Коллоквиум по мат. анализу №1

28 октября 2020 г.

1 Билет

- Рациональные числа - числа вида $\frac{p}{q}$, где q - натуральное число, а p - целое. Считается, что две записи $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ задают одно и то же рациональное число, если $p_1q_2 = p_2q_1$. Обратим внимание на то, что рациональных чисел не достаточно для естественных потребностей математики.

- Вещественные числа - множество всех бесконечно десятичных дробей вида $\pm a_0a_1a_2...$, где $a_0 \in N \vee 0, a_j \in 0...9$ (Записи, в которых с какого-то момента стоят только 9-ки запрещены);
Число $\pm 0,000...$ называется нулём и совпадает с числом 0;
Нунелевое число: - положительное, если в его записи стоит знак '$+$'; - отрицательное, если в его записи стоят знак '-';
В вещественные числа вложены рациональные естественным образом. У вещественных чисел также определены операции сложения и умножения для которых справедливы все их естественные свойства.
Отношение порядка у вещественных чисел задано лексикографическим порядком. $(a_0a_1a_2... \leq b_0b_1b_2... \exists k : a_0 = b_0, ...a_{k-1} = b_{k-1}, a_k \leq b_k)$, который естественным обращом переносится на отрицательные.
Для вещественных чисел определён модуль числа a, т.е. такое вещественное число, что $|a| = a$, если $a \geq 0$ и $|a| = -a$, если $a < 0$. Также, для модуля выполняется неравенство треугольника $|a+b| \leq |a|+|b|$. Из неравенства треугольника следует, что $||a|-|b|| \leq |a+b|$. Самое важное свойство - выполняется принцип полноты;

- Десятичные дроби. Рациональное число может быть представлено в виде конечной или периодической десятичной дроби ($\frac{1}{10} = 0.1; \frac{1}{6} =$

0.1(6); $\frac{1}{7} = 0.(142857)$. Можно не рассматривать десятичные записи с периодом 9, т.к. $0.(9) = 1$ (Если $0.(9) = x$, то $10x = 9 + x$ - истина, октуда $x = 1$.

- Принцип полноты. Принцип полноты выполняется, если для произвольных непустых A левее B найдется разделяющий их элемент.
  Принцип полноты не выполняется для рациоональных чисел.
  Принцип полноты выполняется на множестве вещественных чисел (теорема).
  Доказательство:
  Пусть A и B - непустые множества. A левее B. Если A состоит только из неположительных чисел, а B только из неотрицательных, то нуль разделяем на A и B. Пусть в A имеется положительный элемент, тогда B состоит только из положительных чисел (обратный случай аналогичен). Построим число $c = c_0c_1c_2...$, разделяющее A и B.
  Рассмотрим множество натуральных чисел, с которых начинаются элементы множества B. Пусть b_0 - наименьшее

2 Билет

- Предел последовательности
  Если каждому числу $n \in N$ поставлено в соответствие некоторое число a_n, то говорим, что задана числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
  Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу a, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N_\varepsilon \in N$, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при каждом $n > N_\varepsilon$.
  $\forall \varepsilon > 0$