Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Прикладная математика»

Лабораторная работа №1

по дисциплине «Методы вычислений»

Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Выполнили студенты группы ФН2-51 *Разумов Т.Е.*
Швечков И.В.

Москва — 2017

Контрольные вопросы

1. Каковы условия применимости метода Гаусса без выбора и с выбором ведущего элемента?
2. Докажите, что если $\det A \neq 0$, то при выборе главного элемента в столбце среди элементов, лежащих не выше главной диагонали, всегда найдется хотя бы один элемент, отличный от нуля.
3. В методе Гаусса с полным выбором ведущего элемента приходится не только переставлять уравнения, но и менять нумерацию неизвестных. Предложите алгоритм, позволяющий восстановить первоначальный порядок неизвестных.
4. Оцените количество арифметических операций, требуемых для QR- разложения произвольной матрицы А размером $n \times n$.
5. Что такое число обусловленности и что оно характеризует? Имеется ли связь между обусловленностью и величиной определителя матрицы? Как влияет выбор нормы матрицы на оценку числа обусловленности?
6. Как упрощается оценка числа обусловленности, если матрица является:
   а) диагональной;
   б) симметричной;
   в) ортогональной;
   г) положительно определенной;
   д) треугольной?

7*. Применимо ли понятие числа обусловленности к вырожденным матрицам?

8*. В каких случаях целесообразно использовать метод Гаусса, а в каких - методы, основанные на факторизации матрицы?

9*. Как можно объединить в одну процедуру прямой и обратный ход метода Гаусса? В чем достоинства и недостатки такого подхода?

10*. Объясните, почему, говоря о векторах, норму $\|\cdot\|_1$ часто называют октаэдрической, норму $\|\cdot\|_2$ — шаровой, а норму $\|\cdot\|_\infty$ — кубической.

Ответы на контрольные вопросы

1. Без выбора ведущего элемента метод Гаусса применим тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы ненулевые, что равносильно требованию $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$ для всех значений $i = 1, 2, \ldots, n$. Но из условий невырожденности матрицы $A\,(\det A \neq 0)$ не следует, что в ходе приведения матрицы А к треугольному виду на диагонали не возникнет элементов, равных нулю или малых по абсолютной величине (поскольку это приводит к дополнительным ошибкам округления в вычислениях). В таких случаях метод Гаусса неприменим, поэтому на практике обычно используется вариант алгоритма Гаусса с частичным либо полным выбором главного элемента.
2. Если $\det A \neq 0$, то после приведения матрицы A к верхнетреугольному виду, мы можем посчитать определитель, как произведение элементов, стоящих на главной диагонали, а т.к. $\det A \neq 0$, то на главной диагонали нет 0, а следовательно в каждом столбце был найден главный элемент отличный от 0.
3. В методе Гаусса с полным выбором ведущего, если размерность матрицы $n \times n$, можно создать вектор $v \in \mathbb{R}^n : v_i = i,\ i = 1, \ldots, n$ и при каждой перестановке i-го и j-го столбца переставлятьi-й и j-й элементы вектора v. Затем, после нахождения столбца неизвестных, произвести совместную сортировку вектора v и столбца неизвестных.
4. Для того, чтобы перемножить матрицу T_{ij} на матрицу A на k-ом шаге цикла, то есть, когда мы выбираем какой элемент под элементом на главной диагонали занулить, нам требуется $4(n-k)$ опираций умножения, $2(n-k)$ опираций сложения, $2(n-k)$ опираций деления и $2(n-k)$ опираций выделения корня. В этом цикле, когда мы посчитали коэффициенты c и s, мы создаем еще один цикл, где перемножаем матрицы T_{ij} и A, а точнее умножаем 4 коэффициента на столбцы матрицы A, так как остальные коэффициенты матрицы T единичные на главной диагонали и равны нулю вне главной диагонали, таких перемножений $4(n-k)$, так как первые k элементов каждой строки матрицы A на k-ом шаге равны 0, и где складываем $2(n-1)$ раз. Просуммировав по k записанные выкладки, мы получим, что число мультипликативных опираций равно $\frac{4n^3}{3} + O(n^2)$, а число аддитивных опираций равно $\frac{2n^3}{3} + O(n^2)$.
5. Число cond $A = \| A \| \| A^{-1} \|$ называется числом обусловленности матрицы A (и $\| A^{-1} \|$). Матрицы с большим числом обусловленности называются плохо обусловленными, и при решении СЛАУ с такими матрицами идет резкое накопление погрешностей. Чем меньше определитель A, тем больше определитель A^{-1}, больше $M_1 = \| A^{-1} \|$ и больше влияние ошибок правой части на ошибки решения. Обычно именно малость определителя исходной матрицы A (и большое значение определителя обратной матрицы) считают признаком плохой устойчивости решаемой системы. Норма матрицы несильно влияет на оценку числа обусловленности потому что все нормы между собой эквивалентны.
6. Для оценки числа обусловленности необходимо вносить возмущения в столбец правой части и находить норму разности векторов точного решения и решения с возмущением, но если матрицы обладают некоторыми свойствами, то оценка числа обусловленности упрощается:
   a) Сильно упрощается, т.к. Δx_i будет равно возмущению, произведенному

над i-ым элементом столбца правой части, деленному на диагональный элемент, что сильно сократит вычисления;

б) ;

в) Упрощает, т.к., используя метод QR-разложения для поиска столбца неизвестных, нам необходимо лишь транспонировать матрицу и домножить на столбец правой части, так как диагональной матрицей будет являться единичная матрица, то решением системы будет результат перемножения матрицы на столбец;

г) Упрощается, за счет того, что по критерию Сильвестра все миноры положительно определенной матрицы больше нуля и это озночает, что нет необходимости прибегать к выбору ведущего элемента;

д) Упрощается, за счет того, что при поиске столбца неизвестных, мы не применяем прямой ход Гаусса (QR-разложение), а применяем лишь обратный ход.

7*. Понятие числа обусловленности не применимо к вырожденным матрицам, так как по определению, число обусловленности равно произведению нормы обратной матрицы на норму прямой, а у вырожденной матрицы не существует обратной.

8*. Если нам необходимо найти столбец неизвестных для определенной системы и с неизменной правой частью, то целесообразней использовать метод Гаусса, если же необходимо найти несколько столбцов неизвестных для определенной системы и с разными правыми частями, то целесообразней использовать методы, основанные на факторизации матрицы.

9*. Можно объединить в одну процедуру прямой и обратный ход метода Гаусса, если после того, как обнулили все элементы под диагональным элементом строки k, обнулить все элементы над диагональным элементом строки k, а затем разделить всю строку k на диагональный элемент. Столбец правой части, получившийся после прохождения всех циклов, будет искомым столбцом неизвестных. Недостатки заключаются в том, что в дальнейшем, например в алгоритме QR-разложения, невозможно будет использовать обратный ход Гаусса. А достоинства заключаются в том, что мы получаем столбец неизвестных, пройдя лишь прямой цикл.

10*. Норму $\|\cdot\|_1$ часто называют октаэдрической, т.к. множество $\|\cdot\|_1 \leqslant 1$ представляет собой октаэдр. Норму $\|\cdot\|_2$ — шаровой, т.к. множество $\|\cdot\|_2 \leqslant 1$ представляет собой шар радиусом 1 в декартовых координатах. Норму $\|\cdot\|_\infty$ — кубической, т.к. множество $\|\cdot\|_\infty \leqslant 1$ представляет собой куб со стороной длины 2.