Ответы на контрольные вопросы.

5. За счет выбора нормы матрицы нельзя улучшить ситуацию с числом обусловленности так как все нормы между собой эквивалентны. Обычно говорят, что малость определителя говорит о плохой обусловленности системы, однако это не так. Например, матрица $A = diag\{1e-10, ..., 1e-10\}$, её определитель безусловно мал, однако $condA = 1$.
6. а) Для диагональной матрицы A размерности $n \times n$ оценку числа обусловленности можно упросить воспользовавшись тем, что $\| A \| = max|a_{ii}|$(или $nmax|a_{ii}|$), а $\| A^{-1} \| = min|a_{ii}|$(или $nmin|a_{ii}|$), так как $A^{-1} = diag\{a_{11}^{-1}, \ldots, a_{nn}^{-1}\}$, тогда $condA = \| A \| \| A^{-1} \| = \frac{max|a_{ii}|}{min|a_{jj}|}$.
   б) Так как у симметричной матрицы собсвтенные числа вещественны, то мы можем перейти в базис, в котором матрица будет иметь вид $A = diag\{\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{nn}\}$, где λ_{ii} - собственные числа матрицы A, тогда воспользовавшись свойством диагональных матриц описанном в пункте а) имеем: $condA = \| A \| \| A^{-1} \| = \frac{max|\lambda_{ii}|}{min|\lambda_{jj}|}$.
   в) Так как $condA = \| A \| \| A^{-1} \|$, воспользовавшись свойством ортогональных матриц $A^{-1} = A^{-T}$ имеем: $condA = \| A \| \| A^{-T} \|$
   г) Оператор является положительно определенным, если $(Ax, x) \geqslant \delta(x, x)$, где δ - граница оператора A. Пользуясь неравенством Коши-Буняковского имеем: $\| A \| \| x \|^2 \geqslant (Ax, x) \geqslant \delta \| x \|^2$, тогда $\delta \leqslant \frac{(Ax,x)}{\|x\|^2} \leqslant \| A \|$. Так как $\delta = \inf\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$, то получим оценку для нормы оператора $\| A \| \geqslant \delta$. Тогда оценку числа обусловленности матрицы A можно получить как: $condA = \| A \| \| A^{-1} \| \geqslant \delta \| A^{-1} \|$.
   д) Пусть A - треугольная матрица, значит матрица $A - \lambda E$, тоже треугольная. Известно, $condA \geqslant \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}}$, так же исзвестно, что для треугольных матриц $detA = \prod\limits_{i=0}^{n} a_{ii}$, тогда $det(A - \lambda E) = \prod\limits_{i=0}^{n} (a_{ii} - \lambda_i)$. Решая получившееся уравнение n-й степени относительно λ можно найти собсвтенные числа матрицы и получить оценку сверху для числа обусловленности матрицы A.
9. Для реализации метода Гаусса потребуется для k-ого шага, всего будет таких n шагов, поделить $(n+2-k)$ элементов на элемент, стоящий на главной диагонали k-ой строки и также, для каждого k-ого шага надо будет из $(n-1)$-ой строк вычесть $(n + 2 - k)$ элементов, умноженных на элемент, стоящий в строке, из которой вычитаем, над или под элементом, стоящим на главной диагонали в k-ой строке. Просуммировав только мультипликативные опирации получим: $\frac{n^3+3n^2}{2}$, то есть $\approx \frac{n^3}{2}$ операций.

Ответы на вопросы к программе.

1. Частичный.
2. При использовании QR - алгоритма матрица является вырожденной, если элемент a_{nn} квадратной матрицы A размерности $n \times n$ равен нулю. А в методе Гаусса, если в ходе алгоритма частичного выбора элемента окажется, что элемент на главной диагонали и все стоящие под ним близки к нулю, то матрица

является вырожденой.

3. К варианту 14 SYS1:

$$A = \begin{pmatrix} -148.4 & -3.86 & 3.22 & -5.23 \\ -8.24 & -194.6 & -8.69 & -6.18 \\ 5.5 & -7.96 & -65.8 & -2.49 \\ 5.64 & -7.59 & -1.7 & 155.6 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0.000306596 & -0.537614 & -0.824365 & -0.177181 \\ -0.48247 & 0.708394 & -0.389755 & -0.336886 \\ -0.120617 & 0.182193 & -0.31721 & 0.922841 \\ -0.867568 & -0.41947 & 0.26056 & 0.0589837 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 71.7558 & 193.159 & -605.08 & -23.9377 \\ 0 & 0.539833 & -2.06706 & -0.0131709 \\ -1.77636e-015 & -4.33681e-019 & 0.0021389 & -0.000313029 \\ 0 & 0 & 0 & -1.68825e-006 \end{pmatrix}$$

Таблица к варианту 14 SYS1:

	Метод Гаусса		QR - алгоритм	
Точность	Одинарная	Двойная	Одинарная	Двойная
$\parallel b - b_1 \parallel_1$	$1.1456e-4$	$1.66978e-13$	$4.92454e-4$	$2.45359e-13$
$\parallel b - b_1 \parallel_2$	$7.66746e-5$	$1.19795e-13$	$3.4045e-4$	$1.78945e-13$
$\parallel b - b_1 \parallel_\infty$	$6.86646e-5$	$1.13687e-13$	$3.05176e-4$	$1.7053e-13$

Таблица 1

К варианту 14 SYS2:

$$A = \begin{pmatrix} 0.022 & -0.231 & 0.924 & 0 \\ -34.62 & -92.811 & 290.468 & 11.54 \\ -8.655 & -23.2 & 72.606 & 2.885 \\ -62.253 & -167.805 & 525.816 & 20.773 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -0.997062 & 0.052145 & -0.0399284 & -0.0394094 \\ -0.0553625 & -0.996812 & 0.0422266 & 0.0389523 \\ 0.0369531 & -0.0436059 & -0.99819 & 0.0187188 \\ 0.0378937 & -0.0417709 & -0.015493 & -0.998288 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 148.837 & 14.0404 & -5.22538 & 11.361 \\ 0 & 194.443 & 11.7705 & -0.503397 \\ 0 & 0 & 65.2117 & 0.0226413 \\ 0 & 0 & 0 & -155.415 \end{pmatrix}$$

Таблица к варианту 14 SYS2:

	Метод Гаусса		QR - алгоритм	
Точность	Одинарная	Двойная	Одинарная	Двойная
$\parallel b - b_1 \parallel_1$	$2.13623e-4$	$5.11591e-13$	$3.35693e-4$	$2.27374e-13$
$\parallel b - b_1 \parallel_2$	$1.39849e-4$	$3.26541e-13$	$2.22171e-4$	$2.27374e-13$
$\parallel b - b_1 \parallel_\infty$	$1.2207e-4$	$2.27374e-13$	$1.83105e-4$	$2.27374e-13$

Таблица 2

4. Изначально обратная матрица вычилсялась с помощью метода Гаусса (остался закомментированный код), но затем он был заменен на QR - метод так как он уменьшает количество действий (достаточно только один раз вычилить матрицы Q и R).
5. Не изменится, так как, если умножить матрицу A на $\forall\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$, то матрица A^{-1}, будет умножена на $1/\lambda$.
6. Переход к лучше обусловленной системе осуществляется с помощью энергетически эквивалентного оператора. В случае плохо обусловленной системы $Ax = f$ иногда удается перейти к равносильной системе с оператором, который имеет меньшее число обусловленности, а затем решить эту систему методом итераций. Пусть $B = B^* > 0$ - пока произвольный оператор. Умножим обе части уравнения $Ax = f$ на B^{-1} в результате получим равносильное уравнение:

$$Cx = g; \quad C = B^{-1}A; \quad g = B^{-1}f;$$

Оператор C является самосопряженным и положительно определенным в смысле скалярного произведения $(x, y)_B = (Bx, y)$. Если при этом удается выбрать B так, чтобы он был «похож» на оператор A, то можно надеяться, что оператор будет «похож» на единичный, а его максимальное и минимальное собственные числа и число обусловленности будут «ближе» к единице. Но в некоторых случаях подборать матрицу B чтобы уменьшить число обусловленности непросто.

7. Оценка числа обусловленности для теста 2:

Точность	Одинарная	Двойная
$cond_1 A$	5	5
$cond_2 A$	3.87298	3.87298
$cond_\infty A$	4.00009	4

Таблица 3

Оценка числа обусловленности для теста 4:

Точность	Одинарная	Двойная
$cond_1 A$	190.442	190.432
$cond_2 A$	110.435	110.429
$cond_\infty A$	79.5499	79.5455

Таблица 4

8. К варианту 14 SYS1 с двойной точностью:

$$A^{-1} \times A = \begin{pmatrix} 1 & -2.86607e-010 & 8.89875e-010 & 3.44286e-011 \\ 2.56114e-009 & 1 & -1.67638e-008 & -6.40284e-010 \\ 5.82077e-010 & 8.14907e-010 & 1 & -1.45519e-010 \\ 2.79397e-009 & 4.65661e-009 & -1.86265e-008 & 1 \end{pmatrix}$$

с одинарной точностью:

$$A^{-1} \times A = \begin{pmatrix} 1.81786 & 2.21414 & -6.93567 & -0.274261 \\ -0.254883 & -0.136719 & 7.54688 & 0.1875 \\ -0.0326233 & -0.23584 & 2.44336 & 0 \\ 0.42041 & 0.835938 & 0.65625 & 0.9375 \end{pmatrix}$$

К варианту 14 SYS2 с двойной точностью:

$$A^{-1}{\times}A = \begin{pmatrix} 1 & 3.46945e-018 & 1.03541e-017 & -6.93889e-018 \\ 9.1073e-018 & 1 & -1.29562e-017 & 0 \\ -1.04083e-017 & 4.33681e-018 & 1 & 0 \\ 0 & -3.46945e-017 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с одинарной точностью:

$$A^{-1}{\times}A = \begin{pmatrix} 1 & 2.21189e-008 & -2.18279e-009 & 8.73115e-009 \\ -4.07454e-009 & 1 & -1.28057e-008 & 1.5134e-009 \\ -9.54606e-009 & 2.63099e-008 & 1 & -1.86265e-009 \\ 3.25963e-009 & -1.74623e-010 & -8.73115e-010 & 1 \end{pmatrix}$$

К варианту 17 SYS1 с двойной точностью:

$$A^{-1}{\times}A = \begin{pmatrix} 1 & -1.09139e-011 & 0 & -2.91038e-011 \\ 6.00267e-011 & 1 & 2.84217e-013 & 1.13687e-012 \\ -1.09139e-011 & -1.13687e-012 & 1 & -6.82121e-013 \\ -1.86265e-009 & 8.73115e-011 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с одинарной точностью:

$$A^{-1} \times A = \begin{pmatrix} 0.875 & -0.0166016 & 0.0167847 & -0.0078125 \\ 0.0429688 & 1.00562 & -0.00442886 & 0.0090332 \\ 0.0302734 & 0.00389099 & 0.99684 & 0.00683594 \\ 2.375 & 0.132813 & -0.121094 & 1.17188 \end{pmatrix}$$

К варианту 17 SYS2 с двойной точностью:

$$A^{-1}{\times}A = \begin{pmatrix} 1 & -8.67362e-019 & -4.33681e-019 & -2.77556e-017 \\ 0 & 1 & 1.03162e-016 & -4.85723e-017 \\ 1.0842e-019 & -2.22261e-018 & 1 & 3.46945e-018 \\ -1.38778e-017 & 0 & 6.93889e-018 & 1 \end{pmatrix}$$

с одинарной точностью:

$$A^{-1}{\times}A = \begin{pmatrix} 1 & 1.16415e-010 & 1.57161e-009 & 1.10776e-008 \\ 1.74623e-009 & 1 & -1.18554e-007 & 2.63535e-008 \\ -9.45874e-011 & -4.94765e-010 & 1 & -1.83354e-009 \\ -9.6552e-009 & 1.16415e-010 & 2.91038e-010 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Пример плохо обусловленной системы:
$$\begin{cases} 1.03x_1 + 0.991y = 2.51, \\ 0.991x + 0.943y = 2.41. \end{cases}$$
Геометрическая интерпритация на данной, плохо обусловленной, системе состоит в том, что прямые, уравнениями которых являются первое и второе уравнения системы, пересекаются под маленьким углом (рис. 1), что влечет

при малейшей смене столбца правой части к „сильному“ смещению пересечения прямых, а значит к большому изменению значениий решения.

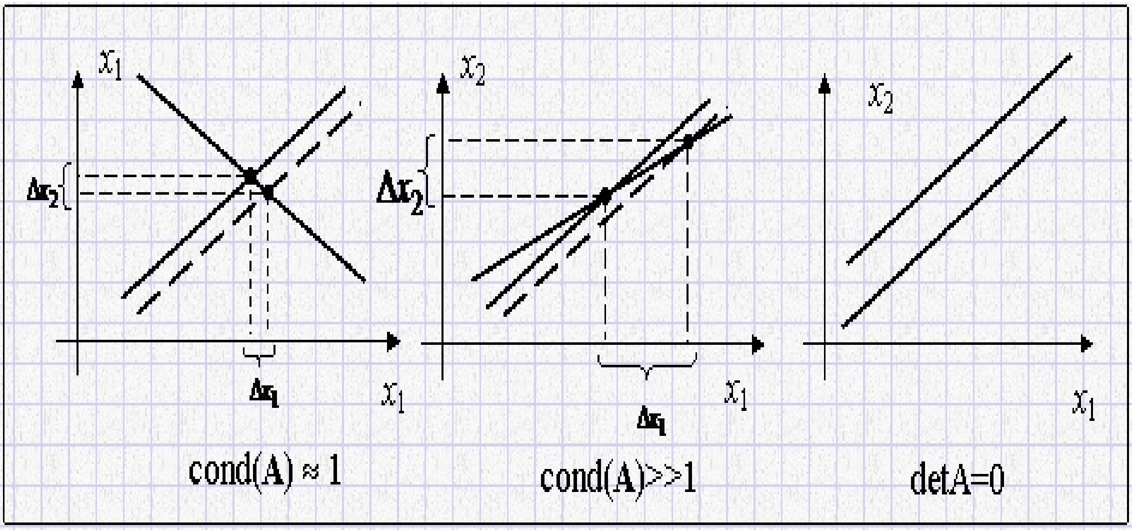

Рис. 1. Геометрическая интерпритация.