Коллоквиум по мат. анализу №1

28 октября 2020 г.

1 Билет

- **Рациональные числа** - числа вида $\frac{p}{q}$, где q - натуральное число, а p - целое. Считается, что две записи $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ задают одно и то же рациональное число, если $p_1q_2 = p_2q_1$. Обратим внимание на то, что рациональных чисел не достаточно для естественных потребностей математики.

- **Вещественные числа** - множество всех бесконечно десятичных дробей вида $\pm a_0a_1a_2...$, где $a_0 \in N \vee 0, a_j \in 0...9$ (Записи, в которых с какого-то момента стоят только 9-ки запрещены);
  Число $\pm 0,000...$ называется нулём и совпадает с числом 0;
  Нунелевое число:
  - положительное, если в его записи стоит знак '+';
  - отрицательное, если в его записи стоят знак '-';
  В вещественные числа вложены рациональные естественным образом. У вещественных чисел также определены операции сложения и умножения для которых справедливы все их естественные свойства.
  Отношение порядка у вещественных чисел задано лексикографическим порядком ($a_0a_1a_2... \leq b_0b_1b_2... \ \exists k : a_0 = b_0, ..., a_{k-1} = b_{k-1}, a_k \leq b_k$), который естественным обращом переносится на отрицательные.
  Для вещественных чисел определён модуль числа a, т.е. такое вещественное число, что $|a| = a$, если $a \geq 0$ и $|a| = -a$, если $a < 0$. Также, для модуля выполняется неравенство треугольника $|a+b| \leq |a|+|b|$. Из неравенства треугольника следует, что $||a|-|b|| \leq |a+b|$. Самое важное свойство - выполняется принцип полноты;

- **Десятичные дроби.** Рациональное число может быть представлено в виде конечной или периодической десятичной дроби ($\frac{1}{10} =$

0.1; $\frac{1}{6} = 0.1(6)$; $\frac{1}{7} = 0.(142857)$. Можно не рассматривать десятичные записи с периодом 9, т.к. $0.(9) = 1$ (Если $0.(9) = x$, то $10x = 9 + x$ - истина, октуда $x = 1$.

- **Принцип полноты.** Принцип полноты выполняется, если для произвольных непустых множеств A левее B найдется разделяющий их элемент.
  Принцип полноты не выполняется для рациональных чисел.
  Принцип полноты выполняется на множестве вещественных чисел (теорема).
  Доказательство:
  Пусть A и B - непустые множества. A левее B. Если A состоит только из неположительных чисел, а B только из неотрицательных, то нуль разделяет A и B. Пусть в A имеется положительный элемент, тогда B состоит только из положительных чисел (обратный случай аналогичен). Построим число $c = c_0c_1c_2...$, разделяющее A и B.
  Рассмотрим множество натуральных чисел, с которых начинаются элементы множества B. Пусть b_0 - наименьшее из таких и пусть $b_0 = c_0$. Затем рассмотрим все числа множестве B_1, начинающиеся с b_0 и найдем у них наименьшую первую цифру после запятой и предположим, что $b_1 = c_1$ (где b_1 - эта цифра) и т.д. получим бесконечную десятичную дробь $c_0c_1c_2...$. Покажем, что построенное число рязделяет множества A и B. Во-первых, по построению $c \leq b$ для каждого $b \in B$. Действительно, либо $b = c$, либо $b \neq c$. Во втором случае пусть $b_0 = c_0, ..., b_{k-1} = c_{k-1}$ и $b_k \neq c_k$. Тогда по построению числа c, $c_k < b_k \Rightarrow c < b$.
  Покажем, что для каждого $a \in A$ $a \leq c$. Предположим, что $a > c$, т.е. $a \geq c$ и $a \neq c$. Тогда найдется позиция k, для которой $a_0 = c_0, ..., a_{k-1} = c_{k-1}$ и $a_k > c_k$. Но по построению числа c есть такой $b \in B$, что $b_0 = c_0, b_k = c_k$, значит $a_k > b_k$, что противоречит условию A левее B.

- Рациональных решений уравнение $x^2 = 2$ не существует. Действительно, пусть $\frac{p}{q}$ - такое решение и p и q не имеют общих делителей. Тогда $\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ - четное $\Rightarrow$ p - четное $\Rightarrow p = 2k, 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2 \Rightarrow q^2$ - четное $\Rightarrow q$ - четное $\Rightarrow$ числа p и q имеют общий делитель. Противоречие.

2 Билет

- **Предел последовательности**
  Если каждому числу $n \in N$ поставлено в соответствие некоторое число a_n, то говорим, что задана числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
  Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу a, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N_\varepsilon \in N$, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при каждом $n > N_\varepsilon$.
  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in N : \forall_n > N_\varepsilon |a_n - a| < \varepsilon$
  $\lim_{n\to\infty} a_n \ = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$

- **Единственность предела** Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n \ = a$ и $\lim_{n\to\infty} b_n \ = b$, тогда a = b.
  Доказательство: Если $a \neq b$, то $|a - b| = \varepsilon_0 > 0$. Но по определению найдется номер N_1, для которого $|a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ при $n > N_1$ и найдется номер N_2, для которого $|a_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ при $n > N_2$. Тогда при $n > max\{N_1, N_2\} : \varepsilon_0 = |a-b| = |a-a_n+a_n-b| \leq |a-a_n|+|a_n-b| < \varepsilon_0$. Противоречие.

- **Арифметика предела.** $\lim_{n\to\infty} a_n \ = a$ $\lim_{n\to\infty} b_n \ = b$
  1) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \beta b_n) = \lambda a + \beta b \ \forall a, b \in R$
  2)$\lim_{n\to\infty} a_n b_n \ = ab$
  3)Если $b \neq 0, b_n \neq 0$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \ = \frac{a}{b}$.
  Доказательство: Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Тогда найдется номер N_1, для которого $|a_n - a| < \varepsilon$, и найдется номер N_2, для которого $|b_n - b| < \varepsilon$
  1) При $n > N = max\{N_1, N_2\} : |\lambda a_n + \beta b_n - (\lambda a + \beta b)| = |\lambda(a_n - a) + \beta(b_n - b)| \leq |\lambda||a_n - a| + |\beta||b_n - b| < (|\lambda| + |\beta|)\varepsilon$
  2) Заметит, что $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|$. Т.к. сходящаяся последовательность ограничена, то найдется $M > 0$, для которого $|b_n| \leq M$, поэтому при $n > N = max\{N_1, N_2\}$ выполнено $|a_n b_n - ab| \leq (M + |a|)\varepsilon$
  3) Достаточно проверить, что $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ при $n \to \infty$. Заметим, что по условию $b \neq 0$, поэтому найдется номер $N_3 \in N$, для которого при $n > N_3$ выполнено $|b_n| > \frac{|b|}{2}$. Тогда при $N > max\{N_1, N_2\}$ выполнено $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = \frac{b_n - b}{|b_n||b|} \leq \frac{2}{|b|^2} * \varepsilon$

- **Ограниченность сходящейся последовательности**:
  Утверждение: сходящаяся последовательность ограничена

Доказательство: Если $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, то для каждого $n \in N$ выполнено $|a_n - a| < 1$ при $n > N \Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ при $n > N$. Значит $|a_n| \le M = max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, ..., |a_N|\}$, т. е. $M = c \le a_n \le C = M$.

- **Определенность**: Если $a_n \to a$ и $a \neq 0$, то найдется номер $n \in N$, для которого $|a_n| > \frac{|a|}{2} > 0$ при $n > N$.
  Доказательство: Взяв $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ в определении сходимости последовательности к числу a, получаем номер $n \in N$, для которого $|a_n - a| < \frac{|a|}{2}$ при $n > N$. Тогда при $n > N$, выполнено $|a| - |a_n| \le |a_n - a| < \frac{|a|}{2}$, что равносильно тому, что мы доказываем.

3 Билет

- **Переход к пределу в неравенствах**
  Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$. Если для некоторого номера N выполнено $a_n \le b_n$ при $n > N$, то и $a \le b$;
  Доказательство: Предположим, что $a - b = \varepsilon > 0$. Тогда найдутся номера $N_1 \in N$ и $N_2 \in N$, для которых $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N_1$, и $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N_2$. Тогда $\varepsilon = a - b = a - a_n + a_n - b_n + b_n - b \le a - a_n + b_n - b < \varepsilon$. Противоречие.

- **Лемма о зажатой последовательности**
  Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ и для некоторого $n \in N$ выполнено неравенство: $a_n \le c_n \le b_n$ при $n > N$. Тогда $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.
  Доказательство: Для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся номера $N_1 \in N$ и $N_2 \in N$, для которых $|a_n - a| < \varepsilon$ и $|b_n - b| < \varepsilon$. Тогда при $n > max\{N, N_1, N_2\}$ выполнено: $a - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < b + \varepsilon$.

- **Принцип вложенных отрезков**
  Пусть $a, b \in R$ и $a < b$. Множества $[a; b] := \{x \in R : a \le x \le b\}$, $(a; b) := \{x \in R : a < x < b\}$ называются отрезком и интервалом соответственно. Длиной отрезка (интервала) называется величина $b - a$.
  Теорема: Всякая последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ вложенных отрезков (т.е. $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$) имеет общую точку. Кроме того, если длины отрезков стремятся к нулю, т.е. $b_n - a_n \longrightarrow 0$, то такая общая точка только одна.
  Доказательство: по условию $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$, откуда $a_{n+1} \le a_n \le b_n \le b_{n+1}$. Заметим, что при $n < m$ выполнено $a_n \le a_m \le b_m$,

а при $n > m$ выполнено $a_n \leq b_n \leq b_m$. Таким образом, если $A := \{a_n, n \in N\}$ и $B := \{b_m, m \in N\}$, то A левее B, а значит по принципу полноты найдется такое число $c \in R$, что $a_n \leq c \leq b_m$ для произвольных $n, m \in N$, в частности $a_n \leq c \leq b_n$ т.е. $c \in [a_n; b_n]$. Пусть общих точек две: c и c'. Не ограничивая общности $c < c'$. Тогда $a_n \leq c < c' \leq b_n$ и $c' - c \leq b_n - a_n$, что противоречит тому, что $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Действительно, найдется номер N, для которого $b_n - a_n < c' - c$ при каждом $n > N$.

- **Геометрическая интерпретация вещественных чисел, вещественная прямая.**
  Доказанная выше теорема позволяет дать вещественным числам следующую геометрическую интерпретацию. Сопоставим десятичной дроби $0.a_1a_2...$ последовательность вложенных отрезков по следующему правилу:
  Разделим отрезок $[0; 1]$ на 10 равных частей и выберем из получившихся 10 отрезков $(a_1 + 1)$-ый по счету. Делаем то же самое и выбираем $(a_2 + 1)$-ый по счету и т.д. Получаем последовательность вложенных отрезков, причем длина отрезка на n-ом шаге равна 10^{-n}. По доказанной теореме сущестует единственная общая точка построенной последовательности вложенных оторезков, которая как раз и совпадает с $0.a_1a_2...$

4 Билет

- **Точные верхние и нижние грани.** Пусть A - непустое подмножество вещественных чисел. Число b называется верхней гранью множества A, если $a \leq b$ верно для каждого числа $a \in A$. Если есть хоть одна грань, то множество называют ограниченным сверху. Наименьшая из верхних граней множества A называется точной верхней гранью множества A и обозначается $sup(A)$ (супремум).
  Число b называется нижней гранью множества A, если $b \leq a$ верно для каждого числа $a \in A$. Ели есть хотя бы одна нижняя грань, то множество называется ограниченным снизу. Наибольшая из нижних граней множества A называется точной нижней гранью множества A и обозначается $inf(A)$ (инфинум)
  Ограниченное и сверху и снизу множество называется ограниченным.

- **Теорема Вейерштрассе о пределе монотонной ограниченной последовательности.**

Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает ($a_n \leq a_{n+1}$) и ограничена сверху. Тогда эта последовательность сходится к своему супремуму.
Анологично, пусть поседовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает ($a_{n+1} \leq a_n$) и ограничена снизу. Тогда эта последовательность сходится к своему инфинуму.
Доказательство: Пусть $M = sup\{a_n : n \in N\} = sup(a_n)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n \in N$, для которого $M - \varepsilon < a_n, n \in N$ иначе $M - \varepsilon$ - верхняя грань, чего не может быть. В силу того, что последовательность неубывающая, при каждой $n > N$ выполнено $M - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq M \leq M + \varepsilon$
Тем самым, по определению $M = \lim\ a_n$
Случай с невозрастающей последовательностью рассматривается аналогично.

- **Пример рекуррентной формулы для вычисления $\sqrt{2}$**
  Пусть $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}), a_1 = 2$. Заметим, что $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n) + \frac{2}{a_n}) \geq \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
  Поэтому $a_n \geq \sqrt{2}$. Кроме того, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) \leq \frac{1}{2}(a_n + \frac{a_n}{a_n}) = a_n$.
  По доказанной Теореме у последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует предел a. Т. к. $a_n \geq 0$, то и $a > 0$.
  Тогда по арифметике предела получаем $a = \frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})$, откуда $a = \sqrt{2}$.

5 Билет

- **Фундаментальная последовательность**
  Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная (или является последовательностью Коши), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число (номер) $N_\varepsilon \in N$, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при каждом $n, m > N_\varepsilon$. То же самое в кванторах: $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in N : \forall n, m > N_\varepsilon |a_n - a_m| < \varepsilon$. [Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то она фундаментальная]

- **Критерий Коши:** Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна
  Это следует из того, что:
  1) Если последовательность сходится, то она фундаментальная;
  2) Если последовательность фундаментальная, то она сходится;
  Доказательство:

1) Пусть $\varepsilon > 0$. По определению сходящейся последовательности найдется такой номер $N \in N$, что $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N$, где $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Тогда при $m, n > N$ выполнено:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon$$

2) Заметим, что последовательность $\lim_{n\to\infty} a_n$ ограничена. Действительно, для некоторого $N \in N$ выполнено $|a_n - a_m| < 1$ при $m, n > N$. Отсюда при $n > N$:

$$|a_n| = |a_n - a_{N+1} + a_{N+1}| \leq |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}|$$

Значит, $|a_n| \leq M = max\{1 + |a_{N+1}|, |a_1|, ..., |a_N|\}$
Пусть $M_n := \sup_{k>n} a_k$. Тогда последовательность $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает, т.к. M_n является верхней гранью для множества $\{a_k : k > n+1\}$. Т.е. с ростом количество значений, из которых берется супремум, не увеличивается. Кроме того, т.к. все $a_k \geq -M$, то и $M_k \geq -M$. Таким образом, $\exists a = \lim_{n\to\infty} M_k$. Покажем, что $a_k \longrightarrow a$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда найдется номер N, для которого $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при $m, n > N$. Кроме того, найдется номер N_1, для которого $|M_k - a| < \varepsilon$ при $n > N_1$. Пусть $N_2 = max\{N, N_1\}$. Найдется номер $m > N_2$, для которого $M_{N_2+1} - \varepsilon < a_m \leq M_{N_2+1}$. Тогда, при $n > N$:
$|a_n - a| = |a_n - a_m + a_m - M_{N_2+1} + M_{N_2+1} - a| \leq |a_n - a_m| + |a_m - M_{N_2+1}| + |M_{N_2+1} - a| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$

- **Пример применения критерия Коши для доказательства представления $\sqrt{2}$ целой дробью.**
Пусть $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}, a_1 = 1$. Заметим, что $a_n \geq 1$ и:

$$|a_{n+1} - a_n| = |\frac{1}{1+a_n} - \frac{1}{1+a_{n-1}}| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} \leq \frac{1}{4}|a_n - a_{n-1}| \leq$$

$$\leq (\frac{1}{4})^{n-1}|a_2 - a_1| = (\frac{1}{4})^{n-1} * \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Отсюда при $m > n$

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + ... + |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2}((\frac{1}{4})^{m-2} + ... + (\frac{1}{4})^{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{4})^{n-1}\frac{1 - (\frac{1}{4})^{m-n}}{1 - \frac{1}{4}} \leq \frac{8}{3}(\frac{1}{4})^4$$

Т.к. $(\frac{1}{4})^4 \longrightarrow 0$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется N, для которого $(\frac{1}{4})^4 < \varepsilon$ при $n > N$. Тем самым, для последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

выполнен критерий Коши, а, значит, существует $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. По арифметике предела a удовлетворяет уравнению: $a(1+a) = 1 + a + 1 \leftrightarrow a^2 = 2 \leftrightarrow a = \sqrt{2}$, т.к. $a \geq 0$.

6 Билет

- **Числовые ряды.**
  Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - числовая последовательность. Числовым рядом с членами a_n называется выражение $a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
  Конечные суммы $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ называют частичными суммами ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Говорят, что ряд сходится, если у последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует предел, который называют суммой ряда. Если такого предела не существует, то говорят, что ряд расходится (не сходится).
  На сходимость ряда (но не на сумму) не влияет добавление или отбрасывание первых нескольких слагаемых.

- **Переформулировка критерия Коши для числовых рядов**:
  Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n > m > N$ выполнено $|\sum_{k=m+1}^{n} a_k| = |S_n - S_m| < \varepsilon$.

- **Необходимое условие сходимости числового ряда:**
  Если ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k$ сходится, то $a_k \to 0$ при $k \to \infty$
  Доказательство: Действительно, из критерия Коши следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, для которого при каждом $n > N + 1$ выполнено $|a_n| = |S_n - S_{n-1}| < \varepsilon$.

- **Расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}$:**
  Рассмотрим такой ряд. Исследуем его на выполнение условия критерия Коши: пусть $n > m$, тогда

$$|\sum_{n=m+1}^{k} \frac{1}{n}| \geq \frac{k-m}{k}$$

Какой бы ни был задан номер N всегда можно взять $m > N$ (на-пример, $N+1$) и $k=2m$, тогда

$$|\sum_{n=m+1}^{2m=k}\frac{1}{n}|\geq\frac{1}{2}$$

,а значит условие критерия Коши не выполнено и ряд расходится.

- **Абсолютная и условная сходимость рядов.**
Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{n} |a_k|$.
Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k$ сходится условно, если он сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ расходится.

7 Билет

- **Сходимость рядов с неотрицательными слагаемыми + признак сравнения.**
Пусть $a_k \geq 0$, тогда ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.
Доказательство: утвеждение следует из того, что последовательность частичных сумм не убывает. Отсюда получаем такое признак сравнения.
Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$. Если ряд $\sum_{k=1}^{n} b_k$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k$.
Наоборот, если ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{k=1}^{n} b_k$.

- **Признак Коши**
Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ невозрастающая последовательность, $a_n \geq 0$. Ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2k}$.
Доказательство: Заметим, что $a_2 + 2a_4 + 4a_8 + ... + 2^{n-1}a_{2n} \leq a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{2n} \leq 2a_2 + 4a_4 + 8a_8$. Отсюда получаем, что из ограниченности частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2k}$ следует ограниченность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{n} a_k$ и наоборот.

- **Сходимость и расходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ в зависимости от p.**
Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходятся при $p > 1$ и расходятся при $p \leq 1$.
При $p \leq 1$ слагаемое $\frac{1}{k^p}$ не стремится к нулю, а значит ряд не сходится.

Теперь рассмотрим $p > 0$. По доказанному признаку Коши ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2k^p} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-p})^k$. Это геометрическая прогрессия, которая сходится при $2^{1-p} < 1$, т. е. при $p > 1$.

8 Билет

- **Подпоследовательность и частичные пределы** Пусть задана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и пусть задана возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Последовательность $b_k = a_{n_k}$ называется подпоследовательностью $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

  Число $a \in \mathbb{R}$ называется частичным пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если выполнено $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$ для некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

- **Верхний и нижний частичные пределы ограниченной последовательности**
  Теорема. Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к пределу этой последовательности.
  Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и пусть $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ - подпоследовательность. По определение предела для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, для которого $|a_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. Т. к. $1 \le n$ и $n_{k-1} < n_k$, по индукции получаем, что $k \le n_k$. Поэтому $|a_k - a| < \varepsilon$ при $k > N$.

  Рассмотрим последовательности $M_n := \sup\limits_{k>n} a_k$ и $m_n := \inf\limits_{k>n} a_k$. Ясно, что последовательность M_n - не возрастает, а последовательность m_n - не убывает. Поэтому для ограниченной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существуют пределы:

  $$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n := M_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n := m_n$$

  которые называются соответственно верхним и нижним частичными пределами последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- **Теорема о том, что нижний и верхний частичные пределы действительно наименьший и наибольший частичный пределы соответственно**

  Теорема. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограниченная последовательность. Тогда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ - частичные пределы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и любой другой частичный предел принадлежит отрезку $[\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n,\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n]$.

Доказательство. Покажем, что $M = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ - частичный предел. Для этого индуктивно построим подпоследовательность, которая сходится к $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Пусть $n_1 = 1$. Пусть индексы $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ уже построены. Тогда подберем такой номер $n_{k+1} > n_k$, что

$$M_{n_k} - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}} < M_{n_k}.$$

Как подпоследовательность сходящейся последоательности $M_{n_k} \to M$, поэтому по теореме о сходимости зажатой последовательности получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = M$. Аналогично проверяется, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ - частичный предел.

Пусть теперь a - частичный предел. Это означает, что $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$ для некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда $m_{n_{k-1}} \leq a_{n_k} \leq M_{n_{k-1}}$. По теореме о переходе к пределу в неравенствах получаем, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq a \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

- **Теорема Больцано (следствие из предыдущего пункта)**

  Теорема. Во всякой ограниченной последовательности можно найти сходящуюся подпоследовательность.

- **Критерий сходимости последовательности в терминах структуры множества частичных пределов.**

  Теорема. Ограниченная последовательность сходится тогда и только тогда, когда множество ее частичных пределов состоит из одного элемента.

  Доказательство. То, что у сходящейся последовательности есть единственный частичный предел уже проверено ранее.

  Предположим, что у ограниченной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует единственный частичный предел. По доказанному, это в частности означает, что

  $$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n = a$$

  Тогда $m_{n-1} \leq a_n \leq M_{n-1}$ и по теореме о сходимости зажатой последовательности получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.