

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Прикладная математика»



Лабораторная работа №2

по дисциплине «Методы вычислений»

Численное решение краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности

Выполнили студенты группы ФН2-61

*Разумов Т.Е.
Швечков И.В.*

Контрольные вопросы

1. Дайте определения: корректно поставленная задача; аппроксимация; порядок аппроксимации; однородная схема; консервативная схема; монотонная схема, устойчивая разностная схема (условно/абсолютно), сходимость.
2. Какие из рассмотренных схем являются абсолютно устойчивыми? Какая из рассмотренных схем позволяет вести расчеты с более крупным шагом по времени?
3. Будет ли смешанная схема иметь второй порядок аппроксимации при
$$a_i = \frac{2K(x_i)K(x_{i-1})}{K(x_i) + K(x_{i-1})} ?$$
4. Какие методы (способы) построения разностной аппроксимации граничных условий с порядком точности $O(\tau + h^2)$, $O(\tau^2 + h^2)$ и $O(\tau^2 + h)$ Вы знаете?
5. При каких h , τ и σ смешанная схема монотонна? Проиллюстрируйте результатами расчетов свойства монотонных и немонотонных разностных схем.
6. Какие ограничения на h , τ и σ накладывают условия устойчивости прогонки?
7. В случае $K = K(u)$ чему равно количество внутренних итераций, если итерационный процесс вести до сходимости, а не обрывать после нескольких первых итераций?
8. Для случая $K = K(u)$ предложите способы организации внутреннего итерационного процесса или алгоритмы, заменяющие его.

Ответы на контрольные вопросы

1) Задача называется корректно поставленной, если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Если же не выполнено хотя бы одно из этих условий, то задача называется некорректно поставленной.

Разностная схема $A_h y = \varphi$ аппроксимирует исходную задачу $Au = f$. Запишем задачу для z , воспользовавшись соотношением $y = z + u_h$. Тогда

$$A_h z = \varphi + A_h z - A_h(z + u_h) = (\varphi - f_h) + (f_h + A_h z - A_h(z + u_h)) = \psi_h,$$

где

$$\psi_h = \psi_h^{(1)} + \psi_h^{(2)}, \quad \psi_h^{(1)} = (Au)_h + A_h z - A_h(z + u_h), \quad \psi_h^{(2)} = \varphi - f_h.$$

Если оператор A_h линейный, то: $\psi_h^{(1)} = (Au)_h - A_h u_h$.

Сеточная функция ψ_h называется погрешностью аппроксимации разностной задачи $A_h y = \varphi$ на решении исходной задачи $Au = f$. Сеточные функции $\psi_h^{(1)}$ и $\psi_h^{(2)}$ называются погрешностью аппроксимации оператора A разностным оператором A_h и погрешностью аппроксимации правой части соответственно.

Далеко не всегда есть возможность проверять малость погрешности аппроксимации на точном решении задачи. Во избежание этой трудности вводят следующее понятие:

Назовем погрешностью аппроксимации разностной задачи $A_h y = \varphi$ сеточную функцию ψ_h , определяемую следующим образом:

$$\psi_h = \psi_h^{(1)} + \psi_h^{(2)}, \quad \psi_h^{(1)} = (Av)_h - A_h v_h, \quad \psi_h^{(2)} = \varphi - f_h.$$

Данное определение не предполагает линейность разностного оператора, используемая в нем функция – произвольная функция из области определения оператора A .

Пусть G – связную область, а Γ – ее граница. Рассмотрим точную задачу

$$Au = f \text{ в } G, \quad Ru = \mu \text{ на } \Gamma.$$

и „заменяющую“ ее разностную схему

$$A_h y = \varphi \text{ в } G_h, \quad R_h y = \nu \text{ на } \Gamma_h.$$

В этом случае погрешности аппроксимации разностной задачи (для общего случая произвольной функции v) в G_h и на Γ_h соответственно

$$\psi_h = (\varphi - f_h) + ((Av)_h - A_h v_h), \quad \chi_h = (\nu - \mu_h) + ((Rv)_h - R_h v_h)$$

Разностная схема аппроксимирует исходную задачу, если $\|\psi_h\|_\psi \rightarrow 0, \|\chi_h\|_\chi \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$; аппроксимация имеет p -й порядок ($p > 0$), если $\|\psi_h\|_\psi = O(h^p), \|\chi_h\|_\chi = O(h^p)$ при $h \rightarrow 0$.

Разностные схемы, в которых расчет ведется по одним формулам и на одном шаблоне во всех узлах сетки без какого-то специального выделения имеющих особенностей, называются однородными.

Разностные схемы называют консервативными, если их решение удовлетворяет дискретному аналогу закона сохранения (баланса), присущему исходной задаче. В противном случае схему называют неконсервативной, или дисбалансной.

Схемы, решение которых удовлетворяет принципу максимума или сохраняет пространственную монотонность (в одномерном случае) при условии, что соответствующие свойства справедливы для исходных задач, называются монотонными.

Разностная схема является устойчивой, если решение уравнений разностной схемы непрерывно зависит от входных данных и эта зависимость равномерна по h , т.е.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) : \|\varphi^I - \varphi^{II}\|_\varphi < \delta, \|\mathbf{v}^I - \mathbf{v}^{II}\|_v < \delta \Rightarrow \|y^I - y^{II}\|_Y < \epsilon.$$

Если схема линейна, то это определение переходит в требование существования таких постоянных M_1, M_2 , не зависящих от шага сетки, что справедливо неравенственно

$$\|y^I - y^{II}\|_Y \leq M_1 \|\varphi^I - \varphi^{II}\|_\varphi + M_2 \|\mathbf{v}^I - \mathbf{v}^{II}\|_v,$$

которое дает равномерную по h ограниченность линейных операторов, определяющих y , по φ, \mathbf{v} .

В случае нескольких независимых переменных устойчивость называют безусловной (или абсолютной), если устойчивость имеет место для любого соотношения шагов, и условной в противном случае.

Разностное решение y сходится к решению u точной задачи, если $\|y - p_h u\|_Y \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Говорят, что имеет место сходимость с p -м порядком, если $\|y - p_h u\|_Y = O(h^p)$ при $h \rightarrow 0$.

На тестовом примере $\sin(x)e^t$ продемонстрируем изменение погрешностей с уменьшением шагов по времени и по пространству $t_0 = 0, t_k = 1, \tau = 0.005, L = 1$ и $h = 0.01$.

При $\sigma = 1$:

Порядок точности методов				
	z_1 при h и τ	z_2 при $h/\sqrt{2}$ и $\tau/2$	z_3 при $h/2$ и $\tau/4$	z_4 при $h/2\sqrt{2}$ и $\tau/8$
$\sigma = 1$	0.000115775	$5.76213e - 005$	$2.90534e - 005$	$1.44327e - 005$

Таблица 1

Для большей наглядности результатов продемонстрируем таблицу отношения погрешностей

	z_1/z_2	z_2/z_3	z_3/z_4
$\sigma = 1$	2.00924	1.98329	2.01303

Таблица 2

При $\sigma = \frac{1}{2}$:

Порядок точности методов				
	z_1 при h и τ	z_2 при $h/2$ и $\tau/2$	z_3 при $h/4$ и $\tau/4$	z_4 при $h/8$ и $\tau/8$
$\sigma = 1/2$	$2.89942e - 007$	$7.24848e - 008$	$1.81211e - 008$	$4.52932e - 009$

Таблица 3

Для большей наглядности результатов продемонстрируем таблицу отношения погрешностей

	z_1/z_2	z_2/z_3	z_3/z_4
$\sigma = 1/2$	4.00001	4.00002	4.00084

Таблица 4

При $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12k\tau}$:

Порядок точности методов				
	z_1 при h и τ	z_2 при $h/\sqrt{2}$ и $\tau/2$	z_3 при $h/2$ и $\tau/4$	z_4 при $h/2\sqrt{2}$ и $\tau/8$
$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12k\tau}$	$9.66461e - 008$	$2.39897e - 008$	$6.0403e - 009$	$1.49953e - 009$

Таблица 5

Для большей наглядности результатов продемонстрируем таблицу отношения погрешностей

	z_1/z_2	z_2/z_3	z_3/z_4
$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12k\tau}$	4.02865	3.97161	4.02813

Таблица 6

Как мы можем видеть, численные результаты достаточно хорошо согласуются с аналитическими расчетами.

2) В данной лабораторной работе все рассматриваемые смешанные схемы являются устойчивыми лишь с ограничением на параметр σ :

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{c\rho h^2}{2\widehat{K}\tau}, \quad \text{где } \widehat{K} = \max_{0 \leq x \leq L} K(x).$$

Отсюда следует, что смешанные схемы при $\sigma \geq 1/2$ устойчивы абсолютно, а при $\sigma < 1/2$ устойчивы условно, причем устойчивость имеет место, когда τ/h^2 достаточно мало. Выпишем порядок аппроксимации разностной схемы при различных значениях параметра $\sigma \in [0, 1]$:

- 1) При $\sigma = 1/2$: $\|y - u_h\| = O(\tau^2 + h^2)$;
- 2) При $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12k\tau}$: $\|y - u_h\| = O(\tau^2 + h^4)$;
- 3) При остальных σ : $\|y - u_h\| = O(\tau + h^2)$;

Следовательно выбор веса 1) или 2) позволяет вести расчет используя наибольший шаг интегрирования по времени.

3) Будет. Для того чтобы показать это воспользуемся формулой, приведенной в методических указаниях: $a_i = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{K(x)} \right)^{-1}$. Для того чтобы взять этот интеграл используем формулу трапеций, которая, как известно, имеет третий порядок точности на локальном интервале. Тогда выражение для a_i примет вид

$$a_i = \left(\frac{1}{h} \left(\frac{1}{K(x_i)} + \frac{1}{K(x_{i-1})} \right) \frac{h}{2} \right)^{-1} = \frac{2K(x_i)K(x_{i-1})}{K(x_i) + K(x_{i-1})}. \quad (1)$$

Теперь проверим достаточное условие второго порядка аппроксимации по пространству:

$$a_i = K(x_i) - K'(x_i) \frac{h}{2} + O(h^2). \quad (2)$$

Для этого в выражении (1) разложим $K(x_{i-1})$ по формуле Тейлора в точке x_i : $K(x_{i-1}) = K(x_i) - hK'(x_i) + O(h^2)$. Тогда

$$a_i = \frac{2K^2(x_i) - 2hK'(x_i)K(x_i) + O(h^2)}{2K(x_i) - hK'(x_i) + O(h^2)}. \quad (3)$$

Приравняв выражения (2) и (3) друг к другу получим

$$K(x_i) - \frac{1}{2}hK'(x_i) + O(h^2) = \frac{2K^2(x_i) - 2hK'(x_i)K(x_i) + O(h^2)}{2K(x_i) - hK'(x_i) + O(h^2)},$$

$$(2K(x_i) - hK'(x_i) + O(h^2))(K(x_i) - \frac{1}{2}hK'(x_i) + O(h^2)) = 2K^2(x_i) - 2hK'(x_i)K(x_i) + O(h^2),$$

$$2K^2(x_i) - 2hK'(x_i)K(x_i) + O(h^2) = 2K^2(x_i) - hK'(x_i)K(x_i) - hK'(x_i)K(x_i) +$$

$$+ \frac{1}{2}h^2K'(x_i)^2 + O(h^2),$$

$$O(h^2) = O(h^2).$$

Откуда видно, что данное выражение для a_i имеет второй порядок аппроксимации по пространству.

4) Пусть, при задании на краях теплового потока граничные условия имеют вид

$$u_x(t, 0) = \mu_1(t), \quad u_x(t, L) = \mu_2(t).$$

Если аппроксимировать граничные условия непосредственно, т.е. заменяя дифференциальные производные разностными аналогами, то это вносит дополнительную ошибку в разностное решение из-за потери точности на границах.

Можно проинтегрировать исходное уравнение по ячейке, примыкающей к границе с шагом $h/2$, т.е. аппроксимировать нерегулярные точки, используя интегро-интерполяционный метод, как предложено в методических указаниях. Таким образом, порядок аппроксимации удастся повысить.

Так же для повышения точности граничных условий рассмотрим метод фиктивных точек. Введем вне отрезка $[0, L]$ две фиктивные точки: $x_{-1} = x_0 - h$, $x_{N+1} = x_N + h$ и запишем в точках $n = 0$ и $n = N$ явную схему

$$\frac{y_0^{j+1} - y_0^j}{\tau} = \frac{k}{h^2}(y_{-1}^j - 2y_0^j + y_1^j), \quad \frac{y_N^{j+1} - y_N^j}{\tau} = \frac{k}{h^2}(y_{N-1}^j - 2y_N^j + y_{N+1}^j). \quad (4)$$

Аппроксимируем левое и правое граничное условие с помощью центральной разности, т.е.

$$\frac{y_1^j - y_{-1}^j}{2h} = \mu_1(t_j), \quad \frac{y_{N+1}^j - y_{N-1}^j}{2h} = \mu_2(t_j). \quad (5)$$

Подставляя выражения (4) в уравнения (5) исключаем неизвестные фиктивные точки y_{N+1} и y_{-1} и получаем следующую аппроксимацию граничных условий

$$\frac{y_1^j - y_0^j}{h} = \mu_1(t_j) + \frac{h}{2k\tau}(y_0^{j+1} - y_0^j), \quad \frac{y_N^j - y_{N-1}^j}{h} = \mu_2(t_j) + \frac{h}{2k\tau}(y_N^{j+1} - y_N^j). \quad (6)$$

Заметим, что схема (6), аппроксимирующая граничные условия, является явной. Помимо метода фиктивных точек есть другой метод уменьшения невязки, он более универсален, но менее нагляден. Разложим $u(t, x_1)$ в окрестности x_0 , тогда

$$u(t, x_1) = u(t, x_0) + hu_x(t, x_0) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(t, x_0) + O(h^3) \quad (7)$$

Так как $u_x(t, x_0) = \mu_1(t)$, а из уравнения теплопроводности $u_{xx}(t, x_0) = \frac{1}{k}u_t(t, x_0)$, то выражение (7) примет вид

$$u(t, x_1) = u(t, x_0) + h\mu_1(t) + \frac{h^2}{2}u_t(t, x_0) + O(h^3) \quad (8)$$

Делая в (8) замену $u_t(t, x_0) \approx \frac{y_0^{j+1} - y_0^j}{\tau}$, получим левое граничное условие (6).

Согласно приведенной выше процедуре, можно добиться повышенной точности аппроксимации граничных условий.

5) В силу того, что условие устойчивости в C получено из условия выполнимости принципа максимума и является достаточным условием устойчивости, то схема с весами $\sigma \geq 1 - \frac{c\rho h^2}{2\widehat{K}\tau}$ является и монотонной. В частности, если начальные и граничные условия неотрицательны, то таким же будет решение на всех временных слоях. Проиллюстрируем это результатами расчетов для уравнения

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T,$$

$$K(x) = \begin{cases} k_1, & 0 \leq x \leq x_1, \\ k_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + k_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & x_1 < x < x_2, \\ k_2, & x_2 \leq x \leq L. \end{cases}$$

с параметрами для варианта № 13: $L = 1$, $c = 2$, $\rho = 0.5$, $u_0 = 0.04$, $k_1 = 0.1$, $k_2 = 1.5$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, граничными и начальными условиями из теста № 1

$$u(x, 0) = u_0 + x(L - x), \quad 0 < x < L,$$

$$u(0, t) = u_0, \quad u(L, t) = u_0, \quad 0 < t \leq T.$$

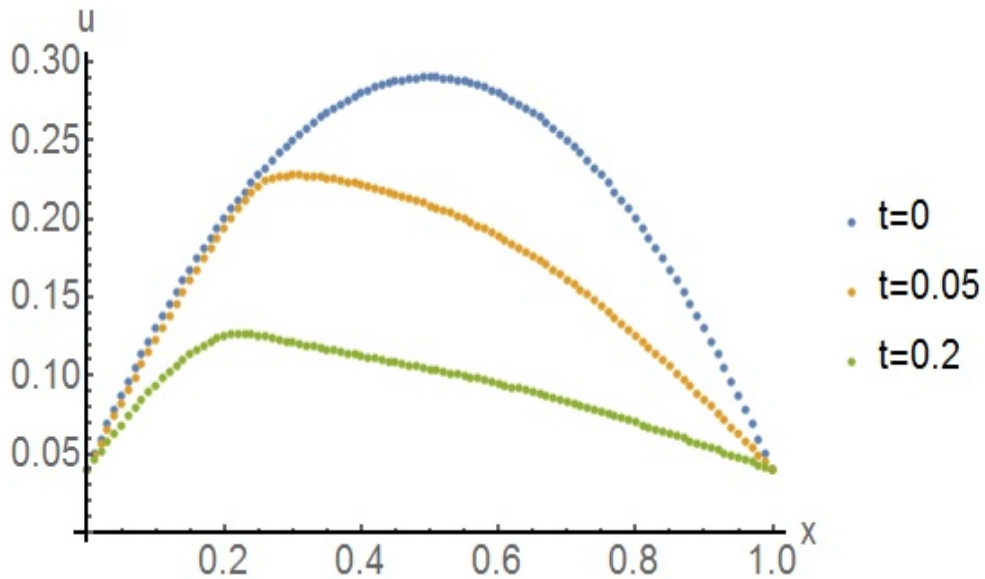


Рис. 1. Монотонный расчет при $\sigma = 1$, $h = 0.01$, $\tau = 0.01$

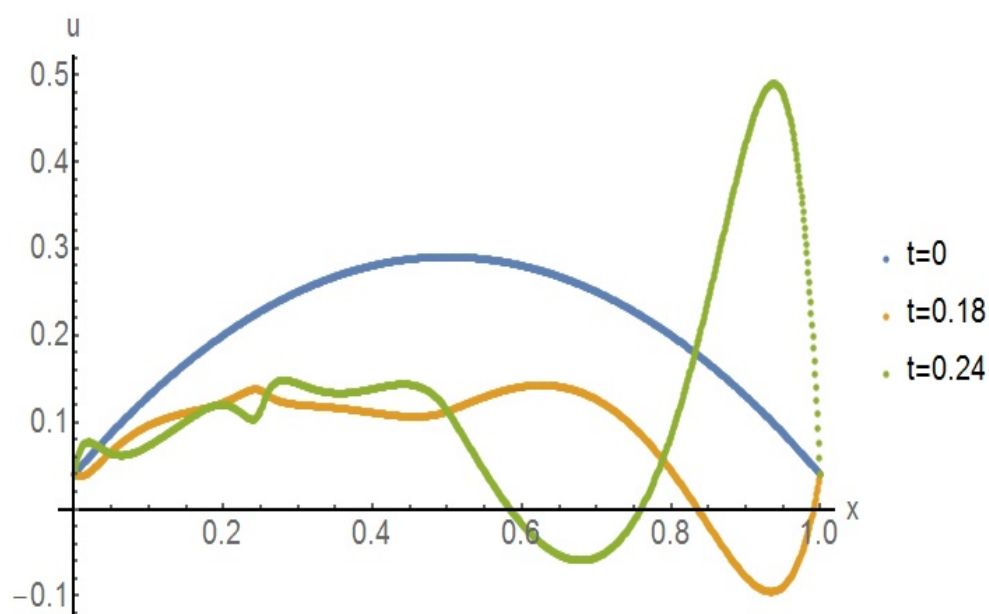


Рис. 2. Немонотонный расчет при $\sigma = 0.2$, $h = 0.01$, $\tau = 0.06$

6) Для того, чтобы ответить на данный вопрос, выпишем прогоночные коэффициенты

$$A_i = \frac{\sigma}{h}a_i, \quad B_i = \frac{\sigma}{h}a_{i+1}, \quad C_i = \frac{\sigma}{h}a_i + \frac{\sigma}{h}a_{i+1} + c\rho\frac{h}{\tau}.$$

Из условий $a_i > 0$, $c > 0$, $\rho > 0$, $\tau > 0$, $h > 0$, $\sigma \geq 0$ следует, что

$$C_i > A_i + B_i > 0,$$

т.е. выполнены условия устойчивости прогонки. Следовательно прогонка устойчива при любых $h > 0$, $\tau > 0$ и $\sigma \geq 0$.

7) Посмотрев на графики, где по оси абсцисс отложено время, а по оси ординат количество итераций, посчитанное при трех различных значениях точности, мы можем определить, что нет постоянной динамики изменения количества итераций. Это количество может быть на одном шаге равно 1, потом 20, а потом снова 1.

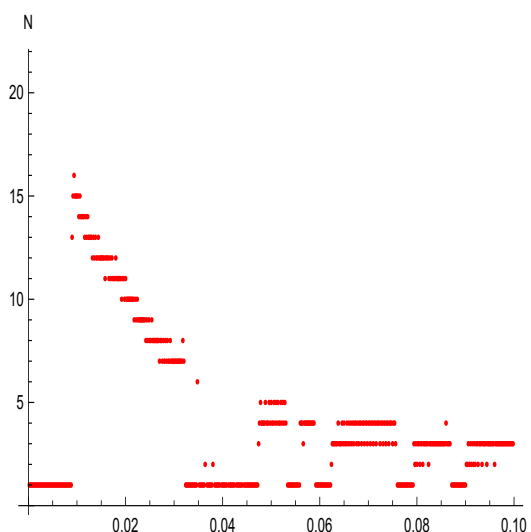


Рис. 3. $\epsilon = 10^{-3}$

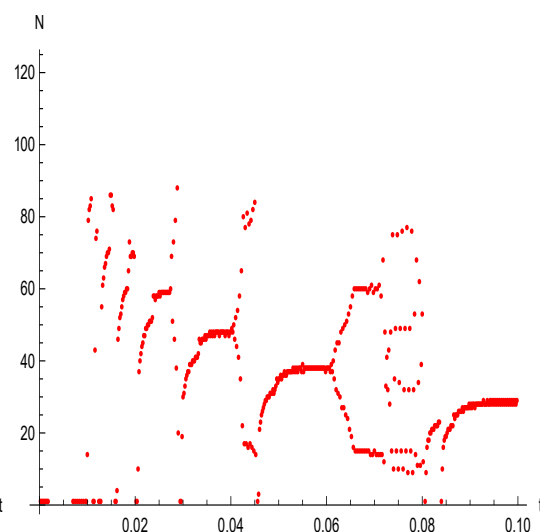
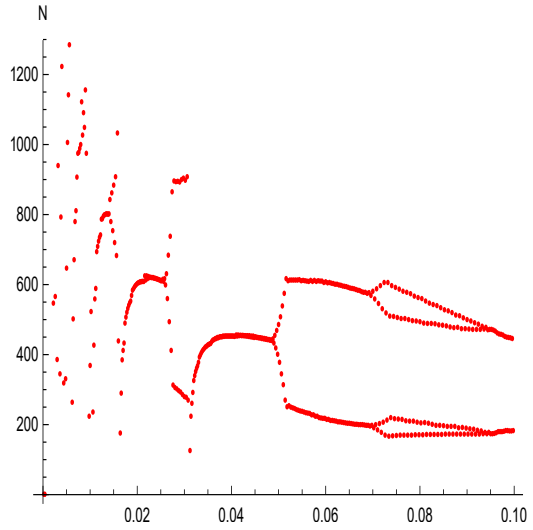


Рис. 4. $\epsilon = 10^{-4}$

Рис. 5. $\varepsilon = 10^{-5}$

8) Можно организовать следующий гибридный метод: на внешних итерациях линеаризовывать систему, используя метод Ньютона, а, так как он сохраняет свойство трехдиагональности матрицы, на внутренних итерациях использовать метод прогонки. Так же можно предложить следующий итерационный процесс

$$\left\{ \begin{array}{l} c\rho \frac{y_i^{(s+1)} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} (a(y_{i+1}^{(s)}) \frac{y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{h} - a(y_i^{(s)}) \frac{y_i^{(s+1)} - y_{i-1}^{(s+1)}}{h}), \\ a_i = 0.5(K(y_i^{j+1}) + K(y_{i-1}^{j+1})), \\ s = 0, \dots, M. \end{array} \right.$$

Исследование качественно-количественных свойств схемы с весами

1. Устойчивость

Для уравнения

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T,$$

$$K(x) = \begin{cases} k_1, & 0 \leq x \leq x_1, \\ k_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + k_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & x_1 < x < x_2, \\ k_2, & x_2 \leq x \leq L. \end{cases}$$

с параметрами для варианта № 13: $L = 1$, $c = 2$, $\rho = 0.5$, $u_0 = 0.04$, $k_1 = 0.1$, $k_2 = 1.5$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $Q = 10$, $t_0 = 0.5$, граничными и начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0, \quad 0 < x < L,$$

$$u(0, t) = u_0, \quad K(L) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(L, t)} = P(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$P(t) = \begin{cases} Q, & 0 < x < t_0, \\ 0, & t \geq t_0, t = 0. \end{cases}$$

покажем, что при $\sigma < 1/2$ схема может быть не устойчивой, а при $\sigma \geq 1/2$ она является устойчивой при любых h и τ .

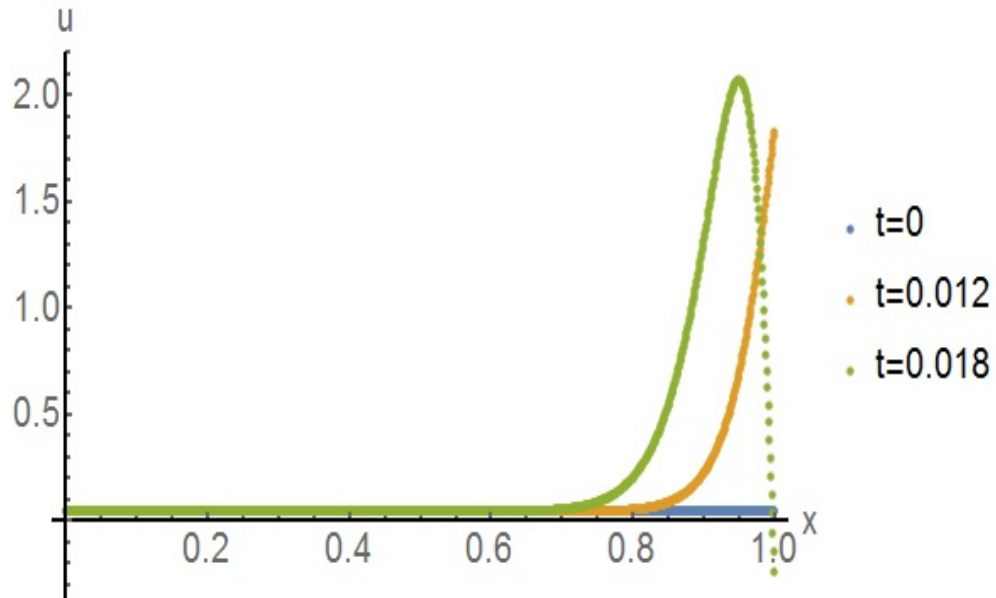


Рис. 6. Неустойчивая схема ($\sigma = 0.1$, $h = 0.001$, $\tau = 0.006$)

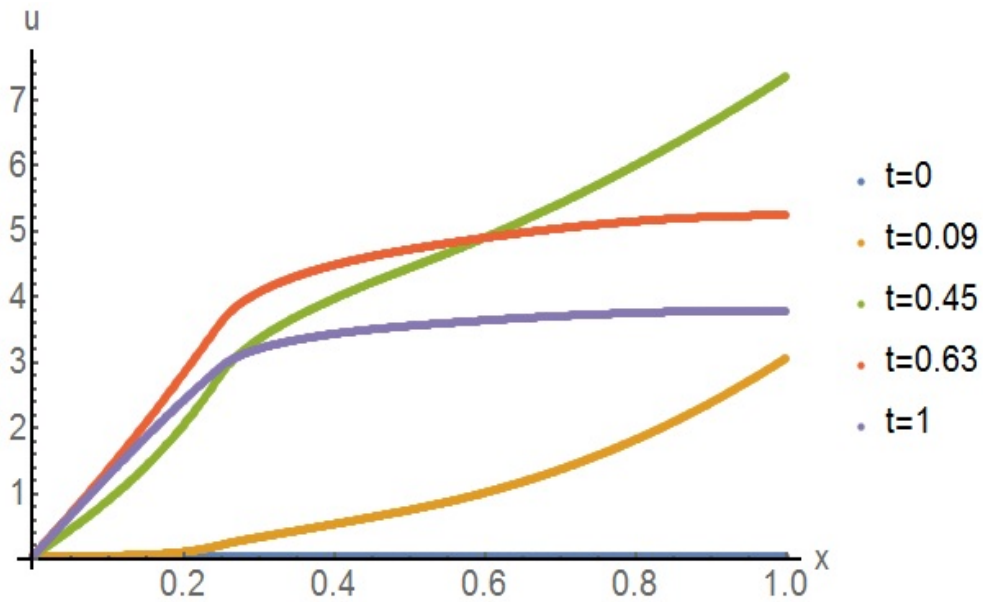


Рис. 7. Устойчивая схема ($\sigma = 0.7$, $h = 0.001$, $\tau = 0.006$)

2. Консервативность

Для уравнения

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad K(x) = 1, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T,$$

с параметрами для варианта № 13: $L = 1$, $c = 2$, $\rho = 0.5$, $u_0 = 0.04$, граничными и начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0 + x(L - x), \quad 0 < x < L,$$

$$-K(0) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,t)} = 0, \quad K(L) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(L,t)} = 0, \quad 0 < t \leq T,$$

покажем, что все схемы в данной лабораторной работе консервативны.

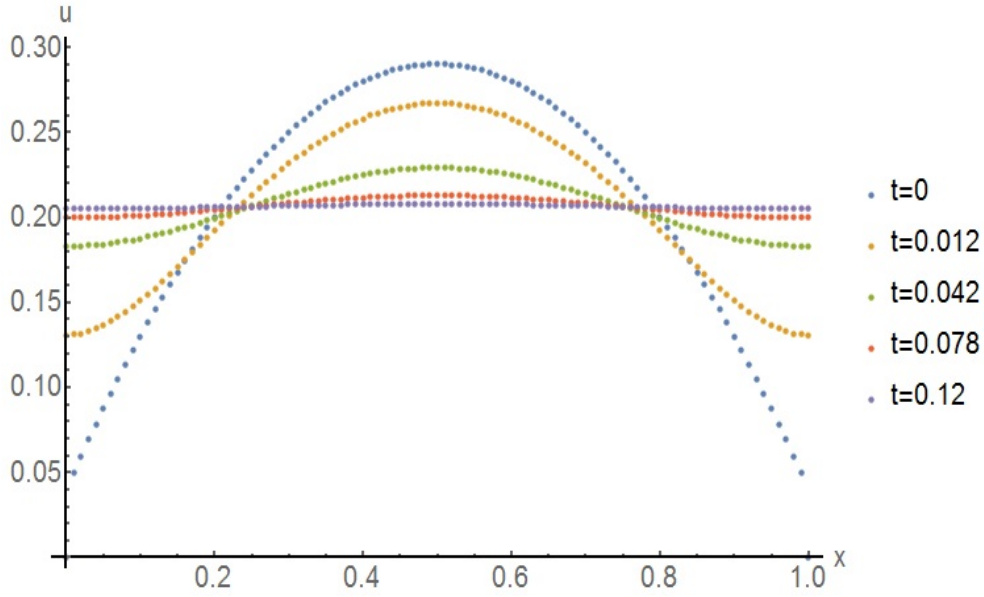


Рис. 8. Консервативная монотонная схема ($\sigma = 1$, $h = 0.01$, $\tau = 0.006$)

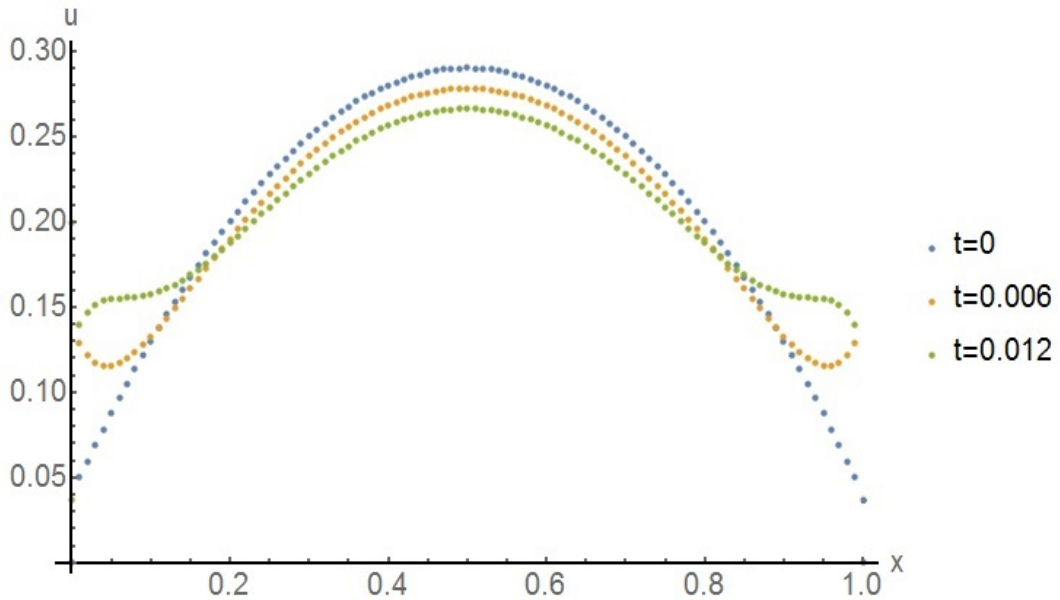


Рис. 9. Консервативная немонотонная схема ($\sigma = 0.4$, $h = 0.01$, $\tau = 0.006$)

```

I_0 = 0.20665; I_1 = 0.20665; I_2 = 0.20665; I_3 = 0.20665; I_4 = 0.20665; I_5 =
0.20665; I_6 = 0.20665; I_7 = 0.20665; I_8 = 0.20665; I_9 = 0.20665; I_10 = 0.2
0665; I_11 = 0.20665; I_12 = 0.20665; I_13 = 0.20665; I_14 = 0.20665; I_15 = 0.2
0665; I_16 = 0.20665; I_17 = 0.20665; I_18 = 0.20665; I_19 = 0.20665; I_20 = 0.2
0665; I_21 = 0.20665; I_22 = 0.20665; I_23 = 0.20665; I_24 = 0.20665; I_25 = 0.2
0665; I_26 = 0.20665; I_27 = 0.20665; I_28 = 0.20665; I_29 = 0.20665; I_30 = 0.2
0665; I_31 = 0.20665; I_32 = 0.20665; I_33 = 0.20665; I_34 = 0.20665; I_35 = 0.2
0665; I_36 = 0.20665; I_37 = 0.20665; I_38 = 0.20665; I_39 = 0.20665; I_40 = 0.2
0665; I_41 = 0.20665; I_42 = 0.20665; I_43 = 0.20665; I_44 = 0.20665; I_45 = 0.2
0665; I_46 = 0.20665; I_47 = 0.20665; I_48 = 0.20665; I_49 = 0.20665; I_50 = 0.2
0665; I_51 = 0.20665; I_52 = 0.20665; I_53 = 0.20665; I_54 = 0.20665; I_55 = 0.2
0665; I_56 = 0.20665; I_57 = 0.20665; I_58 = 0.20665; I_59 = 0.20665; I_60 = 0.2
0665; I_61 = 0.20665; I_62 = 0.20665; I_63 = 0.20665; I_64 = 0.20665; I_65 = 0.2
0665; I_66 = 0.20665; I_67 = 0.20665; I_68 = 0.20665; I_69 = 0.20665; I_70 = 0.2
0665; I_71 = 0.20665; I_72 = 0.20665; I_73 = 0.20665; I_74 = 0.20665; I_75 = 0.2
0665; I_76 = 0.20665; I_77 = 0.20665; I_78 = 0.20665; I_79 = 0.20665; I_80 = 0.2
0665; I_81 = 0.20665; I_82 = 0.20665; I_83 = 0.20665; I_84 = 0.20665; I_85 = 0.2
0665; I_86 = 0.20665; I_87 = 0.20665; I_88 = 0.20665; I_89 = 0.20665; I_90 = 0.2
0665; I_91 = 0.20665; I_92 = 0.20665; I_93 = 0.20665; I_94 = 0.20665; I_95 = 0.2
0665; I_96 = 0.20665; I_97 = 0.20665; I_98 = 0.20665; I_99 = 0.20665; I_100 = 0.
20665; I_101 = 0.20665; I_102 = 0.20665; I_103 = 0.20665; I_104 = 0.20665; I_105
= 0.20665; I_106 = 0.20665; I_107 = 0.20665; I_108 = 0.20665; I_109 = 0.20665;
I_110 = 0.20665; I_111 = 0.20665; I_112 = 0.20665; I_113 = 0.20665; I_114 = 0.20
665; I_115 = 0.20665; I_116 = 0.20665; I_117 = 0.20665; I_118 = 0.20665; I_119 =
0.20665; I_120 = 0.20665; I_121 = 0.20665; I_122 = 0.20665; I_123 = 0.20665; I_
124 = 0.20665; I_125 = 0.20665; I_126 = 0.20665; I_127 = 0.20665; I_128 = 0.2066
5; I_129 = 0.20665; I_130 = 0.20665; I_131 = 0.20665; I_132 = 0.20665; I_133 = 0.
20665; I_134 = 0.20665; I_135 = 0.20665; I_136 = 0.20665; I_137 = 0.20665; I_13
8 = 0.20665; I_139 = 0.20665; I_140 = 0.20665; I_141 = 0.20665; I_142 = 0.20665;
I_143 = 0.20665; I_144 = 0.20665; I_145 = 0.20665; I_146 = 0.20665; I_147 = 0.2
0665; I_148 = 0.20665; I_149 = 0.20665; I_150 = 0.20665; I_151 = 0.20665; I_152
= 0.20665; I_153 = 0.20665; I_154 = 0.20665; I_155 = 0.20665; I_156 = 0.20665; I_
157 = 0.20665; I_158 = 0.20665; I_159 = 0.20665; I_160 = 0.20665; I_161 = 0.206
65; I_162 = 0.20665; I_163 = 0.20665; I_164 = 0.20665; I_165 = 0.20665;

```

Рис. 10. Значения интегралов для первого расчета

```

I_0 = 0.20665; I_1 = 0.20665; I_2 = 0.20665; I_3 = 0.20665; I_4 = 0.20665; I_5 =
0.20665; I_6 = 0.20665; I_7 = 0.20665; I_8 = 0.20665; I_9 = 0.20665; I_10 = 0.2
0665; I_11 = 0.20665; I_12 = 0.20665; I_13 = 0.20665; I_14 = 0.20665; I_15 = 0.2
0665; I_16 = 0.20665; I_17 = 0.20665; I_18 = 0.20665; I_19 = 0.20665; I_20 = 0.2
0665; I_21 = 0.20665; I_22 = 0.20665; I_23 = 0.20665; I_24 = 0.20665; I_25 = 0.2
0665; I_26 = 0.20665; I_27 = 0.20665; I_28 = 0.20665; I_29 = 0.20665; I_30 = 0.2
0665; I_31 = 0.20665; I_32 = 0.20665; I_33 = 0.20665; I_34 = 0.20665; I_35 = 0.2
0665; I_36 = 0.20665; I_37 = 0.20665; I_38 = 0.20665; I_39 = 0.20665; I_40 = 0.2
0665; I_41 = 0.20665; I_42 = 0.20665; I_43 = 0.20665; I_44 = 0.20665; I_45 = 0.2
0665; I_46 = 0.20665; I_47 = 0.20665; I_48 = 0.20665; I_49 = 0.20665; I_50 = 0.2
0665; I_51 = 0.20665; I_52 = 0.20665; I_53 = 0.20665; I_54 = 0.20665; I_55 = 0.2
0665; I_56 = 0.20665; I_57 = 0.20665; I_58 = 0.20665; I_59 = 0.20665; I_60 = 0.2
0665; I_61 = 0.20665; I_62 = 0.20665; I_63 = 0.20665; I_64 = 0.20665; I_65 = 0.2
0665; I_66 = 0.20665; I_67 = 0.20665; I_68 = 0.20665; I_69 = 0.20665; I_70 = 0.2
06649; I_71 = 0.20665; I_72 = 0.20665; I_73 = 0.206652; I_74 = 0.206651; I_75 =
0.206651; I_76 = 0.206654; I_77 = 0.206656; I_78 = 0.206661; I_79 = 0.206661; I_
80 = 0.206672; I_81 = 0.206683; I_82 = 0.206677; I_83 = 0.206701; I_84 = 0.20666
9; I_85 = 0.206648; I_86 = 0.206522; I_87 = 0.206525; I_88 = 0.206367; I_89 = 0.
206159; I_90 = 0.205914; I_91 = 0.205471; I_92 = 0.205864; I_93 = 0.209003; I_94
= 0.206802; I_95 = 0.202255; I_96 = 0.200089; I_97 = 0.199219; I_98 = 0.213531;
I_99 = 0.232086; I_100 = 0.189514; I_101 = 0.171753; I_102 = 0.186279; I_103 =
0.200928; I_104 = 0.0939941; I_105 = 0.356445; I_106 = 0.400391; I_107 = 0.59765
6; I_108 = 0.130859; I_109 = 0.341797; I_110 = 0.472656; I_111 = -0.765625; I_11
2 = 1.34375; I_113 = 2.25781; I_114 = -1.76563; I_115 = -7.90625; I_116 = -19.37
5; I_117 = -48.2188; I_118 = -94.125; I_119 = -69.0625; I_120 = -95; I_121 = 8.1
25; I_122 = -4.5; I_123 = 205; I_124 = 269.5; I_125 = 373; I_126 = 1198; I_127 =
12594; I_128 = 3662; I_129 = 6768; I_130 = 7272; I_131 = 9480; I_132 = 11888; I_
133 = 19296; I_134 = 19776; I_135 = 17024; I_136 = 256; I_137 = 103488; I_138 =
156672; I_139 = 309248; I_140 = 275200; I_141 = 308480; I_142 = 205824; I_143 =
194560; I_144 = -481280; I_145 = -20480; I_146 = 522240; I_147 = 2.16269e+06; I_
148 = -1.00352e+06; I_149 = 835584; I_150 = -2.70336e+06; I_151 = -8.84736e+06;
I_152 = -1.41722e+07; I_153 = -3.10968e+07; I_154 = -3.65036e+07; I_155 = 2.7525
1e+07; I_156 = -7.31382e+07; I_157 = -2.1889e+07; I_158 = -2.75251e+07; I_159 =
2.05259e+08; I_160 = 1.31072e+08; I_161 = 5.97164e+08; I_162 = 7.96918e+07; I_16
3 = -5.42114e+08; I_164 = -4.81926e+09; I_165 = -3.58613e+09;

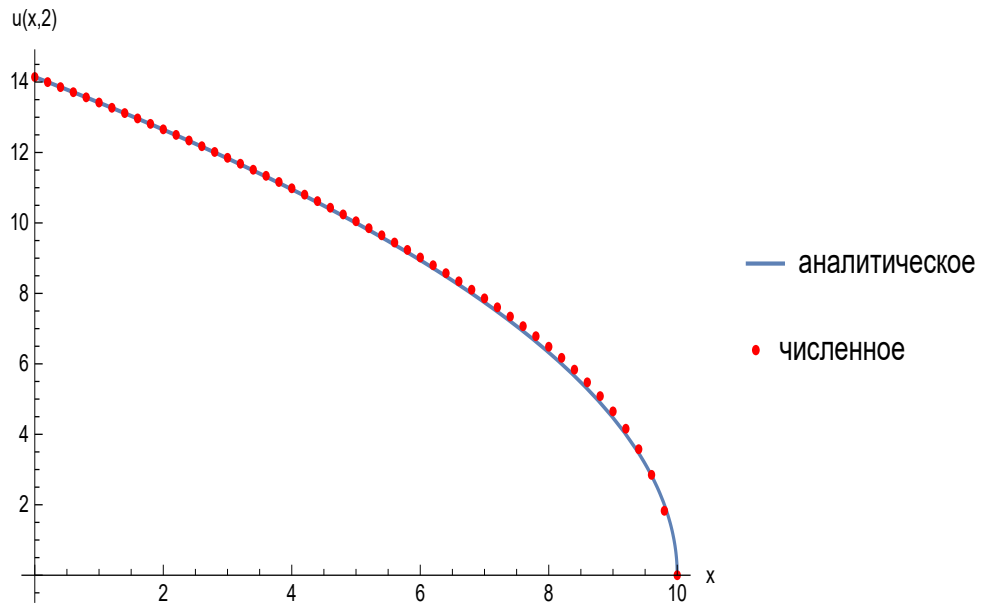
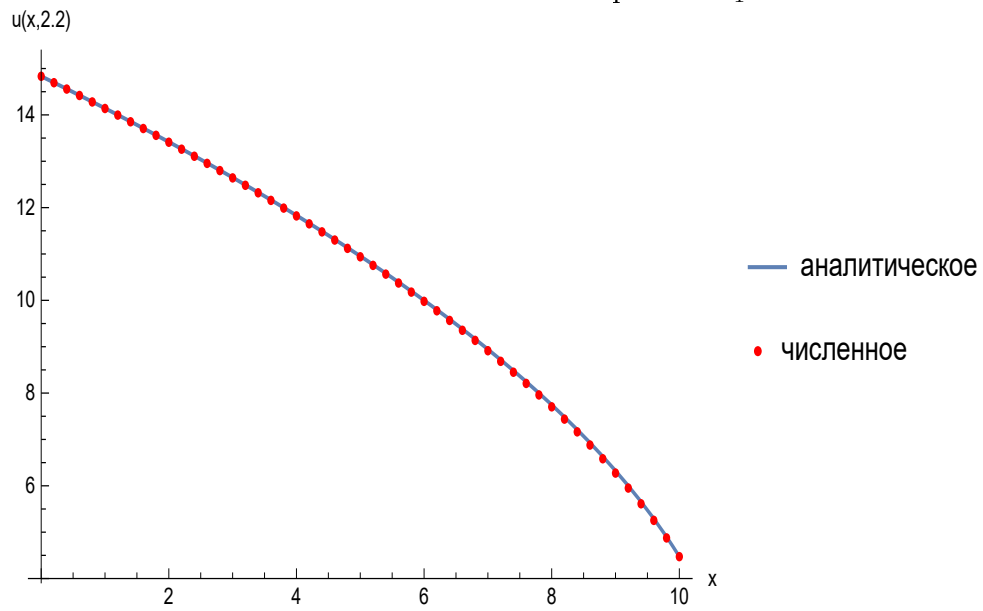
```

Рис. 11. Значения интегралов для второго расчета

Из приведенных изображений видно, что площадь под графиком (энергия) остается постоянной. Так же было проведено непосредственное вычисление интеграла по формуле трапеций. Значения интегралов $I = 0.20665$, следовательно схемы являются консервативными. Заметим, что даже немонотонная схема является консервативной, на начальных временных слоях.

3. Квазилинейный расчет

Решение было проведено при длине интервала $L = 10$. Сравним точное и аналитическое решение при $\varepsilon = 10^{-3}$.

Рис. 12. Решение в момент времени $t_1 = 2$ Рис. 13. Решение в момент времени $t_2 = 2.2$

Отметим, что возмущения доходят до правой части при $t > 2$.