Projekt Industrielle Geometrie
Aufgabe 2, 3 und 4

Milos Mandic, Philipp Dörich, Tim Walter
Prof. Dr. U. Voss

2. Gegeben ist das folgende ARWP für de Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \qquad \text{für } 0 \leq x \leq 1, t > 0 \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0 \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

   (a) Bestimmen Sie die exakte Lösung für

      i.
$$f(x) = 9 + 3\cos(\pi x) + 5\cos(4\pi x)$$

      ii.
$$f(x) = x$$

   (b) Implementieren Sie das explizite Schema und vergleichen Sie das Ergebnis mit den exakten Lösungen aus Teil (a). Lesen Sie dazu den Abschnitt über „Geisterzellen" aus Strauss: „Partielle Differenzialgleichungen".

   (c) Modifizieren Sie das implizites Verfahren für das Problem. Implementieren Sie das Schema und vergleichen Sie das Ergebnis mit den exakten Lösungen aus Teil (a).

$$u(x,t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-(n\pi)^2 t} \cdot \cos(n \cdot \pi \cdot x)$$

mit

$$A_n = 2 \int_0^1 f(x) \cdot \cos(n \cdot \pi \cdot x)\, dx$$

in Formel

$$A_n = 2 \int_0^1 \left[9 + 3\cos(\pi x) + 5\cos(4\pi x)\right] \cdot \cos(\pi \cdot n \cdot x)\, dx$$

$$\Rightarrow A_n = 2 \cdot \frac{(11n^4 - 110n^2 + 144)\sin(\pi \cdot n)}{\pi n (n^4 - 17n^2 + 16)}$$

Für konkrete n

$A_1 = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$

$A_2 = 2 \cdot 0 = 0$

$A_3 = 2 \cdot 0 = 0$

$A_4 = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$

$A_5 = 2 \cdot 0 = 0$

$A_6 = 2 \cdot 0 = 0$

$A_7 = 0$

$A_8 = 0$

$A_9 = 0$

$A_{10} = 0$

$A_0 = 9 \cdot 2$

Endgültige Lösung:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-(n\pi)^2 t} \cdot \cos(n \cdot \pi \cdot x)$$

$$u(x,t) = 9 + 3e^{-\pi t} \cdot \cos(\pi x) + 5e^{-(4\pi)^2 t} \cdot \cos(4\pi x)$$

$$A_n = 2 \cdot \int_0^1 x \cdot \cos(n \cdot \pi \cdot x)\, dx$$

partielle Integration:

$$= 2 \cdot \left[\frac{\pi \cdot n \cdot x \cdot \sin(\pi \cdot n \cdot x) + \cos(\pi \cdot n \cdot x)}{\pi^2 n^2} + C \right]_0^1$$

$$A_n = 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot n \cdot \sin(\pi n) + \cos(\pi \cdot n) - 1}{\pi^2 n^2} \right)$$

$$A_n = \frac{2\cos(\pi n) - 2}{\pi^2 n^2} \Rightarrow \text{für gerade } n \text{ ist } A_n = 0$$

$$A_1 = \frac{-4}{\pi^2} \qquad A_3 = \frac{-4}{9\pi} \qquad A_n = \frac{-4}{n^2 \pi^2}$$

$$A_2 = 0 \qquad A_4 = 0$$

Endgültig

$$u(x,t) = 0{,}5 + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4}{n^2\pi^2} \cdot e^{-(n\pi)^2 t} \cdot \cos\left((2k+1)\pi \cdot x\right)$$

vorwärtsgenommener Differenzenquotient

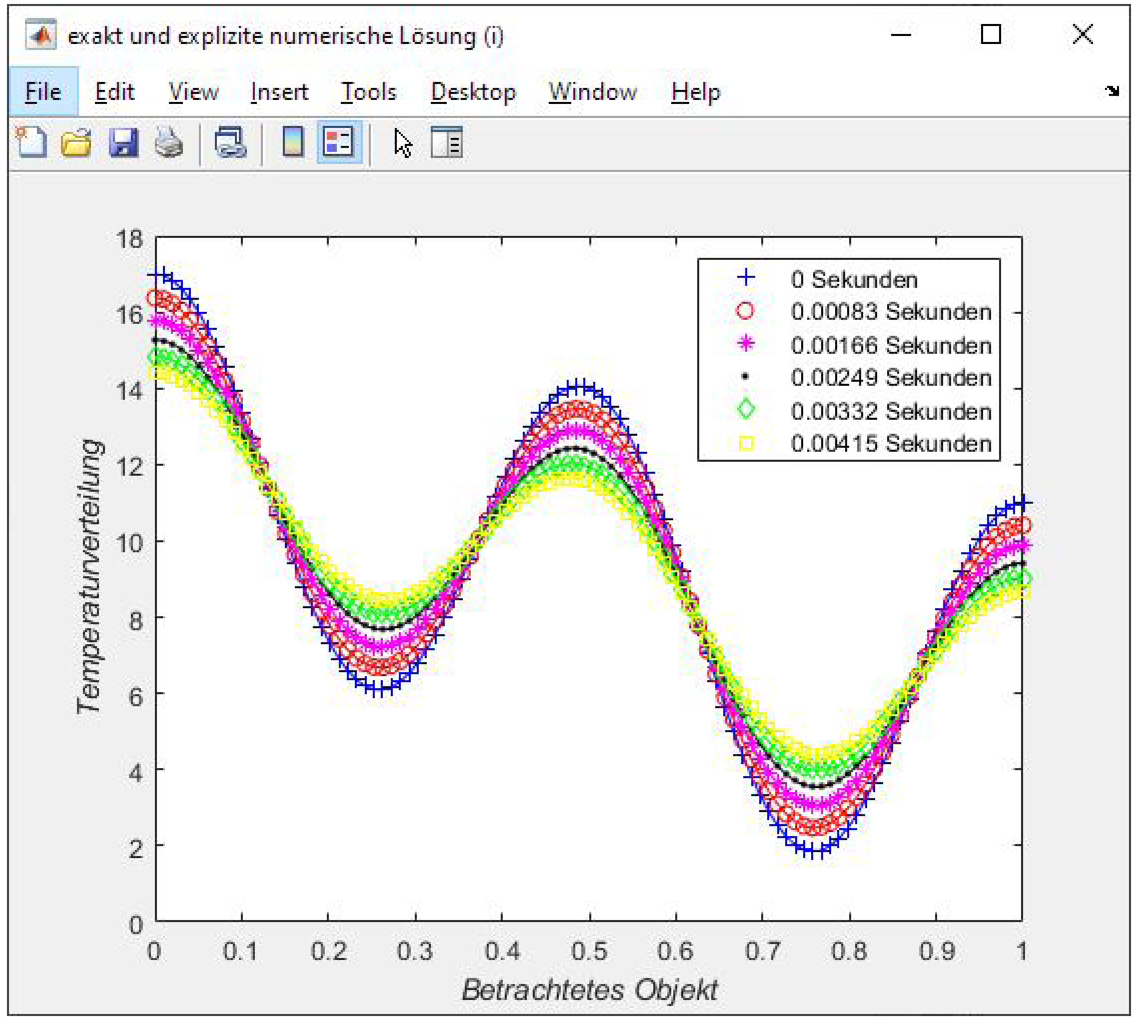
zentraler Differenzenquotient zweiter Ordnung in x

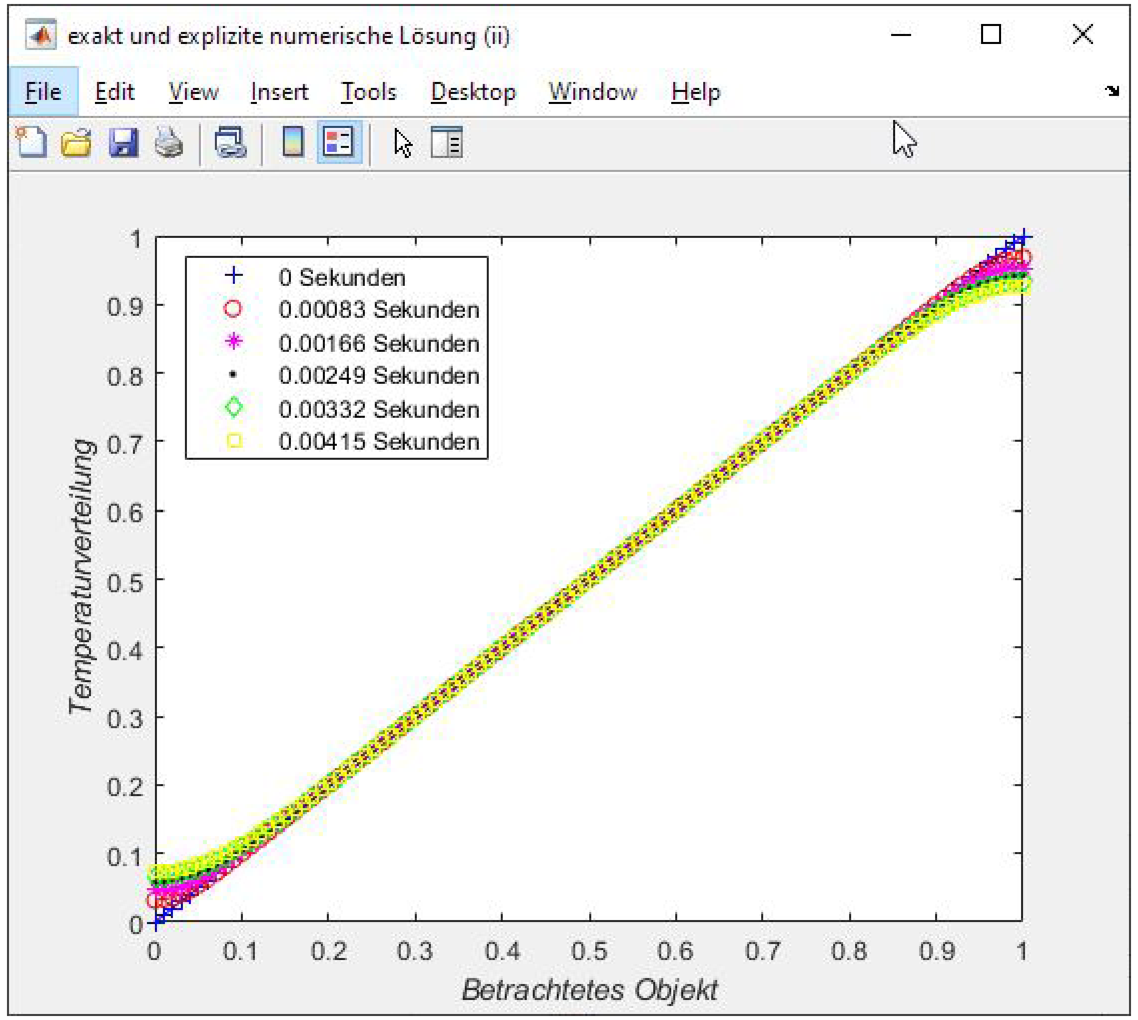
Stabilitätsbedingung

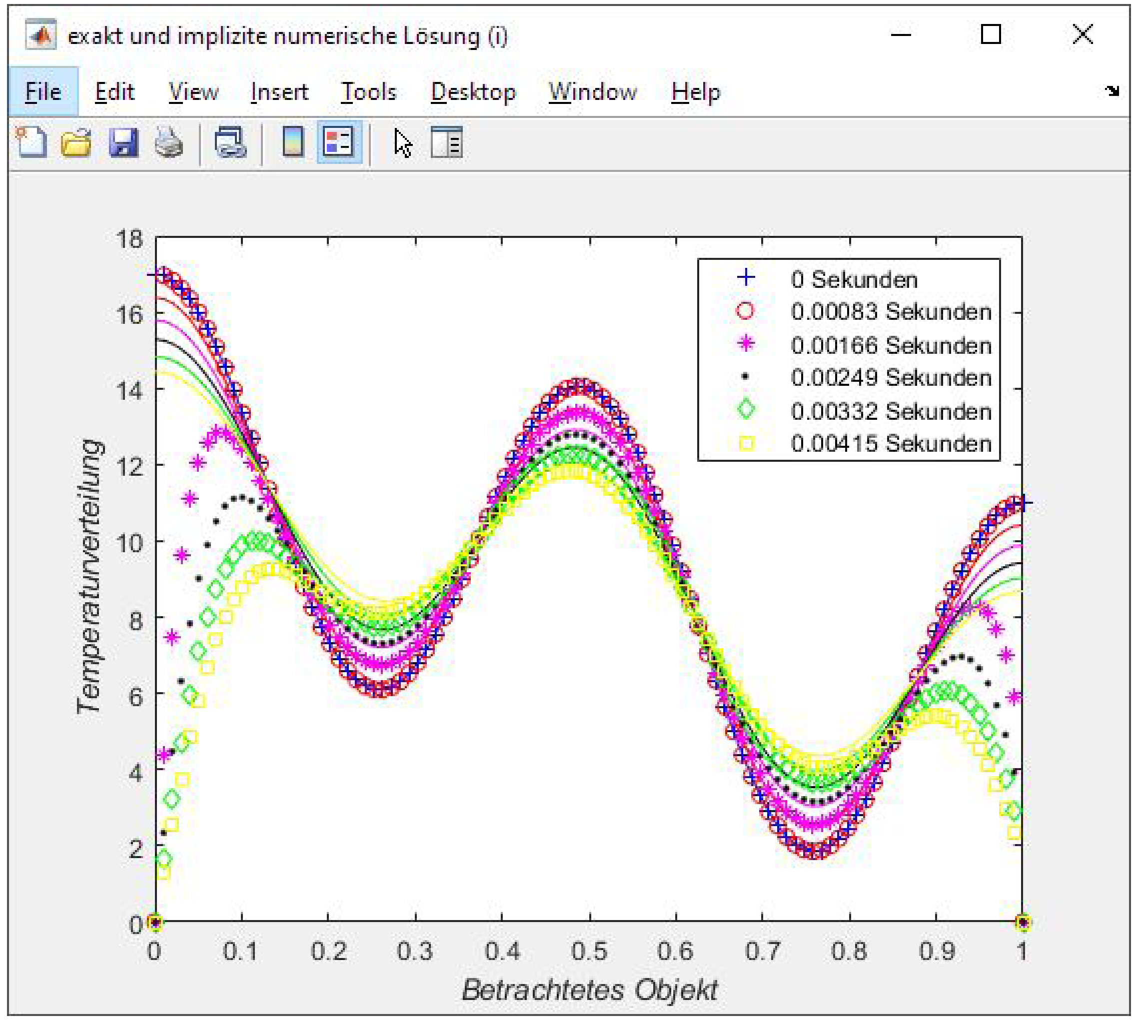
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = k \cdot \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \qquad k \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$$

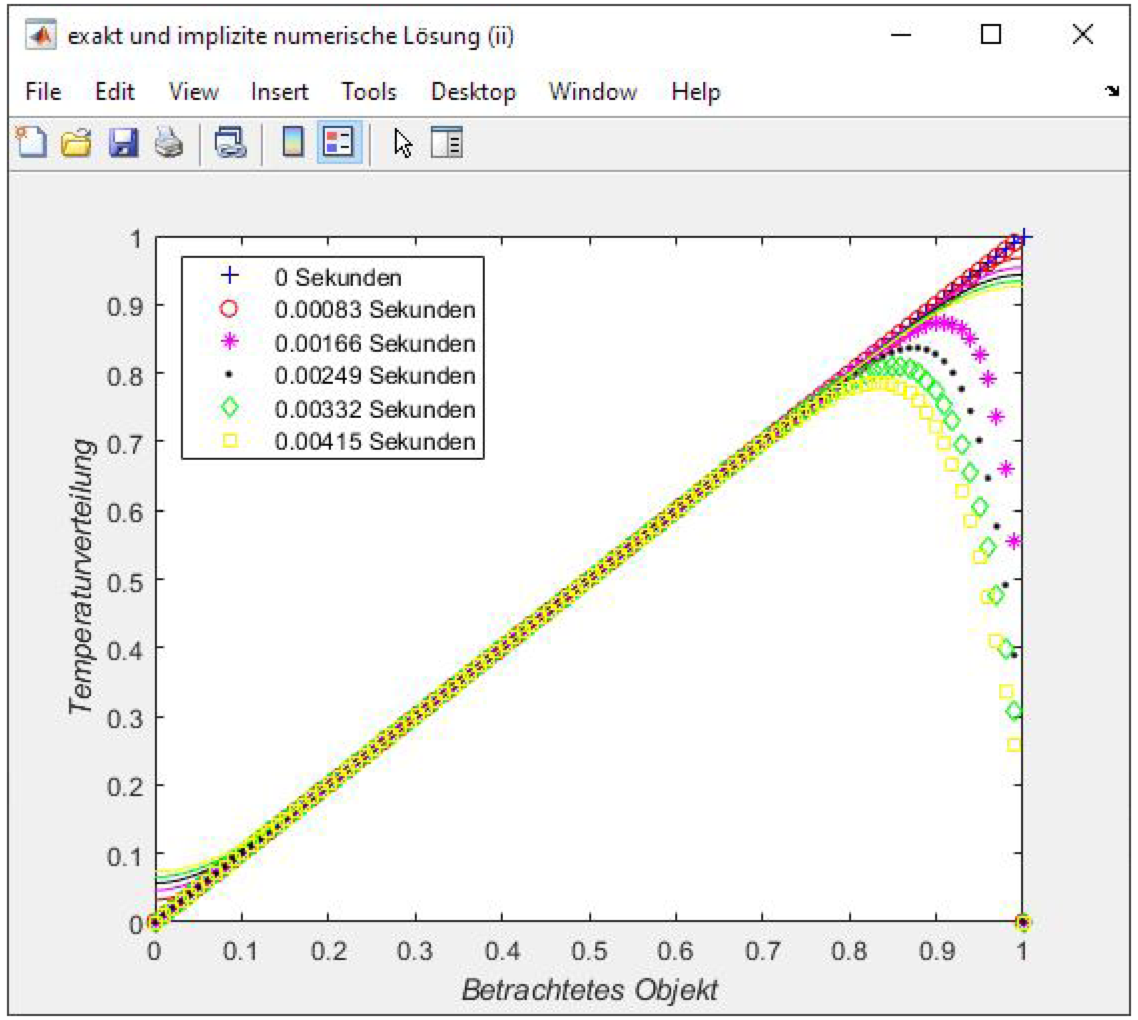
$$u_i^{n+1} = \frac{k \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n \right) + u_i^n$$

$$u_j^k = d \cdot \left(u_{j+1}^{k-1} - 2u_j^{k-1} + u_{j-1}^{k-1} \right) + u_j^{k-1}$$


exakt und explizite numerische Lösung (i)
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
0 Sekunden
0.00083 Sekunden
0.00166 Sekunden
0.00249 Sekunden
0.00332 Sekunden
0.00415 Sekunden
Temperaturverteilung
Betrachtetes Objekt
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1


exakt und explizite numerische Lösung (ii)
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
0 Sekunden
0.00083 Sekunden
0.00166 Sekunden
0.00249 Sekunden
0.00332 Sekunden
0.00415 Sekunden
Temperaturverteilung
Betrachtetes Objekt
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1


exakt und implizite numerische Lösung (i)
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
0 Sekunden
0.00083 Sekunden
0.00166 Sekunden
0.00249 Sekunden
0.00332 Sekunden
0.00415 Sekunden
Temperaturverteilung
Betrachtetes Objekt
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1


exakt und implizite numerische Lösung (ii)
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
0 Sekunden
0.00083 Sekunden
0.00166 Sekunden
0.00249 Sekunden
0.00332 Sekunden
0.00415 Sekunden
Temperaturverteilung
Betrachtetes Objekt
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

Beim impliziten Verfahren führen wesentlich weniger Zeitschritte zu einem nahezu gleichwertigen Ergebnis.

$$\Delta T = 0.5 \cdot \frac{(\Delta x)^2}{K}$$

$$\Delta T_{IM} = 10 \cdot \frac{(\Delta x)^2}{K}$$

T	0.0050
t_IM	[0,0.0013,0.0025,0.0038,0.0050]
tempI	-0.5686
tempII	0.4206
tMax	100
tMax_IM	5
uI	*100x100 double*
uII	*100x100 double*
vec1	*100x1 double*

$$u_t = u_{xx} - ae^{-t} \qquad 0 < x < 1,\ t > 0,\ a = 2$$

$$u(0,t) = 1$$

$$u(1,t) = -ae^{-t}$$

$$u(x,0) = 0$$

$$u_t = u_{xx} - ae^{-t}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} - ae^{-t}$$

$$u_i^{n+1} = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) + u_i^n - ae^{-t} \cdot \Delta t$$

$$u_i^n = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}\right) + u_i^{n-1} - ae^{-t} \cdot \Delta t$$

vorwärtsgenommener Differenzenquotient

$$u_t = u_{xx} - ae^{-t}$$

$$\underline{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} - ae^{-t}$$

$$u_i^{n+1} = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) + u_i^n - ae^{-t} \cdot \Delta t$$

$$u_i^n = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}\right) + u_i^{n-1} - ae^{-t} \cdot \Delta t$$

rückwärtsgenommener Differenzenquotient

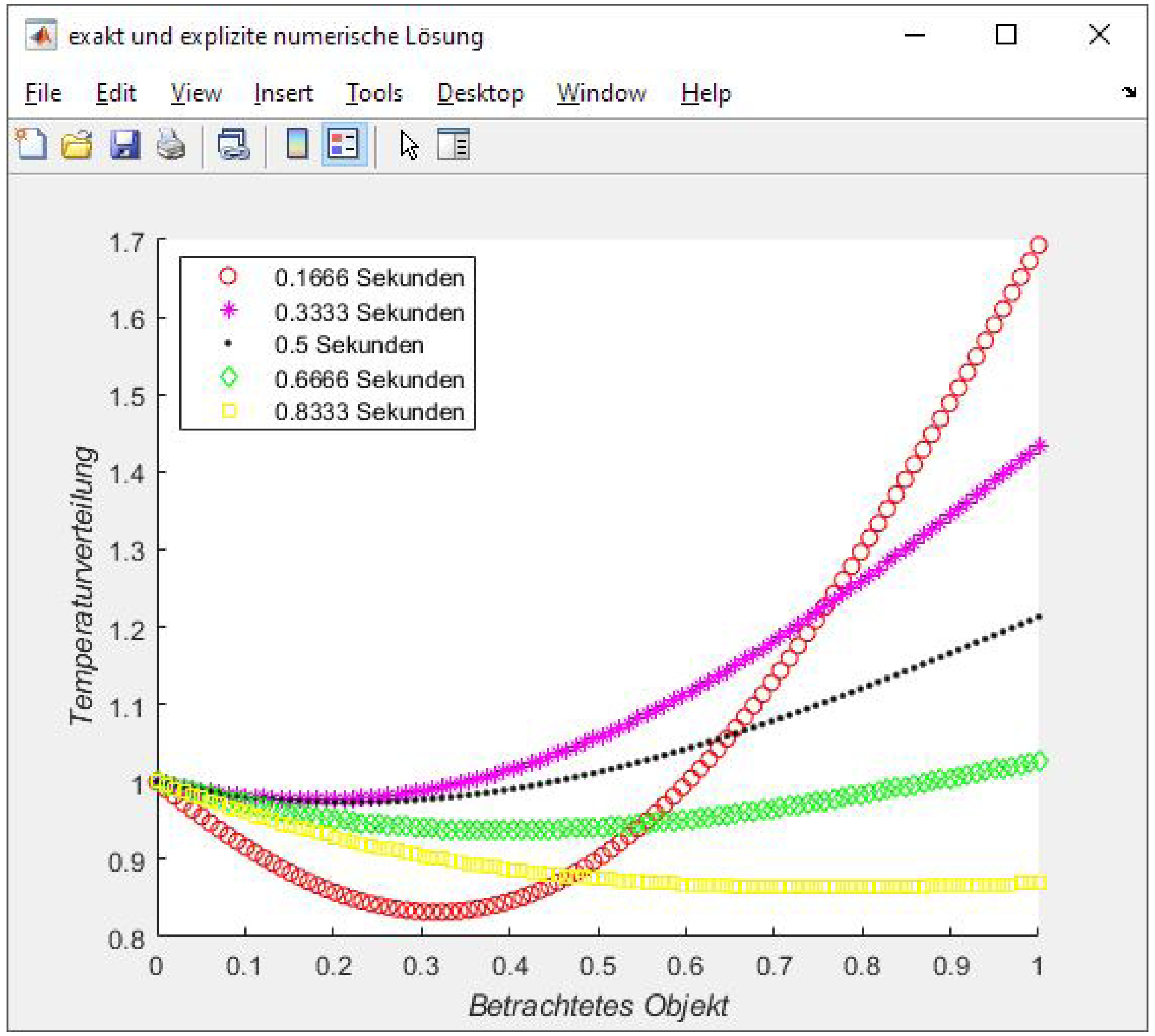
zentraler Differenzenquotient zweiter Ordnung in x

$$u_t = u_{xx} - ae^{-t}$$

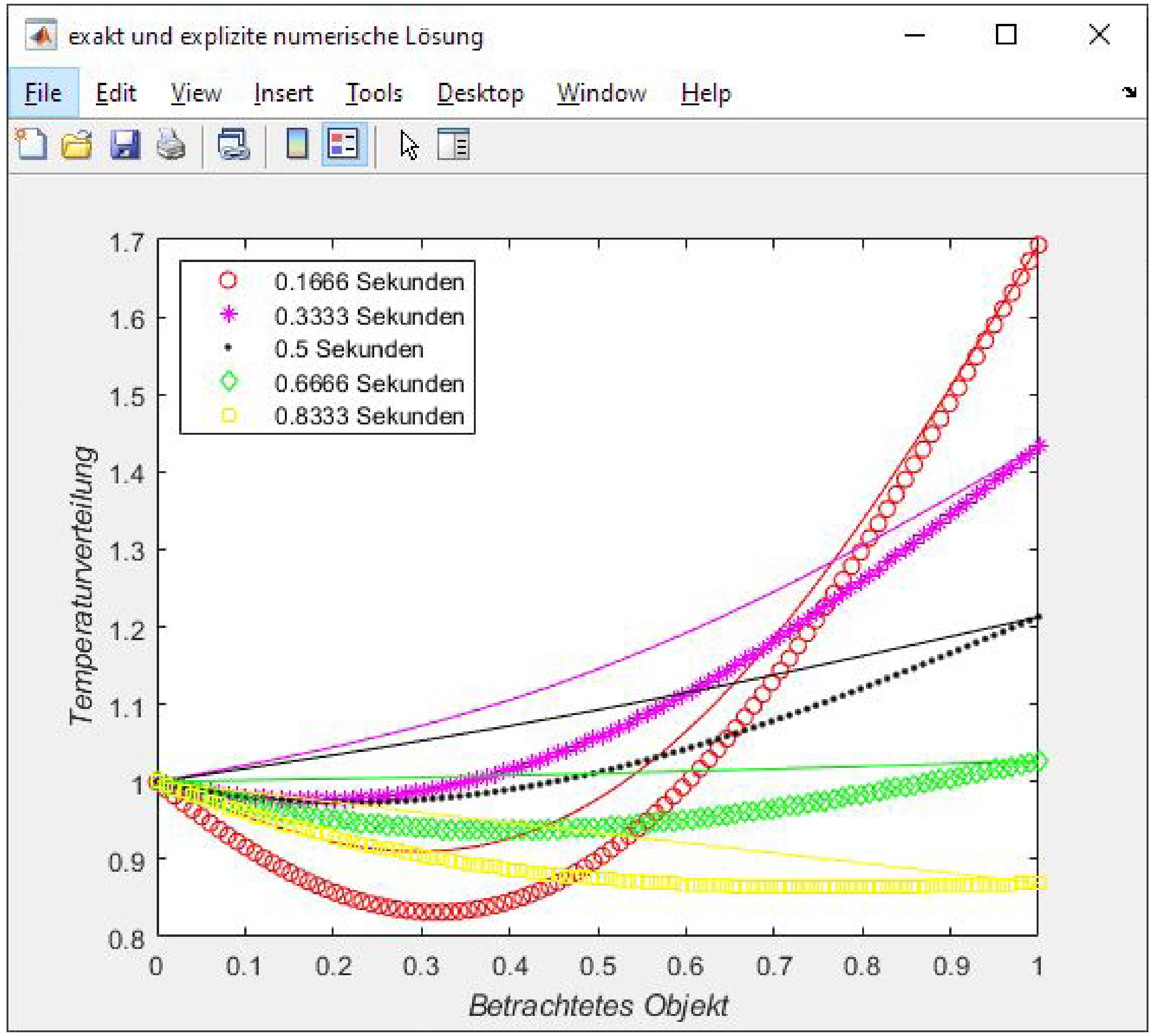
$$\underline{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}} = \underline{\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}} - ae^{-t}$$

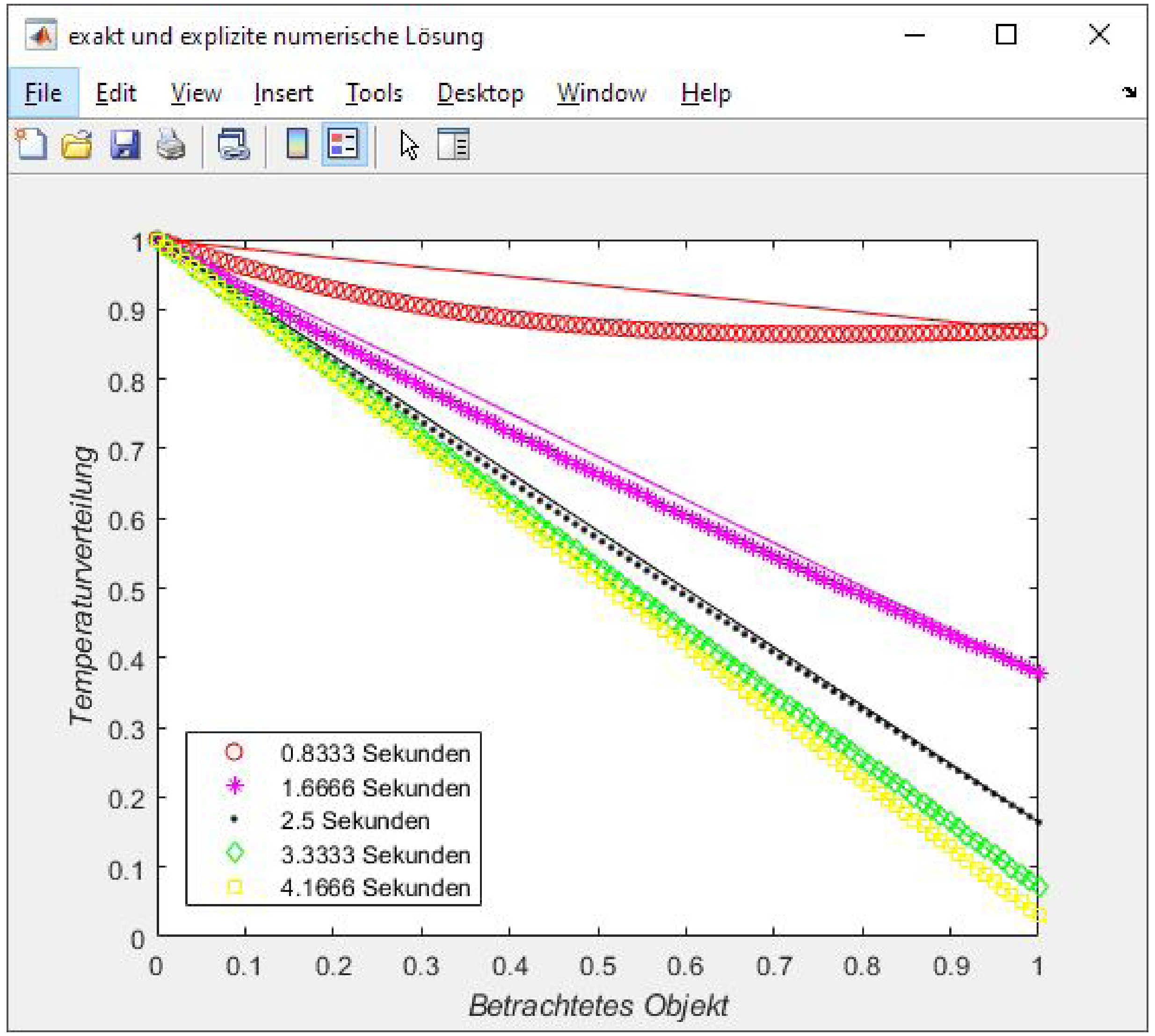
$$u_i^{n+1} = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) + u_i^n - ae^{-t} \cdot \Delta t$$

$$u_i^n = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}\right) + u_i^{n-1} - ae^{-t} \cdot \Delta t$$

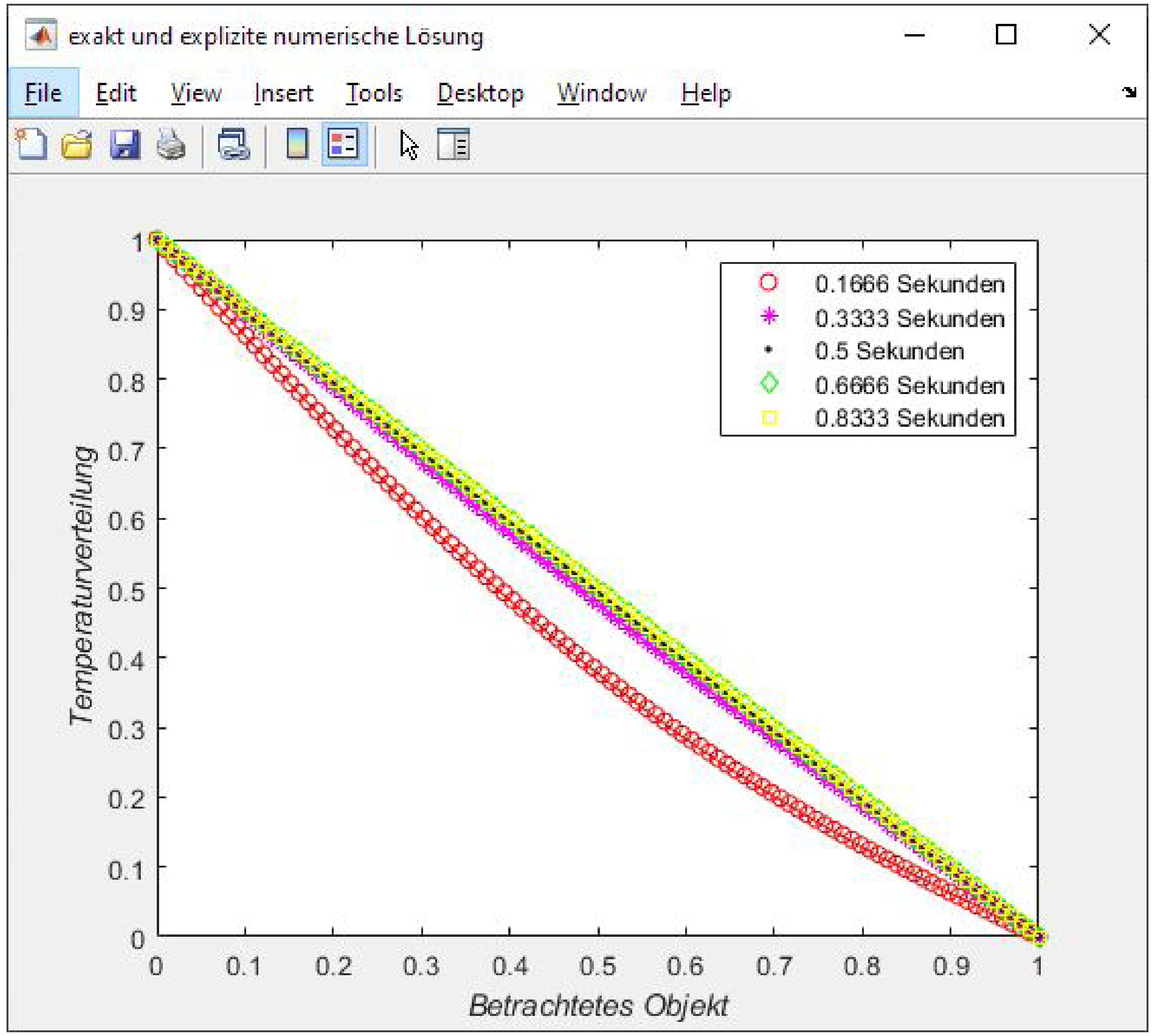

exakt und explizite numerische Lösung
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
0.1666 Sekunden
0.3333 Sekunden
0.5 Sekunden
0.6666 Sekunden
0.8333 Sekunden
Temperaturverteilung
Betrachtetes Objekt
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0.9
0.8
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

Aufgabe 3 - Berechnung bis T = 1 inklusive exakter Lösung

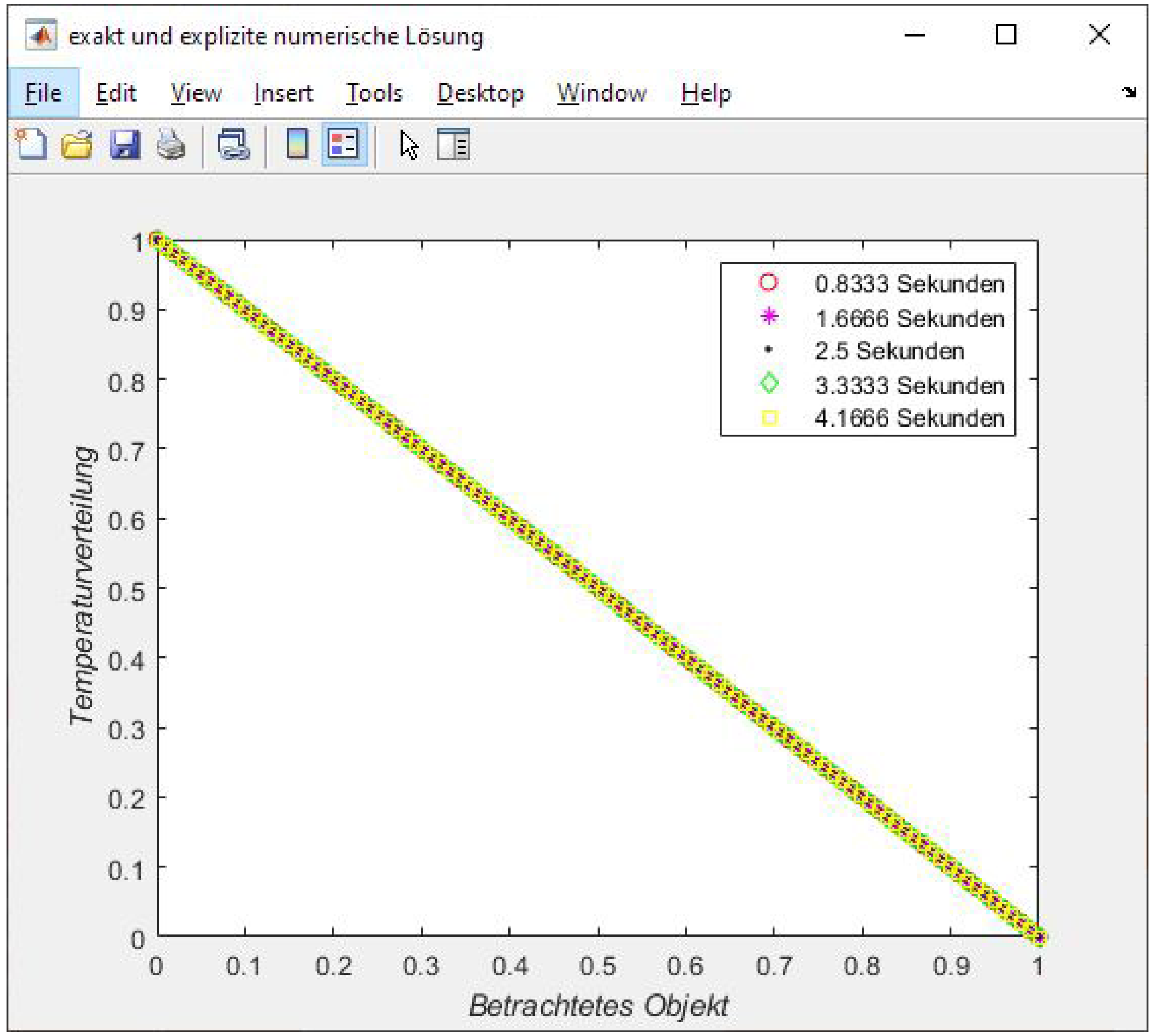



exakt und explizite numerische Lösung
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Temperaturverteilung
Betrachtetes Objekt
0.8333 Sekunden
1.6666 Sekunden
2.5 Sekunden
3.3333 Sekunden
4.1666 Sekunden
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Stationärer Zustand (ohne Quellterm, bis T = 1)



Stationärer Zustand (ohne Quellterm, bis T = 5)



$$u_t + 2au_x = \epsilon u_{xx} \quad 0 < x < 1, t > 0, \epsilon > 0$$
$$u(x,0) = e^{ax} \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$$
$$u(0,t) = 0$$
$$u_x(1,t) - au(1,t) = 0$$

Durch den Separationsansatz mit $\epsilon = 1$ erhält man:

$$X(x) \cdot T'(t) + 2aX'(x) \cdot T(t) = X''(x) \cdot T(t)$$
$$\Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{2aX'(x)}{X(x)} \overset{!}{=} k \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow X''(x) - 2aX'(x) = k \cdot X(x)$$

und

$$\Rightarrow T'(t) = k \cdot T(t)$$

Ansatz charakteristisches Polynom für x und t:

$$\lambda_x^2 - 2a\lambda_x - k = 0$$

und

$$\lambda_t = k \qquad \Rightarrow T(t) = e^{kt}$$

aus der Mitternachtsformel folgt für x:

$$\lambda_{x_{1,2}} = a \pm \sqrt{a^2 + k}$$

$$\Rightarrow \text{für komplexen Ansatz:} \quad a^2 + k < 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a| < \sqrt{-k}$$

$$\Rightarrow X(x) = C_1 \cdot e^{ax} \sin\left(x\sqrt{a^2 + k}\right) + C_2 \cdot e^{ax} \cos\left(-x\sqrt{a^2 + k}\right)$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Anfangswerte für allgemeine Lösung $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ betrachten:

1. $u(0,t) = 0 \quad \Rightarrow C_2 = 0$
2. $u(x,0) = e^{ax} \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \Rightarrow C_1 \sin\left(x\sqrt{a^2+k}\right) = \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$
3. $u_x(1,t) - au(1,t) = 0 \quad \Rightarrow C_1 \cos\left(\sqrt{a^2+k}\right) \cdot \sqrt{a^2+k} = 0$

aus 2. folgt $C_1 = 1$ und aus 2. und 3. folgt

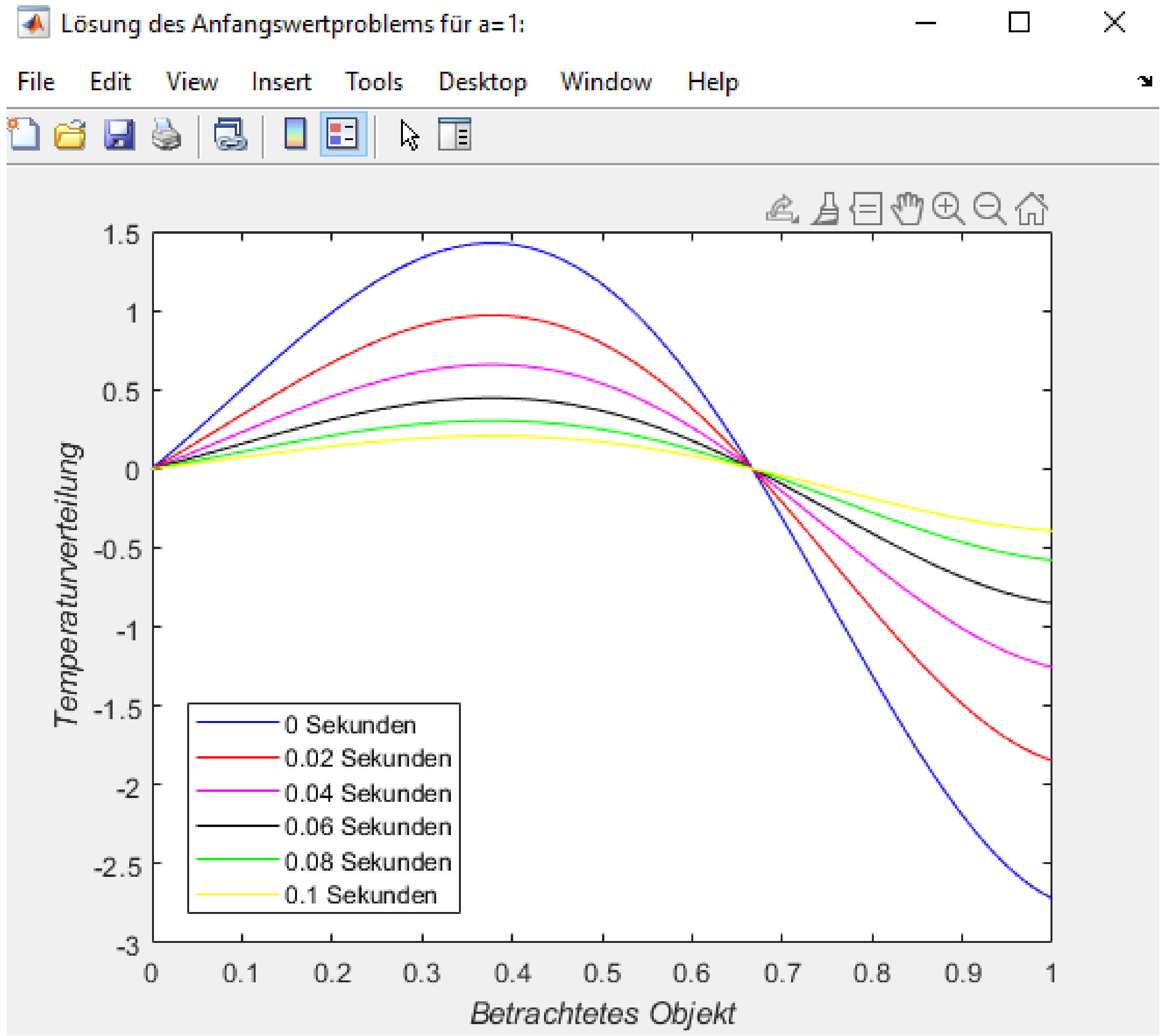
$$\sqrt{a^2+k} = \frac{3\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{9\pi^2}{4} - a^2$$

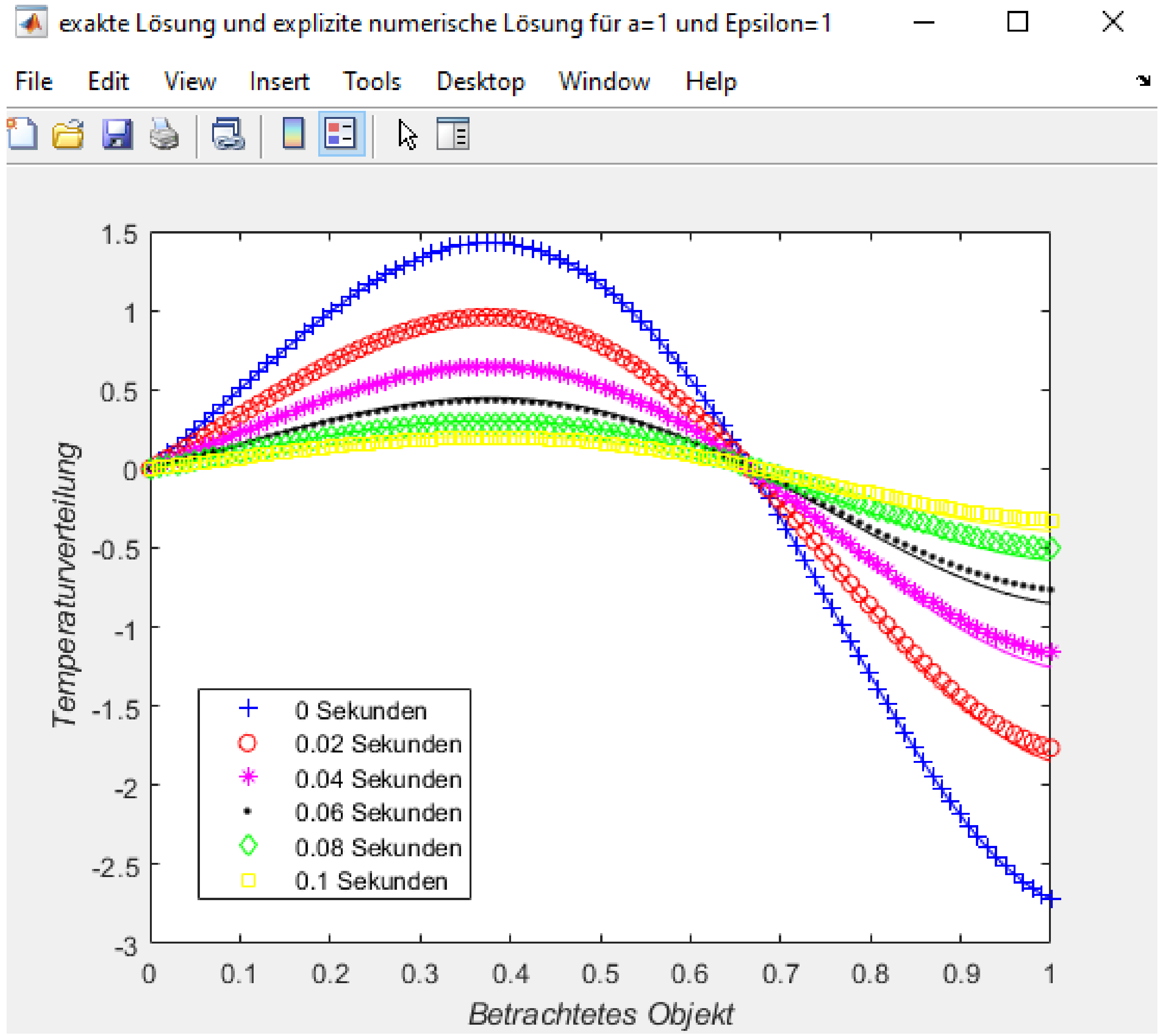
Lösung des Anfangswertproblems:

$$u\left(x,t\right)=e^{ax+\left(\frac{9\pi^2}{4}-a^2\right)t}\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$$

und für $a=1$

$$u\left(x,t\right)=e^{x+\left(\frac{9\pi^2}{4}-1\right)t}\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$$




exakte Lösung und explizite numerische Lösung für a=1 und Epsilon=1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Temperaturverteilung
Betrachtetes Objekt
0 Sekunden
0.02 Sekunden
0.04 Sekunden
0.06 Sekunden
0.08 Sekunden
0.1 Sekunden
1.5 1 0.5 0 -0.5 -1 -1.5 -2 -2.5 -3
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

$$u_t + 2au_x = \epsilon u_{xx}$$