Коллоквиум по мат. анализу №1

28 октября 2020 г.

1 Билет

- **Рациональные числа** - числа вида $\frac{p}{q}$, где q - натуральное число, а p - целое. Считается, что две записи $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ задают одно и то же рациональное число, если $p_1q_2 = p_2q_1$. Обратим внимание на то, что рациональных чисел не достаточно для естественных потребностей математики.

- **Вещественные числа** - множество всех бесконечно десятичных дробей вида $\pm a_0a_1a_2...$, где $a_0 \in N \vee 0, a_j \in 0...9$ (Записи, в которых с какого-то момента стоят только 9-ки запрещены);
Число $\pm 0,000...$ называется нулём и совпадает с числом 0;
Нунелевое число: - положительное, если в его записи стоит знак '$+$'; - отрицательное, если в его записи стоят знак '-';
В вещественные числа вложены рациональные естественным образом. У вещественных чисел также определены операции сложения и умножения для которых справедливы все их естественные свойства.
Отношение порядка у вещественных чисел задано лексикографическим порядком. $(a_0a_1a_2... \leq b_0b_1b_2... \exists k : a_0 = b_0, ...a_{k-1} = b_{k-1}, a_k \leq b_k)$, который естественным обращом переносится на отрицательные.
Для вещественных чисел определён модуль числа a, т.е. такое вещественное число, что $|a| = a$, если $a \geq 0$ и $|a| = -a$, если $a < 0$. Также, для модуля выполняется неравенство треугольника $|a+b| \leq |a|+|b|$. Из неравенства треугольника следует, что $||a|-|b|| \leq |a+b|$. Самое важное свойство - выполняется принцип полноты;

- **Десятичные дроби.** Рациональное число может быть представлено в виде конечной или периодической десятичной дроби ($\frac{1}{10} =$

0.1; $\frac{1}{6} = 0.1(6)$; $\frac{1}{7} = 0.(142857)$. Можно не рассматривать десятичные записи с периодом 9, т.к. $0.(9) = 1$ (Если $0.(9) = x$, то $10x = 9 + x$ - истина, октуда $x = 1$.

- **Принцип полноты.** Принцип полноты выполняется, если для произвольных непустых A левее B найдется разделяющий их элемент.
  Принцип полноты не выполняется для рациоональных чисел.
  Принцип полноты выполняется на множестве вещественных чисел (теорема).
  Доказательство:
  Пусть A и B - непустые множества. A левее B. Если A состоит только из неположительных чисел, а B только из неоотрицательных, то нуль разделяет A и B. Пусть в A имеется положительный элемент, тогда B состоит только из положительных чисел (обратный случай аналогичен). Построим число $c = c_0c_1c_2...$, разделяющее A и B.
  Рассмотрим множество натуральных чисел, с которых начинаются элементы множества B. Пусть b_0 - наименьшее из таких и пусть $b_0 = c_0$. Затем рассмотрим все числа множестве B_1, начинающиеся с b_0 и найдем у них наименьшую первую цифру после запятой и предположим, что $b_1 = {}_1$ (где b_1 - эта цифра) и т.д. получим бесконечную десятичную дробь $c_0c_1c_2...$. Покажем, что построенное число рязделяет множества A и B. Во-первых, по построению $c \leq b$ для каждого $b \in B$. Действительно, либо $b = c$, либо $b \neq c$. Во втором случае пусть $b_0 = c_0, ..., b_{k-1} = c_{k-1}$ и $b_k \neq c_k$. Тогда по построению числа c, $c_k < b_k \Rightarrow c < b$.
  Покажем, что для каждого $a \in A$ $a \leq c$. Предположим, что $a > c$, т.е. $a \geq c$ и $a \neq c$. Тогда найдется позиция k, для которой $a_0 = c_0, ..., a_{k-1} = c_{k-1}$ и $a_k > c_k$. Но по построению числа c есть такой $b \in B$, что $b_0 = c_0, b_k = c_k$, значит $a_k > b_k$, что противоречит условию A левее B.

- Рациональных решений уравнение $x^2 = 2$ не существует. Действительно, пусть $\frac{p}{q}$ - такое решение и p и q не имеют общих делителей. Тогда $\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ - четное $\Rightarrow$ p - четное $\Rightarrow p = 2k, 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2 \Rightarrow q^2$ - четное $\Rightarrow q$ - четное $\Rightarrow$ числа p и q имеют общий делитель. Противоречие.

2 Билет

- Предел последовательности
Если каждому числу $n \in N$ поставлено в соответствие некоторое число a_n, то говорим, что задана числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу a, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N_\varepsilon \in N$, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при каждом $n > N_\varepsilon$.
$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in N : \forall_n > N_\varepsilon |a_n - a| < \varepsilon$
$\lim_{n\to\infty} a_n \ = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$

- Единственность предела Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n \ = a$ и $\lim_{n\to\infty} b_n \ = b$, тогда a = b.
Доказательство: Если $a \neq b$, то $|a - b| = \varepsilon_0 > 0$. Но по определению найдется номер N_1, для которого $|a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ при $n > N_1$ и найдется номер N_2, для которого $|a_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ при $n > N_2$. Тогда при $n > max\{N_1, N_2\} : \varepsilon_0 = |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon_0$. Противоречие.

- Арифметика предела. $\lim_{n\to\infty} a_n \ = a \ \lim_{n\to\infty} b_n \ = b$
1) $\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n + \beta b_n) = \lambda a + \beta b \ \forall a, b \in R$
2)$\lim_{n\to\infty} a_n b_n \ = ab$
3)Если $b \neq 0, b_n \neq 0$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \ = \frac{a}{b}$.
Доказательство: Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Тогда найдется номер N_1, для которого $|a_n - a| < \varepsilon$, и найдется номер N_2, для которого $|b_n - b| < \varepsilon$
1) При $n > N = max\{N_1, N_2\} : |\lambda a_n + \beta b_n - (\lambda a + \beta b)| = |\lambda(a_n - a) + \beta(b_n - b)| \leq |\lambda||a_n - a| + |\beta||b_n - b| < (|\lambda| + |\beta|)\varepsilon$
2) Заметит, что $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|$. Т.к. сходящаяся последовательность ограничена, то найдется $M > 0$, для которого $|b_n| \leq M$, поэтому при $n > N = max\{N_1, N_2\}$ выполнено $|a_n b_n - ab| \leq (M + |a|)\varepsilon$
3) Достаточно проверить, что $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ при $n \to \infty$. Заметим, что по условию $b \neq 0$, поэтому найдется номер $N_3 \in N$, для которого при $n > N_3$ выполнено $|b_n| > \frac{|b|}{2}$. Тогда при $N > max\{N_1, N_2\}$ выполнено $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = \frac{b_n - b}{|b_n||b|} \leq \frac{2}{|b|^2} * \varepsilon$

- Ограниченность сходящейся последовательности:
Утверждение: сходящаяся последовательность ограничена

Доказательство: Если $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, то для каждого $n \in N$ выполнено $|a_n - a| < 1$ при $n > N \Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ при $n > N$. Значит $|a_n| \leq M = max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, ..., |a_N|\}$, т. е. $M = c \leq a_n \leq C = M$.

- Определенность: Если $a_n \to a$ и $a \neq 0$, то найдется номер $n \in N$, для которого $|a_n| > \frac{|a|}{2} > 0$ при $n > N$.
  Доказательство: Взяв $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ в определении сходимости последовательности к числу a, получаем номер $n \in N$, для которого $|a_n - a| < \frac{|a|}{2}$ при $n > N$. Тогда при $n > N$, выполнено $|a| - |a_n| \leq |a_n - a| < \frac{|a|}{2}$, что равносильно тому, что мы доказываем.

3 Билет

- **Переход к пределу в неравенствах**
  Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$. Если для некоторого номера N выполнено $a_n \leq b_n$ при $n > N$, то и $a \leq b$;
  Доказательство: Предположим, что $a - b = \varepsilon > 0$. Тогда найдутся номера $N_1 \in N$ и $N_2 \in N$, для которых $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N_1$, и $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N_2$. Тогда $\varepsilon = a - b = a - a_n + a_n - b_n + b_n - b \leq a - a_n + b_n - b < \varepsilon$. Противоречие.

- **Лемма о зажатой последоовательности**
  Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ и для некоторого $n \in N$ выполнено неравенство: $a_n \leq c_n \leq b_n$ при $n > N$. Тогда $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.
  Доказательство: Для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся номера $N_1 \in N$ и $N_2 \in N$, для которых $|a_n - a| < \varepsilon$ и $|b_n - b| < \varepsilon$. Тогда при $n > max\{N, N_1, N_2\}$ выполнено: $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < b + \varepsilon$.

- **Принцип вложенных отрезков**
  Пусть $a, b \in R$ и $a < b$. Множества $[a; b] := \{x \in R : a \leq x \leq b\}$, $(a; b) := \{x \in R : a < x < b\}$ называются отрезком и интервалом соответственно. Длиной отрезка (интервала) называется величина $b - a$.
  Теорема: Всякая последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ вложенных отрезков (т.е. $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$) имеет общую точку. Кроме того, если длины отрезков стремятся к нулю, т.е. $b_n - a_n \longrightarrow 0$, то такая общая точка только одна.
  Доказательство: по условию $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$, откуда $a_{n+1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n+1}$. Заметим, что при $n < m$ выполнено $a_n \leq a_m \leq b_m$,

а при $n > m$ выполнено $a_n \leq b_n \leq b_m$. Таким образом, если $A := \{a_n, n \in N\}$ и $B := \{b_m, m \in N\}$, то A левее B, а значит по принципу полноты найдется такое число $c \in R$, что $a_n \leq c \leq b_m$ для произвольных $n, m \in N$, в частности $a_n \leq c \leq b_n$ т.е. $c \in [a_n; b_n]$. Пусть общих точек две: c и c'. Не ограничивая ообщности $c < c'$. Тогда $a_n \leq c < c' \leq b_n$ и $c' - c \leq b_n - a_n$, что противоречит тому, что $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Действительно, найдется номер N, для которого $b_n - a_n < c' - c$ при каждом $n > N$.

- **Геометрическая интерпретация вещественных чисел, вещественная прямая.**
  Доказанная выше теорема позволяет дать вещественным числам следующую геометрическую интерпретацию. Сопоставим десятичной дроби $0.a_1a_2...$ последовательность вложенных отрезков по следующему правилу:
  Разделим отрезок $[0;1]$ на 10 равных частей и выберем из получившихся 10 отрезков (a_1+1)-ый по счету. Делаем то же самое и выбираем (a_2+1)-ый по счету и т.д. Получаем последовательность вложенных отрезков, причем длина отрезка на n-ом шаге равна 10^{-n}. По доказанной теореме сущестует единственная общая точка построенной последовательности вложенных оторезков, которая как раз и совпадает с $0.a_1a_2...$

4 Билет

- Точные верхние и нижние грани. Пусть A - непустое подмножество вещественных чисел. Число b называется верхней гранью множества A, если $a \leq b$ верно для каждого числа $a \in A$. Если есть хоть одна грань, то множество называют ограниченным сверху. Наименьшая из верхних граней множества A называется точной верхней гранью множества A и обозначается $sup(A)$ (супремум).
  Число b называется нижней гранью множества A, если $b \leq a$ верно для каждого числа $a \in A$. Ели есть хотя бы одна нижняя грань, то множество называется ограниченным снизу. Наибольшая из нижних граней множества A называется точной нижней гранью множества A и обозначается $inf(A)$ (инфинум)
  Ограниченное и сверху и снизу множество называется ограниченным.

- Теорема Вейерштрассе о пределе монотонной ограниченной последовательности.

Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает ($a_n \leq a_{n+1}$) и ограничена сверху. Тогда эта последовательность сходится к своему супремуму.
Анологично, пусть поседовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает ($a_{n+1} \leq a_n$) и ограничена снизу. Тогда эта последовательность сходится к своему инфинуму.
Доказательство: Пусть $M = sup\{a_n : n \in N\} = sup(a_n)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n \in N$, для которого $M - \varepsilon < a_n, n \in N$ иначе $M - \varepsilon$ - верхняя грань, чего не может быть. В силу того, что последовательность неубывающая, при каждой $n > N$ выполнено $M - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq M \leq M + \varepsilon$
Тем самым, по определению $M = \lim\ a_n$
Случай с невозрастающей последовательностью рассматривается аналогично.

- Пример рекуррентной формулы для вычисления $\sqrt{2}$
  Пусть $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}), a_1 = 2$. Заметим, что $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n) + \frac{2}{a_n}) \geq \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
  Поэтому $a_n \geq \sqrt{2}$. Кроме того, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) \leq \frac{1}{2}(a_n + \frac{a_n}{a_n}) = a_n$. По доказанной Теореме у последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует предел a. Т. к. $a_n \geq 0$, то и $a > 0$.
  Тогда по арифметике предела получаем $a = \frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})$, откуда $a = \sqrt{2}$.