Разумов Т.Е., Швечков И.В.

Ответы на вопросы к программе

Решение нелинейного уравнения

3. Корень 0.7 не был найден на этапе локализации из-за того, что в программе считалось, что $f(x) = 0$, если $|f(x)| < \varepsilon$, где ε – константа для сравнения с нулем. Так как у нас раньше $\varepsilon = 1e - 16$, а $|f(0.7)|$ имело порядок $\varepsilon = 1e - 15$, программа не могла найти этот корень на этапе локализации. Взяв $\varepsilon = 1e - 14$ с шагом $h = 0.01$ все корни находятся на этапе локализации.

   С шагом $h = 0.04$ все корни находились за одинаковое колличесво итераций так как в качестве критерия останова проверялась длинна отрезка. Если модифицировать этот критерий, как описывалось в п. 1. получим следующее число итераций.

Отрезок локализации корня	Метод бисекции
$[0.08, 0.12]$	1
$[0.2, 0.24]$	1
$[0.52, 0.56]$	2
$[0.68, 0.72]$	1
$[0.72, 0.76]$	2

   Таблица 5

   (были найдены все корни)
4. При увеличении точности производной ($\varepsilon < 1e - 15$) происходит увеличения числа итераций, или же метод вовсе расходится. Это происходит из-за того что, по определению, первая производная гладкой фуккции $f(x)$ в точке x равна
   $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
   При вычислении первой производной функции $f(x)$ на компьютере мы заменяем бесконечно малое h на малое, но конечное значение h:
   $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h),$$
   Но при вычислении функции $f(x)$ на компьютере, мы имеем дело с машинным представлением
   $$f_*(x) = f(x)(1 + \varepsilon(x)),$$
   где $\varepsilon(x)$ – относительная погрешность вычисления $f(x)$. Пусть $\varepsilon(x) < \varepsilon < 1$. Величина ε связана с конечным числом значащих цифр при представлении $f(x)$ в памяти компьютера. Тогда для функции $f_*(x)$ получаем:
   $$f'_*(x) = f'(x) + O(f''(x)h) + O\Big(\frac{\varepsilon f(x)}{h}\Big),$$
   Откуда видно, что при $h \to 0$ второе слагаемое стремится к бесконечности. Причем погрешность минимальна при $h \approx \sqrt{4\left|\frac{\varepsilon f(x)}{f''(x)}\right|}$.

Решение нелинейного уравнения

3. Для тестового примера 4 было взято начальное приближение $X_0 = (-5, 10)^T$.

Точность вычисления производной	Число итераций
$\varepsilon = 10^{-14}$	8
$\varepsilon = 10^{-15}$	12
$\varepsilon = 10^{-16}$	разошлось
Аналитическое вычисление производной	7

Таблица 2

Для тестового примера 5 было взято начальное приближение $(-3, 9)$

Точность вычисления производной	Число итераций
$\varepsilon = 10^{-13}$	9
$\varepsilon = 10^{-14}$	9
$\varepsilon = 10^{-15}$	разошлось
Аналитическое вычисление производной	8

Таблица 3

В данном случае при $\varepsilon \to 0$, аналогично скалярноме случаю, происходит увеличение числа итераций или метод не сходится .