Разумов Т.Е., Швечков И.В.

При увеличении точности производной ($\varepsilon < 1e-15$) происходит увеличения числа итераций, или же метод вовсе расходится. Это происходит из-за того что, по определению, первая производная гладкой фуккции $f(x)$ в точке x равна

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

При вычислении первой производной функции $f(x)$ на компьютере мы заменяем бесконечно малое h на малое, но конечное значение h:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h),$$

Но при вычислении функции $f(x)$ на компьютере, мы имеем дело с машинным представлением

$$f_*(x) = f(x)(1+\varepsilon(x)),$$

где $\varepsilon(x)$ – относительная погрешность вычисления $f(x)$. Пусть $\varepsilon(x) < \varepsilon < 1$. Величина ε связана с конечным числом значащих цифр при представлении $f(x)$ в памяти компьютера. Тогда для функции $f_*(x)$ получаем:

$$f'_*(x) = f'(x) + O(f''(x)h) + O\Big(\frac{\varepsilon f(x)}{h}\Big),$$

Откуда видно, что при $h \to 0$ второе слагаемое стремится к бесконечности. Причем погрешность минимальна при $h \approx \sqrt{4\left|\frac{\varepsilon f(x)}{f''(x)}\right|}$.

Оценим скорость сходимости метода Ньютона с использованием численной производной. Пусть x^* – корень уравнения $f(x) = 0$ на отрезке [a,b] и на этом же отрезке $|f'(x)| \geqslant m > 0$, $|f''(x)| \leqslant M$.

$$x^{k+1} = x^k - \frac{hf(x^k)}{f(x^k+h)-f(x^k)} = x^k - h\frac{f(x^k)-f(x^*)}{f(x^k+h)-f(x^k)},$$

$$f(x^*) = f(x^k) + f'(x^k)(x^*-x^k) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(x^*-x^k)^2,$$

$$f(x^k+h) = f(x^k) + hf'(x^k) + \frac{h^2}{2}f''(\xi_2),$$

$$x^{k+1} = x^k + (x^*-x^k)\frac{f'(x^k)+\frac{h}{2}f''(\xi_2)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x^*-x^k)-\frac{h}{2}f''(\xi_2)}{f'(x^k)+\frac{h}{2}f''(\xi_2)},$$

$$x^{k+1} = x^k + (x^*-x^k)\left(1+\frac{f''(\xi_1)(x^*-x^k)-hf''(\xi_2)}{2f'(x^k)+hf''(\xi_2)}\right),$$

$$x^{k+1} - x^* = \frac{f''(\xi_1)(x^*-x^k)^2 - hf''(\xi_2)(x^*-x^k)}{2f'(x^k)+hf''(\xi_2)},$$

$$|x^{k+1}-x^*| \leqslant \frac{(x^*-x^k)^2 + h|x^*-x^k|}{2\frac{m}{M}+h}.$$

Из приведенной оценки видно, что скорость сходимости метода Ньютона с использованием численной производной при $h \to 0$ имеет квадратичную скорость сходимости. Этот факт подтверждает то, что метод Ньютона с использованием численной и аналитической производной для всех тестовых примеров, предложенных в методичке, при оптимальном h сходится за одинаковое колличество итераций. Однако при слишком малом h ошибка вычислений порядка $O\left(\frac{\varepsilon f(x)}{h}\right)$ становится велика и число итераций увеличивается или же метод расходится.