Коллоквиум по мат. анализу №1

28 октября 2020 г.

1 Билет

- Рациональные числа - числа вида $\frac{p}{q}$, где q - натуральное число, а p - целое. Считается, что две записи $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ задают одно и то же рациональное число, если $p_1q_2 = p_2q_1$. Обратим внимание на то, что рациональных чисел не достаточно для естественных потребностей математики.

- Вещественные числа - множество всех бесконечно десятичных дробей вида $\pm a_0a_1a_2...$, где $a_0 \in N \vee 0, a_j \in 0...9$ (Записи, в которых с какого-то момента стоят только 9-ки запрещены);
  Число $\pm 0,000...$ называется нулём и совпадает с числом 0;
  Нунелевое число: - положительное, если в его записи стоит знак '$+$'; - отрицательное, если в его записи стоят знак '-';
  В вещественные числа вложены рациональные естественным образом. У вещественных чисел также определены операции сложения и умножения для которых справедливы все их естественные свойства.
  Отношение порядка у вещественных чисел задано лексикографическим порядком. ($a_0a_1a_2... \leq b_0b_1b_2... \exists k : a_0 = b_0, ...a_{k-1} = b_{k-1}, a_k \leq b_k$), который естественным обращом переносится на отрицательные.
  Для вещественных чисел определён модуль числа a, т.е. такое вещественное число, что $|a| = a$, если $a \geq 0$ и $|a| = -a$, если $a < 0$. Также, для модуля выполняется неравенство треугольника $|a+b| \leq |a|+|b|$. Из неравенства треугольника следует, что $||a|-|b|| \leq |a+b|$. Самое важное свойство - выполняется принцип полноты;

- Десятичные дроби. Рациональное число может быть представлено в виде конечной или периодической десятичной дроби ($\frac{1}{10} = 0.1; \frac{1}{6} =$

0.1(6); $\frac{1}{7} = 0.(142857)$. Можно не рассматривать десятичные записи с периодом 9, т.к. $0.(9) = 1$ (Если $0.(9) = x$, то $10x = 9 + x$ - истина, октуда $x = 1$.

- Принцип полноты. Принцип полноты выполняется, если для произвольных непустых A левее B найдется разделяющий их элемент.
  Принцип полноты не выполняется для рацоональных чисел.
  Принцип полноты выполняется на множестве вещественных чисел (теорема).
  Доказательство:
  Пусть A и B - непустые множества. A левее B. Если A состоит только из неположительных чисел, а B только из неоотрицательных, то нуль разделяем на A и B. Пусть в A имеется положительный элемент, тогда B состоит только из положительных чисел (обратный случай аналогичен). Построим число $c = c_0c_1c_2...$, разделяющее A и B.
  Рассмотрим множество натуральных чисел, с которых начинаются элементы множества B. Пусть b_0 - наименьшее

2 Билет

- Предел последовательности
  Если каждому числу $n \in N$ поставлено в соответствие некоторое число a_n, то говорим, что задана числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
  Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу a, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N_\varepsilon \in N$, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при каждом $n > N_\varepsilon$.
  $\forall\varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in N : \forall_n > N_\varepsilon |a_n - a| < \varepsilon$
  $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$

- Единственность предела Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, тогда a = b.
  Доказательство: Если $a \neq b$, то $|a - b| = \varepsilon_0 > 0$. Но по определению найдется номер N_1, для которого $|a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ при $n > N_1$ и найдется номер N_2, для которого $|a_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ при $n > N_2$. Тогда при $n > max\{N_1, N_2\} : \varepsilon_0 = |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon_0$.
  Противоречие.

- Арифметика предела. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ $\lim_{n\to\infty} b_n = b$
  1) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \beta b_n) = \lambda a + \beta b\ \forall a, b \in R$

2)$\lim_{n\to\infty} a_n b_n \ = ab$
3)Если $b \neq 0, b_n \neq 0$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \ = \frac{a}{b}$.
Доказательство: Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Тогда найдется номер N_1, для которого $|a_n - a| < \varepsilon$, и найдется номер N_2, для которого $|b_n - b| < \varepsilon$
1) При $n > N = max\{N_1, N_2\} : |\lambda a_n + \beta b_n - (\lambda a + \beta b)| = |\lambda(a_n - a) + \beta(b_n - b)| \leq |\lambda||a_n - a| + |\beta||b_n - b| < (|\lambda| + |\beta|)\varepsilon$
2) Заметит, что $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|$. Т.к. сходящаяся последовательность ограничена, то найдется $M > 0$, для которого $|b_n| \leq M$, поэтому при $n > N = max\{N_1, N_2\}$ выполнено $|a_n b_n - ab| \leq (M + |a|)\varepsilon$
3) Достаточно проверить, что $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ при $n \to \infty$. Заметим, что по условию $b \neq 0$, поэтому найдется номер $N_3 \in N$, для которого при $n > N_3$ выполнено $|b_n| > \frac{|b|}{2}$. Тогда при $N > max\{N_1, N_2\}$ выполнено $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = \frac{b_n - b}{|b_n||b|} \leq \frac{2}{|b|^2} * \varepsilon$

- Ограниченность сходящейся последовательности:
  Утверждение: сходящаяся последовательность ограничена
  Доказательство: Если $\lim_{n\to\infty} a_n \ = a$, то для каждого $n \in N$ выполнено $|a_n - a| < 1$ при $n > N \Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ при $n > N$. Значит $|a_n| \leq M = max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, ..., |a_N|\}$, т. е. $M = c \leq a_n \leq C = M$.

- Определенность: Если $a_n \to a$ и $a \neq 0$, то найдется номер $n \in N$, для которого $|a_n| > \frac{|a|}{2} > 0$ при $n > N$.
  Доказательство: Взяв $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ в определении сходимости последовательности к числу a, получаем номер $n \in N$, для которого $|a_n - a| < \frac{|a|}{2}$ при $n > N$. Тогда при $n > N$, выполнено $|a| - |a_n| \leq |a_n - a| < \frac{|a|}{2}$, что равносильно тому, что мы доказываем.

3 Билет

- Точные верхние и нижние границы