiel für mögliche Zerfälle des Isotops  $^{40}\text{K}$ , das über  $\beta^-$ ,  $\beta^+$ -Zerfall und auch durch EC in  $^{40}\text{Ar}$  oder  $^{40}\text{Ca}$ , zwei stabile Nuklide mit derselben Massenzahl wie das Kalium-40, zerfallen kann. Was passiert, zeigt schematisch Abb. 11.3.

### 11.4 Kern- $\beta$ -Zerfall

Der Kern- $\beta$ -Zerfall unterscheidet sich vom Zerfall des freien Neutrons, denn sowohl das am Zerfall beteiligte Proton als auch das entsprechende Neutron ist im Kern gebunden. Das Matrixelement des Zerfalls enthält deshalb die Information des Überlapps der Wellenfunktion des Anfangs- und Endzustandes. Somit erhalten wir einen Einblick in die Kernstruktur. Der Überlapp der Wellenfunktionen geht in die Lebensdauer ein, womit wir über eine Probe verfügen, die empfindlich auf die Wellenfunktionen im Kern ist.

Weiterhin bestimmt die Differenz der Bindungsenergien, ob ein Kern  $\beta^-$ - oder  $\beta^+$ -Zerfall macht und wie groß der jeweilige Phasenraum ist.



**Abb. 11.4:** Schematischer Verlauf des Elektronenspektrums beim  $\beta$ -Zerfall. Entsprechend dem Phasenraum (11.3) hat das Spektrum an beiden Enden einen parabolischen Verlauf. Dieses Spektrum wird durch die Wechselwirkung mit dem Coulombfeld des Tochterkerns modifiziert.

In beschränktem Maße beeinflusst zudem die Coulombwechselwirkung zwischen dem den Kern verlassenden Lepton und dem Restkern das Energiespektrum des emittierten, geladenen Leptons und damit wiederum den Phasenraum. Ist die Coulombbarriere erst einmal überwunden, bekommen insbesondere die Positronen des  $\beta^+$ -Zerfalls noch einen Tritt nach außen, damit sie endlich aus dem Kern verschwinden (Abb. 11.4).

Die Verformung des  $\beta$ -Spektrums wird durch die *Fermifunktion* beschrieben:

$$F(Z', E_e) \approx \frac{2\pi\eta_Z}{1 - e^{-2\pi\eta_Z}} \quad \text{mit } \eta_Z = \mp \frac{Z'\alpha}{\beta e} \text{ für } \beta^\pm \quad (11.2)$$

Es bedeuten  $Z'$  die Ladung des Restkerns und  $\beta = v/c$ . Man definiert sich einen modifizierten Phasenraum:

$$f(Z', E_0) = \int_1^{\mathcal{E}} \underbrace{\mathcal{E}_e \sqrt{\mathcal{E}_e^2 - 1} (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_e)^2}_{\text{wie für freies Neutron}} F(Z', \mathcal{E}_e) d\mathcal{E}_e \quad (11.3)$$

$E_0$  gibt die maximale Energie an, welche das Lepton davontragen könnte ( $\mathcal{E}_e = E_e/(m_e c^2)$ ). Wir kennen (11.3) ohne die Fermifunktion bereits aus (7.17). Diese fehlte bei unseren dortigen Betrachtungen des freien Neutrons, weil dort eine Modifikation des Phasenraums unnötig war.

Wir definieren die *Halbwertszeit*  $t_{1/2} = \ln 2 \cdot \tau$  und können damit den *ft-Wert* (Fermifunktions-Halbwertzeit) anschreiben:

$$\text{ft-Wert} = f(Z', E_0) \cdot t_{1/2} = \frac{2\pi^3 \hbar^7}{m_e^5 c^4} \ln 2 \frac{1}{V^2} \frac{1}{|\mathcal{M}_{fi}|^2}, \quad (11.4)$$

Diese mit einem Phasenraumfaktor verzierte Halbwertzeit gibt direkt Auskunft über das Übergangsmatrixelement  $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ . Sie enthält keine schwache Wechselwirkung mehr!  $ft$ -Werte erstrecken sich über viele Größenordnungen, typisch etwa  $10^3 \dots 10^{22}$  s. Sie werden deshalb logarithmisch tabelliert und sind charakteristisch für die Kernstruktur.

### 11.4.1 Drehimpulse und $\beta$ -Zerfälle

Art des Übergangs	Auswahlregeln		$\log ft$	Isotop	Halbwertszeit
	Spin	Parität			
Übererlaubt	$\Delta I = 0, \pm 1$	(+)	$3.5 \pm 0.2$	$^1\text{n}$	11.7 m
Erlaubt	$0, \pm 1$	(+)	$5.7 \pm 1.1$	$^{35}\text{S}$	87 d
Einfach verboten	$0, \pm 1$	(-)	$7.5 \pm 1.5$	$^{198}\text{Au}$	2.7 m
„Unique“ einfach verboten	$\pm 2$	(-)	$8.5 \pm 0.7$	$^{91}\text{Y}$	61 m
Zweifach verboten	$\pm 2$	(+)	$12.1 \pm 1.0$	$^{137}\text{Cs}$	30 a
Dreifach verboten	$\pm 3$	(-)	$18.2 \pm 0.6$	$^{87}\text{Rb}$	$6 \cdot 10^{10}$ a
Vierfach verboten	$\pm 4$	(+)	22.7	$^{115}\text{In}$	$6 \cdot 10^{14}$ a

**Tab. 11.1:** Zusammenstellung der verschiedenen Auswahlregeln und  $ft$ -Werte. Dabei bedeutet (+) „keine Paritätsverletzung“, (-) „Paritätsverletzung“ (aus [Ma84])

Warum gibt es so drastisch verschiedene  $ft$ -Werte? Anders als beim freien Neutron können beim Kern- $\beta$ -Zerfall Drehimpulse eine Rolle spielen. Schätzen wir ab, welche Drehimpulse überhaupt beim Zerfall beitragen können. Sei  $\psi(x)$  die Wellenfunktion des Elektrons oder Neutrinos. Wir setzen dafür ebene Wellen an, da die Kern-Lepton-Wechselwirkung klein ist:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{V}} \left( 1 + \frac{i p x}{\hbar} + \dots \right)$$

$p$  ist dabei von der Größenordnung MeV/c,  $x$  von der des Kernradius, einige Fermi. Mit  $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$  erhalten wir  $|\vec{p}|R/\hbar \approx 10^{-2}$ . Da  $|\psi(x)|^2$  in den  $ft$ -Wert etwa mit  $10^{-2} \dots 10^{-4}$  pro Einheit von  $\ell$  eingeht, werden dort höhere  $\ell$ -Werte stark unterdrückt. Deshalb nennt man:

- $\ell = 0$  erlaubte Übergänge
- $\ell = 1$  verbotene Übergänge (Paritätsänderung!  $(-1)^\ell$ )
- $\ell = 2$  zweifach verbotene Übergänge
- $\vdots$

Wir erinnern uns an Fermi- und Gamow-Teller-Übergänge beim freien  $\beta$ -Zerfall mit  $S_{e\bar{v}} = 0$  bzw.  $S_{e\bar{v}} = 1$  (Abschn. 7.6). Für  $\ell = 0$ -Wellen gilt entsprechend ( $P \propto (-1)^\ell$ ):

$\Delta P = 0 \quad \Delta J = 0$	Fermi-Übergang
$\Delta P = 0 \quad \Delta J = 0, \pm 1$	Gamow-Teller-Übergänge
(aber keine $0 \rightarrow 0$ -Übergänge)	

Damit ergeben sich je nach den Quantenzahlen von Mutter- und Tochterkern erlaubte bzw. verbotene Übergänge, wie beispielsweise:

$$\begin{aligned} J^P = \frac{9}{2}^+ &\rightarrow J^P = \frac{1}{2}^+ \quad \ell = 4, \text{ also 4-fach verboten} \\ {}^{115}\text{In} &\quad {}^{115}\text{Sn} \\ \log ft = 22.7, \quad t_{1/2} &= 6 \cdot 10^{14} \text{ a} \end{aligned}$$

**Übererlaubte Übergänge.** Neben dieser Klassifizierung gibt es auch noch andere, sogenannte übererlaubte Übergänge. Dies sind Zerfälle, in denen die Nukleonen ihre Wellenfunktion beibehalten – analog zum freien Neutronenzerfall. Übererlaubte Übergänge treten auf, wenn Mutter- und Tochterkern Mitglieder eines Isospinmultipletts sind, so wie  ${}^{14}\text{O} \rightarrow {}^{14}\text{N}^*$  oder Neutron und Proton. Die Schalenbesetzung im Kern ändert sich nicht. Dabei landet man aber oft in angeregten Tochterkernen, die dann durch  $\gamma$ -Emission in den Grundzustand relaxieren können (siehe auch Übung 11.2). Es gilt:

$$\text{ft-Wert} \propto \text{ft-Wert(Freies Neutron)}$$

Dieser Zerfall wird zur Bestimmung der Neutron-Zerfallsparameter verwendet, da hier die Kerneffekte minimal sind.

### 11.4.2 Darstellung des $\beta$ -Zerfalls im Kurie-Plot

Der *Kurie-Plot* stellt eine spezielle Auftragung des  $\beta$ -Spektrums dar. Wir definieren dazu

$$\eta = \frac{p_e}{m_e c} \tag{11.5}$$

analog zu  $\varepsilon_e$  aus dem vorigen Abschnitt und erhalten eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $w(\eta)$  gemäß:

$$w(\eta) d\eta = C \cdot |\mathcal{M}_{fi}|^2 F(Z, \varepsilon) (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2 \eta^2 d\eta. \tag{11.6}$$

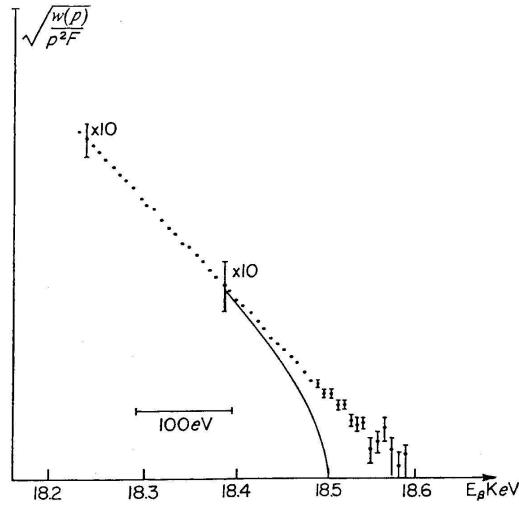
Im Kurie-Plot trägt man nun

$$\sqrt{\frac{w(\eta)}{\eta^2 \cdot F(Z, \varepsilon)}} = \left[ C \cdot |\mathcal{M}_{fi}|^2 \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \propto |\mathcal{M}_{fi}| \tag{11.7}$$

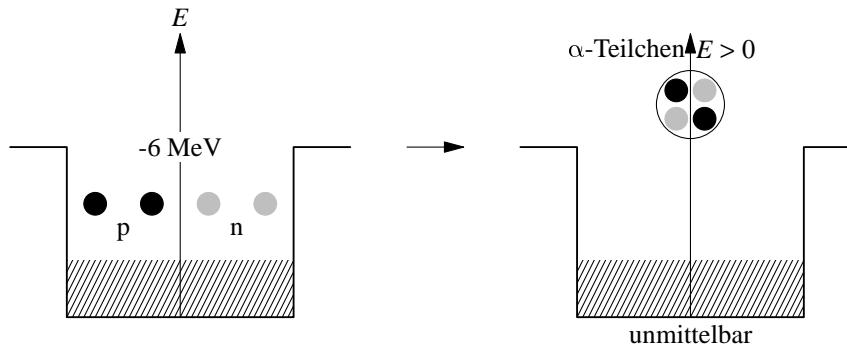
gegen  $\varepsilon$  auf, wie in Abb. 11.5 gezeigt. Diese Abhängigkeit ist linear, wenn das Übergangsmatrixelement  $|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \text{konst.}$ ; im Falle  $|\mathcal{M}_{fi}|^2 = f(\varepsilon)$  tragen höhere Drehimpulse bei. Aus dem Kurie-Plot lässt sich durch Bestimmung des Schnittpunktes mit der  $\varepsilon$ -Achse die Neutrinomasse bestimmen. Die besten Ergebnisse (Abb. 11.5) erhielt man aus dem  ${}^3\text{H}$ -Zerfall (Otten in Mainz bzw. Lobashev am INR<sup>1</sup> in Moskau) zu  $m_{\nu_e} < 2.5 \text{ eV}/c^2$ .

---

<sup>1</sup><http://www.inr.ac.ru/>



**Abb. 11.5:**  $\beta$ -Spektrum im Kurie-Plot. In der interessanten Region, die Evidenzen für eine Neutrinomasse liefern könnte, werden die Fehlerbalken sehr groß, da hier aufgrund der wenigen Ereignisse Statistik nötig wird.



**Abb. 11.6:** Ein unmittelbares Entweichen eines  $\alpha$ -Teilches wäre nur ohne die tatsächlich vorhandene Coulomb-barriere möglich.

## 11.5 $\alpha$ -Zerfall von Atomkernen

Protonen und Neutronen sind auch in schweren Kernen mit bis zu 7 MeV gebunden, und können daher nicht gemäß Abb. 11.6 aus dem Kern entweichen. Die Emission eines gebundenen Systems ist eher möglich, da zusätzlich die Bindungsenergie des gebundenen Systems zur Verfügung steht. Von Bedeutung ist dies insbesondere für  $\alpha$ -Teilchen ( $= {}^4_2\text{He}$ -Kern), da sie eine außerordentlich große Bindungsenergie von 7.1 MeV/Nukleon besitzen, wie Tab. 11.2 vergleichend zeigt.

Für die kinetischen Energien  $T$  gilt bei der Reaktion  ${}^A_Z X_N \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} X'_N - 2 + \alpha$ :

$$m_X c^2 = m_{X'} c^2 + T_{X'} + m_\alpha c^2 + T_\alpha \quad Q = (m_X - m_{X'} - m_\alpha)c^2 = T_{X'} + T_\alpha$$

$Q$  ist hierbei die totale kinetische Energie der Reaktion. Ist der Mutterkern  $X$  in Ruhe so gilt für  $A \gg 4$ :

Teilchen	Bindungsenergie pro Nukleon
$^2_1D$	1.1 MeV
$^3_1T$	2.8 MeV
$^3_2He$	2.6 MeV
$^4_2He$	7.1 MeV

**Tab. 11.2:** Bindungsenergien pro Nukleon bei leichten Kernen. Man erkennt deutlich die energetisch herausragende Stellung des  $^4_2He$ .

$Q$ [MeV]	Teilchen
-7, 26	n
-6, 12	p
-9, 92	$^3_2He$
+5, 41	$^4_2He$
-1, 94	$^7Li$

**Tab. 11.3:** Freiwerdende Energie bei Emission verschiedener Teilchen aus einem  $^{232}U$  Kern mit  $\tau = 72a$ . Auch hier ist das  $\alpha$ -Teilchen klar bevorzugt.

$$T_\alpha = Q \left( 1 - \frac{4}{A} \right)$$

Sehr oft konkurriert der  $\alpha$ - Zerfall mit dem  $\beta$ - Zerfall.

**Zerfallssystematik:** Die Systematik des  $\alpha$ - Zerfalls wurde bereits 1938 durch Geiger und Nuttall entdeckt. Sie besagt, daß ein  $\alpha$ - Emitter mit großer totaler kinetischer Energie  $Q$  eine wesentlich kleinere Lebensdauer  $\tau_\alpha$  aufweist, als ein solcher mit kleinem  $Q$  und ist als *Geiger- Nuttall- Regel* bekannt. Als Beispiel hierfür kann man die beiden Thorium-Isotope  $^{232}Th$  und  $^{218}Th$  betrachten:

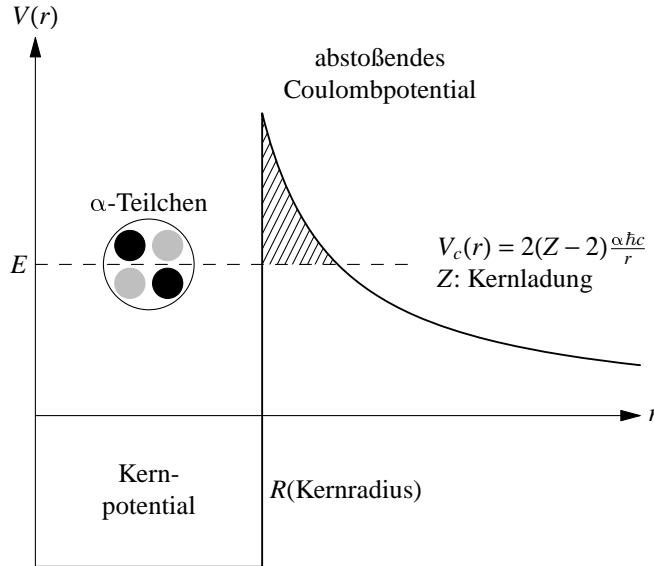
$$\begin{aligned} {}^{232}Th(Q = 4,08 \text{ MeV}) & \quad \tau = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ y} \\ {}^{218}Th(Q = 9,85 \text{ MeV}) & \quad \tau = 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ y} \end{aligned}$$

Man erkennt, daß sich beide  $Q$ - Werte um einen Faktor 2 unterscheiden, die Lebensdauern jedoch deutlich differieren.

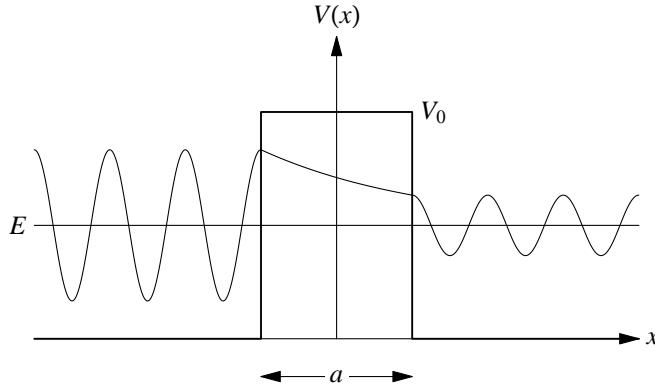
### 11.5.1 Theorie des $\alpha$ -Zerfalls

Wie wir zu Beginn des Kapitels besprachen, besitzen Atomkerne eine Coulombbarriere, die beispielsweise ein sich im Kern formiertes Alphateilchen daran hindert, denselben zu verlassen. Dieses müßte dazu eine potentielle Energie besitzen, welche größer als das abstoßende Coulombpotential

$$V_{\text{Coul}} = 2(Z-2) \frac{\alpha}{r}$$



**Abb. 11.7:** abstoßendes Coulombpotential,  $V_{\text{Coul}} = 2(Z - 2)(\alpha/r)$



**Abb. 11.8:** Tunneleffekt; Einlaufende/reflektierte und transmittierte Welle am endlichen Kastenpotential

ist (Abb. 11.7).

Klassisch ist es für  $E < 2(Z - 2)\alpha/R$  unmöglich, diese Barriere zu überwinden; quantenmechanisch besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit für das  $\alpha$ -Teilchen, die Barriere und damit den klassisch verbotenen Bereich zu durchdringen. Man spricht vom *Tunneleffekt*.

Für die Zerfallskonstante  $\lambda$  gilt:

$$\lambda_\alpha = f \cdot p$$

mit der Häufigkeit des Auftreffens am Potentialrand  $f$  und der Tunnelwahrscheinlichkeit beim Auftreffen auf den Rand  $p$ . Für die Wellenlänge eines Teilchen in einem Kastenpotential gilt:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = k = \frac{\sqrt{2m|E - V(r)|}}{\hbar}$$

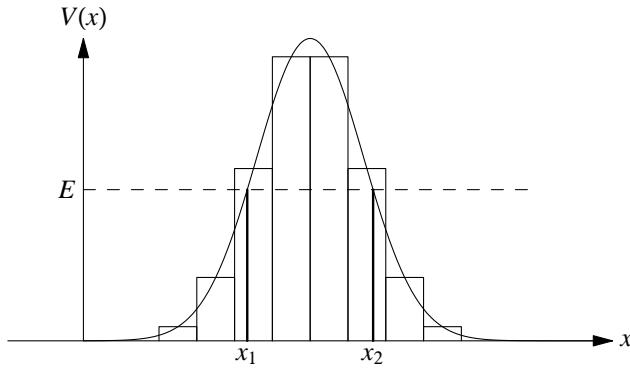


Abb. 11.9: Kontinuierlicher Potentialberg

Für die Tunnelwahrscheinlichkeit ergibt sich bei einer Schickdicke  $\Delta r$

$$(e^{-k\Delta r})^2 = e^{-2k\Delta r} \quad (11.8)$$

Somit ergibt sich für die Tunnelwahrscheinlichkeit für die gesamte Potentialbarriere:

$$p = e^{-2G} \quad \text{mit } G = \frac{1}{\hbar} \int_R^{r_1} \sqrt{2m|V(r) - E|} dr \approx 2\pi(Z-2) \frac{\alpha}{\beta}$$

mit der Feinstrukturkonstante  $\alpha$  und  $\beta = V/c$ .  $G$  heißt Gamow-Faktor.

Indem wir davon ausgehen, der Exponentialfaktor in (11.8) sei wesentlich größer als Eins, finden wir in *WKB-Näherung* für kontinuierliche Potentialberge (Abb. 11.9):

$$W(E) = \prod_{i=1}^n W_i(E) = \underbrace{\exp \left\{ - \int_{x_1}^{x_2} \left( -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m|V(x) - E|} \right) \right\}}_{(\text{Gamow-Faktor})} \quad (11.9)$$

Wobei  $V(x)$  das Coulombpotential ist. Wollen wir die Tunnelwahrscheinlichkeit für ein Alpha-Teilchen der Energie  $E$  berechnen, so setzen wir

$$x_1 = R \quad (\text{Kernradius}), \quad x_2 = b = \frac{2\alpha(Z-2)}{E} \quad (\text{klassischer Umkehrpunkt})$$

in (11.9) ein und erhalten zunächst für das Integral im Exponenten der e-Funktion:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\hbar} \int_R^b dr \sqrt{2m|V_0(r) - E|} &= \frac{2}{\hbar} \sqrt{2mE} \int_R^b dr \sqrt{\frac{b}{r} - 1} = \\ &= \frac{2}{\hbar} \sqrt{2mE} b \underbrace{\left\{ \arccos \sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}} \right\}}_{\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{b}} \text{ für } b \gg R} \quad (11.10) \end{aligned}$$

$b \gg R$  liegt weit außerhalb des Kernradius  $R$ . Deshalb kann der Ausdruck in geschweiften Klammern angenähert werden. Damit erhalten wir schließlich für die Tunnelwahrscheinlichkeit:

$$W(E) = \exp \left\{ -\frac{2\pi\alpha^2}{\hbar} \sqrt{2m} \left( \frac{Z-2}{\sqrt{E}} - \frac{\sqrt{8R(Z-2)}}{\pi\sqrt{\alpha}} \right) \right\} \quad (11.11)$$

Die Halbwertszeit  $T_{1/2}$  des Kerns ist umgekehrt proportional zur Tunnelwahrscheinlichkeit (11.11):

$$\frac{1}{T_{1/2}} \propto W(E) w_\alpha \frac{V_0}{2R},$$

wobei  $w_\alpha$  ein Maß für die Wahrscheinlichkeit ist, ein Alphateilchen im Kern zu finden (daß sich dort zwei Protonen und zwei Neutronen geeignet zusammenrotten ist ja nicht eben selbstverständlich), und  $f = V_0/(2R)$  die Anzahl der Stöße des Alphateilchens an die Coulombbarriere angibt, wenn man als typische Geschwindigkeit des Alpha-Teilchens  $V_0 = 0.1c$  annimmt.

Aus der entscheidenden  $\sqrt{E}^{-1}$ -Abhängigkeit in (11.11) folgt die *Geiger-Nuttall-Regel*:

$$\log_{10}(T_{1/2}) \propto \frac{1}{\sqrt{E}},$$

wobei  $E$  die Energie der  $\alpha$ -Teilchen bezeichnet.

**Zerfallsreihen:** Die meisten  $\alpha$ -Strahler sind schwerer als Blei ( $Z = 82$ ). Bei leichteren Kernen bis  $A \approx 140$  sind  $\alpha$ -Zerfälle zwar möglich, allerdings ist die freiwerdende Energie sehr klein und damit die Lebenszeit der Kerne so groß, daß solche Zerfälle im allgemeinen nicht beobachtet werden.

Einige  $\alpha$ -Zerfälle wollen wir am Beispiel der Zerfallsreihe für  $^{238}_{92}\text{U}$  betrachten (Abb. 11.10). Denn Uran und seine radioaktiven Töchter finden sich in Gestein und auch in Wänden. Ein Tochterprodukt,  $^{222}_{86}\text{Rn}$ , beispielsweise kann als Edelgas in die menschliche Lunge gelangen. Insgesamt macht der  $\alpha$ -Zerfall von  $^{222}_{86}\text{Rn}$  einen Großteil der natürlichen Strahlenbelastung des Menschen aus.

**Fusion:** Die Tunnelwahrscheinlichkeit in ihrer allgemeinen Form

$$W(E) = \exp \left( -\frac{\pi Z_1 Z_2 \alpha}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} \right)$$

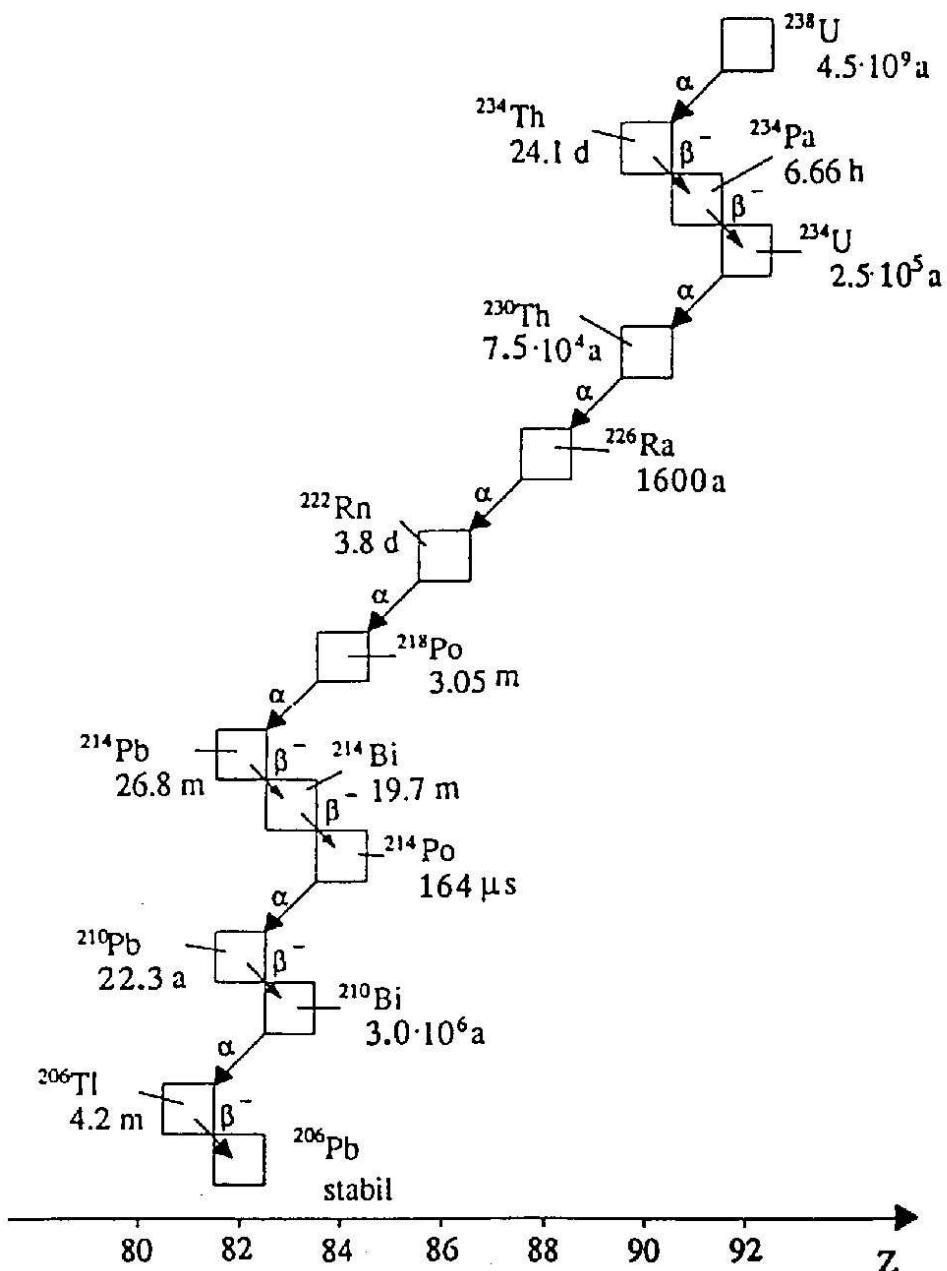
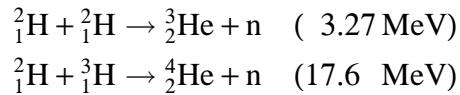


Abb. 11.10: Zerfallsreihe von Uran 238

ist auch für den zum  $\alpha$ -Zerfall inversen Prozess, die *Fusion* zweier Kerne mit den Ladungen  $Z_1 e$  und  $Z_2 e$  von Bedeutung. Aufgrund der Coulombbarriere bevorzugt die Kernfusion natürlich auch kleine  $Z$ , so daß als „Fusionskandidaten“ im wesentlichen nur die Wasserstoff-Isotope in Frage kommen, beispielsweise:



In Klammern ist die jeweils freiwerdende Energie angegeben.

## 11.6 Kernspaltung

### 11.6.1 Historischer Überblick

Nach der Entdeckung der Kernspaltung 1938 durch O. Hahn und F. Straßmann am damaligen Kaiser-Wilhelm-Institut in Berlin waren es L. Meitner, die Hahns Gruppe ein halbes Jahr vorher verlassen mußte, und ihr Neffe O. R. Frisch 1939, die die erste korrekte Interpretation der Experimente lieferten. Die theoretische Behandlung der Spaltung kam ebenfalls 1939 von N. Bohr und J. Wheeler. Die erste „Anwendung“ dieses Phänomens erfolgte am 2. Dezember 1942 durch E. Fermi, der die erste kontrollierte Kettenreaktion in einem Reaktor auf dem Gelände des Football-Stadions in Chicago zustande brachte. Währenddessen arbeiteten in Deutschland Gruppen um Werner Heisenberg und Carl Friedrich von Weizsäcker bzw. Kurt Diebner daran arbeiteten, allerdings mit deutlich geringeren Mengen angereicherten spaltbaren Materials. Jedenfalls gibt es seit 1942, getriggert durch die Abschaffung des Football-Platzes und die Errichtung einer Bibliothek auf dem Gelände in Chicago keine wirklich erfolgreiche Football-Mannschaft mehr.

### 11.6.2 Spontane Spaltung



**Abb. 11.11:** Spaltvorgang unter Annahme eines gleichbleibenden Volumens

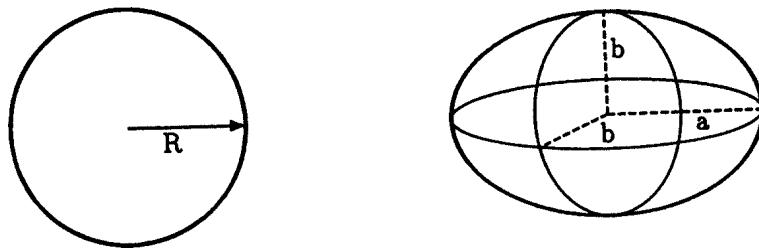
Wie der  $\alpha$ -Zerfall ist auch die Kernspaltung Folge der dynamischen Instabilität der Kerne. Die Bindungsenergie nimmt ab für Kerne, die schwerer sind als  ${}^{56}\text{Fe}$ , dem stabilsten Element (Abb. 10.2). Kerne mit  $A > 40$  können im Prinzip spalten, da  $Q = (m_i - m_f)c^2 = T_f > 0$ , also die Summe

der Massen der Spaltprodukte kleiner ist als die Massen des ursprünglichen Kerns. Allerdings ist die Spaltwahrscheinlichkeit klein wegen der vorhandenen Potentialbarriere. Wie aber sieht dieses Potential aus? Einsichtig wird das, wenn man den Spaltvorgang vom Tröpfchenmodell aus unter der Annahme betrachtet, das Kernvolumen bleibe konstant (Abb. 11.11). Die wichtigsten Beiträge zur Energie liefern dann:

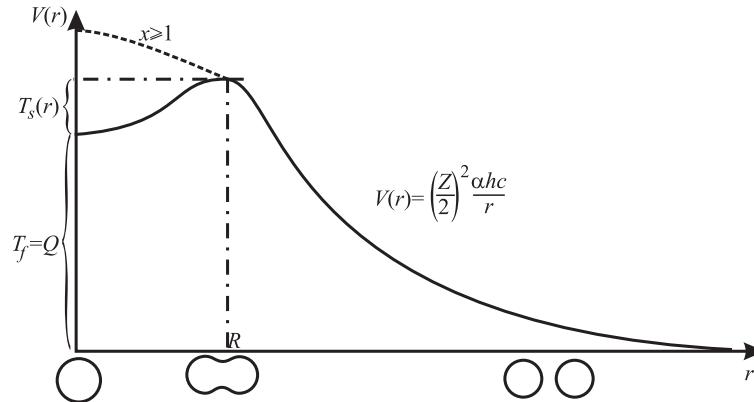
- der Oberflächenterm  $E_S = a_S \cdot A^{2/3}$  (Oberfläche =  $4\pi R^2$ )
- der Coulombterm  $E_{Coul} = a_{Coul} \cdot Z^2 A^{-1/3}$  mit der Energie einer homogen geladenen Kugel  $(3/5) \cdot Z^2 / R$ .

Was passiert nun bei einer Deformation des Kerns? Zunächst verändert sich seine Form von der einer Kugel in die eines Ellipsoids mit Halbachsen gemäß Abb. 11.12:

$$\begin{aligned} a &= R(1 + \varepsilon) & \varepsilon &= \text{Exzentrizität} \\ b &= R(1 + \varepsilon)^{-1/2} & \varepsilon &\ll R \end{aligned}$$



**Abb. 11.12:** Deformation eines schweren Kerns. Bei gleichbleibendem Volumen  $4\pi R^3/3 = 4\pi ab^2/3$  nimmt die Oberflächenenergie des Kerns zu, und die Coulombenergie nimmt ab (aus [Po96]).



**Abb. 11.13:** Potentielle Energie in verschiedenen Phasen der Spaltung. Der Atomkern mit der Ladung  $Z$  spaltet in zwei Tochterkerne. Die durchgezogene Kurve entspricht dem Potentialverlauf im Mutterkern. Die Höhe der hier vorhandenen Spaltbarriere bestimmt die Wahrscheinlichkeit der spontanen Spaltung. Bei Kernen mit  $Z^2/A \gtrsim 48$  verschwindet die Spaltbarriere, und der Potentialverlauf entspricht der gestrichelten Kurve (aus [Po96]).

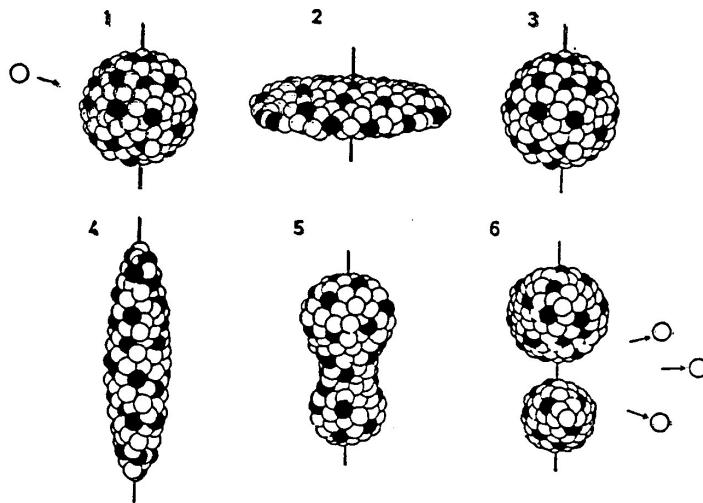
Damit ergeben sich:

$$\begin{aligned} E'_0 &= a_0 A^{2/3} \left( 1 + \frac{2}{5} \varepsilon^2 + \dots \right) \\ E'_{\text{Coul}} &= a_{\text{Coul}} Z^2 A^{-1/3} \left( 1 - \frac{1}{5} \varepsilon^2 + \dots \right) \\ \Rightarrow \Delta E &= E(\varepsilon) - E(0) = \frac{\varepsilon^2}{5} (2a_0 A^{2/3} - a_{\text{Coul}} Z^2 A^{-1/3}) \end{aligned}$$

Man definiert übrigens den sogenannten *Spaltungsparameter*  $x := Z^2/(48 \cdot A)$ , wie er auch in Abb. 11.13 verwendet wird. Für  $x \leq 0.9$  ist die Lebensdauer für Spaltungen lang und Kerne können als stabil angesehen werden. Die in der Abbildung skizzierte Spaltbarriere  $T_S$  wird mit wachsendem  $Z^2$  kleiner, für  $Z^2/A \geq 2a_0/a_{\text{Coul}} \approx 48$  verschwindet sie sogar. *Kerne spalten folglich spontan für  $A \geq 270$ ,  $Z > 114$ .* Für leichte Kerne spielt der Tunneleffekt analog zum  $\alpha$ -Zerfall eine Schlüsselrolle, so dass auch hier eine nicht verschwindende Spaltwahrscheinlichkeiten beobachtet wird (z.B.  $^{238}\text{U}$ ).

### 11.6.3 Induzierte Spaltung

Die Spaltbarriere  $T_S$  kann künstlich überwunden werden. Für schwere Kerne ( $Z \gtrsim 92$ ) beträgt sie ohnehin nur etwa 6 MeV. So können Neutroneneinfangreaktionen zu Kernanregungen mit  $E > T_S$  zur Kernspaltung führen. Solche Reaktionen können durch Beschuß des Kerns mit niederenergetischen Neutronen realisiert werden. Nach dem Neutroneneinfang verteilt sich die freiwerdende Energie schnell auf den gesamten Kern, was eine Anregung des Kerns und auch eine Deformation, wie sie in Abb. 11.14 gezeigt ist, zur Folge hat. Schließlich „bricht“ der Kern in zwei Bruchstücke auf.

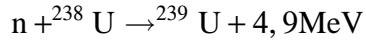


**Abb. 11.14:** Induzierte Kernspaltung als „Comic“. Durch ein auftreffendes thermisches Neutron (1) wird dem ohnehin schon nahe an der Stabilitätsgrenze liegenden Kern gerade soviel Energie zugeführt, daß dieser beginnt, sich stark zu verformen (2). Durch Schwingungen und Deformationen (3, 4, 5) „zerplatzt“ der Kern schließlich (6) in zwei Bruchstücke unter Aussendung mehrerer (schneller) Neutronen.

### 11.6.4 Spaltprodukte

Die Frage ist natürlich: Was kann man über die Massenverteilung der Spaltprodukte aussagen? Wir haben eben angenommen, die Massen beider Tochterkerne  $M(A_i, Z_i)$ ,  $i = 1, 2$ , seien identisch, womit eine *symmetrische Spaltung* vorläge. Dies ist aber nicht unbedingt der Fall. Für die induzierte Spaltung von  $^{235}\text{U}(n_{\text{th}}; f)$  findet man eine stark asymmetrische Spaltung mit  $A_1 \approx 90$  und  $A_2 \approx 140$ , die aber keinesfalls scharf ist, sondern eine Verteilung besitzt. Für das Massengebiet von Polonium tritt dagegen eine fast symmetrische Spaltung auf (Beispiel:  $^{257}\text{Fm}(n_{\text{th}}; f)$ ). Mit wachsenden Anregungsenergien wächst die Wahrscheinlichkeit für eine symmetrische Endkonfiguration. Dieser Mechanismus ist weder durch das Tröpfchenmodell noch durch das Schalenmodell erklärbar. Man verwendet daher ein *Hybridmodell* aus „x-Schalenmodell und y-Tröpfchenmodell“. Damit ergeben sich zwei bis drei Spaltminima im Potential.

**Paarungsenergie:** Bis jetzt haben wir den Effekt der Paarungsenergie vernachlässigt. Beim Einfang eines Neutrons in einem Kern gelangt dieser in einen angeregten Zustand. Z.B.

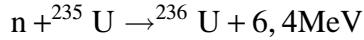


Der erste angeregte Zustand liegt aber bei 5,5 MeV. Die Reaktion ist also so nicht möglich, nur mit schnellen Neutronen ist die Energiebilanz zu erfüllen.

Bei kleinen Energien ist die Reaktionsrate proportional zur Kontaktzeit von Neutron und Kern, also  $\propto 1/V$ . Also wären doch kleine Energien gut ...

Wie bekommt man nun höhere freiwerdende Energien beim Einfang von langsamen Neutronen? Man nutzt die Paarungsenergie!

Als Target sind aber nur ungerade Kerne geeignet. Z.B:



Hier liegt der erste angeregte Zustand auch bei 5,5MeV. Also reichen thermische Neutronen mit Energien von etwas  $k_B T \approx 1/40\text{eV}$  aus, um eine Spaltung zu induzieren.

## Übungen zu Kapitel 11

**Übung 11.1:  $\alpha$ -Zerfall.** Gegeben sei ein eindimensionales Rechteckpotential  $V(x)$  mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, x > d \\ V_0 > 0 & \text{für } 0 < x < d \end{cases}$$

Ein Teilchen mit Energie  $E < V_0$  laufe von links auf die Rechteckbarriere zu.

- a) Berechnen Sie den Transmissionskoeffizienten  $T$ :

$$T = \frac{\text{austretende Stromdichte}}{\text{einfallende Stromdichte}} = \frac{|\Psi_{\text{aus}}|^2 k_{\text{aus}}}{|\Psi_{\text{ein}}|^2 k_{\text{ein}}}$$

- b) Überlegen Sie sich, wie man das Ergebnis für einen beliebigen Potentialwall  $V(x)$  verallgemeinern kann. Kann man den  $\alpha$ -Zerfall im Kernpotential auf das eindimensionale Problem zurückführen?

**Übung 11.2: Auswahlregeln bei Kern- $\beta$ -Zerfällen.**

- a) Für den  $\beta$ -Zerfall  ${}^{14}\text{O} \rightarrow {}^{14}\text{N} + e^+ + \nu_e$  (siehe Abb. 11.15) misst man eine maximale Energie von  $E_{\text{kin}}^{\text{max}} = (1810.6 \pm 1.5)\text{ keV}$ . Daraus errechnet man eine Phasenraumfunktion  $f(Z', E_0)$  von 43.398. Welche Halbwertszeit sollte  ${}^{14}\text{O}$  haben?  
 b) Betrachten Sie den Zerfall von  ${}^{14}\text{C}$  in  ${}^{14}\text{N}$ . Welche Art von  $\beta$ -Zerfall liegt hier vor?

**Übung 11.3: Doppelter- $\beta$ -Zerfall.** Betrachten Sie die Graphen der Bindungsenergie der Isobaren mit Massenzahl  $A = 40$  und  $A = 76$ , die Sie in der vorangegangenen Übung gezeichnet haben.

- a) Benennen Sie Kerne, die für einen doppelten Betazerfall in Frage kommen, d. h. einen Zerfall bei dem gleichzeitig zwei Neutronen ( $\beta^-$ -Zerfall) oder Protonen ( $\beta^+$ -Zerfall) zerfallen. Zeichnen Sie den zugehörigen Feynman-Graph. Überlegen Sie sich anhand des Beispiels, für welche Fälle von Isobaren allgemein doppelter Betazerfall möglich ist.

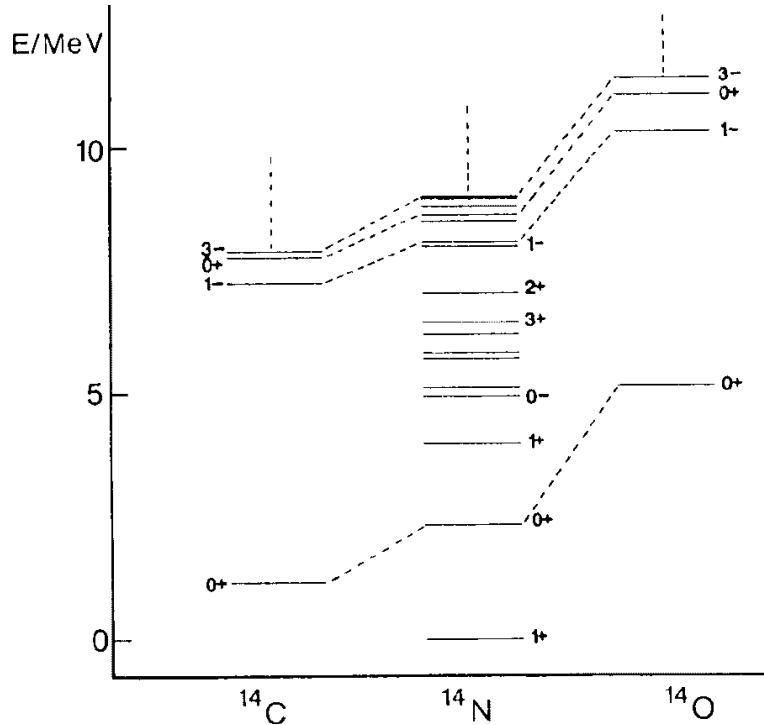


Abb. 11.15:  $\beta$ -Zerfall  $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N} + \text{e}^+ + \nu_e$

- a) Im Rahmen von Erweiterungen des Standard-Modells wird unter anderem eine nicht-verschwindende Neutrinomasse erwogen. Dies bedeutet, daß es entweder einen kleinen aber endlichen rechtshändigen Anteil an der schwachen Wechselwirkung gibt oder das Neutrino ein sogenanntes *Majorana-Teilchen* ist, bei dem anders als im Falle von Dirac-Teilchen, das rechtshändige Neutrino das Antiteilchen des linkshändigen Neutrinos ist. Welche Art von doppeltem Betazerfall wird in diesem Szenario möglich? Zeichnen Sie hierzu den Feynman-Graph. Überlegen Sie sich, wie sich das Energiespektrum des soeben diskutierten Falls vom normalen doppelten Betazerfall unterscheidet. Wie könnte ein Experiment zum Nachweis dieses Zerfalls aussehen?

**Übung 11.4: Elektrischer Dipolübergang.** Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeit für einen elektrischen Dipolübergang durch

$$W_{\text{fi}} = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0\hbar^4 c^3}$$

gegeben ist. Die Übergangswahrscheinlichkeit ergibt sich aus der goldenen Regel

$$dW = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle|^2 dP(E_\gamma)$$

Geben Sie den Phasenraumfaktor  $dP(E_\gamma)$  an und beachten Sie, daß die  $\gamma$ -Strahlung im allgemeinen nicht kugelsymmetrisch ist.

Wie lautet  $\mathcal{H}_{\text{int}}$ ? Verwenden Sie hierzu das Prinzip der minimalen Substitution im Hamiltonoperator, wobei für reelle Photonen das Eichfeld gegeben ist durch  $A^\mu = (0, \vec{A})$ . Berechnen Sie  $\langle \psi_f | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle$ . Hinweis:

$$\left[ \vec{x}, \frac{p^2}{2m} \right] = \frac{\hbar^2}{m} \vec{\nabla}^2$$

Setzten Sie schließlich

$$\vec{A} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}} \vec{\epsilon} e^{i\vec{k}\vec{x}}$$

mit dem Polarisationsvektor  $\vec{\epsilon}$ , der Photonenergie  $E_\gamma = \hbar\omega$  und dem Wellenvektor  $\vec{k}$  des Photonfeldes.

Die *Multipolentwicklung*

$$e^{i\vec{k}\vec{x}} = 1 + i\vec{k}\vec{x} + \dots$$

liefert in führender Ordnung den elektrischen Dipolübergang (E1). Was gilt für die Parität und den Drehimpuls von Anfangs- und Endzustand bei einem E1-Übergang? Können höhere Multipolübergänge auftreten? Welche Auswahlregeln gelten jeweils?

# Kapitel 12

## Radioaktivität, Strahlenwirkung, Kernreaktoren

### 12.1 Strahlungseinheiten

1. Die **Aktivität**  $P(t)$  ist die mittlere Zählrate statistisch verteilter Ereignisse. Sie ist definiert als:

$$P(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = \frac{N(t)}{\tau} = \lambda \cdot N(t)$$

mit  $\lambda$  = Zerfallswahrscheinlichkeit,  $\tau$  = Lebensdauer,  $t_{\frac{1}{2}} = \ln 2 \cdot \tau$  = Halbwertszeit. Die Einheit der Aktivität heißt zu Ehren des Entdeckers der Radioaktivität:

$$1 \text{ Becquerel} = 1 \text{ Bq} = 1 \frac{\text{Ereignis}}{\text{s}} = 27 \text{ pCi}$$

Die alte Einheit Curie (Ci) entspricht der Aktivität von 1 g Radium.

2. Die **spezifische Aktivität** einer Masse  $M$  von Nukliden der Masse  $m$  ist:

$$a = \frac{P}{M} = \frac{\lambda}{m} = \frac{4.16 \cdot 10^{26} \text{ kg}^{-1} \cdot A}{t_{\frac{1}{2}}} \quad \left[ \frac{\text{Bq}}{\text{kg}} \right]$$

Beispiele:

Kern	$^{60}\text{Co}$	$^{90}\text{Sr}$	$^{222}\text{Rn}$	$^{238}\text{U}$
$a [\text{Bq/kg}]$	$4.2 \cdot 10^{16}$	$5.1 \cdot 10^{15}$	$5.6 \cdot 10^{18}$	$1.2 \cdot 10^7$

3. Die **absorbierte Dosis** ist definiert als die Energieabgabe von Strahlung bei Materiedurchgang. Die Einheit ist 1 Gray:

$$1 \text{ Gy} = 1 \frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{kg}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 100 \underbrace{\text{rad}}_{\text{alte Einheit}}$$

4. Die **biologische oder äquivalente Dosis**  $B$  bezieht die funktionelle Schädigung des Gewebes mit ein und wird in Sievert gemessen:

$$1 \text{ Sv} = 1 \text{ Gy} \cdot \text{RBE} = \underbrace{100 \text{ rem}}_{\text{alte Einheiten}} = 100 \text{ rad} \cdot \text{RBE}$$

RBE = radiologische Wirksamkeit

## 12.2 Zellschädigung durch ionisierende Strahlung

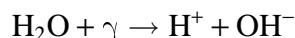
Der empfindlichste Teil einer biologischen Zelle ist der Kern. Wegen der niedrigen Bindungsstärken ( $\approx 10^{-2}$  eV) kann es leicht zu irreparablen Defekten an der DNA kommen, die dann den Funktionsausfall eines Enzyms zur Folge haben und so meist zum Zelltod führen (lethaler Defekt). Dieser Tatsache muß natürlich beim Strahlenschutz Rechnung getragen werden, sie kann aber auch in der Nuklearmedizin ausgenützt werden.

### 12.2.1 Strahlenwirkung

Nicht alle Strahlenschäden an einer Zelle sind irreparabel.

- **indirekte Strahlenwirkung**

Der Zellkern nimmt nur ungefähr 10% des Zellvolumens ein. Zu ca. 80% besteht eine Zelle aus Wasser, das durch Radiolyse zersetzt werden kann:



Zellschäden entstehen in diesem Fall durch die Wechselwirkung der reaktionsfreudigen  $\text{H}^+$ - und  $\text{OH}^-$ -Ionen mit der Umgebung:

- Angriff auf DNA:  $\text{OH}^- + \text{H}^+ \longrightarrow \text{H}_2\text{O} +$  (zerstörte Strukturen). Die Protonen waren dabei Bestandteil der angegriffenen DNA-Strukturen.
- Erzeugung des Zellgiftes  $\text{H}_2\text{O}_2$

- **direkte Strahlenwirkung**

- Erzeugung langsamer  $\delta$ -Elektronen durch Wechselwirkung der Strahlung mit der Elektronenhülle. Die freien Elektronen können zu einem Molekülaufbruch führen.
- In der Endphase des Energieverlustes kann Strahlung durch Atomstöße wechselwirken, während vorher die Streuung an  $e^-$  dominiert. Eine solche direkte Wechselwirkung hat für die locker gebundenen Biomoleküle eine große Zerstörungskraft: Die Anfälligkeit für den sog. reproduktiven Zelltod, bei dem keine Zellteilung mehr möglich ist, ist ca. 3000 mal größer als bei Schädigung von Zellmembran oder -flüssigkeit.

### 12.2.2 Radiobiologische Wirksamkeit

**Definition.** Die radiobiologische Wirksamkeit (RBE) ist das reziproke Verhältnis der für das Auftreten eines biologischen Defektes notwendigen Dosis  $D$  zur Dosis  $D_0$  einer schwach ionisierenden Strahlung (z. B.  $\gamma$ ,  $e^-$ ), die zur Beobachtung des gleichen Effektes notwendig ist.

$$RBE = \frac{D_0}{D}; \quad D \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] = 1.6 \cdot 10^{-9} \frac{dE}{dx} \left[ \frac{\text{keV}}{\mu\text{m}} \right] \cdot \Phi \left[ \frac{\text{Teilchen}}{\text{cm}^2} \right] \Big/ \rho \left[ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right]$$

Bisher existiert noch keine Theorie zur vollständigen Beschreibung der biologischen Strahlenwirkung und die Messung (z.B. am GSI mit Schwerionenstrahlung) ist sehr aufwendig.

### 12.2.3 Klassifizierung

1. locker bzw. schwach ionisierende Strahlung ( $\gamma$ ,  $e^-$  bei hohen Energien)

RBE = 1      Effekte: Einzelstrangbrüche in der DNA; meist reparabel

2. mittelionisierende Strahlung (p, Rückstoß-p der n-Strahlung)

RBE = 5      Erhöhung der Doppelstrangbrüche (lethal), Anstieg der Einzelstrangbrüche

3. dichtionisierende Strahlung (Schwerionen)

RBE  $\approx$  15 – 20      korrelierte Doppelstrangbrüche (lethal)

Schwerionenstrahlen lassen sich in der Tiefe einstellen, in der sie den Großteil ihrer Wirkung entfalten und werden deshalb oft gezielt in der Nuklearmedizin eingesetzt.

## 12.3 Natürliche und künstliche Strahlungsbelastung

1. kosmogene Strahlungsquellen (erzeugt durch Höhenstrahlung):

T(ritium)       $^{14}\text{C}$

$1.3 \cdot 10^{18}$  Bq     $8.5 \cdot 10^{18}$  Bq    (in der ganzen Atmosphäre)

2. terrestrische Strahlungsquellen: Hier hat man zum einen kurzlebige Zerfallsprodukte von  $^{238}\text{U}$  ( $4.5 \cdot 10^9$  a) und  $^{232}\text{Th}$  ( $1.4 \cdot 10^9$  a), nämlich <sup>1</sup>

$^{222}\text{Rn}$     ( $\tau = 3.8$  d; 5.5 MeV;  $\alpha$ )

$^{218}\text{Po}$     ( $\tau = 3.1$  min; 6 MeV;  $\alpha$ )

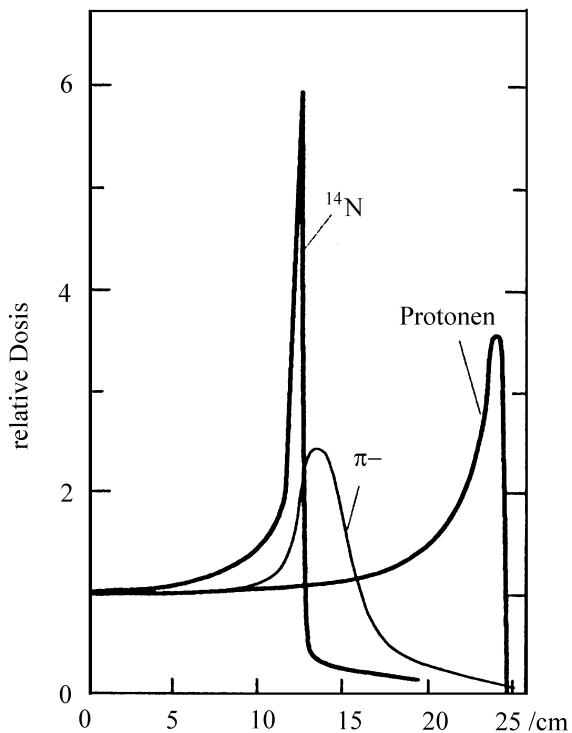
$^{214}\text{Po}$     ( $\tau = 10^{-4}$  s; 7.4 MeV;  $\alpha$ )

und zum anderen  $^{40}\text{K}$  ( $1.3 \cdot 10^9$  a), das einen Anteil von ca.  $7 \cdot 10^{-4}$  am natürlichen Kalium Vorkommen besitzt.

In Westdeutschland beträgt die biologische Dosis 1–5 mSv/a (im Mittel 2 mSv/a). Sie schwankt je nach Bodenbeschaffenheit (U/Th-Gehalt). Sie kann bis zu 200 – 400 mSv/a betragen, beispielsweise in Kerala (Südafrika), im Iran und in Brasilien.

---

<sup>1</sup>a=Jahr; m=Monat; d=Tag



**Abb. 12.1:** Bei Hadronstrahlen sind die Eigenschaften der Bethe-Bloch-Formel wichtig. Tiefendosiskurven unterscheiden sich drastisch je nach Projektilladung. Die Abbildung zeigt die Tiefenverteilung für Protonen, Pionen und Stickstoff-14-Kerne.

Seit der Ölkrise hat die Belastung durch  $^{222}\text{Rn}$  deutlich zugenommen, da es wegen dichteren Fenstern nicht mehr aus Häusern entweichen kann. In Kellern ist die Rn-Konzentration sogar auf das 5–10-fache gestiegen (Aktivität je nach Belüftung  $1 - 10^5 \text{ Bq/m}^3$ ).  $^{222}\text{Rn}$  macht inzwischen ca. 50–75% der natürlichen Strahlenbelastung aus. Es ist besonders problematisch, da es in die Lunge eindringen kann und seine radioaktiven Zerfallsprodukte dort verbleiben.

Die Strahlenbelastung ist auch von der geographischen Breite abhängig (um den Faktor 5–10). An den Polen gibt es kaum ein schützendes Magnetfeld. Dort zu leben ist also gefährlich und außerdem ist es dort saukalt.

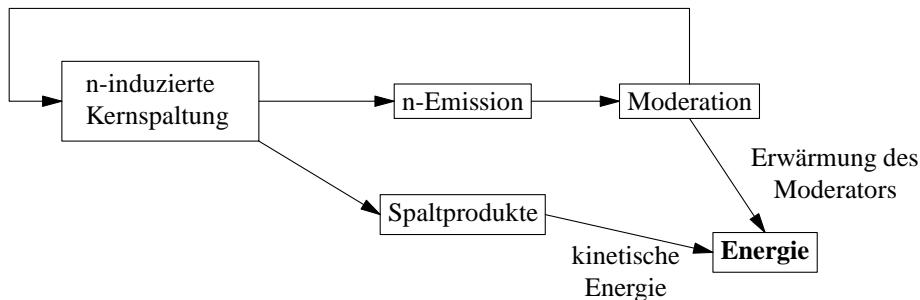
**3. künstliche Strahlenbelastung:** im Mittel in Westdeutschland  $1.6 \text{ mSv/a}$

Aufteilung	Mittelwert [mSv/a]	Schwankung
Röntgendiagnostik	1.4	0.1-10
Nukleardiagnostik	0.1	$\leq 10^3$
Nukleartherapie		$\leq 10^6$
fossile Kraftwerke	$10^{-3}$	$\leq 0.7$
Kernkraftwerke	$7 \cdot 10^{-3}$	
Urlaubsflug (8h)	0.3 mSv	

Dabei ist ein Flug mit der Concorde nicht wesentlich gefährlicher: Man fliegt zwar höher, aber auch kürzer. Vielflieger können offensichtlich die anderen Strahlenbelastungen vernachlässigen.

## 12.4 Kernreaktoren

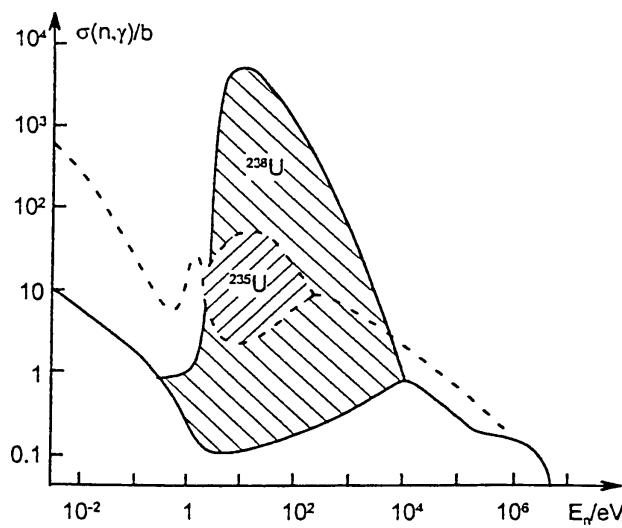
**Prinzip:**



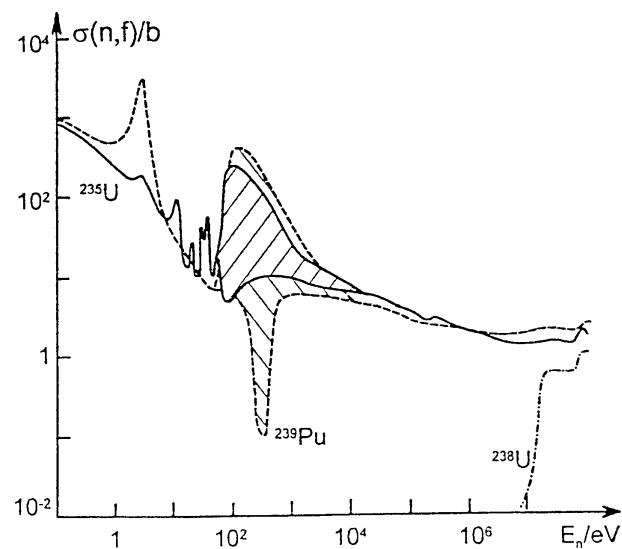
Für eine Kettenreaktion muß mindestens ein Neutron wieder zu einer Spaltung führen.

### 12.4.1 Spaltmaterial

Beim n-Einfang konkurrieren zwei Prozesse: Entweder der Kern spaltet und es werden Spaltneutronen freigesetzt, oder es kommt zu einer (unerwünschten)  $(n, \gamma)$ -Reaktion. Hierbei wird ein Photon emittiert, welches die Umgebung aufheizt. Es werden jedoch keine neuen Spaltungen induziert. Bei  $^{235}\text{U}$  liegt bei thermischen Neutronen  $\sigma(n, \gamma)$  in der gleichen Größenordnung wie  $\sigma(n, f)$ . Beide Querschnitte sind relativ groß.  $^{238}\text{U}$  hat dagegen nur für  $E_n > 10 \text{ MeV}$  einen



**Abb. 12.2:** Einfangquerschnitte für Neutronen an Uran. Über die dichtliegenden Resonanzen im Bereich ( $1 - 10^4$ ) eV sind nur die Einhüllenden eingezeichnet. (Nach [He99])



**Abb. 12.3:** Neutronen-Spaltquerschnitte für U und Pu. Über die dichtliegenden Resonanzen im Bereich ( $10 - 10^3$ ) eV sind nur die Einhüllenden eingezeichnet.

hohen Spaltquerschnitt, der Einfangquerschnitt ist jedoch auch für  $E_n < 1 \text{ eV}$  groß.  $^{235}\text{U}$  ist also als Spaltmaterial wesentlich besser geeignet als  $^{238}\text{U}$  (Abb. 12.2 und 12.3).

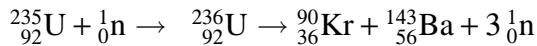
Das Spaltmaterial liegt nie rein vor, sondern als Uranmatrix in einem Oxid oder Silizid (FRM II). Der  $^{235}\text{U}$ -Anteil am Uran kann auch unterschiedlich sein:

$^{235}\text{U}$ -Anteil	
natürliches Uran	$\approx 0.7\%$
für Leichtwasserreaktoren	$\approx 3.5\%$ (LEU)
für FRM I, FRM II, ILL	$\approx 90\%$ (HEU)

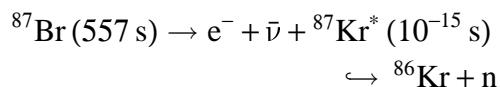
## 12.4.2 Spaltprodukte

Bei  $^{235}\text{U}$  kommt es zu einer asymmetrischen Spaltung. Die Spaltfragmente sind außerdem instabil, da die Neutronenzahl für die vorliegende Massenzahl zu hoch ist. Sie zerfallen über  $\beta^-$ -Zerfall oder Neutronenemission.

Die Energieverteilung der Neutronen hat bei etwa 1 MeV ein Maximum. Eine mögliche Reaktion ist:



Aus anderen Spaltprodukten können auch wieder Neutronen entstehen:



Bei Spaltung von  $^{235}\text{U}$  sind etwa 1.6% der Spaltneutronen *verzögerte* Neutronen.

### Energiebilanz:

175 MeV	kinetische Energie der Spaltprodukte	
5 MeV	kinetische Energie der prompten n	
7 MeV	Energie der prompten $\gamma$	
7 MeV	$\beta$ -Strahlung der Spaltprodukte	(verzögert)
6 MeV	$\gamma$ -Strahlung der Spaltprodukte	(verzögert)
10 MeV	$\bar{\nu}$	(entkommt)
<hr/>		
210 MeV		

Für 1 Ws Energie werden  $3 \cdot 10^{10}$  U-Atome gespalten. Ein Reaktor mit einer thermischen Leistung von 3.5 GW spaltet täglich 3.7 kg  $^{235}\text{U}$ .

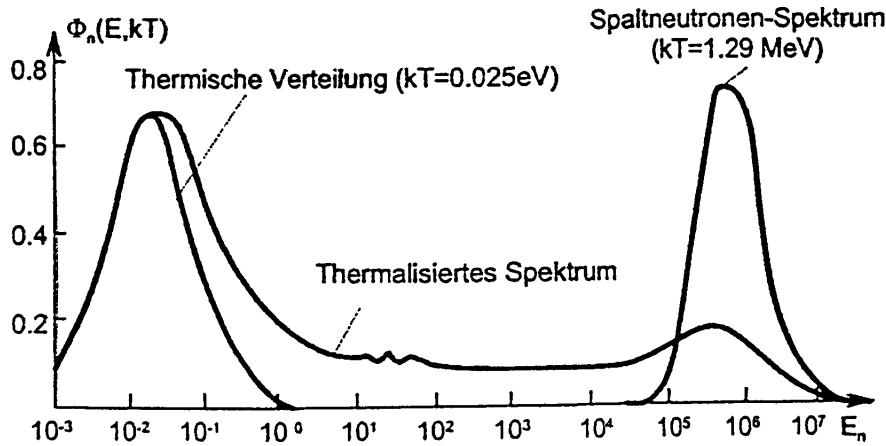


Abb. 12.4: Energiespektrum von Spalt-, thermischen und thermalisierten Neutronen

### 12.4.3 Moderation

Der Wirkungsquerschnitt ist für  $E_n < 1 \text{ eV}$ , also für thermische Neutronen, am größten. Vor einer erneuten Spaltung müssen folglich die Spaltneutronen durch Stöße in einem Material mit kleinem Einfangquerschnitt moderiert werden (Abb. 12.4). Im Prinzip wäre  $\text{H}_2$  der beste Moderator, da wegen  $m_p \approx m_n$  der größte Impulsübertrag pro Stoß möglich ist. Wasserstoff hat jedoch einen viel höheren Einfangquerschnitt als Deuterium, weshalb man in der Praxis  $\text{D}_2$  oder  $\text{D}_2\text{O}$  (schweres Wasser) verwendet. Um von  $E_n \approx 2 \text{ MeV}$  auf  $E_n \approx 25 \text{ meV}$  zu kommen, benötigt man 18 Stöße mit H oder 25 Stöße mit D.

Aufgrund der hohen möglichen Impulsüberträge auf Wasser werden die Abschirmwände bei Neutronenstrahlung meist aus Beton gefertigt, da hier viel Wasser gebunden ist. Meist werden die Wände zusätzlich mit Bor versetzt, um die langsamten Neutronen einzufangen.

### 12.4.4 Vier-Faktor-Formel

Für die Entstehung einer nuklearen Kettenreaktion sind verschiedene Effekte zu berücksichtigen, die in der sog. Vier-Faktor-Formel zusammengefaßt werden. Diese gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Spaltneutron selbst wieder eine Spaltung induziert. Im Einzelnen sind:

- Spaltneutronenmultiplizität  $v = 2.47$  für  $^{235}\text{U}$
- Vermehrungsfaktor  $\varepsilon$ : Änderung von  $v$  durch Spaltung mit schnellen Neutronen im Matrixmaterial ( $\text{Si}, ^{238}\text{U}, \text{O}$ )
- Resonanz-Entkommwahrscheinlichkeit  $p$ : Bruchteil der Neutronen, die während der Moderation nicht durch resonante  $(n, \gamma)$ -Reaktionen verloren gehen (für Leichtwasserreaktoren mit  $^{238}\text{U}$ -Matrix:  $p = 0.89$ )
- Thermische Nutzung  $f$ : Anzahl thermischer Neutronen, die im Kernbrennstoff und nicht in anderem Material absorbiert werden;  $f \approx 0.8 - 0.9$

- Spaltwahrscheinlichkeit  $p^* \propto \sigma_f/\sigma_{capture}$ : Wahrscheinlichkeit, daß Neutroneneinfang in  $^{235}\text{U}$  zur Spaltung führt
- Generationsfaktor  $\eta = v \cdot p^*$ : maximale Anzahl von Spaltneutronen, die wieder zur Spaltung führen

Der Vermehrungsfaktor ist dann (für einen unendlich-großen Moderator, d. h. ohne Wandeffekte):

$$K_\infty = \eta \varepsilon p f \approx 1.07 \quad (12.1)$$

**Stetiger und stabiler Reaktorbetrieb.** Die Reaktivität ist definiert durch:

$$\rho = \frac{K - 1}{K} \quad (K \text{ ohne verzögerte n})$$

Der relative Anteil der verzögerten Neutronen an den insgesamt produzierten Neutronen sei  $\beta$ . Für eine Kettenreaktion gilt nun mit der Anfangsneutronendichte  $\phi_0$  [n/cm<sup>3</sup>] nach der  $j$ -ten Spaltung:

$$\phi_j = K\phi_{j-1} = \phi_0 K^j$$

Mit der Zykluszeit  $\tau$  und der Gesamtzeit  $t = j\tau$  ergibt sich:

$$\phi_j = \phi_0 K^{t/\tau} = \phi_0 e^{\ln K(t/\tau)}$$

Mit  $\ln K = -\ln(1 - \rho) \approx \rho + \rho^2/2 + \dots$  gilt für  $\rho \ll 1$ :  $\ln K = \rho$ . Somit ergibt sich für die Neutronendichte nach der Zeit  $t$ :

$$\phi(t) = \phi_0 e^{\rho t/\tau}$$

Wir haben also einen exponentiellen Anstieg der Neutronenzahl.

**Schnelle Spaltung:**  $\tau_s \approx 10\text{ns}$ . Ohne Thermalisierung steigt  $\Phi$  nach  $0,5\mu\text{s}$  um  $10^{11}$

**Prompte thermische Spaltung:**  $\tau_p \approx 1\text{ms}$ . Für  $\rho$  ergibt sich ein Wert von  $\rho = 0,01$ .  $\Phi$  steigt also nach  $230\text{ms}$  um den Faktor 10.

**Verzögerte thermische Spaltung** Hier liegt  $\tau$  in etwa bei  $20\text{s}$ . Dieser Bereich ist wichtig für die Regelung des Reaktors.

Damit ergeben sich folgende Möglichkeiten des Reaktorbetriebs:

- $\rho > 0$  ( $K > 1$ ): *überkritisch*; die Leistung steigt schnell an; Vorsicht Explosionsgefahr!  
 $\rho$  kann mit Hilfe von Regelstäben aus einem Material mit hohem n-Einfangsquerschnitt reduziert werden.

- $\rho < 0$ : *unterkritisch*; keine Kettenreaktion; nur zum Ausschalten zu gebrauchen
- $\rho = 0$ : *kritisch*; stationäre Kettenreaktion

Die Anzahl prompter Neutronen ändert sich oft sehr schnell, wodurch die Regelung mit den vergleichsweise langsamen, mechanisch bewegten, Steuerstäben schwierig wird. Man versucht deshalb, die Anzahl der prompten Neutronen so zu halten, dass nun die verzögerten Neutronen mit großer Zeitkonstante zur Regelung herangezogen werden: Der Fall  $\rho = 0$  lässt sich im zeitlichen Mittel aufrechterhalten, wenn  $\rho \ll \beta$ . Dann ist  $K_{\text{eff}} < 1 + \beta$ , d. h. nur  $\beta$  bestimmt die Kritikalität und die Regelung wird wesentlich einfacher.

**Nachwärme.** Das Abschalten des Reaktors bewirkt *nicht* den sofortigen Stop der Energieproduktion, da durch den Zerfall der langlebigen Spaltprodukte noch Wärme entsteht. Es ist also notwendig, den Reaktor nach dem Abschalten nachzukühlen. Ein Reaktor beispielsweise, der lange (z. B. 1 a) in Betrieb war, produziert einen Tag nach der Abschaltung noch 0.5% der vorherigen Leistung.

## Übungen zu Kapitel 12

**Übung 12.1: Radioaktivität.** In der Umgebung des Menschen tritt eine Zahl von radioaktiven Isotopen auf, die zur natürlichen Strahlenbelastung beitragen.

- Kalium 40.** Ein Mensch ( $m = 70 \text{ kg}$ ) enthält durchschnittlich 175 g Kalium. Im natürlichen Isotopengemisch ist  $^{40}\text{K}$  ( $\tau = 1.85 \times 10^9 \text{ Jahre}$ ) nur zu  $1.17 \times 10^{-4}$  enthalten. Mit welcher Aktivität belastet  $^{40}\text{K}$  den Körper?  $^{40}\text{K}$  hat zwei Zerfallswege, Elektroneneinfang mit  $\gamma$ -Emission ( $E_\gamma = 1.46 \text{ MeV}$ ) zu 10.7% und  $\beta^-$ -Zerfall ( $E_\beta = 1.31 \text{ MeV}$ ) zu 89.3%. Berechnen Sie die Jahressdosis. (Annahmen:  $\overline{E_\beta} \approx 1/3 E_\beta$ , die Aktivität sei im Körper gleichverteilt).
- Uran 238 und Radon 222.** In der Zerfallskette von  $^{238}\text{U}$  ( $T_{1/2} = 4.47 \times 10^9 \text{ Jahre}$ ) zu  $^{206}\text{Pb}$  tritt das radioaktive Edelgas  $^{222}\text{Rn}$  auf, das durch  $\alpha$ -Zerfall in  $^{218}\text{Po}$  übergeht ( $T_{1/2}=3.8 \text{ d}$ ). Dieses Gas kann leicht aus Gestein austreten und wird dadurch häufig eingatmet. Berechnen Sie aus der Gleichgewichtskonzentration in einem lange Zeit geschlossenen Raum aus Betonwänden und -decken ( $10 \times 10 \times 4 \text{ m}^3$ ) die Aktivität für  $^{222}\text{Rn}$  ausgehend von einer maximalen Ausgasungstiefe des Betons ( $\rho = 2.5 \text{ g/cm}^3$ ) von 1.5 cm und einem Gewichtsanteil von  $2.5 \times 10^{-6}$  an  $^{238}\text{U}$ .
- Kohlenstoff 14.** Das radioaktive Isotop  $^{14}\text{C}$  ( $T_{1/2}=5730 \text{ a}$ ) wird durch die Reaktion  $^{14}\text{N}(n,p)^{14}\text{C}$  in Stößen von Neutronen der kosmischen Höhenstrahlung mit Stickstoffkernen in der oberen Atmosphäre erzeugt. Es verteilt sich in der Atmosphäre und wird von lebenden Organismen ständig absorbiert ( $c(^{14}\text{C})/c(^{12}\text{C}) \approx 1.2 \times 10^{-12}$ ). Mit dem Tod des Organismus endet dieser Einlagerungsprozeß. Wie kann durch Messung des Anteils von  $^{14}\text{C}$  auf das Alter eines Organismus geschlossen werden? Überlegen Sie sich, welche Materialien mit dieser Methode datiert werden können. Bis zu welcher Altersgrößenordnung

ist diese Methode sinnvoll? Welche Effekte können zu Abweichungen vom rein exponentiellen Zusammenhang zwischen Alter und  $^{14}\text{C}$ -Aktivität führen? Wie kann man diese Effekte in einem gewissen Zeitraum kalibrieren?

**Übung 12.2: Mößbauer-Effekt.** Der erste angeregte Zustand von  $^{57}\text{Fe}$  ( $J^P = 3/2^-$ ) zerfällt mit einer Halbwertszeit von  $9.8 \cdot 10^{-8} \text{ s}$  unter Aussendung eines  $\gamma$ -Quants der Energie 14.4 keV in den Grundzustand ( $J^P = 3/2^-$ ).

- Welche Multipolaritäten der  $\gamma$ -Strahlung können bei diesem Übergang auftreten?
- Wie groß ist die natürliche Linienbreite dieses Übergangs und welche Form hat die Linie? Schätzen Sie die Auswirkungen von Rückstoß und Dopplerverschiebung auf die Energie und die Breite eines von einem freien  $^{57}\text{Fe}$ -Atom emittierten  $\gamma$ -Quants ab.
- Im Jahre 1957 fand R. L. Mößbauer überraschenderweise eine  $\gamma$ -Strahlung mit der vollen Übergangsenergie und mit der natürlichen Linienbreite ([Mö98], [Mö58]), und dies obwohl kein konventioneller Detektor eine Energieauflösung besaß, der mit der natürlichen Linienbreite vergleichbar gewesen wäre. Wie könnte Mößbauer diese Beschränkung umgangen haben? Skizzieren Sie den Aufbau eines solchen Mößbauer-Spektrometers.
- Dieser nach dem Entdecker benannte Effekt beruht darauf, daß das emittierende Atom in einen Festkörper eingebaut und dort relativ stark gebunden ist. Werden bei der Emission keine Gitterschwingungen angeregt, so nimmt der Kristall als Ganzes den Rückstoß auf, der dann aufgrund seiner großen Masse im Vergleich zu einem einzelnen Atom zu vernachlässigen ist. Der Anteil der unverschobenen  $\gamma$ -Emissionen zu allen  $\gamma$ -Emissionen heißt Debye-Waller-Faktor.

Im Einstein-Modell eines Kristallgitters bewegt sich jeder einzelne Kern in einem harmonischen Oszillatorenpotential mit der charakteristischen Frequenz  $\omega_0$ . Berechnen Sie das Matrixelement

$$-\frac{e}{Mc} \left\langle \Psi_f \left| \sum_k e^{-ik \cdot r_k} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{p}_k \right| \Psi_i \right\rangle$$

für einen Strahlungsübergang vom Anfangszustand des Kristalls  $\Psi_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$  auf einen Endzustand  $\Psi_f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ , wobei die Summe über alle Kerne läuft. Führen Sie dazu zunächst die Schwerpunkts- und Relativkoordinaten der Kerne,  $\mathbf{R} = (1/N) \sum_k \mathbf{R}_i$  und  $\rho_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$ , ein und faktorisieren Sie die Wellenfunktion in ein Produkt aus Schwerpunktsbewegung und der internen Bewegung der Kerne:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \psi_{n_x, n_y, n_z}(\mathbf{R}) \phi(\rho_1, \dots, \rho_{N-1}).$$

Der Debye-Waller-Faktor ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeit, daß der Strahlungsübergang den Kristall im Grundzustand läßt. Für die Schwerpunktsbewegung kann daher die Grundzustandswellenfunktion eines dreidimensionalen harmonischen Oszillators,

$$\psi_0(R) = \psi_0(x)\psi_0(y)\psi_0(z) = \left( \frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \right)^{3/4} e^{-m\omega_0 R^2/2\hbar},$$

eingesetzt werden.

- Welche Anwendungen des Mößbauer-Effektes in der Festkörperphysik und Chemie können Sie sich vorstellen?



# Kapitel 13

## Deformierte und angeregte Kerne

### 13.1 Deformierte Kerne

Kerne mit abgeschlossenen Schalen sind *kugelsymmetrisch* und nicht deformiert. Weit weg von abgeschlossenen (d.h. bei halbgefüllten) Schalen polarisieren jedoch die Nukleonen außerhalb einer Schale den Kernrumpf. Das mittlere Kernpotential ist in diesem Fall nicht mehr kugelsymmetrisch und die Kerne sind deformiert.

Ein Maß für die Deformation ist das elektrische Quadrupolmoment. Für eine gegebene Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  ist es definiert als:

$$Q = \int d^3r \underbrace{\rho(\vec{r})}_{\text{Ladungs-}\text{dichte}} \underbrace{(3z^2 - r^2)}_{\sim Y_{20}(\hat{r})} \quad (13.1)$$

Für einen Ellipsoid mit Halbachse  $a$  in  $z$ -Richtung, zwei gleichen Halbachsen  $b$  in  $x$ - und  $y$ -Richtung und konstanter Dichte ist es:

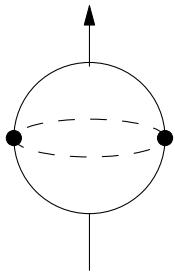
$$Q = \frac{2}{5}Z(a^2 - b^2) \quad \begin{cases} > 0 & a > b & \text{langgestreckt} \\ < 0 & a < b & \text{abgeplattet} \end{cases}$$

Wir definieren den mittleren Radius  $R = (ab^2)^{\frac{1}{3}}$ , die Differenz der Halbachsen  $\Delta R = a - b$ , sowie den Deformationsparameter  $\delta = \Delta R/R$ . Das Quadrupolmoment ist dann in erster Näherung:

$$Q = \frac{4}{5}ZR^2\delta$$

Ein direktes Maß für die Deformation ist, weil unabhängig von der Größe der Ladungsverteilung, das *reduzierte Quadrupolmoment*:

$$Q_{\text{red}} = \frac{Q}{ZR^2} = \frac{4}{5}\delta \quad (13.2)$$



Ein umlaufendes Proton erzeugt bauchiges Gebilde  
Ein umlaufendes Protonloch erzeugt gestrecktes Gebilde

**Abb. 13.1:** Kern mit einzelnen Proton(-Loch)

### 13.1.1 Deformationen im Schalenmodell

Wir betrachten nun einen Kern mit einem einzelnen Proton oder Proton-Loch außerhalb einer abgeschlossenen Schale (Abb. 13.1).

Für den Erwartungswert des Quadrupolmomentes gilt nun:

$$Q_P = \left\langle jl, m=j \middle| 3z^2 - r^2 \middle| jl, m=j \right\rangle = 2\sqrt{\frac{4\pi}{5}} \int d^3r \Psi_{jl,m=j}^*(\vec{r}) r^2 Y_{20}(\hat{r}) \Psi_{jl,m=j}$$
 (13.3)

Es ergibt sich:

$$Q^{(p)} = -\left\langle r^2 \right\rangle \frac{2j-1}{2(j+1)} = -Q^{(p\text{-Loch})} \quad (j = l + 1/2, \text{ sonst } Q^{(p)} = 0) \quad (13.4)$$

Das reduzierte Quadrupolmoment ist dann, bei großem  $Z$ , relativ klein:

$$Q_{\text{red}}^{(p,p\text{-Loch})} = \mp \frac{1}{Z} = \text{einige \%} \quad (13.5)$$

#### Beispiele:

- ${}_{19}^{39}\text{K}$ ,  $Z = 19$ ,  $N = 20$ : doppeltmagisch plus ein Protonloch in  $1d_{3/2}$ -Schale. Hier stimmt das Modell relativ gut:

$$Q^{(\text{exp})}({}^{39}\text{K}) = 5.5 \text{ fm}^2 \quad Q^{(p\text{-Loch})}({}^{39}\text{K}) = 5.0 \text{ fm}^2$$

- ${}_{83}^{209}\text{Bi}$ ,  $Z = 83$ ,  $N = 126$ , doppeltmagisch plus ein Proton in  $1h_{9/2}$ -Schale.

$$Q^{(\text{exp})}({}^{209}\text{Bi}) = -35 \text{ fm}^2 \quad Q^{(p)}({}^{209}\text{Bi}) = -30 \text{ fm}^2$$

Empirische Befunde in Bezug auf Quadrupolmomente:

- Die Kerndeformation ist in der Nähe magischer Zahlen sehr klein,  $Q_{\text{red}} = \frac{4}{5}\delta \dots \text{einige Prozent.}$
- Zwischen abgeschlossenen Schalen kann  $|\delta|$  bis zu 0.4 sein.

## 13.1 Deformierte Kerne

- Die meisten großen Deformationen sind positiv, das bedeutet prolate bzw. zigarrenförmige Deformation. Besonders ausgeprägt ist dies bei den seltenen Erden (sog. Lanthaniden):

$$^{176}_{\text{Lu}} : Q_{\text{red}} = +0.24 \quad ^{167}_{\text{Er}} : Q_{\text{red}} = +0.32$$

- In selteneren Fällen gibt es auch große negative Deformation. Man spricht bei solchen linsenförmigen Kernen auch von oblaten Deformation. Große oblate Deformation gibt es besonders unter den Transuranen und Actiniden. Beispiele:

$$^{123}_{\text{Sb}} : Q_{\text{red}} = -0.09 \quad ^{227}_{\text{Ac}} : Q_{\text{red}} = -0.04$$

**Ursache der Kerndeformation** ist die Restwechselwirkung der Nukleonen in einer Schale. Im Mittel herrscht zwischen den Nukleonen eine anziehende Kraft ( ${}^1\text{S}_0$ -Streuphase bei niedrigen Energien), also genau umgekehrt wie in der Atomphysik. Dort stoßen sich die Elektronen ab, woraus die Hundsche Regel folgt: Es werden zuerst alle Orbitale mit einem Spin gefüllt, wodurch wegen des dann nicht vorhandenen Überlapps die Abstoßung minimal wird.

- Nukleonen mit gleicher Ortswellenfunktion gruppieren sich in Paare mit  $J^P = 0^+$  und  $l_1 = l_2$ ,  $m_1 = -m_2$ ,  $\vec{j}_1 + \vec{j}_2 = 0$ . Hierdurch wird der Überlapp der Wellenfunktionen maximiert und die Kerne gewinnen zusätzliche Stabilität.
- Nukleonpaare besetzen bevorzugt Orbitale mit benachbarten  $m$ , wodurch es zu der Deformation von Kernen mit halbgefüllten Schalen kommt:

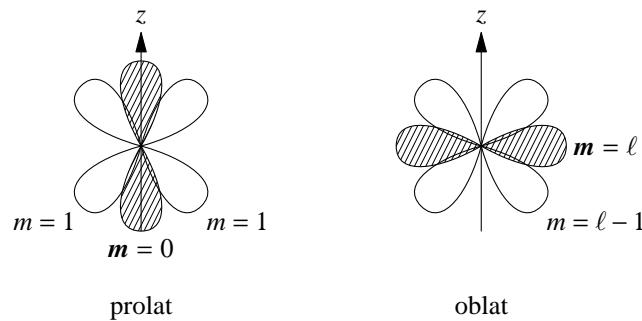


Abb. 13.2: Zustandekommen prolater und oblater Deformation

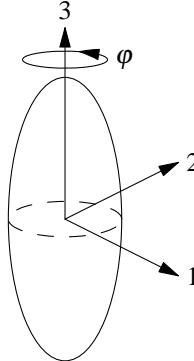
- Drehimpuls und Parität der Kerne werden im allgemeinen durch einzelne überzählige Nukleonen bestimmt:
  - Doppelt gerade (gg) Kerne haben stets einen  $J^P = 0^+$  Grundzustand, da alle Nukleonen gepaart sind und die Paare  $J^P = 0^+$  haben.
  - Bei einfach ungeraden (ug, gu) Kernen wird  $J^P$  durch das letzte ungepaarte Nukleon bestimmt.
  - Bei doppelt ungeraden (uu) Kernen ist keine allgemeine Aussage möglich:  $J^P$  ergibt sich aus der Kopplung von ungepaartem Proton und ungepaartem Neutron.

## 13.2 Rotationszustände

Permanent deformierte Kerne, d. h. solche mit genügend vielen Nukleonen außerhalb abgeschlossener Schalen, besitzen charakteristische Anregungsmuster: Es gibt Serien von Zuständen mit wachsendem Drehimpuls, deren energetischer Abstand linear zunimmt. In Analogie zur Molekülphysik gibt es *Rotationsbanden*, welche durch kollektive Kernanregungen zustande kommen, an denen alle Nukleonen beteiligt sind.

Betrachten wir zunächst deformierte gg-Kerne mit Grundzustand  $J^P = 0^+$  wie beispielsweise  $^{232}_{90}\text{Th}$ ,  $^{238}_{92}\text{U}$ ,  $^{238}_{94}\text{Pu}$ ,  $^{170}_{72}\text{Hf}$ ,  $^{120}_{54}\text{Xe}$ ,  $^{170}_{70}\text{Yb}$ ,  $^{156}_{66}\text{Dy}$  oder  $^{182}_{74}\text{W}$ . Klassisch entsprechen solche Kerne symmetrischen Kreiseln mit den Hauptträgheitsmomenten

$$\Theta_1 = \Theta_2 \equiv \Theta \neq \Theta_3.$$



Allerdings kann bei quantenmechanischen Systemen *keine* kollektive Rotation um eine Symmetriechse auftreten. Heuristisch lässt sich dies folgendermaßen einsehen:

$$J_{\text{rot},3} |\text{axialsymmetrischer Zustand}\rangle = 0, \quad \text{wobei} \quad J_{\text{rot},3} = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

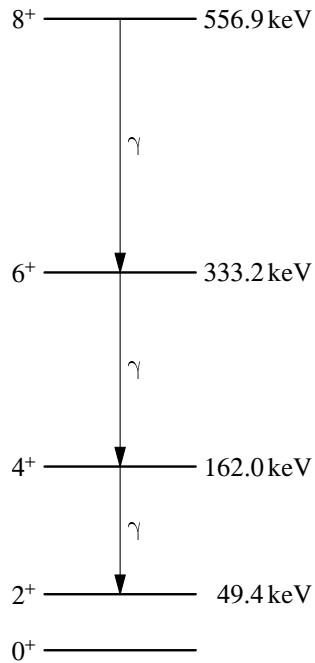
Daraus folgt, dass die kollektive Rotation senkrecht zur Symmetriechse erfolgt. Hamiltonoperator und Energieeigenwerte sind gegeben durch:

$$\mathcal{H}_{\text{rot}} = \frac{\vec{J}_{\text{rot}}^2}{2\Theta} \quad E_J = \frac{J(J+1)}{2\Theta} \quad (13.6)$$

Die entsprechenden Eigenfunktionen sind die Kugelflächenfunktionen  $Y_{J,M}$ . Aus Symmetriegründen sind (bei  $0^+$ -Grundzuständen) nur gerade  $J = 0, 2, 4, \dots$  erlaubt. Nur für diese ist die Wellenfunktion  $Y_{J,M}$  invariant unter Spiegelungen an der 1-2-Ebene. Der Energieabstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Rotationszuständen nimmt linear mit dem Drehimpuls zu:

$$E_{J+2} - E_J = \frac{2J+3}{\Theta} \quad (13.7)$$

**Beispiel:**  $^{232}_{90}\text{Th}$ , deformiert mit  $\delta = 0.25$

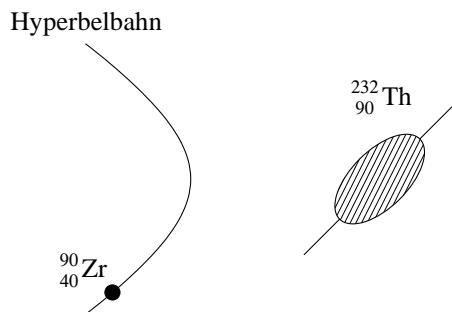


Die Energie wächst nicht genau linear, da das Trägheitsmoment nicht genau konstant ist. Der Kern zeigt nicht das Verhalten des klassischen, starren Rotators. Es gilt:

$$E_J = \frac{J(J+1)}{2\Theta(J)}$$

Zwischen den einzelnen Zuständen kann es Quadrupol-Übergänge (E2) geben, die sich mittels  $\gamma$ -Spektroskopie beobachten lassen. Erzeugen lassen sich die Kernrotationszustände durch Coulombanregung. Dies hat den Vorteil, daß nur die elektromagnetische Wechselwirkung eine Rolle spielt und es folglich keine inneren Kernanregungen geben kann. Experimentell erreicht man dies durch Beschuß mit Schwerionen, wobei die Schwerpunktsenergie kleiner als die Coulombbarriere sein muß:

$$E_{\text{CMS}} < \frac{Z_1 Z_2 \alpha}{R_1 + R_2}$$

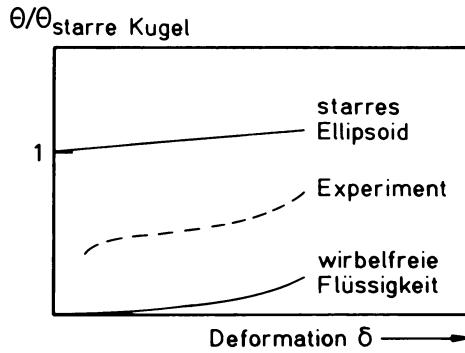
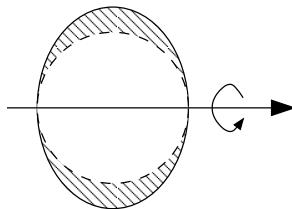
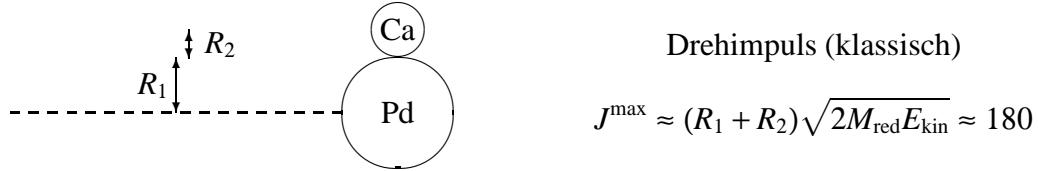


Durch die Annäherung wird ein schnell veränderliches elektrisches Feld verursacht ( $\langle J' | \vec{j} \cdot \vec{A} | J \rangle$ ), wodurch Einzelanregungen bis ca. 1 MeV möglich werden (entspricht  $J \approx 60$ ).

Um Rekorde in Hochspin-Anregungen zu bekommen, werden auch Fusionsreaktionen benutzt, wie beispielsweise



Ab  $E_{\text{kin}} = 200$  MeV können  $^{48}_{20}\text{Ca}$ -Kerne die Coulombbarriere überwinden.

**Abb. 13.3:** Trägheitsmoment deformierter Kerne**Abb. 13.4:** Mit suprafluidem Helium gefülltes Ei. Nur die Ausbeulung des Eies trägt zum Trägheitsmoment bei.

Experimentell werden  $J^{\max} \approx 60$  erreicht.

**Trägheitsmoment der Kerne:**  $\Theta$  kann aus dem Abstand der Energieniveaus in der Rotationsbande bestimmt werden.

Kerne verhalten sich wie Eierschalen, die mit einem Gemisch aus einer normalen und einer superfluiden Komponente gefüllt sind. Die superfluide Komponente der Kernmaterie wird durch Nukleonpaare mit  $J^P = 0^+$  gebildet, welche nicht an der Rotation teilnehmen. Bei größerer Deformation sind mehr Nukleonen ungepaart.

$\Theta$  ist innerhalb einer Rotationsbande nicht konstant sondern wächst mit zunehmendem Drehimpuls (zunehmender Winkelgeschwindigkeit), da mehr und mehr Nukleonpaare mit  $J^P = 0^+$  aufgebrochen werden. Bei großen Drehimpulsen nähert sich das Trägheitsmoment des Kerns dem eines starren Körpers.

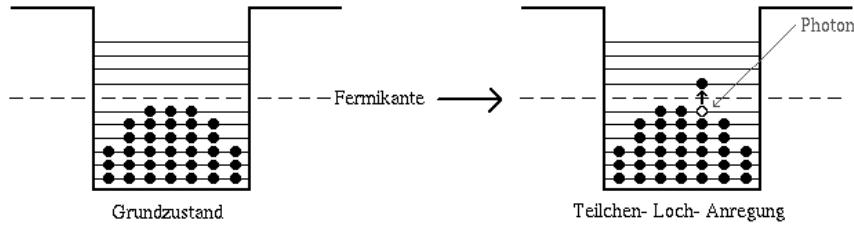


Abb. 13.5: Teilchen-Loch-Anregung im Atomkern

## 13.3 Kollektive Dipolschwingungen

### 13.3.1 Elektrische Dipolanregungen im Schalenmodell

Für den Hamiltonoperator der elektromagnetischen Wechselwirkung bei der Photonen-Absorption gilt:

$$\mathcal{H}_W = - \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Für die Absorption oder Emission einer elektromagnetischen Welle gilt mit dem transversalen Polarisationsvektor  $\vec{\epsilon}$  des Photons:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = N_\gamma \vec{\epsilon} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} = \vec{A}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

Die Stromdichte für ein System von punktförmigen Nukleonen ist:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^A e_i \delta^3((\vec{r} - \vec{r}_i) \vec{v}_i) \quad , \quad \vec{v}_i = \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}_i}{M}$$

Hierbei ist  $e_i$  die Ladung des  $i$ -ten Nukleons. Weiterhin gilt mit dem Kernhamiltonoperator  $\mathcal{H}$  ( $\approx \mathcal{H}$  im Schalenmodell>):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, \vec{r}]$$

Für das Matrixelement des Übergangs gilt nun:

$$\mathcal{M}_{f0} = \langle \Psi_f | \mathcal{H}_W | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_f | \mathcal{H}_W(t=0) | \Psi_0 \rangle e^{-i\omega t}$$

Dann besagt Fermis goldene Regel:

$$W_{0 \rightarrow i} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \Psi_f | \mathcal{H}_W(t=0) | \Psi_0 \rangle \right|^2 \rho_i$$

mit der Dichte der Endzustände  $\rho_i$ . Berechnen wir nun das Matrixelement (mit  $\hbar \equiv 1$ ).

$$\tilde{\mathcal{M}}_{f0} = i \sum_i e_i \left\langle \Psi_f \left| [\mathcal{H}, \vec{r}_i] \cdot \vec{A}(\vec{r}_i, t=0) \right| \Psi_0 \right\rangle$$

In der Dipolnäherung gilt nun:

$$\vec{A}(\vec{r}) = N_\gamma \vec{\epsilon} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = N_\gamma \vec{\epsilon} (1 + i\vec{k} \cdot \vec{r} + \dots)$$

Mit einem typischen Kernradius  $R$ , der Wellenzahl eines Photos  $k = \omega/c$  und typischen Energien von  $\hbar\omega \lesssim 20\text{MeV}$  ergibt sich:

$$kR \approx \frac{1}{10} \text{fm}^{-1} \cdot R \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = N \vec{\epsilon}$$

Damit vereinfacht sich  $\mathcal{M}_{f0}$  zu

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{f0} &= iN_\gamma \sum_i e_i \left\langle \Psi_f \left| [\mathcal{H}, \vec{r}_i \cdot \vec{\epsilon}] \right| \Psi_0 \right\rangle = iN_\gamma \sum_i e_i (E_f - E_i) \left\langle \Psi_f \left| \vec{r}_i \cdot \vec{\epsilon} \right| \Psi_0 \right\rangle = \\ &= iN_\gamma \omega \left\langle \Psi_f \left| \vec{D} \cdot \vec{\epsilon} \right| \Psi_0 \right\rangle \end{aligned}$$

mit dem Dipoloperator  $\vec{D} = \sum_i e_i \vec{r}_i = \sum_{p=1}^Z e \vec{r}_p$ , da nur Protonen Ladung tragen.

**Präzise Definition des Dipoloperators** unter Berücksichtigung der Translationsinvarianz (und damit der Impulserhaltung). Mit dem Schwerpunkt  $\vec{R}$  gilt:

$$\vec{D} = \sum_{p=1}^Z e (\vec{r}_p - \vec{R}) \quad \vec{R} = \sum_{i=1}^A \frac{M_i \vec{r}_i}{\sum_i M_i} = \sum_{i=1}^A \frac{M_i \vec{r}_i}{M}$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\vec{D} = e \left( \frac{N}{A} \sum_{p=1}^Z \vec{r}_p - \frac{Z}{A} \sum_{n=1}^N \vec{r}_n \right)$$

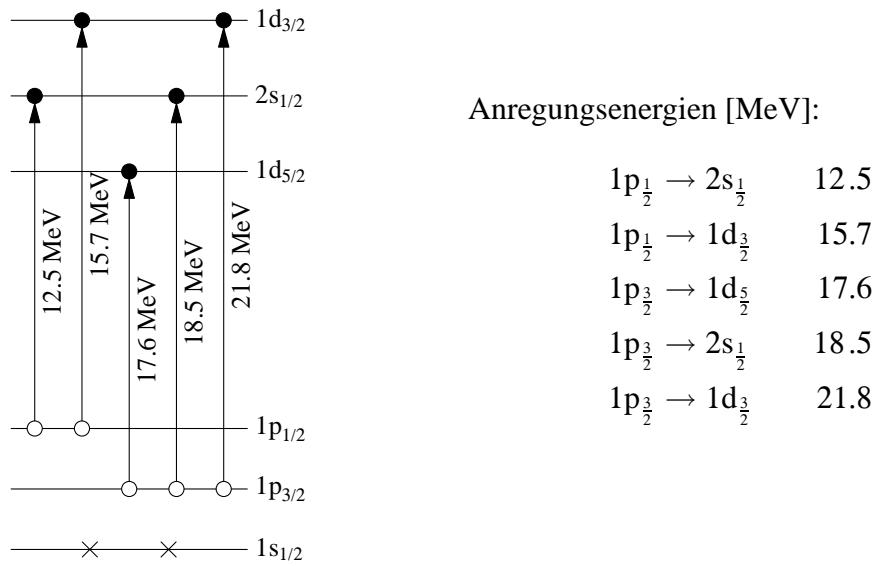
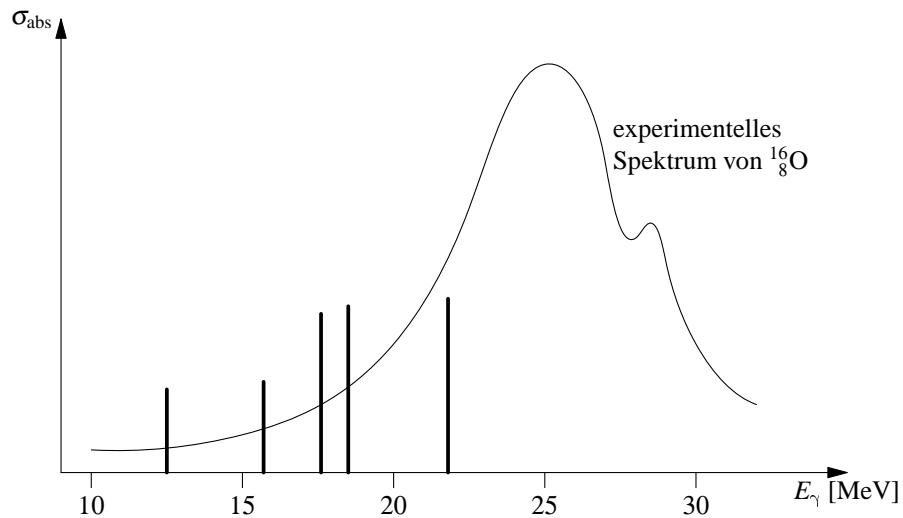
(13.8)

Man kann nun „effektive“ Ladungen für Neutronen und Protonen einführen:

$$e_p^{eff} = \frac{N}{A} e \quad e_n^{eff} = -\frac{Z}{A} e$$

Als Beispiel sind die Anregungen des Kerns  $^{16}\text{O}$  in Abb. 13.6 mit den zugehörigen Energien abgebildet. Für die Übergänge gibt es folgende Auswahlregeln:

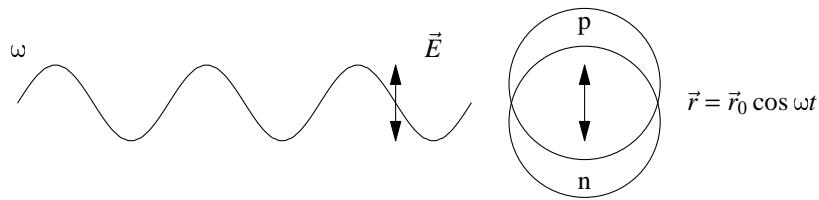
- Die Paritäten von Anfangs- und Endzustand sind verschieden. (Der Dipoloperator hat negative Parität.)

**Abb. 13.6:** Dipolanregungen in  $^{16}\text{O}$ **Abb. 13.7:**  $\gamma$ -Absorptionsspektrum – theoretisch und experimentell bei  $^{16}\text{O}$

- Das Photon trägt Drehimpuls  $j = 1$  weg.

Also  $|l_i - l_f| = \Delta l = 1$  und  $|j_i - j_f| = \Delta j = 0, 1$ .

Als Beispiel betrachten wir die Dipolanregungen von  $^{16}_8\text{O}$ , die in Abb. 13.6 dargestellt sind. Man erwartet folglich, wie in Abb. 13.7 gezeigt, ein Spektrum mit fünf scharfen Linien. Die gemessene  $\gamma$ -Absorptionswahrscheinlichkeit für  $^{16}_8\text{O}$  konzentriert sich jedoch in einer (energetisch höherliegenden) Resonanz, der *Dipolriesenresonanz*. Qualitativ lässt sich diese dadurch erklären, dass Protonen und Neutronen kollektive Schwingungen gegeneinander ausführen:



### 13.3.2 Kollektive Zustände im Schalenmodell

Zu einer genaueren Begründung gelangen wir, wenn wir den Kernrumpf von  $^{16}_8\text{O}$  (gefüllte  $1s_{\frac{1}{2}}$ ,  $1p_{\frac{3}{2}}, 1p_{\frac{1}{2}}$ -Schalen) und seine Dipolanregungszustände (Teilchen-Loch-Zustände) betrachten:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \left|1p_{\frac{1}{2}}^{-1} 2s_{\frac{1}{2}}\right\rangle \\ |\psi_2\rangle &= \left|1p_{\frac{1}{2}}^{-1} 1d_{\frac{3}{2}}\right\rangle \\ |\psi_3\rangle &= \left|1p_{\frac{3}{2}}^{-1} 1d_{\frac{5}{2}}\right\rangle \\ |\psi_4\rangle &= \left|1p_{\frac{3}{2}}^{-1} 2s_{\frac{1}{2}}\right\rangle \\ |\psi_5\rangle &= \left|1p_{\frac{3}{2}}^{-1} 1d_{\frac{3}{2}}\right\rangle \end{aligned}$$

Dies sind die Eigenzustände des ungestörten 1-Teilchen-Schalenmodell-Hamiltonoperators

$$\mathcal{H}_0|\psi_i\rangle = E_i|\psi_i\rangle \quad i = 1, \dots, N_Z,$$

wobei hier  $N_Z = 5$  ist. Bei mittelschweren Kernen gibt es  $N_Z = 10 \dots 20$  Teilchenlochzustände. Wegen der Gruppierung der Energieniveaus in Schalen sind die Energieeigenwerte  $E_i$  fast entartet.

Die Restwechselwirkung der Nukleonen, d. h. die Korrektur zum mittleren Potential, führt zu einer Teilchen-Loch-Wechselwirkung  $V$ . Diese verursacht eine Mischung der Einteilchenzustände und es entstehen kollektive Anregungen. Dies wollen wir nun in einem schematischen Modell verdeutlichen:

$$\mathcal{H} |\psi\rangle = \underbrace{\left( \mathcal{H}_0 + V \right)}_{\text{totaler Hamiltonoperator}} |\psi\rangle = E |\psi\rangle$$

↑  
Teilchen-  
Loch-WW

Im begrenzten Modellraum der  $|\psi_i\rangle$  hat die Wellenfunktion  $|\psi\rangle$  die Form:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N_Z} c_i |\psi_i\rangle \quad (13.9)$$

Die Säkulargleichung lautet dann:

$$\begin{pmatrix} E_1 + V_{11} & V_{12} & \cdots \\ V_{21} & E_2 + V_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (13.10)$$

Zur Vereinfachung machen wir die Annahme, dass die Restwechselwirkung für alle Teilchen-Loch-Zustände gleich ist:

$$\langle \psi_i | V | \psi_j \rangle = V_{ij} = V_0$$

Dann lautet die  $i$ -te Gleichung von (13.10):

$$E_i c_i + V_0 \sum_{j=1}^{N_Z} c_j = E c_i$$

Daraus erhält man zunächst

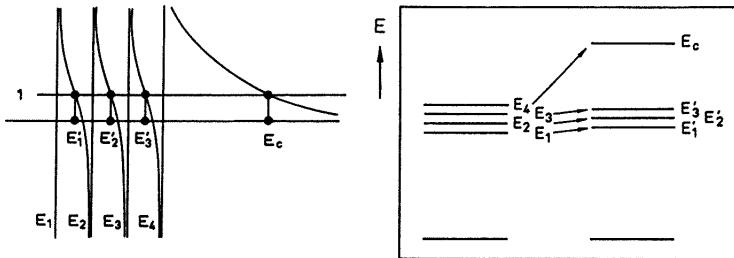
$$c_i = \frac{V_0}{E - E_i} \sum_{j=1}^{N_Z} c_j$$

und dann durch Summation über alle  $i$  und division durch  $\sum_j c_j$ :

$$1 = \sum_{i=1}^{N_Z} \frac{V_0}{E - E_i} \quad (\text{Pole bei } E = E_i) \quad (13.11)$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch graphische Lösung die neuen Energien  $E'_i$  (Abb. 13.8). Man sieht, daß diese benachbart zu den ungestörten  $E_i$  liegen, mit Ausnahme eines kollektiven Zustandes mit stark verschobener Energie  $E_c$ . Je nach Teilchen-Loch-Wechselwirkung liegt dieser Zustand ober- oder unterhalb der Einteilchenzustände:

Teilchen-Loch-Wechselwirkung:		kollektiver Zustand:
abstoßend	$V_0 > 0$	oberhalb der Einteilchenzustände
anziehend	$V_0 < 0$	unterhalb der Einteilchenzustände



**Abb. 13.8:** Graphische Lösung von (13.11) und Veranschaulichung der Verschiebung der Energieniveaus (aus [Po96]).

Eine quantitative Abschätzung mit  $E_i \approx E_0$  für alle  $i$  ergibt aus (13.11):

$$1 = \frac{N_Z V_0}{E_c - E_0} \quad \Rightarrow \quad E_c = E_0 + N_Z V_0 \quad (13.12)$$

Die Energieverschiebung  $E_c - E_0$  des kollektiven Zustandes ist also proportional zur Zahl der (fast) entarteten Zustände. Experimentell findet man, daß die Energie der Riesenresonanz etwa doppelt so groß wie der Schalenabstand  $E_0$  ist. Zusammen mit (13.12) erhält man daraus:

$$N_Z V_0 \approx E_0 \quad (13.13)$$

Hin zu schwereren Kernen nimmt zwar die effektive Restwechselwirkung ab, dafür nehmen aber mehr Zustände an der kollektiven Bewegung teil.

Für den kollektiven Zustand sind die  $c_i$  nahezu unabhängig von  $i$  (wegen  $E_i \approx E_0$ ).

$$c_i^{(c)} = \frac{V_0}{E_c - E_i} \sum_{j=1}^{N_Z} c_j$$

Daraus folgt für die Wellenfunktion (13.9):

$$|\psi_c\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_Z}} \sum_{i=1}^{N_Z} |\psi_i\rangle$$

Alle Einteilchenzustände überlagern sich also konstruktiv mit gleicher Amplitude. Bei den anderen Zuständen mit Energien  $E'_i$  ist ein  $c_i$  groß, während die übrigen klein sind und unterschiedliche Vorzeichen besitzen. Die Amplituden überlagern sich destruktiv.

**Abschätzung der Dipolübergangswahrscheinlichkeit.** Die exakte Form des Dipoloperators  $\tilde{D}$  haben wir schon in (13.8) bestimmt. Mit dem Konzept der effektiven Massen lässt sich die Anregung nun so beschreiben, das die Protonen und Neutronen in verschiedene Richtungen ausgelenkt werden, der Schwerpunkt aber in Ruhe bleibt.

Das Dipolübergangsmatrixelement für den kollektiven Anregungszustand ist:

$$|D_{\text{coll}}|^2 = \left| \langle \psi_c | D_z | 0 \rangle \right|^2 = \frac{1}{N_Z} \left| \sum_{i=1}^{N_Z} \underbrace{\langle \psi_i | D_z | 0 \rangle}_{\substack{\text{Teilchen-Loch-} \\ \text{Vakuum} \\ \equiv \text{Grundzustand}}} \right|^2 = \frac{1}{N_Z} |N_Z \cdot D_{1\text{-Teilchen}}|^2 = N_Z \cdot |D_{1\text{-Teilchen}}|^2$$

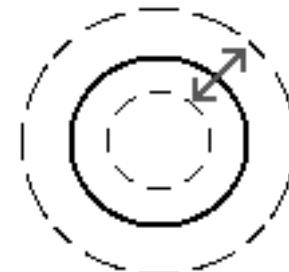
einfachheitshalber  
gleich für alle  $i$

Man erkennt, daß die Anregungsstärke umverteilt ist: Durch die Mischung der Zustände gibt es nicht die Anregung von  $N_Z$  verschiedenen Übergängen mit Stärke  $|D_{1\text{-Teilchen}}|^2$ , vielmehr steckt die gesamte Übergangsstärke  $N_Z \cdot |D_{1\text{-Teilchen}}|^2$  im kollektiven Zustand, welcher die kohärente Summe aller Einteilchen-Dipolanregungsstärken darstellt.

### 13.3.3 Weitere Typen von kollektiven Anregungen

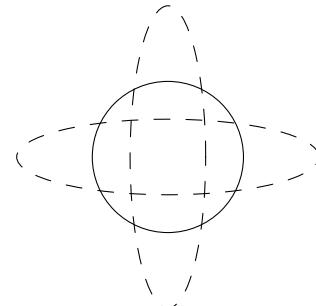
- Monopol-Riesenresonanzen ( $J^P = 0^+$ )

Hier spielt die Kompressibilität der Kerne eine Rolle.  
Bei den Monopolschwingungen ändert sich nur der Radius des Kerns, nicht aber die Geometrie.



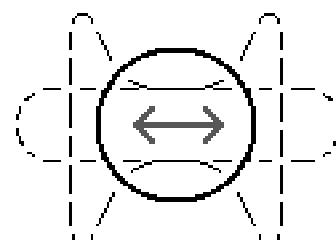
- Quadrupolriesenresonanzen ( $J^P = 2^+$ )

Dabei handelt es sich um kollektive Formschwingungen bzw. im Schalenmodell um eine gleichphasige Überlagerung von E2-Anregungen in die übernächste Schale.  
Hier gilt:  $\hat{O}_2 \propto Y_{2m}(\hat{r})$ .



- Oktupolriesenresonanzen: ( $J^P = 3^-$ )

Durch niedrig liegende  $3^-$ -Zustände in  $^{15}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{208}\text{Pb}$ , ... kommt es zu kollektiven Oktupolvibrationen. Die Teilchen-Loch-Wechselwirkung ist in diesem Fall anziehend. hier gilt:  $\hat{O}_3 \propto Y_{3m}(\hat{r})$



- Gamow-Teller-Riesenresonanzen

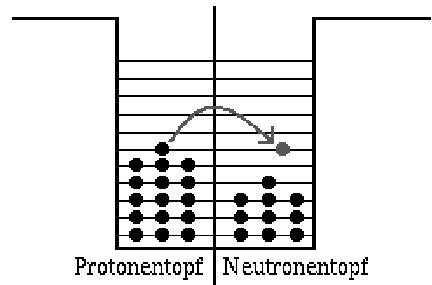
$$\propto \vec{\sigma} \tau^\pm \quad p \uparrow \leftrightarrow n \downarrow$$

Hier lautet der zugehörige Operator:  $\hat{G}T = \vec{\sigma} \tau_\pm$ .

Teilchen-Loch Anregung z.B.:  $|p \uparrow n^{-1} \downarrow\rangle$

Teilchen-Loch-Wechselwirkung:  $V = \lambda \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$

Hier schwingen Protonen mit Spin up gegen Neutronen mit Spin down.



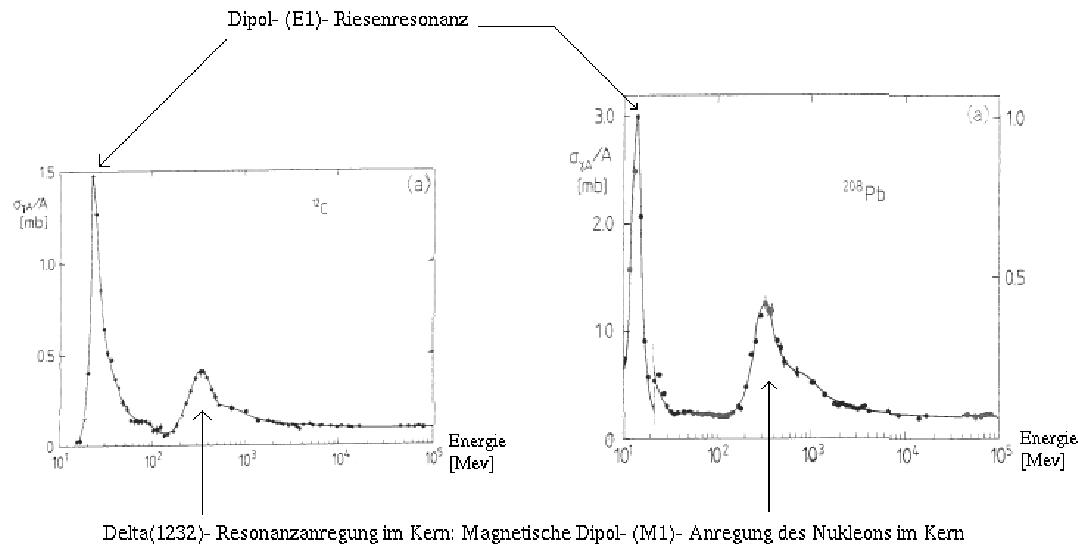


Abb. 13.9: Wirkungsquerschnitte für die Photonen-Absorption an  $^{12}\text{C}$  und  $^{208}\text{Pb}$

## 13.4 Höhere Energien

Betrachtet man die Wirkungsquerschnitte der Photon-Absorption an Kernen bei hohen Energien, so sieht man neben der Dipolriesenresonanz noch weitere Resonanzen (Abb. 13.9).

Die zweite deutlich Sichtbare Resonanz ist die  $\Delta(1232)$ -Resonanz. Dies ist eine magnetische Dipol(M1)-Anregung eines Nukleons im Kern.

# Kapitel 14

## Kernreaktionen

### 14.1 Übersicht

Kernreaktionen lassen sich anhand von Einschussenergie und Stoßparameter klassifizieren. Dabei gibt die Einschussenergie die für die Reaktion relevante Energieskala an:

$$E_A = \frac{E_{\text{tot}}}{A}$$

Sie ist die für Beschleuniger relevante Größe, da die in diesen erreichbare Maximalenergie durch die Steifigkeit der Teilchen im Magnetfeld begrenzt ist. Zentrifugalkraft und Lorentzkraft müssen sich die Waage halten. Für vollständig ionisierte Kerne ergibt sich wegen  $Z/A \approx 1/2$ :

$$E_A^{\max} \approx \frac{1}{2} E_{\text{Proton}}$$

So werden für Pb im SPS am CERN (Fixed-Target) zur Zeit ca. 200 GeV/Nukleon erreicht, am RHIC (Collider) werden für Au auch 200 GeV erreicht. Schematisch ist die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts in Abb. 14.1 gezeigt (GSI:  $\approx 1$  GeV bei  $U^{72+}$ ).

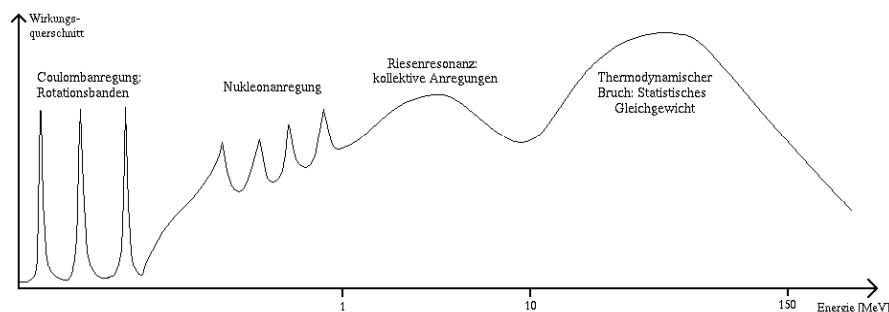


Abb. 14.1: Schematisches Anregungsspektrum für Kerne

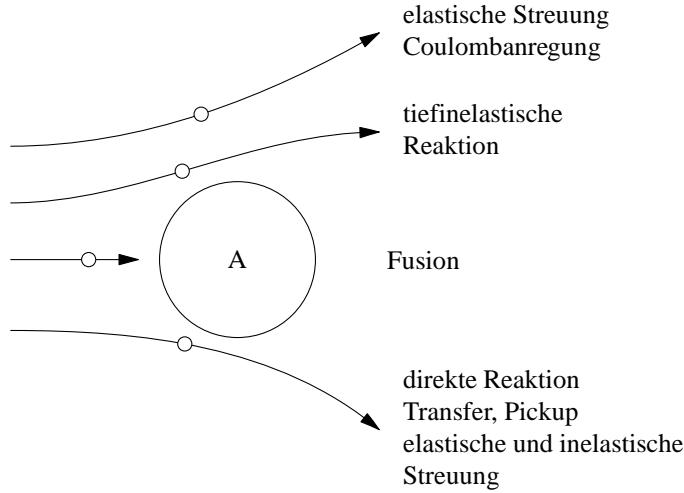
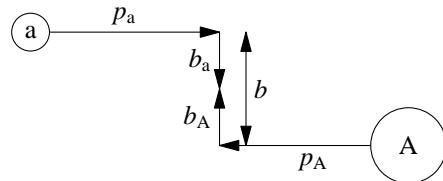


Abb. 14.3: Anschauliche Interpretation des Stoßparameters

Energie $E/A$	Art der Kernreaktion
100 GeV	Quark-Gluon-Plasma
1 GeV	Kernverdichtung ( $\Delta$ -Anregung, hadronische Materie)
100 MeV	Projektilfragmentation
10 MeV	vollständige Fusion
1 MeV	Transfer-Reaktionen: Pick-up- und Stripping-Reaktionen
25 meV	Einfang von thermischen Neutronen

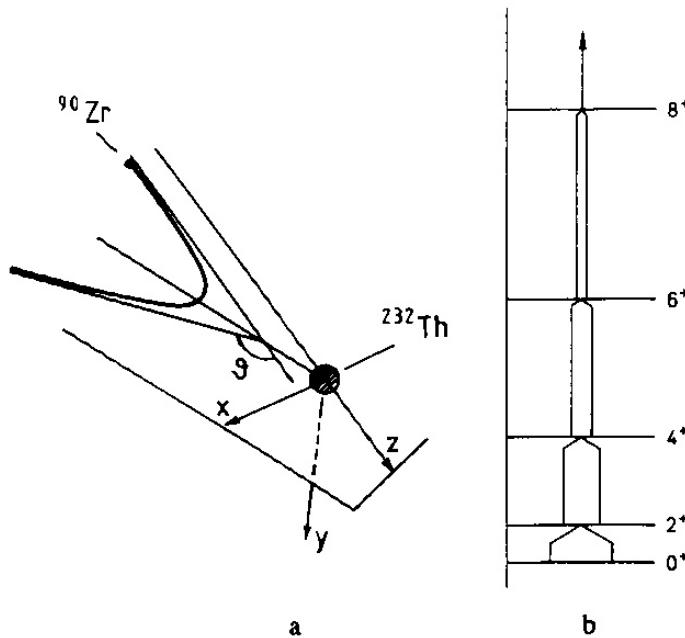
Tab. 14.1: Kernreaktionen bei verschiedenen Energien

Eine physikalische Größe, die Kernreaktionen charakterisiert, ist der Stoßparameter in einer Reaktion. Die Definition des Stoßparameters ist in Abb. 14.2 dargestellt:  $b = b_a + b_A$ .

Abb. 14.2: Definition des Stoßparameters: Im Schwerpunktsystem ist  $p_a = p_A$ 

Bei niedrigen Energien kann der Bahndrehimpuls klassisch berechnet werden und ist direkt mit dem Stoßparameter verknüpft. Für den Drehimpuls und den geometrischen Wirkungsquerschnitt gelten dann:

$$L = b \cdot p_a^{\text{CM}} \quad \frac{d\sigma}{db} = 2\pi b = 2\pi \frac{L}{p_a}$$



**Abb. 14.4:** (a) Die Kinematik eines Schwerionenstoßes am Beispiel der Reaktion  $^{90}\text{Zr} + ^{232}\text{Th}$ . (b) Schematische Darstellung der vielfachen Coulomb-Anregung einer Rotationsbande. Durch sukzessive Quadrupolanregung werden die Zustände  $2^+, 4^+, 6^+, 8^+ \dots$  mit abnehmender Intensität bevölkert (aus [Po96])

## 14.2 Coulombanregung

Durch die Coulombanregung können hoch angeregte Reaktionszustände in Schwerionenkolissionen erzeugt werden (Abb. 14.4).

Wichtige Voraussetzungen sind:

- $R$  muss größer als die Reichweite der Kernkraft sein und
- die Energie muss kleiner als die Coulombschwelle sein (d.h. keine direkten Kernkräfte):

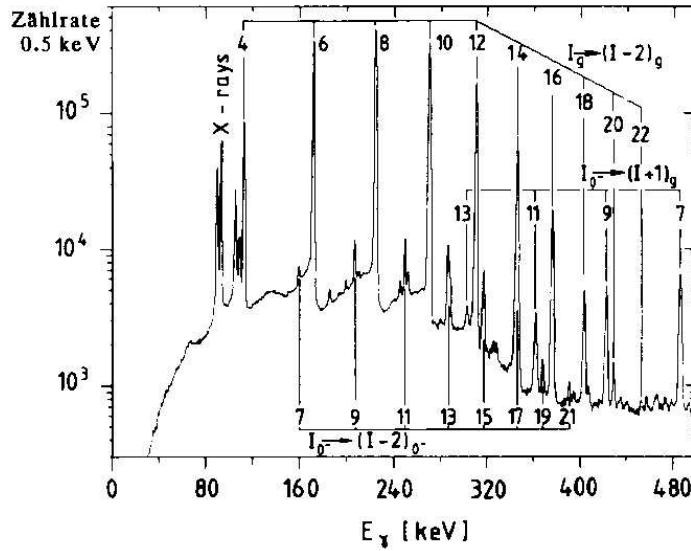
$$E < E_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{R_1 + R_2}$$

Für das Beispiel in Abb. 14.4 gilt:

$$E_{cm} = \frac{A^{\text{Th}}}{A^{\text{Th}} + A^{\text{Zr}}} E_{\text{Zr}} \approx 300 \text{ MeV} \approx E_C$$

Die Coulombablenkung erzeugt ein zeitlich sehr schnell veränderndes elektrisches Feld, welches über die Beiträge hoher Frequenzen im Kern Einzelanregungen bis zu 1MeV induzieren kann. Spektroskopische Informationen erhält man über den Nachweis des Photons, welches beim Zerfall des angeregten Zustandes emittiert wird, betrieben.

Für die Drehimpulse gilt bei  $\Delta I = 2$  ( $I$  ist die Rotationsquantenzahl):



**Abb. 14.5:** Photonenspektrum eines Coulomb-angeregten  $^{232}\text{Th}$ -Kerns mit Hilfe eines Ge-Detektors (aus [Ko88])

$$I(I+1) - (I-2)(I-1) = I^2 + I - I^2 + 3I - 2 = 4I - 2 = 2(2I - 1) .$$

Man erwartet also im Rotationsspektrum Photonenlinien mit Energien  $E_\gamma \propto 2(2I - 1)$ , die den Abständen der Energieniveaus  $2(2I - 1)$  entsprechen. Da die Energie der Photonen proportional zu  $I$  ist, sind für verschiedene  $I = 0, 2, 4, \dots$  die Linien äquidistant.

Es treten aber auch einige Abweichungen auf, da die Energie der Photonen zusätzlich über  $E_\gamma \propto 1/\Theta$  mit dem Trägheitsmoment verknüpft ist. Dieses kann mit wachsendem  $I$  auch zunehmen (oder abnehmen).

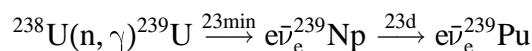
Insgesamt erkennt man im Beispiel der Abb. 14.5 drei Serien zusammengehöriger Linien, wobei die stärksten Linien Übergängen in der Grundzustandsrotationsbande entsprechen. Die beiden anderen Banden sind stark unterdrückt und bauen auf angeregten Kernzuständen auf.

### 14.3 Einfang Reaktionen

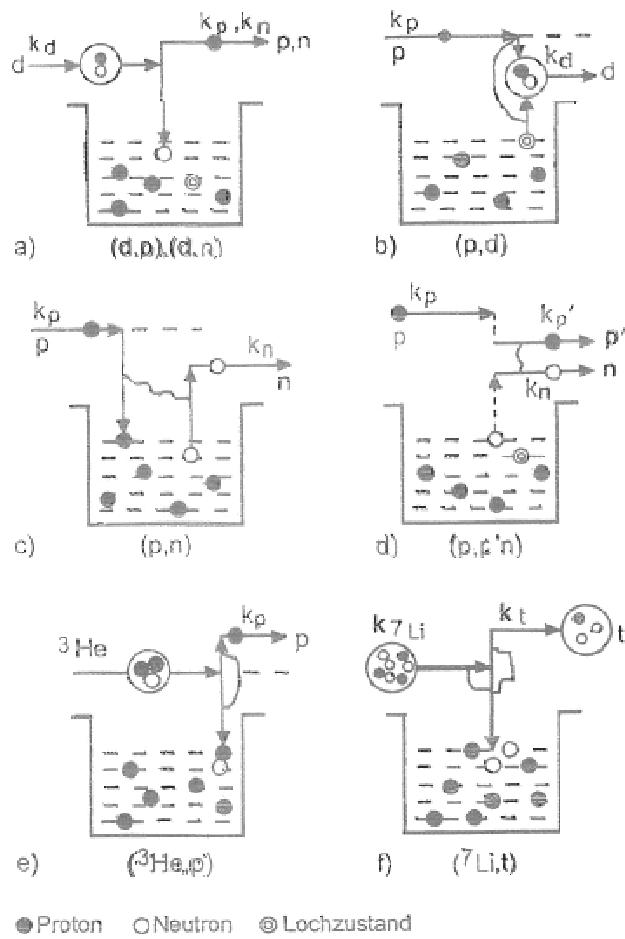
Durch **n-Einfang** (siehe auch Abschnitt 11.6.3) können neutronenreiche Kerne erzeugt werden:



Zu diesen klassischen Reaktionen gehören auch die sogenannten Brutreaktionen.



## 14.4 Transfer Reaktionen



**Abb. 14.6:** Mögliche Transfer-Reaktionen

E. Fermi bekam 1938 den Nobelpreis<sup>1</sup> für die Entdeckung solcher n-induzierten Kernreaktionen. Die dabei erzeugten  $\gamma$  kann man dann spektroskopisch untersuchen. n- und p-Einfangreaktionen, d. h. (n,  $\gamma$ ) und (p,  $\gamma$ ), sind deshalb wichtig für die Kernspektroskopie und spielen außerdem bei astrophysikalischen Prozessen eine wichtige Rolle (s-, r-, p-Prozesse).

## 14.4 Transfer Reaktionen

Bei einem streifenden Einfall mit

$$l = \hbar \cdot k \cdot b \quad b \approx R_{\text{Projekttil}} + R_A$$

kommt es zu einem Nukleonen-Transfer zwischen Projektil und Target (Abb. 14.6)

Man unterscheidet zwischen zwei Möglichkeiten:

<sup>1</sup><http://www.nobel.se/laureates/physics-1938.html>

### 1. Stripping-Reaktionen:

Eine typische Reaktion ist (d,p), d. h. ein vorbeifliegendes Neutron wird im Target eingefangen (bei Energien zwischen 1 - 10 MeV).

### 2. Pick-up-Reaktionen:

Typische Reaktionen sind ( ${}^3\text{He}, \alpha$ ), (d,t), ... Es wird also ein Neutron in das Projekttil eingebaut, bzw. ein Neutron aus dem Target entfernt (Einbau von "Löchern").

#### 14.4.1 Stripping-Reaktion

Mit der Stripping-Reaktion  ${}^{76}\text{Se}(\text{d},\text{p}){}^{77}\text{Se}$  kann ein 43. Neutron in Selen eingebaut werden. Beobachtet man die dabei emittierten Protonen, so kann man mit einer primitiven Näherung herausfinden, welche Niveaus das Neutron aufnehmen können. Dazu betrachten wir die Wellenvektoren und Drehimpulse in der Reaktion



Dabei ist  $k$  der Impulsübertrag. Mit dem Cosinus-Satz kann man nun folgende Abschätzung machen:

$$\cos \theta = \frac{k_p^2 + k_d^2 - \frac{l(l+1)}{b^2}}{2k_p k_d}$$

Hieraus erhält man eine Zuordnung von Streuwinkel und übertragenem Drehimpuls:

$$\begin{array}{cccccc} l & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \theta & = & 19^\circ & 34^\circ & 49^\circ & 64^\circ & 81^\circ \end{array}$$

Für  $E_d = 7.8 \text{ MeV}$  und  $E_p = 13 \text{ MeV}$  ergeben sich experimentell Peaks bei  $l = 1$  und  $l = 4$ . Das Proton ist deshalb so schnell, weil der Einfang eines Neutrons Bindungsenergie freigibt, die dann auf das Proton übertragen wird. Mögliche Niveaus für das Neutron sind also  $g_{9/2}$  ( $l = 4$ ) und  $p_{1/2}$  ( $l = 1$ ).

Quantenmechanisch lässt sich mit gestörten ebenen Wellen das Energieschema n-reicher Kerne berechnen. Dieses Verfahren nennt man auch DWBA: Distorted wave Born approximation.

Bei Transfer Reaktionen ist die Energie des Projektils wesentlich größer als die Bindungsenergie:

$$p_{\text{Projektil}} \cdot c \gg E_{\text{Bindung}}$$

Der Restkern des Projektils fliegt also (fast) ungestört weiter. Für die qualitative Beschreibung der Reaktion folgt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{V^2 p^2 dp}{(2\pi\hbar)^2 dE} \frac{1}{V_{\text{Projektil}}}$$

Wir betrachten nun die Reaktion  $^{16}\text{O}(\text{d},\text{p})^{17}\text{O}$  mit einem Deuteron als Projektil. Mit der Wechselwirkung der Stripping-Reaktion  $U_{n,p}$  ergibt sich:

$$M_{fi} = \left\langle \psi_f \middle| U_{n,p} \middle| \psi_i \right\rangle = \int \psi_{^{17}\text{O}}^* \psi_{\text{p}}^* V \psi_{\text{d}} \psi_{^{17}\text{O}} d^3 r$$

In der Bornschen-Näherung werden für schwache Wechselwirkungen (wie hier zwischen  $d$  und  $^{16}\text{O}$ , bzw. zwischen  $p$  und  $^{17}\text{O}$ ) die Teilchen durch ebene Wellen beschrieben. Damit ergibt sich für die Gesamtwellenfunktion:

$$\psi_i = \phi_A \phi_{\text{d}} e^{i\vec{p}_{\text{d}} \cdot \vec{r}_{\text{d}}/\hbar} \quad \psi_f = \phi_{A+1} e^{i\vec{p}_{\text{p}} \cdot \vec{r}_{\text{p}}/\hbar}$$

Dabei beschreibt  $\phi_{\text{d}}$  die innere Struktur des Deuterons und  $\phi_A$  bzw.  $\phi_{A+1}$  die Wellenfunktion des Anfangs- bzw. Endzustandes des Nukleons. Wir betrachten nun die Bevölkerung von Zuständen, bei denen sich die Nukleonenzustände kaum ändern, dann gilt:

$$\phi_{A+1} = \phi_A \psi_n$$

Hierbei sei  $\psi_n$  eine Schalenmodell-Wellenfunktion des Neutrons. Wir beschreiben die Stripping Reaktion via eines kurzreichweiten Potentials  $U_{n,p}$ , für welches wir

$$U_{np}(r_n, r_p) = U_0 \delta(r_n - r_p)$$

ansetzen.

Hierbei nehmen wir an, dass die Wechselwirkung des auslaufenden Teilchens mit dem Kern die Wellenfunktion des auslaufenden Teilchens beeinflusst (DWBA), aber *nicht* die Wellenfunktion des Kerns selbst.

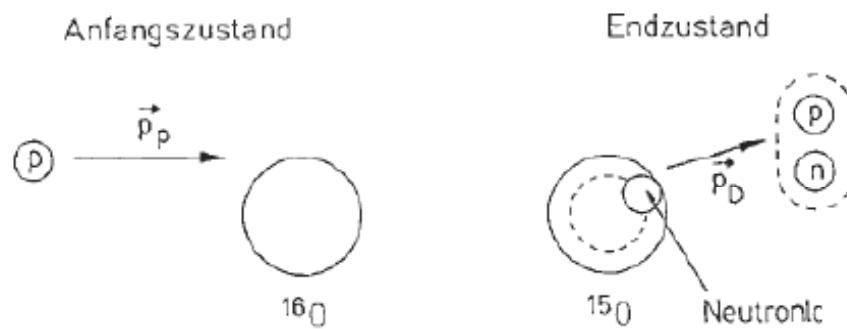
Berechnen wir nun das Matrixelement für das betrachtete Streuproblem:

$$\left\langle \psi_f \middle| U \middle| \psi_i \right\rangle = \int \psi_n^*(r) U_0 e^{i(\vec{p}_{\text{d}}/2 - \vec{p}_{\text{p}}) \cdot \vec{r}/\hbar} \phi_{\text{d}}(r=0) d^3 r = U_0 \phi_{\text{d}}(r=0) \underbrace{\int \psi_n^*(r) e^{i(\vec{p}_{\text{d}}/2 - \vec{p}_{\text{p}}) \cdot \vec{r}/\hbar} d^3 r}_{\text{Fouriertransformation}}$$

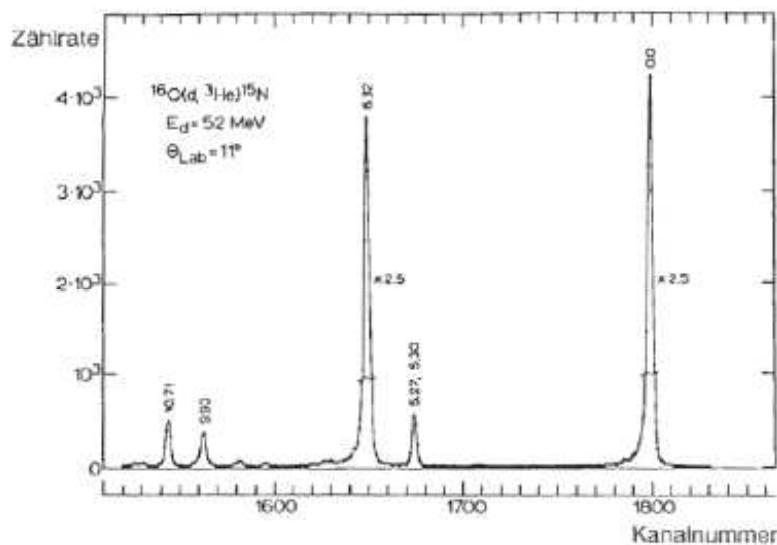
Das Matrixelement besteht also hauptsächlich aus einer Fouriertransformation der Wellenfunktion des angelagerten Neutrons, es ist damit proportional zu  $J_l(kr)$ , also einer Besselfunktion zum Bahndrehimpuls  $l$  und mit  $k = p/\hbar$ .

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \propto (J_l(kr))^2$$

Über diese Reaktion ist es möglich die Energieschemata neutronenreicher Kerne zu bestimmen.



**Abb. 14.7:** Beispiel einer Pick-up Reaktion:  $^{16}\text{O}(\text{p},\text{D})^{15}\text{O}$ .



**Abb. 14.8:** Meßwerte für eine Pick-up Reaktion:  $^{16}\text{O}(\text{d},^3\text{He})^{15}\text{N}$ . Aus den erhöhten Peaks lässt sich die Energie der LS-Kopplung bestimmen. Jede Kanalnummer auf der x-Achse entspricht hierbei einem diskreten Energiewert.

#### 14.4.2 Pick-up Reaktionen

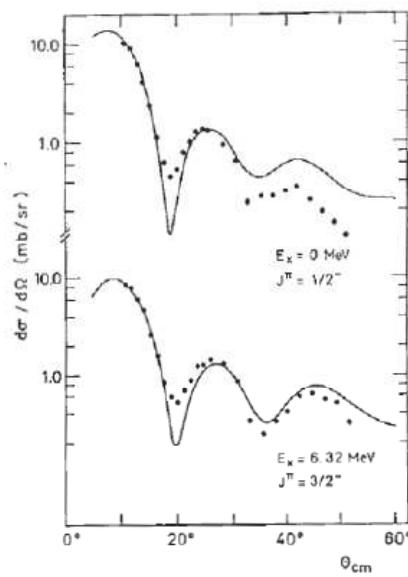
Pick-up Reaktionen sind die komplementären Reaktionen zu Stripping-Reaktionen. Beispiele sind (siehe hierzu auch Abb. 14.7)

$$(\text{p},\text{d}); (\text{n},\text{d}); (\text{d},^3\text{He}); (\text{d},^3\text{H}).$$

Die Berechnung ist analog zur Stripping-Reaktion, nur muss der Teilchenzustand  $|\psi_N\rangle$  durch den zugehörigen Lochzustand  $|\psi_N^{-1}\rangle$  ersetzt werden.

Betrachte die Reaktion  $^{16}\text{O}(\text{d},^3\text{He})^{15}\text{N}$ . Die einfachste Konfiguration des Endzustandes ist:

$$\begin{array}{ll} \text{n aus der } p_{1/2}-\text{Schale} & 1p_{1/2} \text{ Loch} \\ \text{n aus der } p_{3/2}-\text{Schale} & 1p_{3/2} \text{ Loch} \end{array}$$



**Abb. 14.9:** Winkelverteilungen für  $p_{1/2}$  und  $p_{3/2}$  Anregungen.

Das Energiespektrum der auslaufenden  ${}^3\text{He}$  Kerne ist in Abb. 14.8 gezeigt. Der relative Abstand der beiden Peaks (Abb. 14.8) ergibt die  $p_{1/2}$ - $p_{3/2}$ -Aufspaltung wieder. So kann die  $LS$ -Kopplung zu 6,32MeV bestimmt werden.

Betrachtet man das Spektrum genauer, so erkennt man noch weitere Maxima. Diese entsprechen Anregungen von anderen Nukleonen als den gerade betrachteten. Es können sich z.B. 1 Teilchen - 2 Loch Anregungen relativ zu  ${}^{16}\text{O}$  bilden. Dabei wird das erste Loch durch die Pick-up Reaktion erzeugt, das andere durch die Anregung eines Nukleons in eine höhere Schale.

Bestimmt man nun für beide Hauptmaxima jeweils getrennt die Winkelverteilung  $d\sigma/d\Omega$ , so können mit Hilfe der DWBA und Annahmen über  $p_{1/2}$  und  $p_{3/2}$  die Lochanregungen wiedergegeben werden (siehe hierzu auch Abb. 14.9).

Bei großen Winkeln  $\vartheta$  ergeben sich auch große Impulsüberträge und durch noch weitere Reaktionsmechanismen sind Abweichungen in der Winkelverteilung zu beobachten.

### 14.4.3 Tiefinelastische Streuung und Fusionsreaktionen

Für den Stoßparameter  $b < b_{\text{Grenz}} = R_{\text{Projektil}} + R_A$  tritt eine Kernreaktion zwischen den Stoßpartnern mit Drehimpulsen  $l \in [0, l_{\text{Grenz}}]$  auf. Dies ist die Fusion, bei der die Identitäten der Reaktionspartner *nicht* erhalten bleiben. Mit

$$\sigma = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{l_g} (2l+1) T_e = \pi \lambda^2 (l_g + 1)^2 \approx \pi \lambda^2 l_g^2$$

folgt:

$$\frac{d\sigma}{dl} = 2\pi \lambda^2 l_g$$

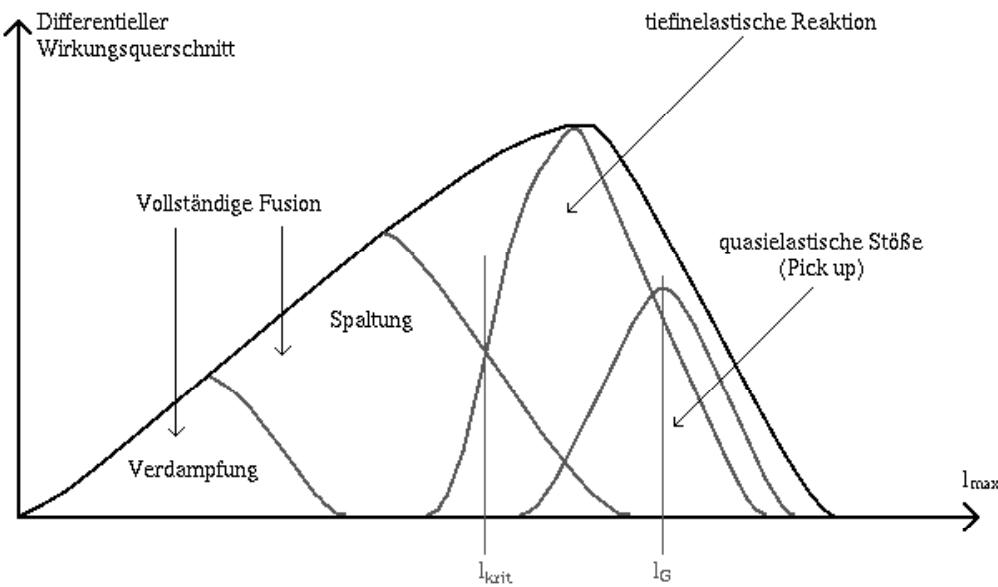


Abb. 14.10: Tiefinelastische Reaktionen in Abhängigkeit des Drehimpulses

Und damit die Erzeugung größerer Drehimpulse.

Im Falle einer vollständigen Fusion (weitgehende Überlappung der Kerne beim Stoß) entsteht ein „langlebiges“ Fusionsprodukt (Compoundkern). Die Gesamtenergie wird auf viele Anregungen des „Compoundsystems“ aus Projektil und Target verteilt und es bildet sich ein thermisches Gleichgewicht. Nun werden alle Zustände gleichmäßig besetzt.

Der Ausgangszustand hat hier *keine* Erinnerung an den Eingangszustand.

Die Abregung erfolgt über:

1. Teilchenverdampfung
2. Spaltung
3. Photonenemission

- Bei der Teilchenverdampfung geht viel Energie aber wenig Drehimpuls verloren, beim Zerfall hingegen sind große Variationen sowohl in der Energie als auch Drehimpuls möglich.
- Bei großen Drehimpulsen wird zusätzlich die Spaltbarriere wegen der Rotation erniedrigt. Die Spaltung erfolgt noch vor dem Erreichen des thermischen Gleichgewichts (meist symmetrische Spaltung).
- Bei noch höheren Drehimpulsen wird die Spaltbarriere soweit erniedrigt, dass kein „stabiler“ Compoundkern mehr möglich ist, die Zentrifugalkräfte sind zu groß.

## 14.4 Transfer Reaktionen

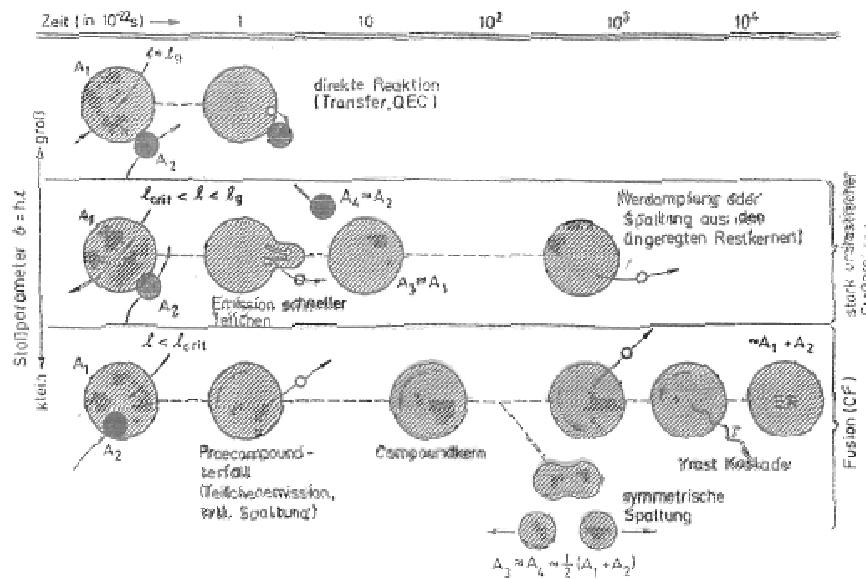


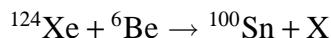
Abb. 14.11: Tiefinelastische Reaktion und Fusion

- Bei stark inelastischen Stößen durchdringen sich die Kerne in den Randzonen. Durch die Reibung kommt es zu einer Erhitzung und damit auch zu einer Anregung. Es ist auch ein teilweiser Massenaustausch mit nachfolgender Trennung und Abrengung der Reaktionspartner möglich.

Es sei zur Visualisierung der eben genannten Punkte auch auf die Abb. 14.10, sowie Abb. 14.11 verwiesen.

### 14.4.3.1 Fusionsreaktionen

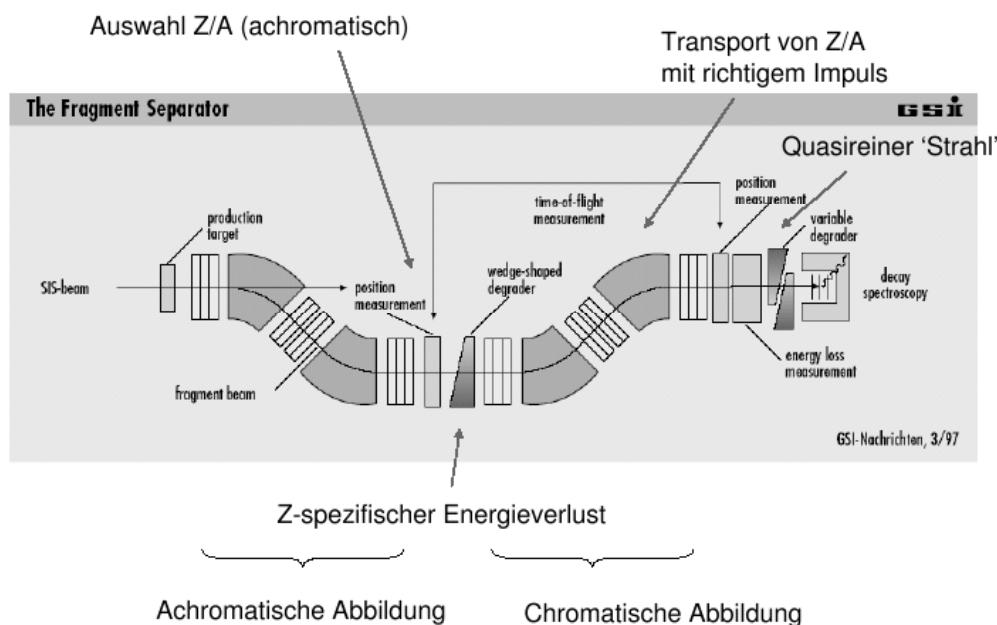
Durch Fusionsreaktionen können exotische n- oder p-reiche (radioaktive) Kerne produziert werden. So wurde beispielsweise der schwerste bisher beobachtete künstlich erzeugte doppeltmagische Kern,  $^{100}\text{Sn}$ , bei der GSI erzeugt. Eine der möglichen Reaktionen ist:



Der Nachweis des  $^{100}\text{Sn}$  erfolgte dann mit einem Fragmentseparator (siehe Abb. 14.12), mit welchem  $M/q$  und  $dE/dx$  bestimmt wurden.

Auch werden diese Reaktionen zur Erzeugung "superschwerer" Kerne genutzt, wie z.B. Z=114 oder Z=118. Beispielreaktion:





**Abb. 14.12:** Schema eines Fragmentseparators [aus GSI Nachrichten 3/97]

# Kapitel 15

## Phasen stark Wechselwirkender Materie

### 15.1 Kernmaterie

Kernmaterie ist Proton-Neutron Materie im Inneren von (schweren) Atomkernen. Für die Dichte als Zahl der Nukleonen pro Volumen gilt:

$$\rho = \rho_0 \approx 0,16 \text{ fm}^{-3}$$

Dabei ist  $\rho_0$  die Dichte im Grundzustand bei  $T = 0$ , das spezifische Volumen eines Nukleons ist:

$$v \approx 6 \text{ fm}^3$$

Somit ergibt sich für den mittleren Abstand  $d$  zwischen zwei Nukleonen:

$$d \approx 1,8 \text{ fm}$$

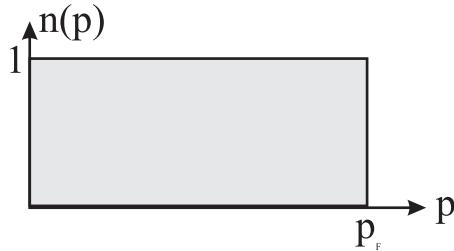
Zum Vergleich: Für das Volumen eines Nukleons gilt, mit dem quadratisch gemittelten Radius  $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0,86 \text{ fm} \equiv R$ :

$$V_N = \frac{4\pi}{3} R^3 \approx 2,7 \text{ fm}^3$$

Die Energiedichte  $\varepsilon_0$  der Kernmaterie im Grundzustand ergibt sich aus der Energie pro Teilchen:

$$\frac{E}{A} = M_N - \frac{B}{A} \approx (939 - 16) \text{ MeV} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0 \approx 0,15 \frac{\text{GeV}}{\text{fm}^3}$$

Der Fermiimpuls lässt sich aus der bekannten Fermigas-Beschreibung bestimmen (siehe Abb. 15.1)



**Abb. 15.1:** Besetzungszahl von Nukleonen nach der Fermiverteilung bei  $T = 0$

Die Gesamtdichte setzt sich aus der Dichte der Protonen und der Neutronen zusammen. Für symmetrische Kerne ( $N = Z$ ) und einen Spinentartungsgrad von 2 gilt:

$$\rho = \rho_p + \rho_n = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [n_p(\vec{p}) + n_n(\vec{p})] = 2 \cdot 2 \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{p_{\text{Fermi}}} dp p^2 = \frac{2}{3\pi^2} p_F^3$$

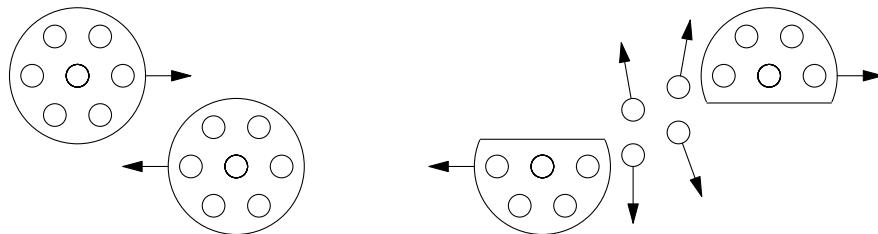
auflösen nach  $p_F$  ergibt dies für den Grundzustand:

$$p_F = \left( \frac{3\pi^2}{2} \rho \right)^{\frac{1}{3}} \approx 1,3 \text{ fm}^{-1} \approx 260 \text{ MeV}$$

Aus dem empirischen Tröpfchenmodell erkennt man, dass sich die Kernmaterie im Grundzustand wie eine Flüssigkeit verhält. Ein “Aufheizen“ der Flüssigkeit führt zu einem Übergang

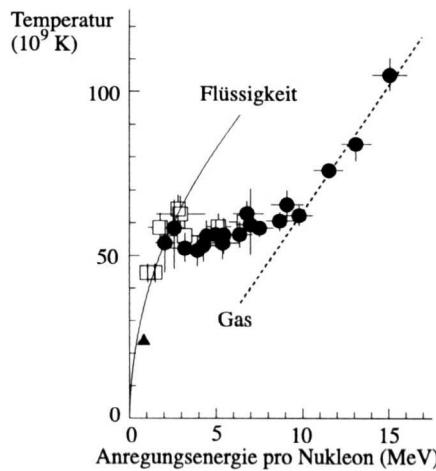
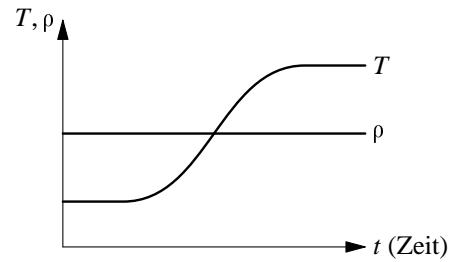
Nukleonen-Flüssigkeit  $\Rightarrow$  Gas

Das Aufheizen erfolgt z.B. durch Schwerionen-Stöße bei moderaten Energien. Im Folgenden wollen wir untersuchen was passiert, wenn man Kernmaterie durch Stöße Energie zuführt und verdichtet. Wir gehen dazu von folgendem Bild eines peripheren Stoßes aus:



**Abb. 15.2:** Ein peripherer Stoß als Cartoon

Während des Stoßes durchdringen sich die Stoßpartner partiell. Nach dem Stoß wird durch Abdampfung von Neutronen, etc. Energie abgegeben. Zur Beschreibung werden die Größen *Energie*, *Temperatur* und *Dichte* verwendet.

**Abb. 15.3:** Kernverhalten analog zum Flüssigkeitstropfen**Abb. 15.4:** Die Kerndichte bleibt konstant.

Die Temperatur der Fragmente lässt sich aus der Maxwellverteilung der Zerfallsprodukte bestimmen:

$$N(E) \propto \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \quad k_B = 8.617 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}}$$

Bei der Spaltung von  $^{236}\text{U}$  ergibt sich beispielsweise  $k_B T = 1.29 \text{ MeV}$ . Zum Vergleich: Raumtemperatur entspricht  $k_B T = 0.025 \text{ eV}$ .

Mit Energie ist die Gesamtenergie aller Zerfallsprodukte eines Fragmentes gemeint. Dabei lassen sich die verschiedenen Fragmente durch die Kinematik trennen: Die Zerfallsprodukte bewegen sich in Richtung des jeweiligen Fragmentes.

Durch die kinematische Verteilung der abgedampften Nukleonen gibt es im zentralen Bereich des CM-Systems eine Art „Reibungswärme“. Es entsteht nur thermische Energie und kein Lorentzboost. Man braucht also einen  $4\pi$ -Detektor, um die in alle Richtungen fliegenden Teilchen zu beobachten. Typischerweise verwendet man für solche Untersuchungen Strahlenenergien von 600 MeV pro Nukleon, beispielsweise beim Beschuss eines Au-Targets mit Au-Ionen.

In Abb. 15.3 ist das Verhältnis von Anregungsenergie zu Temperatur aufgetragen. Man erkennt ein Verhalten, daß Ähnlichkeit mit dem Phasenübergang einer Flüssigkeit hat. Bei  $k_B T \approx 4 \text{ MeV}$  bildet sich um den Kern eine Schicht aus Nukleonen, die *nicht* abgedampft wird, sondern im Gleichgewicht mit dem Kern steht und mit diesem Nukleonen austauscht. Erst wenn der ganze „Kern-Flüssigkeitstropfen“ verdampft ist, kann das Nukleonengas weiter aufgeheizt werden.

## 15.2 Hadronische Materie

Selektiert man bei der Nukleonenstreuung nur zentrale Stöße (Abb. 14.3), so beobachtet man die Emission geladener und neutraler Pionen. Typischerweise verwendet man dabei Einschusßenergien um 10 GeV pro Nukleon. Die hohe Nukleonanregung führt zur Produktion von  $\Delta$ -Resonanzen mit einem Wirkungsquerschnitt  $\sigma \approx 40$  mb:

$$N + N \rightarrow \Delta + N \quad \lambda_{NN} \approx \frac{1}{\rho \sigma_{NN}} \approx 1 \text{ fm}$$

Wegen der geringen mittleren freien Weglänge  $\lambda_{NN}$  führen mehrfache Stöße zu häufiger  $\Delta$ -Anregung jedes Nukleons.  $\Delta$  stellt somit einen neuen Freiheitsgrad dar. Das  $\Delta$  zerfällt prompt in Pion und Nukleon und kann aus diesen auch gebildet werden:



Die mittlere freie Weglänge  $\lambda_{\pi N}$  für ein Pion im Kern ist in etwa:

$$\lambda_{\pi N} = \frac{1}{\rho \sigma_{\pi N}} \approx 0,6 \text{ fm}$$

Der Zerfall und die Bildung von  $\Delta$ -Resonanzen stehen also im thermischen Gleichgewicht. Das so entstandene Gemisch aus Nukleonen,  $\Delta$  und  $\pi$  nennt man *hadronische Materie*.

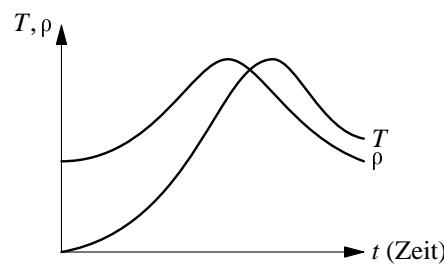
Die Temperatur hadronischer Materie lässt sich bestimmen aus der Verteilung des Anteils  $E_t$  der kinetischen Energie der Pionen, der die Bewegung transversal zur Strahlrichtung ausmacht. Dabei handelt es sich um eine Boltzmann Verteilung:

$$\frac{dN}{dE_t} \propto e^{-E_t/(k_B T)}$$

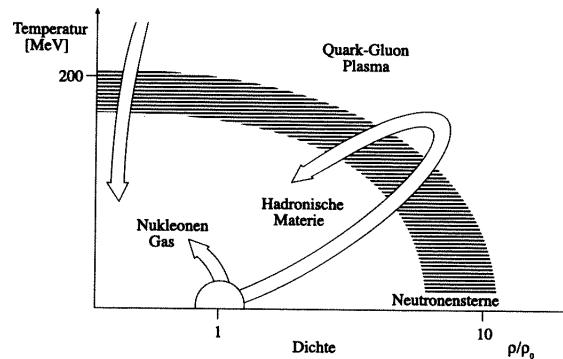
Dabei nimmt  $k_B T$  typischerweise Werte von ca. 150 MeV an. Bemerkenswert ist, daß  $k_B T$  nicht mit der Energie der kollidierenden Kerne wächst. Erklären lässt sich dies dadurch, daß heiße Kernmaterie expandiert und sich dabei abkühlt. Bei  $k_B T \approx 150$  MeV nimmt die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit der Pionen drastisch ab, die  $\pi$  tauschen deshalb keine Energie mehr mit anderen Teilchen aus. Man sagt: Die Pionen „frieren aus“, d. h. sie entkoppeln von der Umgebung und entkommen.

## 15.3 Quark-Gluon-Plasma

Das *Quark-Gluon-Plasma* ist der analoge Zustand zur vollständigen Dissoziation von  $e^-$  und Atomkernen in einem Plasma: Nukleonen und  $\pi$  lösen sich in Quarks und Gluonen auf. In Abb. 15.6 und Abb. 15.7 ist das Temperatur-Dichte-Diagramm von Kernmaterie aufgetragen. Kalte Kerne haben eine Dichte von  $\rho = \rho_N$  und eine geringe Temperatur  $k_B T = 0$ .

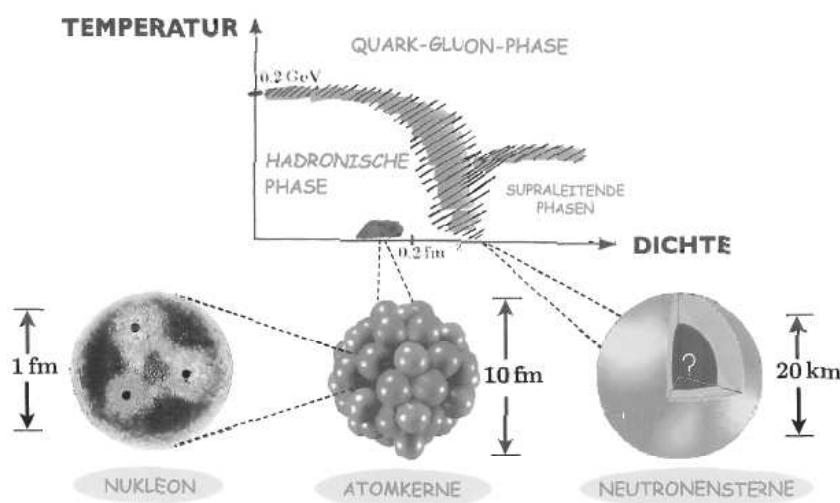


**Abb. 15.5:** Temperatur und Dichte bei hadronischer Materie



**Abb. 15.6:** Temperatur-Dichte-Diagramm von Kernmaterie (aus [Po96])

**QCD:** Phasen und Strukturen aus Quarks und Gluonen



**Abb. 15.7:** Temperatur-Dichte-Diagramm von Kernmaterie 2

Beim Erwärmen von Kernen werden normalerweise  $\alpha$ -Cluster (Flüssigkeitstropfen) emittiert. Sperrt man die Materie jedoch gleichzeitig ein, so werden die Nukleonen im Kerninneren angeregt und es werden  $\Delta$  und  $\pi$  erzeugt.

Bei der normalen Dichte  $\rho = \rho_N$  von Kernmaterie nimmt ein Nukleon ein Volumen  $V_N \approx 6 \text{ fm}^3$  ein, obwohl das Volumen eines Nukleons nur etwa  $0.6 \text{ fm}^3$  beträgt. Verdichtet man den Kern, so überlappen die Nukleonen und eine Zuordnung der Quarks und Gluonen zu den Nukleonen ist nicht mehr möglich. Das gleiche Phänomen tritt auf, wenn man bei konstanter Dichte die Temperatur stark erhöht. Beispiele für Systeme mit Zuständen hoher Dichte und niedriger Temperatur sind Neutronensterne, die aber verständlicherweise experimentell schwer zugänglich sind. Im Labor geht man daher den Weg hoher Temperaturen.

Man beachte in Abb. 15.7 auch den Bereich bei sehr hohen Drücken aber „niedriger“ Temperatur. Hier soll das Quark- Gluon- Plasma theoretisch eine supraleitende Phase aufweisen. Analog zur Supraleitung in der Festkörperphysik, geht man davon aus, daß sich die Quarks als fermionische Teilchen zu einer Art (bosonischem) „Cooper- Paar“ zusammenfinden, welches im Grundzustand ein Bose- Einstein- Kondensat bildet und dieser Phase somit zur Supraleitfähigkeit verhilft. Man beachte jedoch, daß es sich hierbei eben nicht um einen Ladungssupraleiter handelt, sondern um einen Farbsupraleiter, zumal der hierbei relevante „Ladungsfreiheitsgrad“ der Quarks die Frabe und nicht die elektr. Ladung (vgl. Elektronensupraleiter) ist.

Gesucht hat man nach dem Phasensprung bei zentralen Pb-Schwerionenstößen mit einem Pb-Target mit bisher 200 GeV/Nukleon. Mit dem in Planung befindlichen LHC wird es am CERN möglich sein, im Collider-Modus  $2 \cdot 4 \text{ TeV}/\text{Nukleon}$  zu erreichen. Die Signatur des Ereignisses ist allerdings nicht eindeutig festgelegt. Große Bedeutung hat die Erzeugung eines Quark- Gluon-Plasmas als Simulation des Universums kurze Zeit ( $t \approx 10^{-6} \text{ s}$ ) nach dem Urknall.

Evidenzen für ein QGP sind direkte Photonen, die Anreicherung seltsamer Teilchen im Endzustand, Charm-Produktion sowie die Änderung der Eigenschaften von Vektormesonen in der heißen Phase. Letztere beobachtet man via leptonischem Zerfall dieser Vektormesonen.

Insgesamt sucht man nach einen Phasensprung in allen zugänglichen Observablen.

## 15.4 Rapidityverteilungen

Das Prinzip der Rapidity wurde bereits in Kap. 6 besprochen. Zur Erinnerung nochmals eine kurze Zusammenfassung:

Wenn wir Teilchen betrachten, die sich im relativistischen Bereich bewegen, so sind ihre Geschwindigkeiten  $V = \frac{p}{E}$  nicht additiv. Bei Betrachtung zweier Lorentz- Systeme  $S_1$  und  $S_2$ , die sich mit Relativgeschwindigkeit  $V_0$  in z- Richtung zueinander bewegen läßt sich der Lorentz- Boost folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} z' &= \gamma_0(z - V_0 t) \\ t' &= \gamma_0(t - V_0 z) \end{aligned}$$

Man kann die gesamte Transformation auch als Drehung in einem 2-dimensionalen Raum auffassen, wenn man das Lorentz-Gamma als  $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \cosh(y_0)$ :

$$z' = z \cosh y_0 - t \sinh y_0 \quad (15.1)$$

$$t' = t \cosh y_0 - z \sinh y_0 \quad (15.2)$$

Man definiert nun die Rapidity als:

$$\text{Rapidity } Y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z}{E - p_z} \quad (15.3)$$

Die Rapidity ist eine additiv GröÙe, es gilt:  $Y = Y_0 + Y'$ . Da sie von der Geschwindigkeit der einzelnen Teilchen abhängt, haben wir somit durch ihre Einführung das Problem der Nichtadditivität relativistischer Geschwindigkeiten umgangen. Wir können einfach Rapiditäten aufsummieren und das der resultierenden Gesamtrapidity die gesuchte Gesamtgeschwindigkeit berechnen.

Eine Geschwindigkeitsverteilung von Teilchen in Abhängigkeit von der Rapidity ist in Abb. 15.9 dargestellt.

## 15.5 Thermodynamik von Ensembles relativistischer Teilchen

Der Ausgangspunkt ist hier die Verteilungsfunktion  $f_i(\vec{p}, \vec{r}, t)$ . Sie gibt für Teilchen der Sorte  $i$  die Anzahl im Phasenraum-Element  $d^3r d^3p$  zur Zeit  $t$  an.

Im Gleichgewicht ist die Verteilungsfunktion unabhängig von  $\vec{r}$  und  $t$ , aus der bekannten Quantenstatistik erhält man:

$$f_i(\vec{p}, T) = \frac{1}{\exp \left[ \frac{E_p^{(i)} - \mu_i}{k_B T} \pm 1 \right]}$$

mit den bekannten Vorzeichen + für Fermionen und - für Bosonen;  $E_p^{(i)} = \sqrt{\vec{p}^2 + m_i^2}$  ist hierbei die relativistische Energie der Teilchen und  $\mu_i$  ist das chemische Potential.

Nun lassen sich thermodynamische GröÙen wie Teilchenzahldichte  $n_i$ , Energiedichte  $\varepsilon$ , Druck  $P$  oder Entropie  $S$  berechnen.

$$\begin{aligned} n_i &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_i(\vec{p}, T) \\ \varepsilon &= \sum_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p^{(i)} f_i(\vec{p}, T) \\ P &= \frac{1}{3} \sum_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{E_p^{(i)}} f_i(\vec{p}, T) \\ S &= \frac{\varepsilon + P}{T} \end{aligned}$$

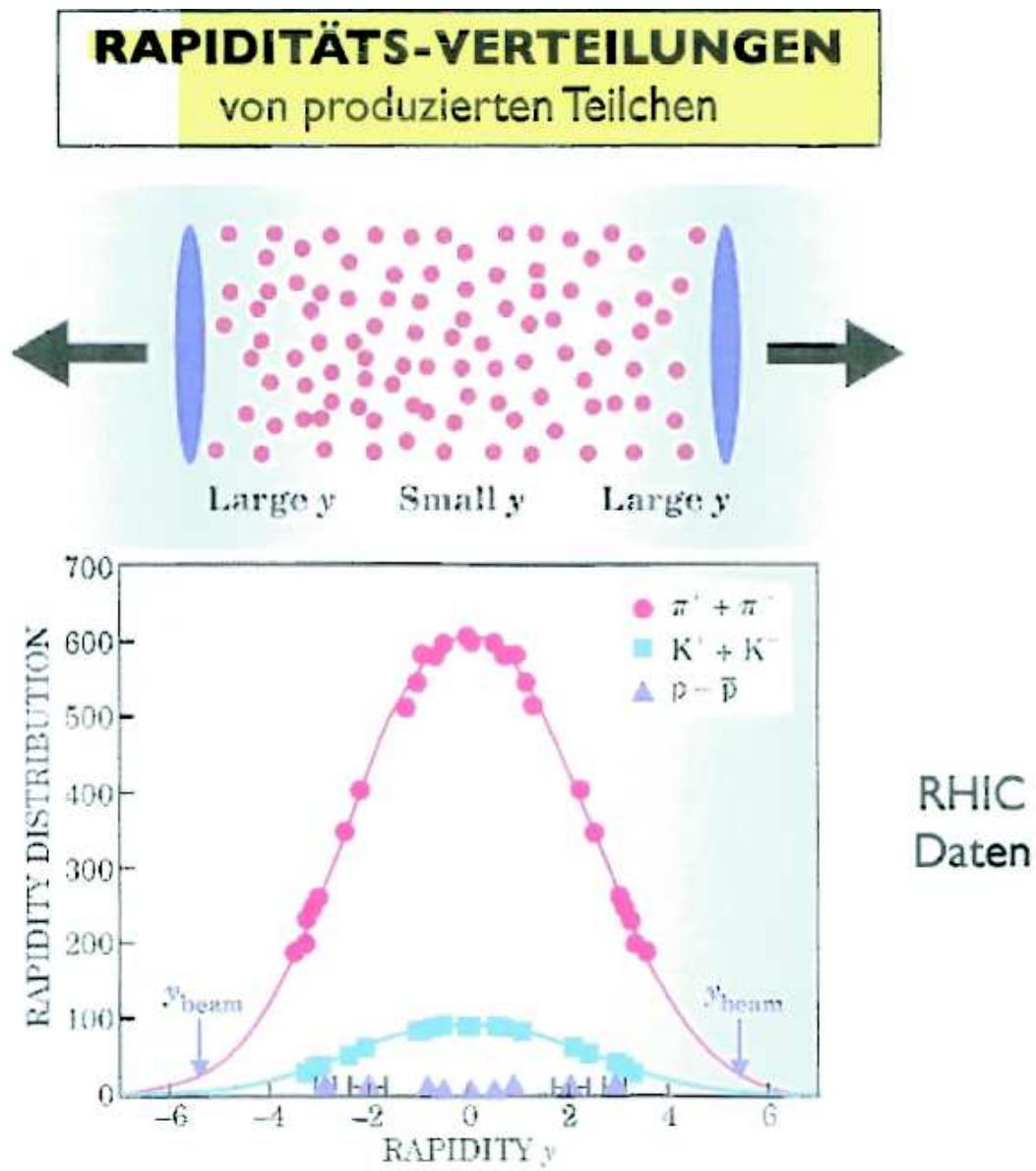
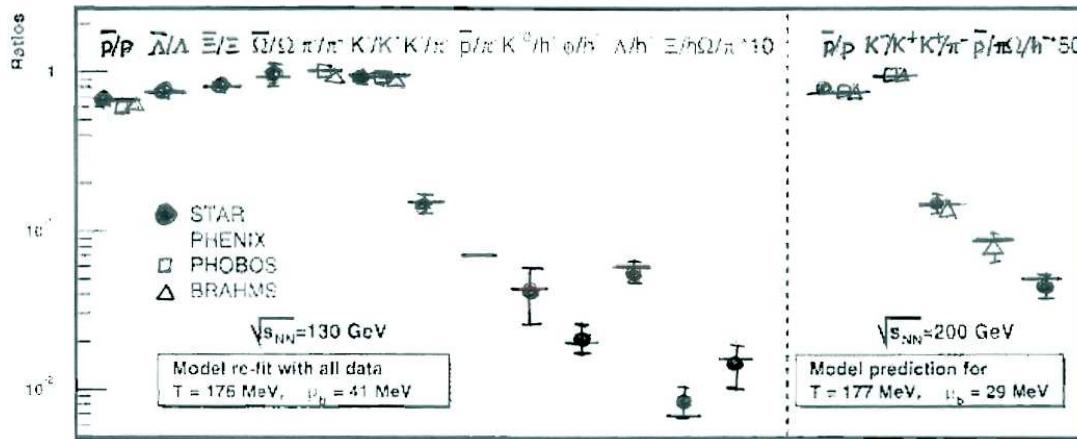


Abb. 15.8: Rapidityverteilungen bei Schwerionen-Experimenten

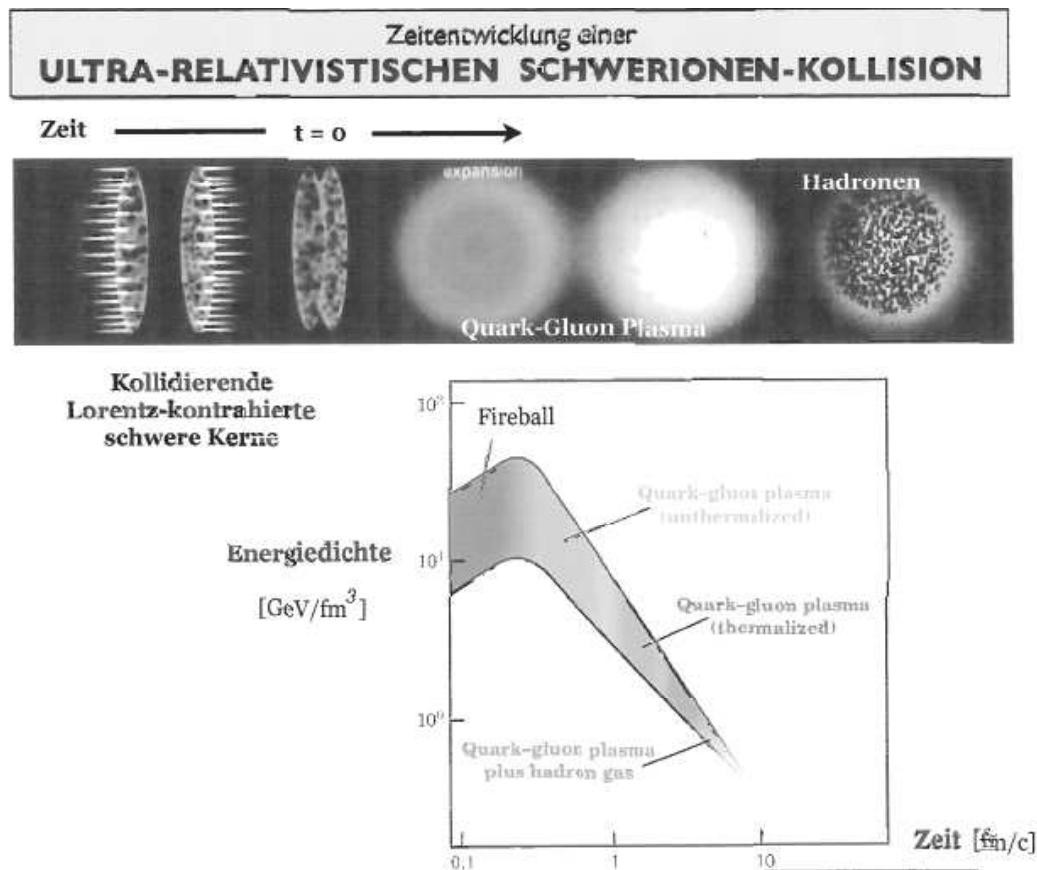


**Abb. 15.9:** Vergleich des thermodynamischen Modells mit dem experimentellen Daten bei Schwerionen-Experimenten

Für *masselose* Fermionen und Bosonen gilt nun:

$$\varepsilon = \frac{\pi^2}{30} T^4 \cdot \begin{cases} 1 & \text{für Bosonen} \\ \frac{7}{8} & \text{für Fermionen} \end{cases}, \quad P = \frac{E}{3}$$

Wie man in Abb. 15.9 erkennen kann, stimmen die thermodynamischen Vorhersagen gut mit den wirklich gemessenen Daten überein, sprich man kann solche Systeme unter derart extremen Bedingungen durchaus mit den, aus der Thermodynamik/ statistischen Mechanik wohlbekannten, Ansätzen beschreiben.



**Abb. 15.10:** Zeitentwicklung der Phasen in ultrarelativistischen Schwerionen- Kollisionen.

# Kapitel 16

## Sternentwicklung und Elementsynthese

### 16.1 Primordiale Elementsynthese

Am Anfang ... war der Urknall (ein unendlich dichter und heißer Anfangszustand dehnt sich explosionsartig aus). Es entsteht die „Ursuppe“, eine Mischung aus Leptonen, Neutrinos, ... Quarks, Photonen, ...

**Elektroschwacher Phasenübergang:** Nach der Zeit  $t = 10^{-11}$  s (Temperatur  $T \approx 100$  GeV) Das skalare Higgsfeld „friert aus“ und erhält den endlichen Vakuumerwartungswert

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dabei erhalten die  $W^\pm$ - und  $Z^0$ -Bosonen (und alle Fermionen) Masse, die Symmetrie zwischen elektromagnetischer und schwacher Wechselwirkung wird gebrochen. Die CKM-Matrix wird  $\neq \mathbb{1}$ .

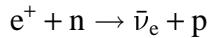
**Hadronischer Phasenübergang:** Nach der Zeit  $t = 1 \mu\text{s}$  (Temperatur  $T \approx 200$  MeV): Aus dem Quark-Gluon-Plasma (quasifreie Quarks und Gluonen) bilden sich Hadronen, im wesentlichen Nukleonen.  
Aufgrund der  $\mathcal{CP}$ -Verletzung entstehen nicht gleichviele Quarks und Antiquarks.

$$\Delta q \approx \frac{q - \bar{q}}{q + \bar{q}} \approx 3 \cdot 10^{-10}$$

Da die u- und d-Quarkmassen sehr ähnlich sind, entstanden etwa gleich viele Protonen und Neutronen. Diese standen solange im thermodynamischen Gleichgewicht, bis die Temperatur des Universums so weit gefallen war ( $T \approx 1$  MeV,  $t \approx 10$  s), dass die Neutronenerzeugungsrate

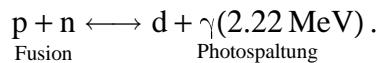


aufgrund der höheren Neutronenmasse,  $M_n - M_p \approx 1.3 \text{ MeV}$ , deutlich unter die Rate des inversen Prozesses

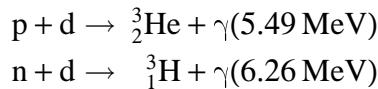


für Protonenerzeugung gesunken war. Das n/p-Verhältnis nahm ab diesem Zeitpunkt immer weiter ab.

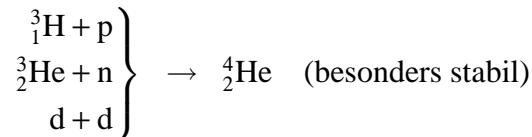
**Primordiale Nukleosynthese:** Zur Zeit  $t \approx 200 \text{ s}$  besteht die baryonische Materie zu 88 % aus Protonen und zu 12 % aus Neutronen. Bis zu dieser Temperatur ( $T \approx 100 \text{ keV}$ ) herrscht ein Gleichgewicht der beiden Reaktionen



Dadurch sind die Deuteronen extrem kurzlebig. Mit der weiter sinkenden Temperatur wird die mittlere  $\gamma$ -Energie so niedrig, daß die Photospaltung des Deuteriums nicht mehr möglich ist. Von da an werden durch die Fusion  $p + n \rightarrow d + \gamma(2.22 \text{ MeV})$  langlebige Deuteronen erzeugt. Ihre Lebensdauer ist allerdings durch die Fusion mit Protonen und Neutronen begrenzt:



Durch Folgereaktionen entsteht  ${}_2^4\text{He}$ :



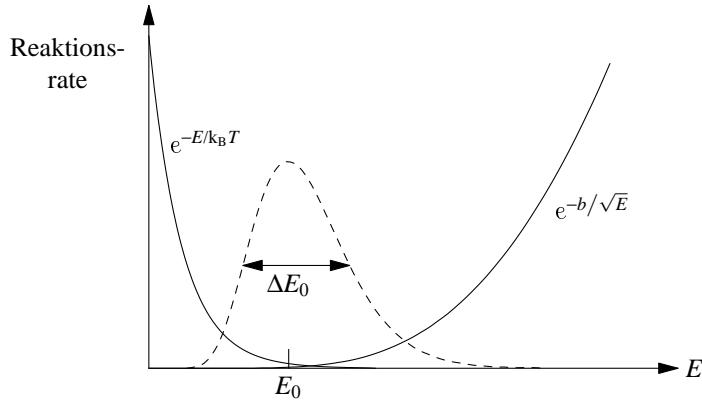
Aus der Reaktion  ${}_2^4\text{He} + {}_1^3\text{H} \rightarrow {}_3^7\text{Li} + \gamma(2.47 \text{ MeV})$  entstandene Lithium-Kerne werden sofort wieder zerstört:



In der Phase der primordialen Kernsynthese enden fast alle Neutronen in  ${}_2^4\text{He}$ , welches nun 24 % der Masse des Universums ausmacht.  ${}_1^2\text{H}$  ( $\sim 10^{-5}$ ),  ${}_2^3\text{He}$  und  ${}_3^7\text{Li}$  ( $\sim 10^{-9}$ ) sind nur in Spuren vorhanden.

Da es keine stabilen Kerne mit Massenzahl  $A = 5$  und  $A = 8$  gibt („5-“ bzw. „8-Gap“), war es in dieser Phase des Universums nicht möglich, durch einfache Fusionsprozesse Kerne schwerer als  ${}_3^7\text{Li}$  aufzubauen. Dies geschah viel später im Inneren von Sternen.

Die Phase der Urknall-Nukleosynthese endete nach  $t \approx 30 \text{ min}$ , als die Temperatur  $T$  so weit gesunken war, daß die Coulombbarriere weitere Fusionsprozesse verhinderte. Das heutige  ${}_1^1\text{H}/{}_2^4\text{He}$ -Verhältnis im Universum ist durch die primordiale Elementsynthese bestimmt. Die hervorragende Übereinstimmung mit dem theoretisch berechneten Wert ist ein starkes Argument für das Urknall-Modell.



**Abb. 16.1:** Reaktionsrate (gestrichelte Kurve) bei der Kernfusion, wie sie aus Gamow-Faktor und Maxwell-Boltzmann-Verteilung (durchgezogene Kurven) zustande kommt.

## 16.2 Sternentwicklung

Sterne entstehen durch Kontraktion von interstellarem Gas und Staub (hauptsächlich primordiales  $^1\text{H}$  und  $^4\text{He}$ ) wenn das Jeans-Kriterium  $|E_{\text{Gravitation}}| > E_{\text{thermisch}}$  erfüllt ist. Durch die, bei der Kontraktion freiwerdende, Gravitationsenergie erhitzt sich das Zentrum des Sterns. Sobald Temperatur und Druck genügend hoch sind, kommt es zur Kernfusion. Der dadurch entstehende Strahlungsdruck verhindert eine weitere Kontraktion des Sterns und führt zu einem Kräftegleichgewicht. Die, in den Kernreaktionen erzeugte, Energie wird als elektromagnetische Strahlung an die Sternoberfläche transportiert. Im thermischen Gleichgewicht stellt sich schließlich ein Temperaturgradient von innen ( $T \approx 10^7 \text{ K}$ ) nach außen ( $T \approx 10^4 \text{ K}$ ) ein.

Voraussetzung für die Fusion ist eine genügend hohe Temperatur  $T$  (bzw. mittlere Energie der Kerne) um die Coulombbarriere via Tunneleffekt zu überwinden. Die Fusion in Sternen findet i. A. unterhalb der Coulomb-Schwelle statt. Die Tunnelwahrscheinlichkeit ist gegeben durch den Gamow-Faktor:

$$W(E) = \exp\left(-\frac{2\pi\alpha Z_1 Z_2}{\sqrt{2E/m}}\right) \quad \begin{array}{l} Z_{1,2} : \text{Kernladungen} \\ m : \text{reduzierte Masse} \end{array}$$

Die Reaktionsrate pro Volumen ist:

$$\dot{N} = \frac{\text{Relativgeschwindigkeit}}{\substack{\text{Teildichten der Reaktionspartner} \\ n_1 \cdot n_2}} \langle \sigma v \rangle$$

↑  
Wirkungsquerschnitt,  
enthält Gamow-Faktor

Die Geschwindigkeitsverteilung der wechselwirkenden Teilchen im heißen Sternplasma der Temperatur  $T$  wird durch die Maxwell-Boltzmann-Verteilung beschrieben:

$$n(v) \propto e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = e^{-\frac{E}{kT}}$$

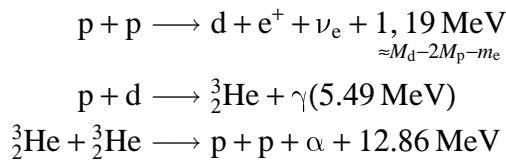
Wie aus Abb. 16.1 ersichtlich wird, spielt sich die Fusion im wesentlichen in einem schmalen Energieintervall der Breite  $\Delta E_0$  um  $E_0$  ab.

Zur Fusion von Kernen mit größeren Kernladungen  $Z_{1,2}$  sind höhere Temperaturen notwendig. Zuerst verbrennt, d. h. fusioniert, der Wasserstoff ( $T > 10^7$  K). Wenn dieser verbraucht ist, muß die Temperatur drastisch steigen, damit Helium und später schwerere Kerne fusionieren können.

Bei schwereren Sternen sind Druck, Temperatur und Dichte des Plasmas im Zentrum höher, wodurch die Reaktionsrate wesentlich größer als bei leichten Sternen ist. Dadurch leben schwere Sterne kürzer als leichte.

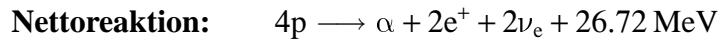
## 16.3 Wasserstoffverbrennung

In der Sonne wird die meiste Energie durch den *Proton-Proton-Zyklus* erzeugt:



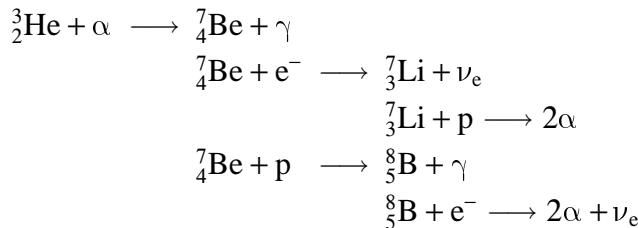
Die erste Reaktion ist sehr langsam, da sie über die schwache Wechselwirkung erfolgt.

Von der bei der



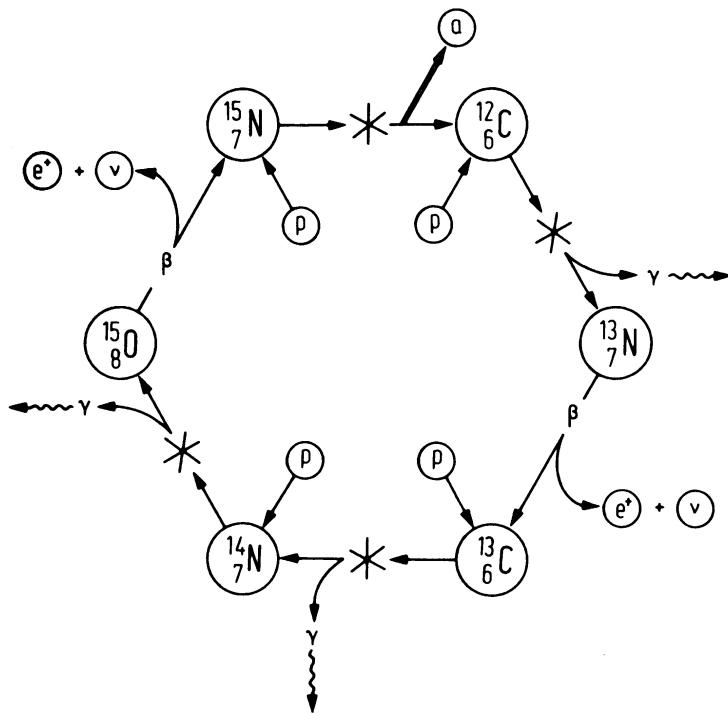
freiwerdenden Energie tragen die beiden aus dem Stern entweichenden Neutrinos im Mittel 0.52 MeV davon.

Nur geringe Bedeutung für die Energieerzeugung haben folgende Seitenzweige des pp-Zyklus:

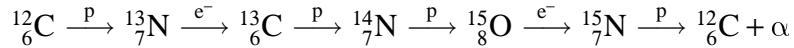


Solange der  ${}_1^1\text{H}$ -Vorrat reicht, bleibt der Stern stabil. Für die Sonne beträgt diese Zeit ca.  $10^{10}$  Jahre, wovon die Hälfte bereits vergangen ist.

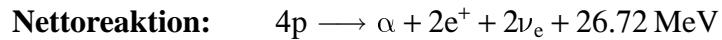
In größeren Sternen mit höherer Dichte und Temperatur im Zentrum ist bereits  ${}_{12}^6\text{C}$  vorhanden. Mit diesem kann der sog. *CNO-Zyklus* stattfinden. Bethe und v. Weizsäcker schlügen diesen Zyklus unabhängig voneinander als ersten möglichen Energieerzeugungsmechanismus vor.



**Abb. 16.2:** Der von Bethe und Weizsäcker vorgeschlagene CNO-Zyklus zur Wasserstoff-Fusionierung in Sternen. Aufgetragen ist der sogenannte und hier ausschließlich besprochene Hauptzyklus (aus [Wa98]).



Das  $^{12}\text{C}$  steht am Ende der Reaktion wieder zur Verfügung und wirkt somit als Katalysator.



Der CNO-Zyklus läuft viel schneller als der pp-Zyklus ab. Wegen der höheren Coulombbarriere setzt er aber erst bei höheren Temperaturen ein.

## 16.4 Heliumverbrennung

Wenn der  $^1\text{H}$ -Vorrat erschöpft ist, kann der Stern dem Gravitationsdruck nicht mehr standhalten und kollabiert. Je nach Sternmasse können dabei zwei Fälle auftreten:

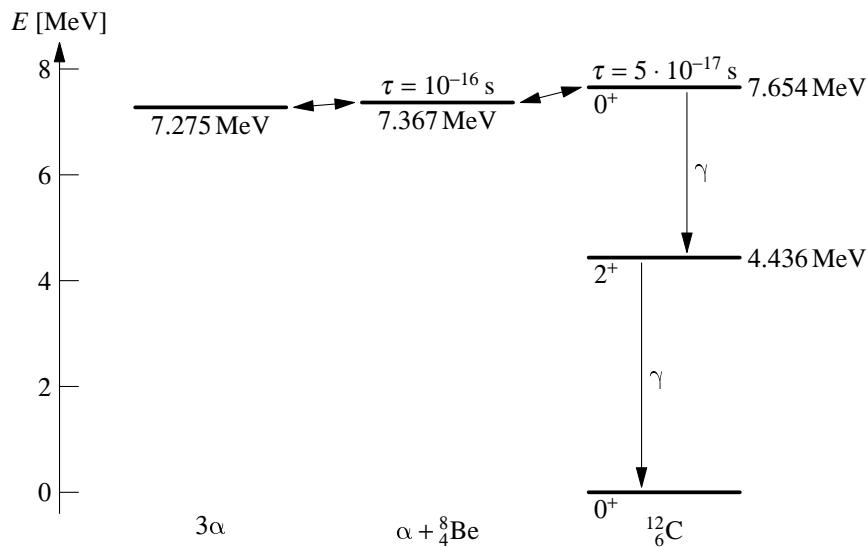
**$M \ll M_\odot$ :** Der Gravitationsdruck ist nicht hoch genug, um weitere Fusionsreaktionen zu zünden. Der Stern kollabiert bis der Fermidruck der Elektronen den Kollaps stoppt.  
 ⇒ Ein etwa planetengroßer *Weißer Zwerg* entsteht.

$M \gtrsim M_{\odot}$ : Das Zentrum wird bis  $T \approx 10^8$  K aufgeheizt und das Heliumbrennen setzt ein. Die Temperatur in den äußeren Sternregionen steigt ebenfalls, wodurch dort Wasserstoffbrennen stattfinden kann. Durch den Strahlungsdruck bläht sich die äußere Hülle des Sterns auf. Mit der Zunahme der Oberfläche sinkt die Oberflächentemperatur, obwohl die Energieproduktion steigt.  $\Rightarrow$  roter Riese

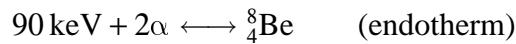
Die Synthesierung von Kernen schwerer als  ${}^4_2\text{He}$  erscheint zunächst nicht möglich, da es keine stabilen Kerne mit  $A = 5$  und  $A = 8$  gibt. Es sind nämlich die Lebensdauern:

$$\tau({}^8_4\text{Be}) \approx 10^{-16} \text{ s} \gg \tau({}^5_2\text{He}, {}^5_3\text{Li})$$

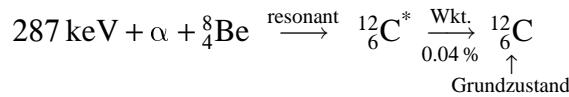
Es ist aber trotzdem möglich, durch Heliumfusion schwerere Kerne zu erzeugen, und zwar mittels der  ${}^{12}_6\text{C}$ -Resonanz:



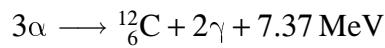
Bei  $T = 10^8$  K herrscht das Gleichgewicht:



Bei einer Dichte von  $\rho = 10^8 \text{ kg m}^{-3}$  ist die Gleichgewichtskonzentration ein  ${}^8_4\text{Be}$  pro  $10^9 \alpha$ . Damit wird dann mit dem hochenergetischen Ausläufer der Maxwellverteilung folgende Reaktion möglich:



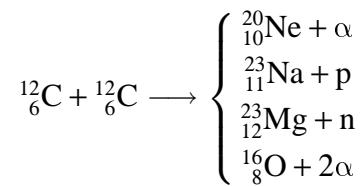
Die Nettoreaktion dieser Heliumfusion ist:



Der  $3\alpha$ -Prozeß spielt eine Schlüsselrolle beim Aufbau schwerer Elemente im Universum. Er ist ein sehr enges Nadelöhr: Nur etwa 1 % aller Kerne im Universum sind schwerer als  ${}^4_2\text{He}$ . Aber fast alle (!) von ihnen sind über den  $3\alpha$ -Prozeß entstanden.

## 16.5 Verbrennung zum Eisen

Nachdem der Heliumvorrat verbraucht ist, besteht der Stern vor allem aus  ${}^{12}_6\text{C}$ . Sterne im Bereich der Sonnenmasse werden dann zu *weißen Zwergen*: Ihre Masse ist nicht groß genug, um Kern Temperaturen zu erreichen, die für das Zünden weiterer Brennphasen notwendig wären. Massivere Sterne durchlaufen dagegen noch weitere Entwicklungsphasen. So können  $\alpha$ -Teilchen mit  ${}^{12}_6\text{C}$  zu  ${}^{16}_8\text{O}$  und weiter zu  ${}^{20}_{10}\text{Ne}$  fusionieren. Ebenfalls möglich ist die direkte Fusion von  ${}^{12}_6\text{C}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^{20}_{10}\text{Ne}$  und  ${}^{28}_{14}\text{Si}$ . Beispielsweise folgendermaßen:

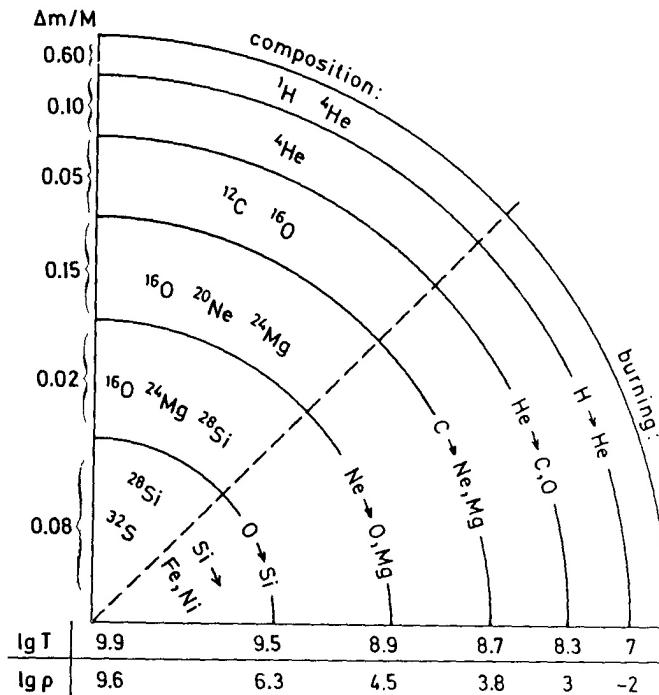


Auf diese Weise können alle Elemente zwischen  ${}^{12}_6\text{C}$  und  ${}^{56}_{28}\text{Fe}$  bevölkert werden. Im Stern bildet sich dabei eine zwiebelschalenartige Struktur (Abb. 16.3): Im innersten Teil wird Eisen synthetisiert, während nach außen hin leichtere Elemente erzeugt werden. In den äußersten Schichten verbrennen Reste von He und H. Die Verbrennung der schweren Elemente geschieht auf immer kürzeren Zeitskalen, die letzte Fusion von Si zu Fe dauert nur noch wenige Tage. Mit der Bildung von Fe ist die Kernfusion in Sternen abgeschlossen, da Fe die größte Bindungsenergie pro Nukleon aufweist.

## 16.6 Stern-Kollaps

Wenn das Zentrum des Sterns aus Eisen besteht, gibt es keine Energiequelle mehr, die dem Gravitationsdruck widerstehen könnte. Der Stern kollabiert und es kommt zu einer *Supernova-Explosion*. Dabei emittiert der Stern schlagartig mehr Energie, als er zuvor während seiner gesamten Lebensdauer erzeugt hat. Der größte Teil der Sternmaterie wird in den interstellaren Raum geschleudert und bildet das Baumaterial für neue Sterne. Je nach Masse des übriggebliebenen Sternkerns kommt es zu verschiedenen Endzuständen:

$$\begin{aligned} M_{\text{Sternkern}} < M_{\odot}: & \text{ weißer Zwerg} \\ M_{\odot} < M_{\text{Sternkern}} < 2M_{\odot}: & \text{ Neutronenstern} \\ M_{\text{Sternkern}} > 2M_{\odot}: & \text{ schwarzes Loch (Fluchtgeschwindigkeit} > c \end{aligned}$$

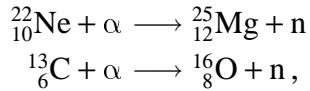


**Abb. 16.3:** Zwiebelschalenmodell eines Sterns. Aufgetragen ist die Massenverteilung, unten angegeben sind zusätzlich der radiale Verlauf der Dichte und der Temperatur (aus [Wa98]).

## 16.7 Synthese schwerer Elemente

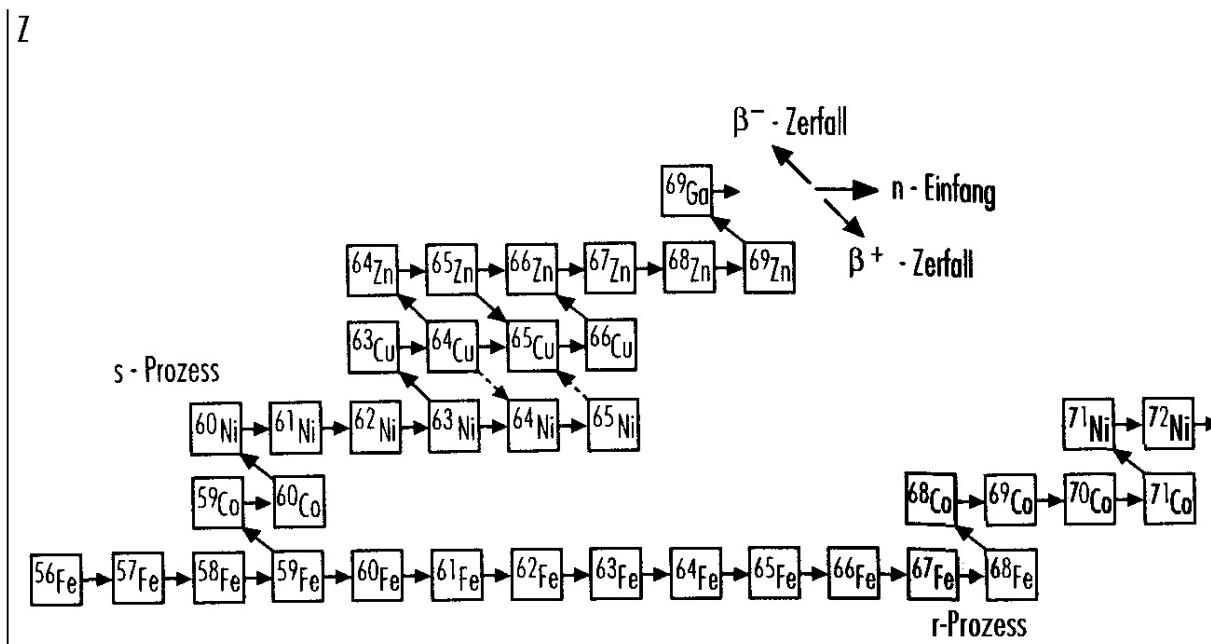
Schwerere Kerne als Eisen werden durch die Anlagerung von Neutronen erzeugt (Abb. 16.4).

**Langsamer Prozeß (s-process).** In der Verbrennungsphase des Sterns entstehen Neutronen, etwa durch:

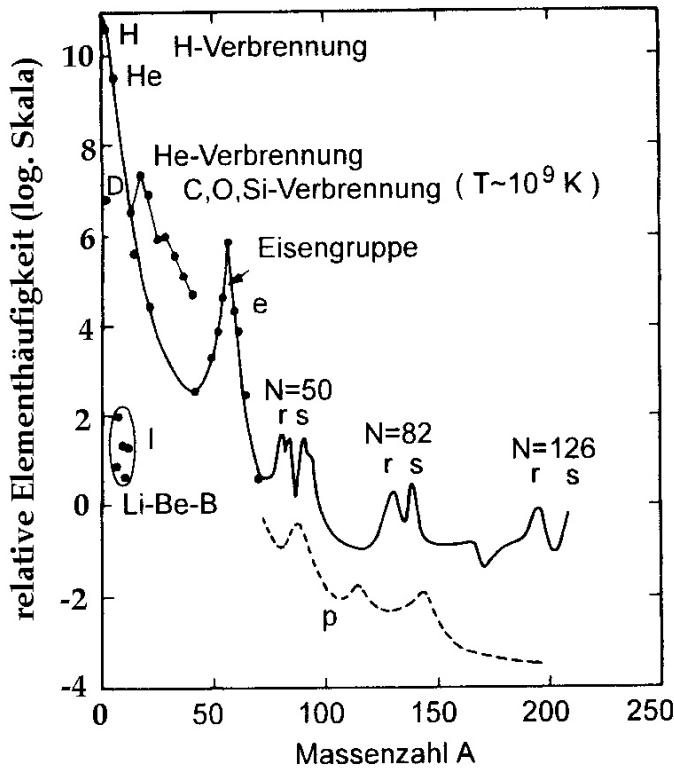


welche sukzessive von schweren Kernen eingefangen werden können.  $\beta$ -instabile Isotope zerfallen dabei entlang des Stabilitätstals. Die Grenze für diesen Prozeß ist Pb, da noch schwerere Kerne  $\alpha$ -instabil sind.

**Schneller Prozeß (r-process).** Während einer Supernova-Explosion werden Neutronenflüsse von  $10^{32} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$  erreicht. Dadurch ist die sukzessive Anlagerung von Neutronen viel schneller als die  $\beta$ - und  $\alpha$ -Zerfallsprozesse. Beim r-process werden so auch schwerere Elemente als Blei erzeugt (bis  ${}^{254}\text{Cf}$  innerhalb weniger Sekunden). Die obere Grenze für die Erzeugung von Transuranen ist durch die spontane Spaltung gegeben.



**Abb. 16.4:** Schneller und langsamer Prozeß in der Nuklidkarte. Beim langsamen Prozeß ist die Spaltzeit kleiner als die Neutroneneinfangzeit: Die Elementbildung „klettert“ langsam das Tal der Stabilität hinauf. Beim schnellen Prozeß werden die Nuklide durch schnelle Anlagerung mehrerer Neutronen aus dem Tal in das neutronenreiche Gebiet darunter geworfen, um nach der Neutronenflut über sukzessive Zerfälle wieder dorthin zurück zu gelangen (aus [Wa98]).



**Abb. 16.5:** Relative Elementhäufigkeiten im Universum. Die Normierung der Ordinate fand willkürlich auf  $N(\text{Si}) = 10^6$  statt (aus [Wa98]).

**Fazit.** Alle Elemente (außer  ${}^1\text{H}$  und  ${}^4\text{He}$ ) aus denen die Erde und wir selbst aufgebaut sind, stammen aus dem Innern von Sternen und wurden, vermutlich sogar mehrmals, durch Supernova-Explosionen wieder freigesetzt. Die absolute Menge und die Verteilung der Elemente schwerer als  ${}^4\text{He}$  lassen sich aus dem Alter des Universums und aus im Labor ermittelten Wirkungsquerschnitten berechnen. Die dabei gefundene hervorragende Übereinstimmung mit den gemessenen Elementhäufigkeiten (Abb. 16.5) ist ein großer Triumph der Astro- und Kernphysik.

# Anhang A

## Addition von Drehimpulsen und Helizität

*Philippe Morath*

### A.1 Clebsch-Gordan-Zerlegung

Wie kann man einzelne Teilchen mit zugehörigem Drehimpuls zu einem Gesamtdrehimpuls koppeln?

Die Drehimpulsoperatoren  $\vec{J}_1, \vec{J}_2$  erfüllen die Drehimpulsalgebra:

$$\begin{aligned} [J_{1i}, J_{1j}] &= i\hbar \epsilon_{ijk} J_{1k} \\ [J_{2i}, J_{2j}] &= i\hbar \epsilon_{ijk} J_{2k} \end{aligned}$$

Bemerkung: Allgemein erfüllen Spin, Isospin usw. dieselbe Algebra.

Eigenvektoren  $|j_1 m_1\rangle$  zu  $\vec{J}_1^2, J_{1z}$  und  $|j_2 m_2\rangle$  zu  $\vec{J}_2^2, J_{2z}$ :

$$\begin{aligned} \vec{J}_1^2 |j_1 m_1\rangle &= \hbar^2 j_1(j_1 + 1) |j_1 m_1\rangle; & J_{1z} |j_1 m_1\rangle &= m_1 \hbar |j_1 m_1\rangle \\ \vec{J}_2^2 |j_2 m_2\rangle &= \hbar^2 j_2(j_2 + 1) |j_2 m_2\rangle; & J_{2z} |j_2 m_2\rangle &= m_2 \hbar |j_2 m_2\rangle \end{aligned}$$

Totaler Drehimpuls:  $\vec{J} = \vec{J}_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{J}_1$ .

Zustände von  $\vec{J}_1^2, J_z$ :  $|JM\rangle \hat{=} |j_1 j_2, JM\rangle$ :

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 |JM\rangle &= \hbar^2 J(J + 1) |JM\rangle, & J_z |JM\rangle &= M \hbar |JM\rangle \\ J_{1,2}^2 |JM\rangle &= \hbar^2 j_{1,2}(j_{1,2} + 1) |JM\rangle \end{aligned}$$

Das heißt, die neuen Zustände sind immer noch Eigenzustände zu  $\vec{J}_{1,2}^2$ , aber nicht mehr zu  $J_{z1,2}$ .

**Basistransformation:**

$$|JM\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \underbrace{\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle}_{\text{Clebsch-Gordan-Koeffizienten}} \quad (\text{A.1})$$

mit den Auswahlregeln:  $M = m_1 + m_2$ ,  $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$ .

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind tabelliert, beispielsweise in [PD00a] bzw. [PD00b], Kap. 31.

**Bemerkungen:**

- Die Phasen der Koeffizienten werden teilweise nach verschiedenen Konventionen festgelegt.
- Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten werden reell gewählt, d. h.  
 $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle^* = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle$ .

Die Symmetrie der Clebsch-Gordan-Koeffizienten kommt am besten in  $3j$ -Symbolen nach Wigner zum Ausdruck:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-j_2-j_3}}{\sqrt{2j_3+1}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 - m_3 \rangle \quad (\text{A.2})$$

**Eigenschaften:**

- a) symmetrisch unter zyklischer Vertauschung der Spalten:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

- b) nichtzyklische Vertauschungen zweier Spalten bzw. Multiplikation von  $m_1, m_2, m_3$  mit  $(-1)$  führt zu einer Multiplikation mit einer Phase  $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

**Beispiele:**

- a) zwei Spin  $\frac{1}{2}$ -Teilchen:

$ SM\rangle$	
$ 11\rangle$	$ \uparrow\uparrow\rangle$
$ 10\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( \uparrow\downarrow\rangle +  \downarrow\uparrow\rangle)$
$ 1, -1\rangle$	$ \downarrow\downarrow\rangle$
$ 00\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( \uparrow\downarrow\rangle -  \downarrow\uparrow\rangle)$

## A.2 Helizität

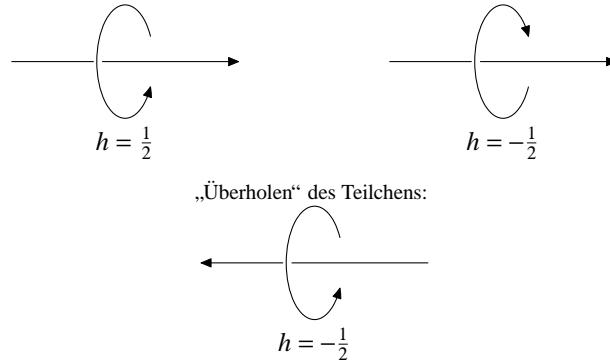


Abb. A.1: Helizitätserhaltung

b) Bahndrehimpuls und Spin:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \vec{S} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma} \quad \text{für} \quad s = \frac{1}{2} |JM\rangle = \sum_{m_L m_S} |Lm_L \frac{1}{2} m_S\rangle \langle Lm_L \frac{1}{2} m_S |JM\rangle |_{\frac{1}{2}}, m_s = \pm \frac{1}{2} \rangle = \chi_{\pm}$$

mit  $\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \langle r | Lm_L \rangle = \varphi_{Lm_L}(\theta, \varphi)$

$$\gamma_{j=l\pm 1/2m} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \pm \sqrt{l \pm m + 1/2} & \varphi_{l,m-1/2}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{l \pm m + 1/2} & \varphi_{l,m+1/2}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

c)  $\Delta^{++}$  (1232MeV =  $mc^2$ ), in  $\pi^+ p$ -Streuung produziert:

$$\psi\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} \widetilde{\Phi(1, 1)}}_{\text{Proton}} \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{2}{3}} \Psi(1, 0) \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (\text{A.7})$$

## A.2 Helizität

Teilchen mit Impuls  $\vec{p}$  und Spin  $\vec{s}$ ; Quantisierungsachse sei die Richtung von  $\vec{p}$ .

$$\text{Helizität: } h = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (\text{A.8})$$

Beispiel: Spin  $\frac{1}{2}$ :  $h = \pm \frac{1}{2}\hbar$ . Bemerkungen:

- Für massebehaftete Teilchen ist die Helizität vom Bezugssystem abhängig.
- Helizitäten sind additiv.
- Wechselwirkungen erhalten die Helizität im Hochenergielimes (Abb. A.1).

**Polarisationszustände des Photons.** Ausgehend vom Viererpotential  $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$  und mit Hilfe von

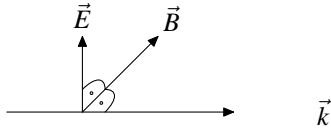


Abb. A.2: Zur Ausbreitung der elektromagnetischen Welle

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{sowie}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

erhalten wir zunächst:

$$\vec{\nabla}^2 \phi = -4\pi\rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad (\text{A.9})$$

Beachten wir die Coulomb-Eichung,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , bzw. für freie Photonen in Viererschreibweise:  $\square A = 0$  mit  $\square = \partial_\beta \partial^\beta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$ , so finden wir die Lösung:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{e} A_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)), \quad (\text{A.10})$$

aus welcher wir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\Rightarrow e_x k_x + e_y k_y + e_z k_z = \vec{e} \cdot \vec{k} = 0 \quad (\text{A.12})$$

folgern können. Wegen  $\vec{E} \propto \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  und  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  gilt dann:

$$\vec{E} \perp \vec{k}, \vec{B} \perp \vec{k}$$

Wähle Ausbreitungsrichtung in  $\hat{z}$ -Richtung:  $\vec{A} \propto \vec{e} \exp(i(kz - \omega t))$ , d. h.

$$A_x = \vec{e}_x A_0 \exp(i(kz - \omega t + \delta))$$

$$A_y = \vec{e}_y A_0 \exp(i(kz - \omega t))$$

Auch mit Phasenverschiebung liegt eine Lösung der Wellengleichung vor; im allgemeinen aber ist die Phase von  $A_x$  anders als die von  $A_y$ . Lineare Polarisation:  $\delta = 0$  Zirkulare Polarisation:  $\delta = \pi/2$

## A.2 Helizität

$$\vec{\epsilon}_t = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) \quad \text{positive Helizität} \hat{=} \text{linkszirkular}$$

$$\vec{\epsilon}_t = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x - i\vec{e}_y) \quad \text{negative Helizität} \hat{=} \text{rechtszirkular}$$

$D$  bezeichne eine Drehung um die  $z$ -Achse:

$$D(\alpha)\vec{\epsilon}_+ = \exp(iJ_z\alpha)\vec{\epsilon}_+ = \exp(i\alpha)$$

$$D(\alpha)\vec{\epsilon}_- = \exp(iJ_z\alpha)\vec{\epsilon}_- = \exp(i\alpha)$$

$D(\alpha)\vec{\epsilon}_z = \vec{\epsilon}_z$  entspricht  $\vec{\epsilon} \parallel \hat{z}$ , wegen Eichbedingung:  $\vec{\nabla} = \frac{\partial A_z}{\partial z} \propto \vec{\epsilon}_z = 0$ .

- $\vec{\epsilon}_+$  beschreibt Photon mit  $J_z = \hbar$
- $\vec{\epsilon}_-$  beschreibt Photon mit  $J_z = -\hbar$
- $\vec{\epsilon}_z$  beschreibt Photon mit  $J_z = 0$  tritt für freie Photonen nicht auf!

Freie Photonen haben nur zwei Helizitätseinstellungen (Polarisationsrichtungen)  $h = \pm 1$ . Für virtuelle Photonen gilt:  $p_\mu p^\mu = p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 > 0$  (Abb. A.3).

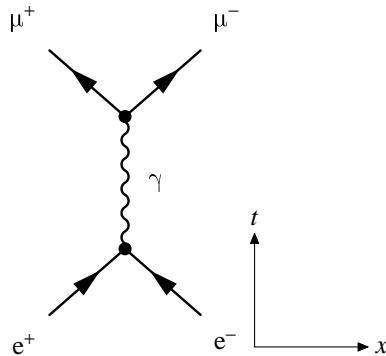


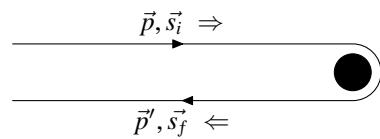
Abb. A.3: Virtuelles Photon im Feynmandiagramm

**Beispiel.** Wir betrachten die Streuung am spinlosen Target, Abb. A.4.

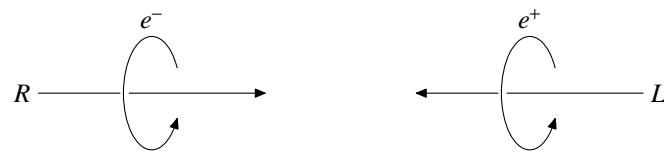
Hier liegt eine Streuung (z. B. polarisierte Streuung)  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  vor, deren Wirkungsquerschnitt beschrieben wird durch:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) (e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^+ \mu_L^+) = \frac{\alpha_I}{4E_{CM}^2} (1 + \cos \theta)^2$$

Da der Gesamtdrehimpuls bei der Streuung um  $\theta = \pi$  nicht erhalten ist (Abb. A.5), ist der Wirkungsquerschnitt bei diesem Streuwinkel entsprechend  $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = \pi) = 0$ .



**Abb. A.4:** Helizitätserhaltung beim Streuprozeß



**Abb. A.5:** Bei der Streuung um  $\theta = \pi$  ist der Gesamtdrehimpuls nicht erhalten.

# Anhang B

## Relativ interessante Ergänzungen

*Lars Schmitt*

### B.1 Lorentztransformation

**Überblick.** Transformationsmatrix für Lorentztransformation:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anwendung dieser Transformationsmatrix:

$$X = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} X' = \Lambda X$$

$$P = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} P' = \Lambda P$$

$$E_{\text{CM}} = \sqrt{s} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}$$
$$\stackrel{\text{Labor}}{=} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2 \cos \theta)}$$

$$\beta_{\text{CM}} = \frac{p_{\text{Lab}}}{E_{1,\text{Lab}} + m_2} \quad \gamma_{\text{CM}} = \frac{E_{1,\text{Lab}} + m_2}{E_{\text{CM}}}$$

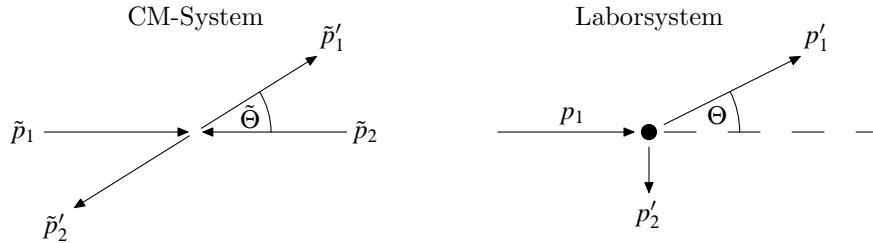


Abb. B.1: CM- und Laborsystem

**Umrechnungen Laborsystem – CM-System:**

$$\tan \tilde{\theta} = \frac{\tilde{p}'_{1y}}{\tilde{p}'_{1x}}$$

$$\left( \begin{array}{c} E/c \\ p'_{1x} \\ p'_{1y} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} \gamma & \gamma\beta & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \tilde{E}'/c \\ \tilde{p}_{1x} \\ \tilde{p}_{1y} \end{array} \right) \Rightarrow \tan \theta = \frac{p_{1y}}{p_{1x}} = \frac{\tilde{p}_{1y}}{\gamma(\tilde{p}'_{1x} + \beta \tilde{E}'/c)}$$

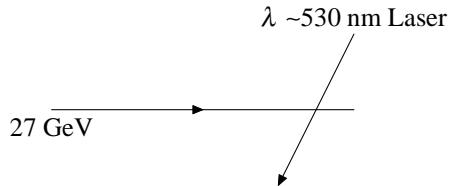
**Beispiele:**

- a) 450 GeV-Protonenstrahl auf Protonentarget:

$$\gamma_{CM} = \frac{E_{1,Lab} + m_2}{E_{CM}} \approx 15$$

$$\tilde{\theta} = 90^\circ, E \gg m; \tan \theta = 1/\gamma \approx 0.06 = 3.8^\circ$$

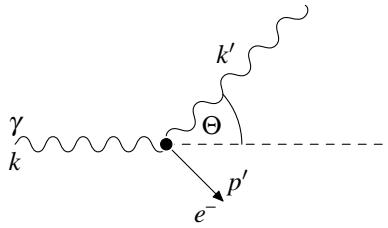
- b) Übung 3.2: Ein Laserstrahl mit  $\lambda = 530 \text{ nm}$  ( $E_\gamma = 2.3 \text{ eV}$ ) trifft auf einen Strahl von Elektronen ( $E_e = 27 \text{ GeV}$ ):



Man erhält  $\gamma = E_e/m_e = 5.3 \cdot 10^4$ .

**B.2 Comptonstreuung**

Als *Comptonstreuung* bezeichnet man die Photonen-Streuung an quasifreien, äußeren Hüllen-elektronen, wie sie die folgende Abbildung illustriert:



Um einen Zusammenhang zwischen  $\omega$ ,  $\omega'$  und dem Streuwinkel, im folgenden als  $\theta$  bezeichnet, zu erhalten, setzt man zunächst Viererimpulserhaltung an:

$$\underbrace{p'^2}_{=m^2} = (p + k - k')^2 = \underbrace{p^2}_{=m^2} + \underbrace{k^2}_{=0} + \underbrace{k'^2}_{=0} + 2pk - 2pk' - 2kk'$$

und rechnet:

$$\begin{aligned} \Rightarrow pk - pk' - kk' &= 0 \Leftrightarrow p(k - k') = kk' \quad (kk' - \omega\omega' \cos \theta) \\ m(\omega - \omega') &= \omega\omega'(1 - \cos \theta) \\ m\omega &= \omega'(m + \omega(1 - \cos \theta)) \\ \omega' &= \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)} \end{aligned}$$

**Klein-Nishina-Formel.** Im folgenden geben wir noch die *Klein-Nishina-Formel* an:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_L} &= \frac{\alpha^2}{4m^2} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 4(\epsilon\epsilon')^2 - 2 \right) \\ \frac{d\sigma}{d\Omega_{L, \text{unpolarisiert}}} &= \frac{\alpha^2}{4m^2} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right) \end{aligned}$$

Besonders einfach wird der Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt, wenn im Grenzfall der *Thompson-Streuung* elastische Photonенstreuung vorliegt:

$$\frac{\omega'}{\omega} \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{\alpha^2}{4m^2} (\epsilon\epsilon')^2 \quad (\text{B.1})$$

**Compton-Shift.** Aus den Kreisfrequenzen  $\omega$  und  $\omega'$  lässt sich selbstverständlich auch der Wellenlängenunterschied der ein- und ausfallenden Strahlung berechnen. Diesen bezeichnet man als *Compton-Shift*:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = \lambda_C(1 - \cos \theta) \quad \lambda_C = \frac{\hbar}{2m_e c}$$

$\lambda_C$  wird in diesem Zusammenhang als *Compton-Wellenlänge* bezeichnet.

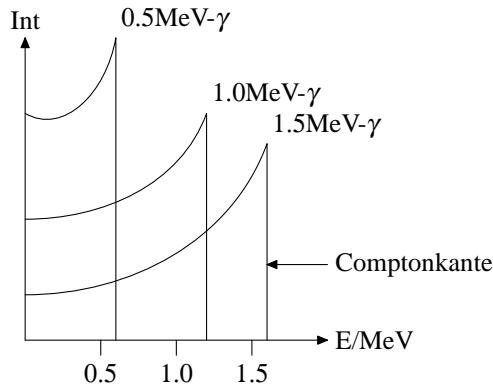


Abb. B.2: Compton-Kanten

**Zusammenfassung.** Betrachtet man die  $\gamma$ -Streuung an Atomen, gilt es die folgenden Prozesse zu unterscheiden:

- Compton-Streuung: Inkohärente Streuung von  $\gamma$  an freien Elektronen
- Thompson-Streuung: Elastische Streuung von  $\gamma$  an freien Elektronen
- Rayleigh-Streuung: Kohärente Streuung von  $\gamma$  an der Atomhülle

**Rückstoß.**  $T_{\max} = \hbar \omega \frac{2\gamma}{1+2\gamma}$  (Abb. B.2)

**Beispiel.** Zur Vermessung von  $\gamma$ -Strahlungsquellen im Universum findet an Bord des CG20-Satelliten das Imaging Compton Telescope<sup>1</sup> (COMPTEL) Verwendung. Im Gegensatz zum Nachweis von Strahlung im sichtbaren Bereich des Spektrums steht man vor dem Problem, daß Metallocberflächen, wie sie in herkömmlichen Teleskopen zur Reflexion Verwendung finden, für  $\gamma$ -Strahlung transparent sind. Der Bau eines herkömmlichen (optischen) Teleskops in diesem Spektralbereich ist also nicht möglich. Bei COMPTEL nun werden zwei hintereinandergeschaltete Detektoren eingesetzt, in denen ankommende  $\gamma$ -Quanten jeweils Comptonelektronen auslösen. Aus den Daten können Rückschlüsse auf die Energiedeposition und Einfallsrichtung der  $\gamma$ -Quanten und damit auf die Lage des  $\gamma$ -Strahlers im Universum gezogen werden.

<sup>1</sup><http://cossc.gsfc.nasa.gov/cossc/comptel/>

# Anhang C

## Einige Beschleuniger und Detektoren

CERN	Centre Europeén de la Recherche Nucléaire; Europäisches Kernforschungszentrum, Genf, Schweiz
DESY	Deutsches Elektronen-Synchrotron, Hamburg
DORIS	Elektron-Positron-Speicherring-Anlage im DESY (Schwerpunktsenergien zunächst ca. 2 – 7 GeV, jetzt ca. 10 GeV)
FNAL	Fermi National Accelerator Laboratory, Batavia, Ill., USA
HERA	Elektron-Positron-Speicherring Anlage im DESY (Schwerpunktsenergie ca. 300 GeV)
ISR	Proton-Proton-Speicherring-Anlage im CERN (Geschlossen 1984. Schwerpunktsenergien ca. 20 – 60 GeV)
LEP	Elektron-Positron-Speicherring Anlage im CERN (Schwerpunktsenergie ca. 230 GeV)
LHC	Schwerionen-Collider im CERN (geplant) (Schwerpunktsenergie ca. 2 · 4 TeV/Nukleon)
PEP	Elektron-Positron-Speicherring Anlage im SLAC (Schwerpunktsenergie ca. 30 GeV)
PETRA	Elektron-Positron-Speicherring-Anlage im DESY (Schwerpunktsenergien ca. 14 – 15 GeV)
SLAC	Stanford Linear Accelerator Center, Stanford, Ca., USA
SLC	Elektron-Positron-Kollisions-Anlage (Schwerpunktsenergie ca 100 GeV)
SPEAR	Elektron-Positron-Speicherring-Anlage im SLAC (Schwerpunktsenergien ca, 2 – 7 GeV)
SppS	Proton-Antiproton-Speicherring-Anlage im CERN (Schwerpunktsenergie ca. 600 GeV)
BaBar	b̄b-Detektor am SLAC



## Anhang D

# Forschungsreaktor FRM-II

Der Forschungsreaktor München II (FRM-II) heißt offiziell Forschungsneutronenquelle Heinz Maier-Leibnitz und wird von der Technischen Universität München betrieben. Der Reaktor wurde auf dem Campus der TU-München direkt neben seinem Vorgänger, dem ersten deutschen Forschungsreaktors FRM-I, erbaut. Der FRM-I wurde von 1957 bis zum Jahre 2000 betrieben und steht heute unter Denkmalschutz. Aufgrund seines markanten Kuppelbaus wird er als "Garchinger Atomei" bezeichnet. Er wird nun als zusätzliche Experimentierhalle für den FRM-II genutzt.

Der FRM-II besteht aus dem Reaktorgebäude, in dem sich der eigentliche Kernreaktor befindet, und zwei angeschlossenen Neutronenleiterhallen. Des Weiteren finden sich auf dem Gelände Büros, Werkstätten und Labors.

Das Konzept des Reaktors basiert auf Grundideen, die bereits um 1970 am 55MW Hochflussreaktor des Institut Laue-Langevin in Grenoble umgesetzt wurden. Der FRM-II zeichnet sich dabei durch die Verwendung einer dichteren Uranverbindung aus, welche ursprünglich entwickelt wurde, um existierende Forschungsreaktoren ohne größere Leistungseinbußen von hoch- auf niederangereichertes Uran umzustellen. Zusätzlich wird am FRM-II die hohe chemische Uran-dichte mit einer hohen nuklearen Anreicherung kombiniert. Dies ermöglicht einen besonders kompakten Reaktorkern und damit ein besonders hohes Verhältnis von Neutronenfluss zu thermischer Leistung, da ja der FRM-II nicht als Heizkraftwerk für die Stromgewinnung gedacht ist.

Verwendet wird der FRM-II hauptsächlich für Neutronenstreuexperimente, Materialbestrahlungen, medizinische Bestrahlungen und kernphysikalische Experimente.

Der Bau des FRM-II war höchst kontrovers. Seit Erteilung der 1. Teilerrichtungsgenehmigung am 29. 4. 1996 wurde jede einzelne Genehmigung gerichtlich angefochten, jedoch wurden alle Einsprüche abgewiesen. In einem Bürgerentscheid forderte eine knappe Mehrheit der Garchinger ihre Stadtverwaltung auf, gegen die Inbetriebnahme des Reaktors einzutreten, was jedoch keine Auswirkungen hatte. Nach Durchführung aller gesetzlichen Prüfungsmöglichkeiten wurde schließlich 2003 die 3. Teilerrichtungsgenehmigung, die im wesentlichen aus der Betriebsgenehmigung besteht, abgezeichnet.

Insbesondere die Gefährdung aufgrund der Nähe zum Münchner Flughafen war ein Streithema. Um diese Gefährdung einzudämmen, wurde die Reaktorhalle mit einer meterdicken Betondecke



**Abb. D.1:** Der Forschungsreaktor FRM-II (Bild von <http://www frm2 tum de/frm2/reactor/index shtml>)



**Abb. D.2:** Blick auf den Moderatorortank vom Beckenrand: Während des Betriebs ist das Betriebsbecken mit leichtem Wasser gefüllt (Bild von <http://www.frm2.tum.de/frm2/reactor/index.shtml>)



**Abb. D.3:** 113 Brennstoffplatten sind im Brennelement eingeschweißt. Sie sind evolventenförmig um den Zentralkanal angeordnet. Der Kühlspalt ist dabei mit 2,2mm an jeder Stelle gleich breit. (Bild von <http://www.frm2.tum.de/frm2/reactor/index.shtml>)

versehen. Weiterhin wurde die Verwendung von hochangereichertem Uran stark kritisiert. Die derzeit gültige Betriebsgenehmigung enthält die Auflage, mittelfristig auf einen alternativen Brennstoff umzustellen, der aufgrund einer höheren chemische Urandichte einen niedrigeren nuklearen Anreicherungsgrad ermöglicht. Jedoch gibt es für solche Brennelemente bis heute keine genehmigte technische Realisierung.

Erbaut wurde der Reaktor für über 400 Millionen Euro von der Siemens AG. Er wurde am 2. März 2004 erstmals angefahren und erreichte am 24. August 2004 die Nennleistung von 20 MW. Seit April 2005 befindet er sich im Routinebetrieb.

In folgender Tabelle werden einige Eckdaten des FRM-II mit dem Leistungsstärksten deutschen Atomkraftwerk in Gundremmingen an der Donau verglichen:

	FRM-II	KKW-Gundremmingen
Leistung	20 MW	2600 MW
Baukosten	400 Mio. Euro	4000 Mio. Euro
Brennelemente	1 (130cm x 70cm x 24,3cm)	1568 (enthalten je 100 Brennstäbe)
Wassertemperatur	53°C	ca. 500°C
Uranmenge	ca. 8 kg	272.000 kg



# Anhang E

## Etwas Fachenglisch

Allgemeine Begriffe, Mathematik	
quantity	Grösse
digit	Ziffer
number	Zahl, Anzahl
no.	Nr.
integer number	ganze Zahl
even number	gerade Zahl
odd number	ungerade Zahl
sequence	Folge
series	Reihe
expansion	Entwicklung
polynomial	Polynom
approximately	ungefähr, näherungsweise
to approximate by	annähern durch
to apply to	anwenden auf
unique	eindeutig
zero	Null
null vector	Nullvektor
billion (US)	$10^9$ !!
billion (UK)	nicht eindeutig, meistens $10^9$
finite	endlich
to infinity	bis unendlich
decimal point	Komma (math.)
parenthesis	Klammer (rund)
bracket	Klammer (eckig)
sign	Vorzeichen
subscript	unterer Index
superscript	oberer Index
to evaluate	ausrechnen
to solve	lösen
solution	Lösung
term	Summand
to decompose into	zerlegen in
3 times 3 equals 9	3·3=9
3 by 3 equals 9	3·3=9
multiplier	Faktor
multiple of	Vielfaches von
9 divided by 3.2	9/3.2
9 over 3.2	9/3.2
rational fraction	rationaler Bruch
nominator	Zähler
denominator	Nenner
to cancel	kürzen, sich aufheben
$n$ squared	$n^2$
$n$ to the three $x$	$n^{3x}$
factorial $n$	$n!$
(square) root	(Quadrat-)Wurzel
absolute value, modulus	Betrag
plane angle	ebener Winkel
solid angle	Raumwinkel
right triangle	rechteckiges Dreieck
oblique triangle	schiefwinkliges Dreieck
sine	Sinus
tangent	Tangens, Tangente
arc length	Bogenlänge
rectangle	Rechteck
cube	Würfel (math.)
die (pl. dice)	Spielwürfel
origin	Ursprung
diameter	Durchmesser
circumference	Umfang
cone	Kegel
sphere	Kugel
angle of inclination	Neigungswinkel
theorem	Lehrsatz
continuous	stetig
derivative	Ableitung
point of inflection	Wendepunkt

dy by dx .....	dy/dx (Ableitung)	
differential calculus .....	Differentialrechnung	
homogeneous .....	homogen	
w. r. t. = with respect to .....	bezüglich	
to differentiate w. r. t. y .....	nach y ableiten	
i. e. = that is .....	d. h.	
differential equation .....	Differentialgleichung	
of second order .....	zweiter Ordnung	
boundary condition .....	Randbedingung	
row, column .....	Zeile, Spalte	
eigenvalue .....	Eigenwert	
perpendicular to .....	senkrecht auf	
dot product .....	Skalarprodukt	
cross product .....	Kreuzprodukt, Vektorprodukt	
right-hand .....	rechtshändig	
screw .....	Schraube	
del operator .....	Laplace-Operator	
curl operator .....	rot Operator	
closed path .....	geschlossener Weg	
loop .....	Schleife	
definite integral .....	bestimmtes Integral	
line integral .....	Kurvenintegral	
convolution .....	Faltung	
mean value .....	Mittelwert	
r. m. s.(root mean square) error .....	mittlerer quadratischer Fehler	
FWHM (full width half maximum) .....	volle Halbwertsbreite	
on average .....	im Durchschnitt	

**Physik**

momentum .....	Impuls	
(external) force .....	(äußere) Kraft	
attractive .....	anziehend	
repulsive .....	abstoßend	
acceleration .....	Beschleunigung	
acc. of free fall .....	Fallbeschleunigung	
deceleration .....	Abbremsung	
equilibrium .....	Gleichgewicht	
lever .....	Hebel	
conservation .....	Erhaltung	
power .....	Leistung	
inert mass .....	träge Masse	
reference system .....	Bezugssystem	
center of mass (CM) .....	Schwerpunkt	
apparent force .....	Scheinkraft	
constraint force .....	Zwangskraft	
starrer Körper .....	rigid body	
moment of inertia .....	Trägheitsmoment	
angular momentum .....	Drehimpuls	
torque .....	Drehmoment	
angular velocity .....	Winkelgeschwindigkeit	
orbit .....	Umlaufbahn	
principal axis .....	Hauptachse	
gyroscope .....	Kreisel ( <i>phys.</i> )	
top .....	Spielzeugkreisel	
to spin .....	(sich) schnell drehen	
static friction .....	Haftreibung	
sliding friction .....	Gleitreibung	
eigenfrequency .....	Eigenfrequenz	
instantaneous value .....	Momentanwert	
damped oscillation .....	gedämpfte Schwingung	
beat .....	Schwebung	
spring .....	(mechanische) Feder	
rod .....	Stab	
disk .....	Scheibe	
sheet .....	Platte	
sphere .....	Kugel	
inclined plane .....	schiefe Ebene	
angle of inclination .....	Neigungswinkel	
equation of motion .....	Bewegungsgleichung	
potential well .....	Potentialmulde	
source .....	Quelle	
sink .....	Senke	
attenuation, damping .....	Dämpfung	
propagation .....	Ausbreitung	
stress .....	Spannung (mech.)	
tensile stress .....	Zug-/Druckspannung	
shear stress .....	Querspannung	
strain .....	rel. Längenänderung	
volume strain, bulk strain .....	rel. Volumenänderung	
elastic modulus, Young's modulus .....	E-modul	
shear angle .....	Scherungswinkel	
shear modulus .....	G-modul	
to twist .....	verdrehen	
to clamp .....	festklemmen	
to expand .....	(sich) ausdehnen	
to contract .....	(sich) zusammenziehen	
surface tension .....	Oberflächenspannung	
diaphragm .....	Membrane, Blende ( <i>opt.</i> )	
buoy .....	Boje	
buoyancy .....	Auftrieb	

**Elektrodynamik**

point charge .....	Punktladung
to repel .....	abstoßen

to attract .....	anziehen	direct current, DC .....	Gleichstrom
crystal lattice .....	Kristallgitter	ammeter .....	Ampèremeter
flux ( <i>electric</i> ) .....	Fluß	oscilloscope .....	Oszillograph
to enclose .....	einschließen	screen .....	Schirm, Bildschirm
insulator .....	Isolator	inductance .....	Induktivität
conductor .....	Leiter	coil .....	Spule
conductivity .....	Leitfähigkeit	solenoid .....	Magnetspule
stationary .....	statisch	impedance .....	Impedanz
transient .....	vorübergehend ( <i>zeitl.</i> )	resistance .....	Widerstand
circuit .....	Kreis, Stromkreis	resistor .....	Widerstand (Bauelement)
circuit diagram .....	Schaltplan	capacitor .....	Kondensator
energy dissipation .....	Energieverlust in Wärme	cavity .....	Hohlraum
tension, voltage .....	Spannung ( <i>elektrische</i> )		
alternating current, AC .....	Wechselstrom		



# Abbildungsverzeichnis

1	Entwicklung des Universums . . . . .	3
1.1	Experimenteller Zugang: Streuprozesse . . . . .	5
1.2	Längenskalen und Hierarchie der Strukturen im Atom. Daneben sind typische Anregungsenergien und -spektren gezeigt. Je kleiner die gebundenen Systeme sind, desto größer sind ihre Anregungsenergien. . . . .	6
1.3	Zweiteilchen-Streuprozesse . . . . .	9
1.4	Zerfall eines Teilchens . . . . .	9
1.5	Beispiel: Wechselwirkung zweier Elektronen – Feynman-Diagramm . . . . .	11
1.6	Beispiel: Wechselwirkung zweier Quarks – Feynman-Diagramm . . . . .	11
1.7	Beispiel: Austausch eines W-Bosons im Feynman-Diagramm . . . . .	12
1.8	Beispiel: Austausch eines $Z^0$ -Bosons im Feynman-Diagramm . . . . .	12
1.9	Die $\beta$ -stabilen Kerne in der $Z$ - $N$ -Ebene (nach [Bo69]) . . . . .	13
1.10	Energiespektrum der Elektronen beim $\beta$ -Zerfall . . . . .	15
2.1	Das Bild zeigt einen Ausschnitt des Atlas- Detektors, welcher zur Messung des Higgs- Bosons am LHC (CERN) in Genf verwendet wird . . . . .	19
2.2	Schema eines Hochspannungs-Beschleunigers . . . . .	21
2.3	Cockcroft-Walton-Beschleuniger . . . . .	22
2.4	Schema eines Van-de-Graaff-Beschleunigers (aus [Wi92]) . . . . .	23
2.5	Der Tandem-Van-de-Graaff-Beschleuniger am Münchener Beschleunigerlaboratorium . . . . .	23
2.6	Lorentzkraft. Die Kreuze deuten an, daß das $\vec{B}$ -Feld in die Blattebene hineingeht. Entsprechend müßte ein auf der Bahn kreisendes Teilchen positive Ladung besitzen (z. B. ein Positron). . . . .	24
2.7	Schematische Darstellung eines Betatrons . . . . .	25
2.8	Betatron a) Schnitt durch die Symmetriearchse b) Aufsicht (aus [Ko55]) . . . . .	27
2.9	radiale Stabilität im Betatron (aus [Ko55]) . . . . .	27
2.10	Axiale Stabilitätsbedingung . . . . .	28

2.11 Phasendiagramm, $\omega \approx 50$ Hz . . . . .	29
2.12 Schema eines Zyklotrons (aus [Ko55]) . . . . .	31
2.13 Schema eines Synchrotrons (aus [Wi92]) . . . . .	34
2.14 Phasendiagramm für Synchrotron (aus [Ko55]) . . . . .	36
2.15 Stärke des Magnetfeldes und Intensität des Teilchenstrahles während eines Umlaufes. Bei $t = 0$ werden die Teilchen eingeschossen, bei $t_0$ ist die Beschleunigung beendet und mit der Extraktion der Teilchen wird begonnen. Diese ist bei $t_1$ abgeschlossen. . . . .	36
2.16 Dipolmagnete . . . . .	39
2.17 Quadrupolmagnete (aus [Wi92]) . . . . .	39
2.18 Magnetsektion eines Beschleunigers mit Dipolenmagneten und Quadrupoldupletts (aus [Po96]). . . . .	39
2.19 Teilchenbahnen . . . . .	40
2.20 Synchrotonringe am Fermilab aus der Vogelperspektive . . . . .	41
2.21 Innenansicht eines Tunnels (Fermilab Double Ring) . . . . .	41
2.22 Schema eines Protonen-LINACs (aus [Wi92]) . . . . .	41
2.23 Protonen-LINACs . . . . .	42
2.24 Runzelröhre . . . . .	43
2.25 Beamlines am Fermilab (Tevatron) . . . . .	44
2.26 Elektronen-LINAC am SLAC . . . . .	44
2.27 Luftaufnahme vom SLAC- Gelände . . . . .	45
2.28 Größter weltweiter Zyklotron: Triumpf . . . . .	45
2.29 Phasendiagramm für LINAC (Momentaufnahme) . . . . .	46
2.30 ruhendes Target . . . . .	46
2.31 ruhender Schwerpunkt . . . . .	46
2.32 CERN's Chain of Accelerators . . . . .	48
2.33 CERN in Vogelperspektive . . . . .	49
2.34 Prinzip eines Colliders (aus [Wi92]) . . . . .	49
2.35 Bild aus dem LEP (CERN) . . . . .	50
2.36 Stoßparameter . . . . .	53
2.37 Differentieller Materieausschnitt . . . . .	53
2.38 Energieverlust durch Ionisation . . . . .	55
2.39 Feldlinien einer bewegten Punktladung . . . . .	55
2.40 Fluktuationen im Energieverlust: Landau-Verteilung . . . . .	57
2.41 Emulsionen, Teilchenidentifizierung LEP . . . . .	57

---

<b>ABBILDUNGSVERZEICHNIS</b>	<b>565</b>
------------------------------	------------

2.42 Teilchen im polarisierten Medium (aus [Ma66]) . . . . .	58
2.43 Čerenkov-Abstrahlung . . . . .	58
2.44 Anregungen im NaI(Tl)-Kristall . . . . .	59
2.45 Elektronische An- und Abregung in Molekülen . . . . .	60
2.46 Schema eines Szintillationszählers . . . . .	60
2.47 Schema eines Photomultipliers (aus [Gr93]) . . . . .	61
2.48 Anwendung: Flugzeitmessung . . . . .	62
2.49 Schema eines Gasproportionalzählers . . . . .	62
2.50 Schema eines Gasproportionalzählers . . . . .	63
2.51 Elektronenlawine zur Gasverstärkung . . . . .	63
2.52 Schema einer Vieldrahtkammer . . . . .	64
2.53 Driftprinzip . . . . .	64
2.54 Schema einer zylindrischen Driftkammer . . . . .	65
2.55 Vielfachstreuung und Winkelverteilung . . . . .	65
2.56 Energieabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten (aus [He66]) . . . . .	67
2.57 Schema einer Blasenkammer . . . . .	68
2.58 Bilder einer Blasenkammer ( <i>BEBC</i> , Big European Bubble Chamber am CERN)	69
2.59 Elektromagnetische Kaskade im Kalorimeter . . . . .	70
2.60 Hadronische Kaskade im Kalorimeter (aus [Gr93]) . . . . .	71
2.61 3-d Ansicht des Hades-Experiments . . . . .	72
2.62 Schematische Darstellung des Rich-Detektor (Teil des Hades Experiments) . .	72
2.63 Beispiel eines modernen Detektors in fixed- target Geometrie: COMPASS . .	72
2.64 Beispiel eines modernen Detektors für Collider: DELPHI . . . . .	73
2.65 Schematische Skizze des CMS- Detektors am LHC; Bild aus Physik Journal, Ausgabe 2,2006 . . . . .	74
2.66 Schematische Skizze des Atlas- Detektors am LHC; Bild aus Physik Journal, Ausgabe 2,2006 . . . . .	74
2.67 Der CMS- Detektor am CERN; Bild aus Physik Journal, Ausgabe 2,2006 . .	74
2.68 Der CMS- Detektor am CERN . . . . .	74
3.1 Streuung an einem Target der Dichte $n_b$ . . . . .	77
3.2 Definition der Streuwinkel . . . . .	78
3.3 Ein Streuprozeß . . . . .	79
3.4 Die Bezugssysteme S und S' . . . . .	81
3.5 Stoß zweier Teilchen im Laborsystem . . . . .	82

3.6	Der bei der Streuung übertragene Impuls . . . . .	84
3.7	Modell der Wechselwirkung durch Austausch eines Teilches mit Masse $\mu$ . . . . .	85
3.8	Ein- und Auslaufende Wellenfunktionen $\Psi_i$ und $\Psi_f$ . . . . .	87
3.9	Austausch eines Photons . . . . .	88
3.10	Feynmandgraph der Elektronenstreuung . . . . .	90
3.11	Elektronenstreuung im Laborsystem . . . . .	91
3.12	Nuklidkarte (Übersicht) . . . . .	96
3.13	Anfang der Nuklidkarte . . . . .	96
3.14	Wirkungsquerschnitt bei Streuung an $^{12}\text{C}$ (aus [Po96]) . . . . .	99
3.15	Streuung an verschiedenen Ca-Isotopen. Zur besseren Darstellung wurden die Wirkungsquerschnitte jeweils mit 10 bzw. $10^{-1}$ multipliziert. Die durchgezogenen Linien entsprechen Ladungsverteilungen, die man an die Daten angepaßt hat (aus [Po96]). . . . .	100
3.16	Fermiverteilung mit zwei Parametern (aus [Po96]) . . . . .	100
3.17	Ladungsverteilung verschiedener Kerne (aus [Po96]) . . . . .	102
3.18	Streuung von $e^-$ an einem dünnen Target . . . . .	102
3.19	Prinzip eines Magnetspektrometers . . . . .	103
3.20	Prinzip eines abbildenden Magnetspektrometers . . . . .	103
3.21	Dispersion in der Optik . . . . .	103
3.22	Impulsdetektion mit Hilfe einer magnetischen Optik . . . . .	104
3.23	Aufbau von MAMI-B (aus [Po96]) . . . . .	105
3.24	Formfaktoren von Pionen und Kaonen (aus [Po96]) . . . . .	106
4.1	Faynmandiagramm für Teilchen und Antiteilchen . . . . .	116
4.2	Austausch eines Photons zwischen den Elektronen . . . . .	119
4.3	Elektron- Myon Streuung . . . . .	120
4.4	Teilchen- Teilchen- Streuung . . . . .	121
4.5	Teilchen- Antiteilchen- Streuung . . . . .	121
4.6	Am spinlosen Target ist die Rückwärtsstreuung ohne Spin-Flip unterdrückt . . . . .	123
4.7	Der im Breitsystem übertragene Impuls . . . . .	124
4.8	Streuung geladener Leptonen . . . . .	125
4.9	Wirkungsquerschnitt für Bhabha-Streuung (aus [It85]) . . . . .	126
4.10	Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Die durchgezogene Linie entspricht Gl. (4.31) (aus [Ha84]). . . . .	127
4.11	Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ (aus [Lo86]) . . . . .	127
4.12	Wirkungsquerschnitte bei Myon-Paar-Produktion in der Nähe der $Z^0$ -Resonanz	128

4.13	Differentieller Wirkungsquerschnitt für $e^+e^-$ -Vernichtung in zwei Photonen (aus [Be92]) . . . . .	129
4.14	Compton-Streuung . . . . .	130
4.15	Winkelabhängigkeit der wichtigsten Prozesse der Elektronenstreuung . . . . .	131
4.16	Aufspaltung im Magnetfeld . . . . .	132
4.17	Aufspaltung im Magnetfeld und Berücksichtigung des Spins . . . . .	133
4.18	Aufspaltung mit Spin . . . . .	134
4.19	Feld einer Penning-Falle . . . . .	135
4.20	3D Ansicht . . . . .	135
4.21	Komponenten der Bewegung . . . . .	135
4.22	Gesamtbewegung . . . . .	135
4.23	Ersatzschaltkreise für die Penningfalle mit und ohne Elektron in der Falle. . . . .	136
4.24	Prinzip von Dehmels Apparatur . . . . .	137
4.25	Gemessene Formfaktoren von ${}^4\text{He}$ und ${}^6\text{Li}$ . . . . .	144
4.26	Totaler Wirkungsquerschnitt für Photon-Proton-Streuung aus [Er88]) . . . . .	145
5.1	Coulombpotential im Wasserstoffatom . . . . .	147
5.2	Bezugssysteme und Helizität . . . . .	149
5.3	Erlaubte und unterdrückte Streuwinkel bei Berücksichtigung des Spins . . . . .	150
5.4	Elektronenstreuung am Wasserstoff (aus [Fr91]) . . . . .	151
5.5	Beispiel: Magnetischer Formfaktor des Protons (aus [Pe87]) . . . . .	152
5.6	Proton im Breitsystem . . . . .	153
5.7	Für konstantes $Q^2$ ergibt sich im $\tan^2 \frac{\theta}{2} - (\frac{d\sigma}{d\Omega}) / (\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{Mott}}$ -Diagramm eine Gerade .	154
5.8	Elastische Proton-Formfaktoren $G_E$ (links) und $G_M$ (rechts). Dargestellt sind nur Abweichungen von der Dipolform (5.12) . . . . .	155
5.9	Aufbau zur Messung der elastischen e-p-Streuung: $\text{LH}_2$ -Target (flüssiger Wasserstoff $\text{H}_2$ ), 25 cm lang, bzw. 65 cm lang für Messungen mit hohem Impulsübertrag $Q^2$ ; Schwellenčerenkovzähler zur Elektronenidentifikation; 10 Ebenen Drahtkammern; Pb-Glas-Schauerzähler (Elektronen im Trigger; totale Pionen-Verwerfung: $10^4$ ) . . . . .	155
5.10	Inverse Kinematik: fast ruhendes Hüllenelektron; Neutronen aus Reaktor . . . . .	156
5.11	Elektronenbeschleuniger (Hofstaders Experiment) . . . . .	156
5.12	$G_M^n$ , Dipolfit, $\mu_n$ . . . . .	158
5.13	Polarisierte Photonen aus Streuung. Links ein reelles, rechts ein virtuelles Photon. Die Photonen weisen eine Polarisationsrichtung entsprechend der Magnetfeldrichtung auf. . . . .	159

5.14 Streuung von Neutronen an Protonen in einem Kohlenstofftarget. Die Polarisationsachse steht senkrecht zu Streuebene. . . . .	159
5.15 Vergleich der Messung nach der Polarisations-Methode und nach der Rosenbluth-Methode . . . . .	160
5.16 Räumliche Trennung der Teilchenbahnen bei MAMI . . . . .	160
5.17 Schematischer Aufbau des Mainzer Mikrotrons. . . . .	161
5.18 Messungen des elektrischen Formfaktors des Neutrons bei MAMI gemäß (5.15). Die Signaturen geben die verwendeten leichten Target-Atome (mit niedrigen Bindungsenergien) an. . . . .	161
5.19 Streuung von Elektronen an einem Kern . . . . .	162
5.20 Inelastische Streuung am Nukleon im Feynmandiagramm. Es bedeuten: $M$ Masse des Nukleons, $v = E - E'$ übertragene Energie, $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$ übertragener Impuls, $Q^2 = -q^2 = \vec{q}^2 - v^2$ . . . . .	164
5.21 Differentieller Wirkungsquerschnitt für die inelastische Elektron-Proton-Streuung im Resonanzbereich – Spektrum der gestreuten Elektronen bei Elektron-Proton-Streuung, aufgenommen bei einer Elektronenenergie $E = 4.9$ GeV unter einem Streuwinkel von $\vartheta = 10^\circ$ (aus [Ba68]). . . . .	166
5.22 Angeregte Zustände des Nukleons. Resonanzen, die in der Pion-Nukleon- und Photon-Nukleon-Streuung beobachtet werden, geordnet nach ihrem Spin (Gesamtdrehimpuls) und ihrer Parität (Eigenschaften des Zustands unter einer Raumspiegelung). . . . .	166
5.23 Erzeugung und Zerfall eines $\Delta$ -Zusatandes, hier $\Delta^+$ . . . . .	167
5.24 Tiefinelastische Streuung von Elektronen an einem Proton . . . . .	168
5.25 Spektrum der gestreuten Elektronen am Kern . . . . .	168
5.26 $Q^2$ -Abhängigkeit des Elektron-Proton-Streuquerschnitts (aus [Br69]) . . . . .	169
5.27 Elektron-Proton-Streuung: gemessene Anregungsspektren in der tiefinelastischen Elektron-Nukleon-Streuung als Funktion der invarianten Masse $W$ . Man beachte die unterschiedlichen Skalen an der Ordinatenachse. Die Messungen wurden bei einem festen Streuwinkel von $\vartheta = 4^\circ$ durchgeführt. Mit zunehmender Einfallsenergie $E$ wächst der mittlere $Q^2$ -Bereich der Daten. Während insbesondere die erste Resonanz ( $W = 1.232$ GeV/c $^2$ ) immer weniger ausgeprägt wird, nimmt das Kontinuum ( $W \gtrsim 2.5$ GeV/c $^2$ ) nur geringfügig ab (aus [St75]). . . . .	171
5.28 Quasi-elastische Elektronenstreuung an gebundenen Protonen . . . . .	171
5.29 Die Strukturfunktion $F_2$ des Protons als Funktion von $x$ bei $Q^2$ -Werten zwischen $2$ (GeV/c) $^2$ und $18$ (GeV/c) $^2$ (aus [At82]) . . . . .	172
5.30 Laborsystem . . . . .	173
5.31 <i>infinite momentum frame</i> . . . . .	173
5.32 Verhältnis der Strukturfunktionen $2xF_1(x)$ und $F_2(x)$ . Die Daten stammen aus Experimenten am SLAC. Wie man sieht, ist der Quotient etwa konstant Eins (aus [Po96]). . . . .	174

5.33 See-Quarks . . . . .	175
5.34 Vergleich der Strukturfunktionen, die man bei der tiefinelastischen Streuung mit geladenen Leptonen und Neutrinos erhält. Neben der Strukturfunktion $F_2$ sind die Verteilung der Antiquarks $\bar{q}(x)$ (offene Symbole), aus der sich die See-quarkverteilung ergibt, und die Verteilung der Valenzquarks (hier mit $xF_3(x)$ bezeichnet) angegeben (nach [PD94]). . . . .	177
5.35 Schematische Darstellung der Strukturfunktion . . . . .	178
5.36 Tiefinelastische eN-Streuung . . . . .	182
5.37 Strukturfunktion des Protons . . . . .	182
6.1 Bhabha-Streuung . . . . .	186
6.2 Ersetzen wir die Elektronen durch Quarks! . . . . .	186
6.3 $R$ -Verhältnis aus Speicherringen . . . . .	187
6.4 $R$ -Verhältnis aus Speicherringen . . . . .	188
6.5 Wirkungsquerschnitt der Reaktion $e^+e^- \rightarrow$ Hadronen, normiert auf den Prozess $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ als Funktion der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ (schematisch). Die horizontalen Linien entsprechen $R = 6/3$ , $R = 10/3$ und $R = 11/3$ , den Werten, die man aus (6.1) und (6.2) je nach Zahl der beteiligten Quarks erwartet. Wie man sieht, können ab bestimmten Schwellenenergien $\sqrt{s}$ neben dem <i>up</i> -, <i>down</i> - und <i>strange</i> -Quark noch weitere Quarks erzeugt werden. Ferner erkennt man Resonanzen, an denen Mesonen wie das $\rho$ , das $\omega$ oder das $J/\psi$ entstehen (siehe Abschnitt 6.7.1). Gestrichelt ist außerdem der Wert $R = 15/3$ eingezeichnet, der sich bei Beteiligung des <i>top</i> -Quarks ergeben sollte (aus [Po96]). . . . .	189
6.6 Gewichtsdiagramme für die Quarks u, d, und s (Triplet [3], links), sowie für die Antiquarks $\bar{u}$ , $\bar{d}$ , und $\bar{s}$ (Anti-Triplet $[\bar{3}]$ , rechts) . . . . .	197
6.7 Oktett (links) und Dekuplett (rechts) . . . . .	198
6.8 SU(4) Flavour-Multiplets. . . . .	200
6.9 Typisches 2-Jet- und 3-Jet-Ereignis, gemessen mit dem JADE-Detektor am $e^+e^-$ -Speicherring PETRA. Die Bilder zeigen eine Projektion senkrecht zur Strahlachse, die sich im Zentrum des zylinderförmigen Detektors befindet. Gezeigt sind Spuren geladener (durchgezogene Linien) und ungeladener (gepunktete Linien) Teilchen, die aufgrund ihrer Signale in der innen angeordneten Drahtkammer und des sie umgebenden Bleiglaskalorimeters rekonstruiert wurden. In dieser Projektion ist die Konzentration der erzeugten Hadronen auf zwei bzw. drei Teilchenbündel deutlich zu erkennen (aus [Po96]). . . . .	210
6.10 Gegenüberstellung der Strukturfunktion und der Fragmentationsfunktion . . .	211
6.11 Abstrahlung eines „weichen“ Gluons (Gluonbremsstrahlung bei Elektron-Positron-Kollisionen) . . . . .	212
6.12 Abstrahlung von Bremsgluonen, Erzeugung neuer Quark-Antiquark-Paare, sowie deren Hadronisation. . . . .	212

6.13 Zerfall des $\omega$ in drei Pionen . . . . .	215
6.14 Zerfallsschema des $\phi$ -Mesons 215	
6.15 Nach Zweig-Regel unterdrückter Zerfall des $\phi$ 's in drei Pionen . . . . .	215
6.16 Ein Vektormeson $q\bar{q}$ zerfällt in ein Lepton-Antilepton-Paar . . . . .	216
6.17 Wie das $\Psi$ zu seinem Namen kam... Beispiel für die Beobachtung eines Zerfalls $J/\psi(3.7) \rightarrow J/\psi(3.1) + \pi^+ + \pi^-$ in einem Funkenkammer-Detektor. Das $J/\psi(3.1)$ zerfällt in $e^+ + e^-$ . Die Spuren (3) und (4) gehören zu den relativ niederenergetischen Pionen (150 MeV), (1) und (2) zu den 1.5 GeV-Elektronen. Das Magnetfeld und die Strahlröhre des SPEAR stehen senkrecht auf der Zeichenebene. Die eingezeichnete Bahn jedes der vier Teilchen ist die beste Anpassung durch die beobachteten Funken, durch Kreuze symbolisiert (nach [Ab75]). . . . .	218
6.18 Die Entdeckung des $J/\psi$ am 28 GeV-AGS des Brookhaven National Laboratory. Man sieht die schmale $J/\psi$ -Resonanz in der Verteilung der invarianten Masse des $e^+e^-$ -Paars, das in Reaktionen von Protonen an einem Beryllium-Target erzeugt wurde (nach [Au74a]). . . . .	218
6.19 Schematischer Aufbau zur Produktion des charm-Quarks in Brookhaven . . .	219
6.20 Resonante Erzeugung des $J/\psi$ am SLAC. Wirkungsquerschnitt für getrennte Endzustände: (a) Hadronen, (b) $\mu^+\mu^-$ und (c) $e^+e^-$ . Die Resonanz wurde in $e^+e^-$ -Kollisionen am Speicherring SPEAR am SLAC erzeugt (nach [Au74b]). . . . .	220
6.21 Zerfall des $J/\Psi$ . . . . .	220
6.22 Mögliche Zerfallsmoden von Quarkonia. Der hadronische Zerfall könnte wegen der Farberhaltung in zwei oder drei Gluonen erfolgen. Wegen $J^P(g) = J^P(c\bar{c}) = 1^-$ ist aufgrund der Paritätserhaltung jedoch nur der Zerfall in drei Gluonen möglich. . . . .	222
6.23 Wasserstoff und Positronium . . . . .	224
6.24 Termschemata von Wasserstoff und Positronium im Vergleich. . . . .	225
6.25 Crystal-Ball-Detektor aus kugelförmig angeordneten NaI-Kristallen (Kristallkugel). In diesen Kristallen werden die (hochenergetischen) Photonen aus elektromagnetischen $c\bar{c}$ -Übergängen absorbiert. Sie erzeugen dabei einen Schauer von Elektron-Positron-Paaren, die ihrerseits Emissionszentren im Kristall anregen und dadurch viele niederenergetische Photonen im sichtbaren Bereich erzeugen. Diese werden an der Rückseite der Kristalle von Sekundärelektronenvervielfachern (Photomultipliern) nachgewiesen. Der gemessene Photomultiplierstrom ist dann proportional zur Energie des primären Zerfallsphotons (aus [Kö86]). . . . .	227

6.26 Ergebnisse von SPEAR: Photonenspektrum beim Zerfall des $\Psi(2^3S_1)$ , wie es mit einer Kristallkugel gemessen wurde, und daraus abgeleitetes Termschema des Charmoniums. Die scharfen Linien im Photonenspektrum entsprechen gerade den ihnen durch die Nummern zugeordneten Übergängen im Termschema. Die im Termschema durchgezogenen Linien entsprechen elektrischen Dipolübergängen mit Paritätsänderung, die gestrichelten Linien magnetischen Dipolübergängen ohne Paritätsänderung (aus [Kö86]). . . . . .	228
6.27 Termschemata von Charmonium und Positronium im Vergleich. . . . .	229
6.28 Form des QCD-Potentials $V = -\frac{4}{3}(\alpha_s/r) + kr$ . . . . .	230
6.29 Typische Feldlinien der elektromagnetischen (links) und starken (rechts) Wechselwirkung. . . . .	230
6.30 Termschemata von Charmonium und Ypsilononium im Vergleich . . . . .	231
6.31 Spektroskopie der Baryonen . . . . .	235
6.32 Spektrum niedrig liegender Nukleon- und $N^*$ -Resonanzzustände . . . . .	238
6.33 Streuung am kugelsymmetrischen Potential . . . . .	240
6.34 Resonanz in $\sigma_{\text{tot}}$ . . . . .	242
6.35 Argand-Diagramm für inelastische Streuung . . . . .	244
6.36 Streuung von Pionen an Nukleonen . . . . .	244
6.37 Der Formationsprozeß $K^+p \rightarrow \Sigma^{*0} \rightarrow K^+p$ . . . . .	247
6.38 Totaler und elastischer Streuquerschnitt der Reaktion von $\pi^+$ -Mesonen mit Protonen (oben) bzw. von $K^-$ -Mesonen mit Protonen (unten) als Funktion des Impulses des Mesonenstrahls bzw. der Schwerpunktsenergie (aus [Po96]) . . . . .	248
6.39 Invariantes Massenspektrum der Teilchenkombination $\Lambda^0 + \pi^+$ (links) bzw. $\Lambda^0 + \pi^-$ (rechts) aus der Reaktion $K^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^+ + \Lambda^0$ . In beiden Spektren sieht man jeweils ein Maximum bei ca. $1385 \text{ MeV}/c^2$ , das einem $\Sigma^{*+}$ bzw. einem $\Sigma^-$ entspricht. Die Energie des jeweils beim Zerfall unbeteiligten Pions ist kinematisch festgelegt. Daher ergibt sich durch die Kombination des $\Lambda^0$ mit dem „falschen“ Pion ein weiteres Maximum bei höherer Energie, das jedoch keiner Baryonresonanz entspricht („Modifizierter Phasenraum“; aus [Po96]). . . . .	249
6.40 Nachweis der Zerfallsprodukte in Spurendetektoren . . . . .	249
6.41 Detektoranordnung zur Messung eines Hyperonenstrahls . . . . .	250
6.42 Dalitzplot für das Subsystem $\Lambda\pi$ . . . . .	251
6.43 Allgemeiner Dalitzplot für drei erzeugte Teilchen . . . . .	252
6.44 Wirkungsquerschnitt bei Hadronenstreuung (aus [Pe87]) . . . . .	254
6.45 totale Wirkungsquerschnitte bei Streuung verschiedener Hadronen (aus [Pe87])	255
6.46 Differentieller Wirkungsquerschnitt für elastische pp-Streuung als Funktion des Quadrats $ t  =  q^2 $ des Impulsübertrags (aus [Pe87]) . . . . .	257
6.47 Mögliche Wechselwirkungen von Gluonen . . . . .	263

6.48	Quark-Gluon-Kopplungsvertex . . . . .	264
6.49	3 Gluonen Vertex . . . . .	264
6.50	4 Gluonen Vertex . . . . .	264
6.51	Vakuumpolarisation in der QED . . . . .	265
6.52	Abhängigkeit von $\alpha$ vom Abstand . . . . .	266
6.53	Vakuumpolarisation in der QCD . . . . .	266
6.54	Abhängigkeit von $\alpha_s$ vom Abstand (die + und - stehen symbolisch für die Farbladungen) . . . . .	267
6.55	$Q$ -Abhängigkeit von $\alpha_s$ . . . . .	268
6.56	Tiefinelastische Streuung im naiven Partonmodell . . . . .	268
6.57	Geringes Auflösungsvermögen $Q_0^2$ . . . . .	270
6.58	Erhöhtes Auflösungsvermögen $Q^2$ . . . . .	270
6.59	$Q^2$ -Evolution der Strukturfunktion $F_2$ des Protons . . . . .	273
6.60	Quark- und Gluon-Verteilungen im Proton (QCD-Analyse) . . . . .	274
6.61	Quarks und Gluonen tragen jeweils etwa die Halfe des Gesamtimpulses . . . . .	274
6.62	Bestätigung der Formel 6.44 . . . . .	279
6.63	Energien und Impulse CMS . . . . .	280
6.64	Zur Erklaerung des Winkels Theta in der Pseudorapidität . . . . .	284
6.65	Pseudorapiditatverteilung . . . . .	284
6.66	Erzeugung von zwei Jets bei $e^-e^+$ -Kollision . . . . .	285
6.67	Winkelverteilung von zwei Jets bei $e^-e^+$ -Kollision . . . . .	285
6.68	$e^-e^+$ -Paarvernichtung . . . . .	286
6.69	Tiefinelastische Myonen-Streuung an eine Parton mit dem Impulsbruchteil $x$ . . . . .	286
6.70	Leptonen-Produktion aus zwei Quarks . . . . .	286
6.71	Winkelverteilung bei Leptonen-Produktion aus zwei Protonen . . . . .	288
6.72	$\gamma$ -Austausch . . . . .	288
6.73	virtueller $\gamma$ -Zwischenzustand . . . . .	288
6.74	„ $t$ -Kanal“ . . . . .	289
6.75	„ $s$ -Kanal“ . . . . .	289
6.76	Aufbau des CDF-Detektors sowie ein damit gemessenes Ereignis . . . . .	292
6.77	Differentielle Wirkungsquerschnitte bei der Streuung punktförmiger Teilchen an einem $1/r$ -Potential (Rutherford-Streuung) (aus [Pe87]) . . . . .	294
6.78	Die Punkte zeigen die Kombination der Strukurfunktionen $g(x)+4/9(q(x)+\bar{q}(x))$ bei $Q^2 \approx 2000 \text{ GeV}^2$ . Die durchgezogene Linie erhält man aus der Messungen bei $Q^2 \approx 20 \text{ GeV}^2$ (gestrichelte Linie) durch QCD-Entwicklung zu $Q^2 \approx 2000 \text{ GeV}^2$ . Ohne den Gluonbeitrag ergibt sich dabei die gestrichpunktete Linie (aus [Pe87]). . . . .	296

6.79	Polarisation bei Produktion von Hyperonen . . . . .	297
6.80	Abstrahlung von Pionen bei Zerfall von Hyperonen . . . . .	298
6.81	Strukturfunktion des Nukleons . . . . .	299
6.82	Differentieller Wirkungsquerschnitt für Pion-Proton-Streuung (aus [Er88]) . . . . .	303
6.83	Dalitz-Plot in $\pi^0\pi^0\pi^0$ (Crystal-Barrel-Experiment, CERN) . . . . .	305
6.84	Elastische pp-Streuung bei $\sqrt{s} = 23$ GeV . . . . .	306
7.1	semileptonischer Prozess . . . . .	309
7.2	hadronischer Prozess . . . . .	309
7.3	leptonische Zerfälle . . . . .	309
7.4	geladener Strom (CC) . . . . .	309
7.5	neutraler Strom (NC) . . . . .	309
7.6	Elektronen- Myonen- Paare gegen die Schwerpunktsenergie bei der Entdeckung des tau- Neutrinos . . . . .	313
7.7	Definition der Rechtshändigkeit . . . . .	314
7.9	Spinrichtungen beim Goldhaber-Experiment . . . . .	315
7.10	Der im Goldhaber-Experiment betrachtete Übergang . . . . .	315
7.8	Niveauschema beim Prozess $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ (im Atomkern!) . . . . .	315
7.11	Helizitäten beim Goldhaber-Experiment . . . . .	316
7.12	Aufbau und Messergebnis des Goldhaber-Experiments . . . . .	317
7.13	Impulse beim Myonenzerofall . . . . .	322
7.14	Energiespektrum des Elektrons beim Myonzerfall . . . . .	323
7.15	Experiment zur Untersuchung des $\mu$ -Zerfalls . . . . .	326
7.16	Spinverhältnisse bei $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ . Das $\bar{\nu}_\mu$ ist rechtshändig. . . . .	326
7.17	Myonzerfall mit maximalem $e^-$ -Rückstoß . . . . .	326
7.18	Spinkonfigurationen beim Myonzerfall . . . . .	327
7.19	$e$ -Spektrum gestoppter Pionen . . . . .	329
7.20	Elektronenspektrum beim $\beta$ -Zerfall . . . . .	332
7.21	Kurieplot des Elektronenspektrums . . . . .	333
7.22	Feynangraph des Neutronenzerfalls . . . . .	334
7.23	Möglichkeiten des Neutronenzerfalls . . . . .	335
7.24	Magnetische Speicherung von Neutronen in einem magnetischen Torus . . . . .	338
7.25	Neutronenlebensdauer im Speicherring (normiert auf $N = 1000$ ) . . . . .	338
7.26	Magnetspeicherring des UCN Experiments am E18 . . . . .	339
7.27	Schwache Zerfälle von $K^+$ und $\pi^+$ . . . . .	342

7.28 Mögliche CC-Zerfallskanäle bei $K \rightarrow \mu^+ \mu^-$ . . . . .	344
7.29 Myonenzerfall . . . . .	349
7.30 Die Impulserhaltung verbietet die Rückwärtsstreuung von rechtshändigen Antineutrinos an linkshändigen Elektronen . . . . .	350
7.31 Tiefinelastische Streuung an Nukleonen . . . . .	353
7.32 Differentieller Wirkungsquerschnitt der tiefinelastischen Neutrino-Quark-Streuung	353
7.33 Quarkverteilungsfunktionen aus tiefinelastischer Neutrinostreuung . . . . .	355
7.34 Zusammenhang mit tiefinelastischer Elektronstreuung . . . . .	355
7.35 Zusammenfassung der Strukturfunktionen . . . . .	356
7.36 UA2-Experiment mit einem Neutrinostrahl . . . . .	356
7.37 Neutrinoenergie für die verschiedenen Produktionskanäle . . . . .	357
7.38 Aufbau eines Neutrinohörner . . . . .	358
7.39 Das Higgspotential in der Frühphase des Universums vor der elektroschwachen Symmetriebrechung bei $T \approx 100 \text{ GeV}$ . . . . .	366
7.40 Das Higgspotential heute bei $T \approx 0$ . . . . .	366
7.41 Bestimmung des Weinbergwinkels . . . . .	371
7.42 Querschnitt des $4\pi$ -Detektors zur Messung der $Z^0$ -Masse . . . . .	372
7.43 Legoplot eines sehr schönen $Z^0$ -Events: die Elektronen fliegen diametral . . . . .	373
7.44 Kinematik der Reaktion $p\bar{p} \longrightarrow W^+ \longrightarrow e^+ \nu_e$ . Das W-Boson wird praktisch in Ruhe produziert. . . . .	374
7.45 Transversalimpuls des Elektrons beim W-Zerfall. Die Pfeile zeigen den für den Fit verwendeten Datenbereich (Daten aus FNAL) . . . . .	374
7.46 Vergleich der Meßdaten mit Standardmodellvorhersagen . . . . .	375
 8.1 $K^0$ - $\bar{K}^0$ -Übergänge über einen virtuellen $\pi\pi$ -Zwischenzustand. Erstmals 1955 vorhergesagt von M. Gell-Mann und A. Pais. . . . .	390
8.2 Experiment zur Untersuchung des $K^0 \rightarrow 2\pi$ -Zerfalls . . . . .	392
8.3 Zeitliche Verteilung der Zerfallsprodukte bei $K^0 \rightarrow 2\pi$ -Zerfalls . . . . .	393
8.4 Zeitliche Verteilung der Zerfallsprodukte bei $K^0 \rightarrow 3\pi$ -Zerfalls . . . . .	393
8.5 Nachweis der entstehenden $\bar{K}^0$ . . . . .	393
8.6 Die Wahrscheinlichkeiten, $K^0$ bzw. $\bar{K}^0$ zu finden. . . . .	395
8.7 Langreichweitige Beiträge zur Selbstenergie bei $K_1^0$ und $K_2^0$ . . . . .	395
8.8 Regeneration von $K_1^0$ . . . . .	396
8.9 Kalssisches Analogon zur Regeneration . . . . .	397
8.10 Boxgraph . . . . .	398

8.11 Links: „Pinguin“-Graph des in (8.22) gezeigten Zerfalls. An den Vertizes, an denen das $W^-$ -Boson entsteht und verschwindet, kommt die CKM-Matrix ins Spiel. Rechts: Wie der „Pinguin“-Graph zu seinem Namen kam: Ellis hatte gegen einen Kollegen eine Wette verloren, und nun mußte er in seiner nächsten Veröffentlichung das Wort „Pinguin“ einbauen. Was lag also näher, als einem unschuldigen Feynmangraphen, der sich nicht wehren konnte, diesen Namen zu verpassen? Wer noch weitere künstlerisch wertvolle Variationen des Pinguin-Graphen bewundern möchte, kann das auf den Postern vor Prof. Buras Büro tun. . . . .	402
8.12 Grenzen für Neutrino-Oszillationen. Die Differenz der Massenquadrate ist gegen $\sin^2 2\vartheta$ aufgetragen. Das $\bar{\nu}_e$ -Ergebnis (ausgezogene Linie) stammt von einem Reaktor (Gösgen, Schweiz), alle anderen Ergebnisse von Beschleunigern. Die Gebiete rechts von den Kurven sind mit 90% Wahrscheinlichkeit ausgeschlossen (nach [Bo84]). . . . .	409
8.13 Entstehung von atmosphärischen Neutrinos . . . . .	411
8.14 Messung von atmosphärischen Neutrinos . . . . .	412
8.15 Schematischer Aufbau eines Neutrinosozillationsexperiments unter Verwendung eines Beschleunigers . . . . .	412
8.16 Wahrscheinlichkeit der Oszillation einer bestimmten Neutrinoflavour . . . . .	412
8.17 Aktuelle Lösungsbereiche für Neutrino-Oszillationen in der $\Delta m^2$ - $\sin^2 2\vartheta$ -Ebene aus dem Superkamiokande-Experiment. Links: Vakuum-Oszillationslösungen, rechts: MSW-Oszillationslösungen. Hier bezeichnet SMA Lösungen mit kleinem Mischungswinkel ( <i>small mixing angle</i> ), LMA entsprechend solche mit grossem Mischungswinkel (aus [Ha00]). . . . .	414
 9.1 Repulsives Hard-Core Potential . . . . .	422
9.2 Überlagerung von negativem und positivem Anteil der Streuphase (aus [Po99])	423
9.3 Nukleon-Nukleon-Potential im ${}^1S_0$ -Zustand, gewonnen aus einer vollständigen Streuphasenanalyse. Den repulsiven Anteil bezeichnet man als <i>Hard-Core</i> . (aus [Po99]) . . . . .	423
9.4 Ein-Pion-Austausch . . . . .	424
9.5 Deuteron-Wellenfunktionen $\bar{u}(r)$ und $\bar{w}(r)$ eines modernen Nukleon-Nukleon-Potentials (Paris-Potential) verglichen mit denen des Ein-Pionen-Austausches ( <i>one pion exchange</i> , OPE). Die Wellenfunktionen wurden normiert, so daß $\bar{u}(r) \rightarrow e^{-\alpha r}$ für $r \rightarrow \infty$ (aus [Er88]). . . . .	428
9.6 Quadrupolmomentdichte $Q(r)$ für reines Ein-Pionen-Austausch-Potential und Paris-Potential (als Vertreter eines modernen Nukleon-Nukleon-Potentials). Der eingezeichnete Unterschied beider Modelle ist wiederum auf Basis des Zweipionen-Austausches verstanden (aus [Er88]). . . . .	429
9.7 Dichteverteilung im Deuteron (Konturlinien), falls man typische s- und d-Wellenfunktionen $u(r)$ und $w(r)$ verwendet und den Spin parallel zur $z$ -Achse annimmt (aus [Er88]).	
	429

9.8 prolate Verformung (zigarrenförmig) . . . . .	430
10.1 Doppelfokussierendes Massenspektrometer. Das Spektrometer fokussiert Ionen einer bestimmten spezifischen Ladung $Q/M$ . Zur besseren Darstellung sind nur die Teilchenbahnen vom Rand des Bündels gezeichnet (1 und 2). Das elektrische und das magnetische Sektorfeld bilden die Ionen aus der Ionenquelle in den Auffänger ab. Ionen mit einer anderen spezifischen Ladung werden im magnetischen Feld von den gezeichneten Bündeln getrennt und treten nicht durch den Spalt O hindurch (nach [Br64]). . . . .	435
10.2 Die Bindungsenergie pro Nukleon ist bei schweren Kernen mit $B/A \approx 7.5 \dots 8.5 \text{ MeV}/c^2$ praktisch konstant. Bei leichten Kernen gilt diese Aussage allerdings nicht. In der Abbildung ist die Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion von $A$ für stabile Kerne geplottet, wobei die Abszisse bis $A = 30$ gespreizt wurde (aus [Ma84]). . . . .	437
10.3 Die $\beta$ -stabilen Kerne in der $Z-N$ -Ebene (nach [Bo69]) . . . . .	438
10.4 Gesamte Bindungsenergie für $A = 127$ . Die Bindungsenergie weist ein sehr scharfes Maximum bei $Z = 53$ auf. Die nicht-exakte Zentrierung von $Z$ auf die halbe Nukleonenzahl liegt in Coulombabstoßungseffekten begründet. . . . .	439
10.5 Höhenlinien konstanter Gesamtbindingssenergie in der $N-Z$ -Ebene . . . . .	439
10.6 Die verschiedenen Beiträge zur Bindungsenergie pro Nukleon, aufgetragen gegen die Massenzahl $A$ . Die waagrechte Linie bei etwa 16MeV zeigt den Beitrag der Volumenenergie, der durch die Oberflächen-, die Assymetrie- und die Coulombenergie auf die effektive Bindungsenergie von etwa 8 MeV (untere Linie) reduziert wird. Mit wachsendem $A$ steigen die Beiträge von Assymetrie- und Coulombterm stark an, während der Beitrag des Oberflächenterm kleiner wird (aus [Po96]). . . . .	440
10.7 Bindungsenergie pro Nukleon von Kernen mit gerader Massenzahl $A$ . Die durchgezogene Linie entspricht der Weizsäcker-Massenformel (10.13). Kerne mit wenigen Nukleonen zeigen größere Abweichungen vom generellen Trend und müssen einzeln betrachtet werden. Auch bei schweren Kernen beobachtet man generell eine etwas stärkere Bindung pro Nukleon bei gewissen Protonen- und Neutronenzahlen. Auf diese sogenannten „magischen Zahlen“ werden wir in Abschn. 10.4 zu sprechen kommen (aus [Po96]). . . . .	440
10.8 Im Fermigasmodell zugrundegelegtes Kernpotential. Die Breite des Topfes ist durch die angegebene Relation $R_A = R_0 A^{1/3}$ bestimmt. . . . .	441
10.9 Das Fermigasmodell: Zwei separate Potentialöpfe für Neutronen und Protonen mit Coulombbarriere (aus [Fr91]) . . . . .	442
10.10 Im Kernpotential werden die Einteilchenzustände gemäß dem Pauli-Prinzip besetzt . . . . .	444
10.11 Potential im Harmonischen Oszillator (ausgezogene Linie) und Woods-Saxon-Potential (gestrichelte Linie) im Vergleich . . . . .	446

10.12 Zustandsschema im Schalenmodell (a) für isotropes harmonisches Oszillatorenpotential $V_H$ (b) für Woods-Saxon-Potential $V_{WS}$ (c) mit Spin-Bahn-Kopplung und Coulomb-Korrektur $V_{WS,SBK}$ . Angegeben sind jeweils auch die magischen Zahlen, die sich bei Besetzung bis zum jeweiligen Niveau ergeben (aus [Mu95]). 448	
10.13 Feinstrukturaufspaltung in der Atomphysik . . . . .	449
10.14 Veranschaulichung von $U_V$ , $U_S$ sowie $V_{\ell s}$ . . . . .	450
10.15 Tatsächliches Termschema von $^{11}B$ , wie man es in der Literatur findet (aus [Aj75]). . . . .	452
10.16 . . . . .	454
10.17 Schmidtsche Linien und magnetische Dipolmomente. Oben: für Kerne mit ungerader Protonenzahl $Z$ , unten: für Kerne mit ungerader Neutronenzahl $N$ (aus [Mu95]). . . . .	455
10.18 Niveauschemata von $^7_3Li$ und $^7_4Be$ . . . . .	457
10.19 Isobare Analogresonanzen bei schweren Kernen: Energiediagramm für die Isobaren ( $Z, N$ ) und ( $Z + 1, N - 1$ ) bei $A = 209$ , $Z = 82$ . . . . .	457
10.20 In der Nuklidkarte sind alle bekannten Nuklide in der $Z$ - $N$ -Ebene geplottet. . . . .	458
11.1 Ausschnitt aus der Karlsruher Nuklidkarte. Stabile Kerne sind schwarz gezeichnet mit Angabe der Isotopenhäufigkeit und des Einfangquerschnitts für thermische Neutronen. Unterhalb der stabilen Kerne befinden sich die $\beta^-$ -Strahler, oberhalb die $\beta^+$ -Strahler. Angegeben sind Halbwertzeit und wichtigste Zerfallsenergie. . . . .	463
11.2 Massenparabeln für $A = 106, 76, 101, 40$ . Die umkreisten Kerne sind jeweils die stabilsten, und können durch einfachen $\beta$ -Zerfall nicht weiter zerfallen. Liegt die Masse eines Kerns über dem Isobar, welches am stärksten gebunden ist, jedoch auch über den beiden Nachbarn, so kann es nur durch doppelten $\beta$ -Zerfall zerfallen. Es ist also recht stabil (gilt nur für uu- und gg-Systeme, Parabeln für $A = 106, 40$ ); $^{76}Se$ dagegen ist stabil. . . . .	464
11.3 Der $\beta$ -Zerfall von $^{40}K$ . Bei dieser Kernumwandlung konkurrieren $\beta^-$ - und $\beta^+$ -Zerfall sowie der Elektroneneinfangprozeß miteinander. Die relativen Häufigkeiten dieser Zerfälle sind jeweils in Klammern angegeben. Der geknickte Pfeil beim $\beta^+$ -Zerfall deutet an, daß die Erzeugung eines $e^+$ zuzüglich des überzähligen Elektrons im $^{40}Ar$ -Atom 1.022 MeV kostet und der Rest in kinetische Energie des Positrons und des Neutrions umgewandelt wird. Der aus dem Elektroneneinfang hervorgehende angeregte Zustand von $^{40}Ar$ zerfällt durch Photonemission in seinen Grundzustand (aus [Po96]). . . . .	466
11.4 Schematischer Verlauf des Elektronenspektrums beim $\beta$ -Zerfall. Entsprechend dem Phasenraum (11.3) hat das Spektrum an beiden Enden einen parabolischen Verlauf. Dieses Spektrum wird durch die Wechselwirkung mit dem Coulombfeld des Tochterkerns modifiziert. . . . .	467

11.5 $\beta$ -Spektrum im Kurie-Plot. In der interessanten Region, die Evidenzen für eine Neutrinomasse liefern könnte, werden die Fehlerbalken sehr groß, da hier aufgrund der wenigen Ereignisse Statistik nötig wird. . . . .	470
11.6 Ein unmittelbares Entweichen eines $\alpha$ -Teilches wäre nur ohne die tatsächlich vorhandene Coulombbarriere möglich. . . . .	470
11.7 abstoßendes Coulombpotential, $V_{\text{Coul}} = 2(Z - 2)(\alpha/r)$ . . . . .	472
11.8 Tunneleffekt; Einlaufende/reflektierte und transmittierte Welle am endlichen Kastenpotential . . . . .	472
11.9 Kontinuierlicher Potentialberg . . . . .	473
11.10 Zerfallsreihe von Uran 238 . . . . .	475
11.11 Spaltvorgang unter Annahme eines gleichbleibenden Volumens . . . . .	476
11.12 Deformation eines schweren Kerns. Bei gleichbleibendem Volumen $4\pi R^3/3 = 4\pi ab^2/3$ nimmt die Oberflächenenergie des Kerns zu, und die Coulombenergie nimmt ab (aus [Po96]). . . . .	477
11.13 Potentielle Energie in verschiedenen Phasen der Spaltung. Der Atomkern mit der Ladung $Z$ spaltet in zwei Tochterkerne. Die durchgezogene Kurve entspricht dem Potentialverlauf im Mutterkern. Die Höhe der hier vorhandenen Spaltbarriere bestimmt die Wahrscheinlichkeit der spontanen Spaltung. Bei Kernen mit $Z^2/A \gtrsim 48$ verschwindet die Spaltbarriere, und der Potentialverlauf entspricht der gestrichelten Kurve (aus [Po96]). . . . .	478
11.14 Induzierte Kernspaltung als „Comic“. Durch ein auftreffendes thermisches Neutron (1) wird dem ohnehin schon nahe an der Stabilitätsgrenze liegenden Kern gerade soviel Energie zugeführt, daß dieser beginnt, sich stark zu verformen (2). Durch Schwingungen und Deformationen (3, 4, 5) „zerplatzt“ der Kern schließlich (6) in zwei Bruchstücke unter Aussendung mehrerer (schneller) Neutronen. . . . .	479
11.15 $\beta$ -Zerfall $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N} + e^+ + \nu_e$ . . . . .	481
 12.1 Bei Hadronstrahlen sind die Eigenschaften der Bethe-Bloch-Formel wichtig. Tiefendosiskurven unterscheiden sich drastisch je nach Projektilladung. Die Abbildung zeigt die Tiefenverteilung für Protonen, Pionen und Stickstoff-14-Kerne. . . . .	486
12.2 Einfangquerschnitte für Neutronen an Uran. Über die dichtliegenden Resonanzen im Bereich $(1 - 10^4)$ eV sind nur die Einhüllenden eingezeichnet. (Nach [He99]) . . . . .	488
12.3 Neutronen-Spaltquerschnitte für U und Pu. Über die dichtliegenden Resonanzen im Bereich $(10 - 10^3)$ eV sind nur die Einhüllenden eingezeichnet. . . . .	488
12.4 Energiespektrum von Spalt-, thermischen und thermalisierten Neutronen . . . . .	490
 13.1 Kern mit einzelnen Proton(-Loch) . . . . .	496
13.2 Zustandekommen prolatärer und oblater Deformation . . . . .	497

13.3 Trägheitsmoment deformierter Kerne . . . . .	500
13.4 Mit suprafluidem Helium gefülltes Ei. Nur die Ausbeulung des Eies trägt zum Trägheitsmoment bei. . . . .	500
13.5 Teilchen-Loch-Anregung im Atomkern . . . . .	501
13.6 . . . . .	503
13.7 $\gamma$ -Absorptionsspektrum – theoretisch und experimentell bei $^{16}_8\text{O}$ . . . . .	503
13.8 Graphische Lösung von (13.11) und Veranschaulichung der Verschiebung der Energieniveaus (aus [Po96]). . . . .	506
13.9 Wirkungsquerschnitte für die Photonen-Absorption an $^{12}\text{C}$ und $^{208}\text{Pb}$ . . . . .	508
14.1 Schematisches Anregungsspektrum für Kerne . . . . .	509
14.3 Anschauliche Interpretation des Stoßparameters . . . . .	510
14.2 Definition des Stoßparameters: Im Schwerpunktssystem ist $p_a = p_A$ . . . . .	510
14.4 (a) Die Kinematik eines Schwerionenstoßes am Beispiel der Reaktion $^{90}\text{Zr} + ^{232}\text{Th}$ . (b) Schematische Darstellung der vielfachen Coulomb-Anregung einer Rotationsbande. Durch sukzessive Quadrupolanregung werden die Zustände $2^+$ , $4^+, 6^+, 8^+ \dots$ mit abnehmender Intensität bevölkert (aus [Po96]) . . . . .	511
14.5 Photonenspektrum eines Coulomb-angeregten $^{232}\text{Th}$ -Kerns mit Hilfe eines Ge-Detektors (aus [Ko88]) . . . . .	512
14.6 Mögliche Transfer-Reaktionen . . . . .	513
14.7 Beispiel einer Pick-up Reaktion: $^{16}\text{O}(\text{p},\text{D})^{15}\text{O}$ . . . . .	516
14.8 Meßwerte für eine Pick-up Reaktion: $^{16}\text{O}(\text{d},^3\text{He})^{15}\text{N}$ . Aus den erhöhten Peaks läßt sich die Energie der LS- Kopplung bestimmen. Jede Kanalnummer auf der x- Achse entspricht hierbei einem diskreten Energiewert. . . . .	516
14.9 Winkelverteilungen für $p_{1/2}$ und $p_{3/2}$ Anregungen. . . . .	517
14.10 Tiefinelastische Reaktionen in Abhängigkeit des Drehimpulses . . . . .	518
14.11 Tiefinelastische Reaktion und Fusion . . . . .	519
14.12 Schema eines Fragmentseparators [aus GSI Nachrichten 3/97] . . . . .	520
15.1 Besetzungszahl von Nukleonen nach der Fermiverteilung bei $T = 0$ . . . . .	522
15.2 Ein peripherer Stoß als Cartoon . . . . .	522
15.3 Kernverhalten analog zum Flüssigkeitstropfen . . . . .	523
15.4 Die Kerndichte bleibt konstant. . . . .	523
15.5 Temperatur und Dichte bei hadronischer Materie . . . . .	525
15.6 Temperatur-Dichte-Diagramm von Kernmaterie (aus [Po96]) . . . . .	525
15.7 Temperatur-Dichte-Diagramm von Kernmaterie 2 . . . . .	525
15.8 Rapiditätsverteilungen bei Schwerionen-Experimenten . . . . .	528

15.9 Vergleich des thermodynamischen Modells mit dem experimentellen Daten bei Schwerionen-Experimenten . . . . .	529
15.10 Zeitentwicklung der Phasen in ultrarelativistischen Schwerionen- Kollisionen. . . . .	530
16.1 Reaktionsrate (gestrichelte Kurve) bei der Kernfusion, wie sie aus Gamow-Faktor und Maxwell-Boltzmann-Verteilung (durchgezogene Kurven) zustande kommt. . . . .	533
16.2 Der von Bethe und Weizsäcker vorgeschlagene CNO-Zyklus zur Wasserstoff-Fusionierung in Sternen. Aufgetragen ist der sogenannte und hier ausschließlich besprochene Hauptzyklus (aus [Wa98]). . . . .	535
16.3 Zwiebelschalenmodell eines Sterns. Aufgetragen ist die Massenverteilung, unten angegeben sind zusätzlich der radiale Verlauf der Dichte und der Temperatur (aus [Wa98]). . . . .	538
16.4 Schneller und langsamer Prozeß in der Nuklidkarte. Beim langsamen Prozeß ist die Spaltzeit kleiner als die Neutroneneinfangzeit: Die Elementbildung „klettert“ langsam das Tal der Stabilität hinauf. Beim schnellen Prozeß werden die Nuklide durch schnelle Anlagerung mehrerer Neutronen aus dem Tal in das neutronenreiche Gebiet darunter geworfen, um nach der Neutronenflut über sukzessive Zerfälle wieder dorthin zurück zu gelangen (aus [Wa98]). . . . .	539
16.5 Relative Elementhäufigkeiten im Universum. Die Normierung der Ordinate fand willkürlich auf $N(\text{Si}) = 10^6$ statt (aus [Wa98]). . . . .	540
A.1 Helizitätserhaltung . . . . .	543
A.2 Zur Ausbreitung der elektromagnetischen Welle . . . . .	544
A.3 Virtuelles Photon im Feynmandiagramm . . . . .	545
A.4 Helizitätserhaltung beim Streuprozeß . . . . .	546
A.5 Bei der Streuung um $\theta = \pi$ ist der Gesamtdrehimpuls nicht erhalten. . . . .	546
B.1 CM- und Laborsystem . . . . .	548
B.2 Compton-Kanten . . . . .	550
D.1 Der Forschungsreaktor FRM-II (Bild von <a href="http://www.frm2.tum.de/frm2/reactor/index.shtml">http://www.frm2.tum.de/frm2/reactor/index.shtml</a> )	554
D.2 Blick auf den Moderatortank vom Beckenrand: Während des Betriebs ist das Betriebsbecken mit leichtem Wasser gefüllt (Bild von <a href="http://www.frm2.tum.de/frm2/reactor/index.shtml">http://www.frm2.tum.de/frm2/reactor/index.shtml</a> )	555
D.3 113 Brennstoffplatten sind im Brennelement eingeschweißt. Sie sind evolventenförmig um den Zentralkanal angeordnet. Der Kühlspalt ist dabei mit 2,2mm an jeder Stelle gleich breit. (Bild von <a href="http://www.frm2.tum.de/frm2/reactor/index.shtml">http://www.frm2.tum.de/frm2/reactor/index.shtml</a> )	556

# Tabellenverzeichnis

1.1	Quarks und Leptonen, die elementaren Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen . . . . .	10
1.2	Teilchen und ihre Wechselwirkungen . . . . .	12
2.1	Beispiele für Synchrotrons . . . . .	37
2.2	typische Werte für Energieabnahme in verschiedenen Materialien . . . . .	56
2.3	Energieauflösung . . . . .	70
3.1	Ladungsverteilungen und die zugehörigen Formfaktoren (aus [Po96]) . . . . .	94
4.1	Beiträge der Ordnung $e\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3$ zum anomalen magnetischen Moment des Myons	141
6.1	Total antisymmetrische Strukturkonstanten $f_{ijk}$ der SU(3) . . . . .	196
6.2	Ladung, Strangeness und Hyperladung der Quarks der Gruppe SU(3) <sub>f</sub> . . . . .	198
6.3	Bekannte Mesonen im Quarkmodell . . . . .	199
6.4	Beispiele für polare und axiale Vektoren . . . . .	203
6.5	Klassifizierung von Objekten nach der Parität . . . . .	204
6.6	Übersicht über die Erhaltungssätze . . . . .	208
6.7	Einige Vektormesonen . . . . .	214
6.8	Magnetische Momente einiger Baryonen in Einheiten von $\mu_K$ . Vergleich der Vorhersagen des naiven Quarkmodells mit $m_u = m_d = 336 \text{ MeV}$ und $m_s = 510 \text{ MeV}$ mit den experimentellen Werten. . . . .	238
7.1	Einige Prozesse der schwachen Wechselwirkung . . . . .	308
8.1	Daten aktueller Sonnenneutrinoexperimente . . . . .	416
9.1	Mögliche Gesamt-Isospins (oben) und Gesamtspins (unten) von zusammengesetzten Nukleonen . . . . .	420
9.2	Zusammenhang von Potential und Streuphase . . . . .	422

10.1 Einfache Vorhersagen des Schalenmodells: Ein-Teilchen- und Ein-Loch-Zustände können wesentliche Kerneigenschaften erklären. Im $^{16}\text{O}$ (Mitte) koppeln die Drehimpulse zu Null, Neutron- und Protonenschalen sind jeweils vollbesetzt. Die rechts und links aufgetragenen Kerne zeichnen sich jeweils durch Proton-/Neutronloch bzw. zusätzliches Proton/Neutron, sogenannte Leuchtnukleonen, aus. Ihre Quantenzahlen werden somit ausschließlich durch das Loch bzw. Leuchtnukleon bestimmt. In Analogie zu den Alkalimetallen in der Atomphysik sind die Leuchtnukleonen von $^{17}\text{O}$ bzw. $^{17}\text{F}$ (rechts) relativ leicht aus dem Kernverband entfernbar. . . . .	451
11.1 Zusammenstellung der verschiedenen Auswahlregeln und $ft$ -Werte. Dabei bedeutet (+) „keine Paritätsverletzung“, (–) „Paritätsverletzung“ (aus [Ma84]) . . .	468
11.2 Bindungsenergien pro Nukleon bei leichten Kernen. Man erkennt deutlich die energetisch herausragende Stellung des $^4\text{He}$ . . . . .	471
11.3 Freiwerdende Energie bei Emission verschiedener Teilchen aus einem $^{232}\text{U}$ Kern mit $\tau = 72\text{a}$ . Auch hier ist das $\alpha$ -Teilchen klar bevorzugt. . . . .	471
14.1 Kernreaktionen bei verschiedenen Energien . . . . .	510

# Literaturverzeichnis

- [Ab75] G. S. Abrams et al., Phys. Rev. Lett. **34** (1975) 1191
- [Aj75] F. Ajzenberg-Selove, Nucl. Phys. **A248** (1975) 1
- [Al92] UA2-Kollab. (CERN), J. Alitti et al., Phys. Lett. **B276** (1992) 354
- [Ar92] UA1-Kollab. (CERN), G. Arnison et al., Phys. Lett. **B122** (1983) 103
- [At82] W. B. Atwood, *Lectures on Lepton Nucleon Scattering and Quantum Chromodynamics*, Progress in Physics Vol. 4, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart 1982
- [Au74a] J. J. Aubert et al., Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 1404
- [Au74b] J. E. Augustin et al., Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 1406
- [Ba68] W. Bartel et al., Phys. Lett. **B28** (1968) 148
- [Ba83] UA2-Kollab. (CERN), P. Bagnaia et al.: Phys. Lett. **B129** (1983) 130
- [Be92] C. Berger, *Teilchenphysik – eine Einführung*, Springer Akademischer Verlag, Heidelberg 1992
- [Be96] K. Bethge, *Kernphysik*, Springer Akademischer Verlag, Heidelberg 1996
- [Bo84] F. Boehm, *Proc. 5th Workshop on Grand Unification*, Brown University, Providence, R. I. (World Scientific, 1984)
- [Bo69] A. Bohr, B. R. Mottelson: *Nuclear Structure*, Benjamin, New York 1969
- [Br69] M. Breidenbach et al., Phys. Ref. Lett. **23** (1969) 935
- [Br64] C. Brunnée, H. Voshage: *Massenspektroskopie*, Karl Thieme, München 1964
- [Bu91] H. Burkard, J. Steinberger: Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **41** (1991) 55
- [Bu96] ALEPH Collaboration, D. Buskulic et al., *Improved Tau Polarisation Measurement*, Z. Phys. **C69** (1996) 183
- [Co89] P. D. B. Collins, A. D. Martin, E. J. Squires: *Particle Physics and Cosmology*, Wiley & Sons, New York 1989
- [Da94] J. Daintith, S. Mitchell, E. Toftill, D. Gjertsen: *Biographical Encyclopedia of Scientists Volume*, 2. Auflage, Institute of Physics Publishing, Bristol, Philadelphia 1994
- [Er88] T. Ericson, W. Weise, *Pions and Nuclei*, Oxford University Press, Oxford 1988
- [Fl97] T. Fließbach, *Elektrodynamik*, 2. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford 1997

- [Fl98] T. Fließbach, *Allgemeine Relativitätstheorie*, 3. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford 1998
- [Fr91] H. Frauenfelder, E. M. Henley, *Subatomic Physics*, 2nd Edition, Prentice Hall, New Jersey 1991
- [Fr99] H. Frauenfelder, E. M. Henley, *Teilchen und Kerne*, 4. Auflage, Oldenbourg, München 1999
- [Ga99] S. Gasiorowicz, *Quantenphysik*, 7. Auflage, Oldenbourg, München 1999
- [Gr89] K. Grotz, H. V. Klapdor, *Die schwache Wechselwirkung in Kern-, Teilchen- und Astrophysik*, Teubner, Stuttgart 1989
- [Gr93] C. Grupen, *Teilchendetektoren*, B. I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1993
- [Ha84] F. Halzen, A. D. Martin, *Quarks and Leptons*, Wiley & Sons, New York 1984
- [Ha00] T. Hagner, Dissertation, Technische Universität München, 2000
- [He66] G. Hertz, *Lehrbuch der Kernphysik Bd. 1*, Teubner, Stuttgart 1966
- [He99] W. T. Hering, *Angewandte Kernphysik*, Teubner, Stuttgart 1999
- [Hi97] F. Hinterberger, *Physik der Teilchenbeschleuniger*, Springer Akademischer Verlag, Heidelberg 1997
- [It85] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York 1985
- [Ka99] G. M. Kalvius, *Physik IV*, 5. Auflage Oldenbourg, München 1999
- [Kl95] V. Klapdor-Kleingrothaus, *Teilchenphysik ohne Beschleuniger*, Teubner, Stuttgart 1995
- [Kö86] K. Königsmann, Phys. Rep. **139** (1986) 243
- [Ko55] R. Kollath, *Teilchenbeschleuniger*, 2. Auflage, Vieweg Braunschweig 1955
- [Ko88] W. Korten, Dissertation, Universität Heidelberg, 1988
- [Ku97] T. Kugo, *Eichtheorie*, Springer Akademischer Verlag, Heidelberg 1996
- [Lo86] E. Lohrmann, *Hochenergiephysik*, 3. Auflage, Teubner, Stuttgart 1986
- [Ma66] P. Marmier, E. Sheldon, *Physics of Nuclei and Particles Vol. I*, Academic Press, New York 1966
- [Ma73a] P. Marmier, *Kernphysik 1*, 7. Auflage, Verlag der Fachvereine an der ETH Zürich, Zürich 1973
- [Ma73b] P. Marmier, *Kernphysik 2*, 7. Auflage, Verlag der Fachvereine an der ETH Zürich, Zürich 1973
- [Ma97] B. R. Martin, G. Shaw, *Particle Physics*, 2nd Edition, Wiley & Sons, New York 1997
- [Ma84] T. Mayer-Kuckuk, *Kernphysik*, 4. Auflage, Teubner, Stuttgart 1984
- [Mö58] R. L. Mößbauer, Naturwissenschaften **45** (1958) 538
- [Mö98] R. L. Mößbauer, Z. Physik **151** (1998) 124
- [Mu95] G. Musiol, J. Ranft, R. Reif, D. Seelinger, *Kern- und Elementarteilchenphysik*, 2. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main 1995

- [Na86] O. Nachtmann, *Elementarteilchenphysik, Phänomene und Konzepte*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden 1986
- [No92a] E. Nolte, *Kernphysik 1*, 2. Auflage, Fachschaft Mathematik/Physik/Informatik der Technischen Universität München, München 1992
- [No92b] E. Nolte, *Kernphysik 2*, 2. Auflage, Fachschaft Mathematik/Physik/Informatik der Technischen Universität München, München 1992
- [PD00a] Particle Data Group, *Review Of Particle Physics*, Eur. Phys. J. **C15** (2000) 1-4
- [PD00b] Particle Data Group, D. E. Groom et al., *Particle Physics Booklet*, Extracted from the *Review Of Particle Physics*, Eur. Phys. J. **C15** (2000) 1
- [PD94] Particle Data Group, L. Montanet et al., *Review Of Particle Properties*, Phys. Rev. **D50**, 1173 (1994)
- [Pe87] D. H. Perkins, *Introduction to High Energy Physics*, 3rd Edition, Addison-Wesley, New Jersey 1987
- [Po96] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche, *Teilchen und Kerne*, 4. Auflage, Springer Akademischer Verlag, Heidelberg 1996
- [Po99] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche, *Teilchen und Kerne*, 5. Auflage, Springer Akademischer Verlag, Heidelberg 1999
- [Ru93] H. Ruder, M. Ruder, *Die Spezielle Relativitätstheorie*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden 1993
- [Sc98] F. Schwabl, *Quantenmechanik*, 5. Auflage, Springer Akademischer Verlag, Heidelberg 1998
- [Se77] E. Segrè, *Nuclei and Particles*, Benjamin, New York 1977
- [St75] SLAC E61, S. Stein et al., Phys. Rev. **D12** (1975) 1884
- [Wa98] R. Wagner, *Thermonukleare Fusionsprozesse in Sternen*, Vortrag, Technische Universität München, 1998
- [Wi91] W. S. C. Williams, *Nuclear and Particle Physics*, Oxford Science Publ., Oxford 1991
- [Wi92] K. Wille, *Physik der Teilchenbeschleuniger*, Teubner, Stuttgart 1992