Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Прикладная математика»

Лабораторная работа №3

по дисциплине «Методы вычислений»

Решение задач интерполирования

Выполнили студенты группы ФН2-51 *Разумов Т.Е.*
Швечков И.В.

Москва — 2017

Контрольные вопросы

1. Определите количество арифметических операций, требуемое для интерполирования функции в некоторой точке многочленом Лагранжа (включая построение самого многочлена) на сетке с числом узлов, равным n.
2. Определите количество арифметических операций, требуемое для интерполирования функции в некоторой точке кубическим сплайном (включая затраты на вычисление коэффициентов сплайна) на сетке с числом узлов, равным n.
3. Функция $f(x) = e^x$ интерполируется многочленом Лагранжа на отрезке $[0, 2]$ на равномерной сетке с шагом $h = 0.2$. Оцените ошибку экстраполяции в точке $x = 2.2$, построив многочлен Лагранжа и подставив в него это значение, а также по формуле для погрешности экстраполяции.
4. Выпишите уравнения для параметров кубического сплайна, если в узлах x_0 и x_n помимо значений функции y_0 и y_n заданы первые производные $y'(x_0)$ и $y'(x_n)$.
5. Каковы достоинства и недостатки сплайн-интерполяции и интерполяции многочленом Лагранжа?
6. Какие свойства полиномов Чебышева и чебышевских сеток Вам известны?

Ответы на контрольные вопросы

1. Для построения многочлена в форме Ньютона с числом узлов равным n, нам потребуется вычислить $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ разделенных разностей, а значит произвести $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ делений и $(n-2)(n-1)$ вычитаний. Определим количество арифметических операций, требуемое для вычисления значения построенного многочлена в форме Ньютона с числом узлов равным n в некоторой точке: так как многочлен степени $n-1$, значит нам потребуется $n-1$ умножений для перемножения $(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})$, $n-1$ умножений для перемножения $(x-x_0)f(x_0,x_1),(x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2),...,(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})f(x_0,x_1,...,x_n)$ и $2(n-1)$ сложений и вычитаний. В итоге получили $\frac{n^2+n-2}{2}$ мультипликативных операций и $n(n-1)$ аддитивных операций.
2. Пусть имеется n узлов. В алгоритме интерполирования кубическими сплайнами первую очередь находятся коэффициенцы $a_i = y_{i-1}, i = 1,\dots,n$, вычисление которых не требует операций, и c_i которые находятся с пощью решения СЛАУ, обладающей трехдиагональной матрицей, методом прогонки (в естественном сплайне полагают $c_1 = 0$ и $c_{n+1} = 0$):

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3(g_i - g_{i-1}), \\ c_{n+1} = 0, i = 2,\dots,n. \end{cases}$$

   Для отыскания вспомогательных коэффициентов $g_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$, $i = 2,\dots,n$ требуется $n-1$ операция. Для составления 3-х диагональной матрицы нам потребуется ещё $2(n-1)$ операции и решение системы методом прогонки займет $5(n-1)+4$ операции.
   Для отыскания коэффициентов $b_i = g_i - \frac{(c_{i+1}+2c_i)h_i}{3}$ и $d_i = \frac{c_{i+1}-c_i}{3h_i}$, $i = 1,\dots,n$, нам потребуется еще $5n$ операций. И вычисление полученного интерполятна в точке обойдется нам в 6 операций. Итого, процесс интерполирования кубическими спайнами и вычисление полученного интерполянта одной точке потребует порядка $13n$ операций.
3. Так как мы интерполируем функцию $f(x) = e^x$ на отрезке $[a,b] : a = 0, b = 2$ с шагом $h = 0.2$, значит мы имеем 11 узлов и полином L_n степени $n = 10$. Проведем оценку ошибки экстраполяции в точке $x = 2.2$ по формуле для погрешности экстраполяции при $x \in [b, b+h] \Rightarrow |f - L_n| \leqslant h^{n+1} \max\limits_{\xi\in[a,x]} |f^{(n+1)}(\xi)|$, применив формулу получим: $|r_n| \leqslant 0.2^{11}e^{2.2} = 1.84832\times 10^{-7}$. Проведем оценку ошибки экстраполяции в точке $x = 2.2$, построив многочлен Лагранжа в нашей программе и подставив в него это значение, получим: $|r_n| = 6.26633\times 10^{-8}$
4.
$$S_i(x) = a_i + b_i(x-x_{i-1}) + c_i(x-x_{i-1})^2 + d_i(x-x_{i-1})^3;\ x \in [x_{i-1}, x_i],$$
$$S_i'(x) = b_i + 2c_i(x-x_{i-1}) + 3d_i(x-x_{i-1})^2;\ i = 1,\dots,n,$$
$$S_1'(x_0) = b_1 = y'(x_0),$$
$$S_n'(x_n) = b_n + 2c_n(x_n - x_{n-1}) + 3d_n(x_n - x_{n-1})^2 = b_n + 2c_n h_n + 3d_n h_n^2 = y'(x_n).$$

Тогда, пользуясь тем, что $b_i = g_i - \frac{(c_{i+1}+2c_i)h_i}{3}$ и $d_i = \frac{c_{i+1}-c_i}{3h_i}$, $i = 1, \ldots, n$, можно получить недостающие два условия для значений вторых производных на левой и правой границе т.е. $c_1 = S''(x_0)$ и $c_{n+1} = S''(x_n)$:

$$b_1 = y'(x_0) = g_1 - \frac{(c_2 + 2c_1)h_1}{3} \Rightarrow c_1 = \frac{3(g_1 - y'(x_0))}{2h_1} - \frac{c_2}{2} = S''(x_0),$$

$$y'(x_n) = b_n + 2c_nh_n + 3d_nh_n^2 = g_n - \frac{(c_{n+1} - 2c_n)h_n}{3} + 2c_nh_n + (c_{n+1} - c_n)h_n \Rightarrow$$

$$c_{n+1} = \frac{3(y'(x_n) - g_n)}{2} - \frac{c_n}{2} = S''(x_n).$$

Тогда получаем систему:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{3(g_1-y'(x_0))}{2h_1} - \frac{c_2}{2}, \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_ic_{i+1} = 3(g_i - g_{i-1}), \\ c_{n+1} = \frac{3(y'(x_n)-g_n)}{2} - \frac{c_n}{2}, i = 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Данная система обладает трехдиагональной матрицей.
Коэфициенты b_i и d_i находятся из соотношений:
$b_i = g_i - \frac{(c_{i+1}+2c_i)h_i}{3}, i = 2, \ldots, n$ (так как b_1 нам уже известен).
$d_i = \frac{c_{i+1}-c_i}{3h_i}, i = 1, \ldots, n.$

5. Основными достоинствами сплайн-интерполяции являются её устойчивость и малая трудоемкость. Системы линейных уравнений, которые требуется решать для нахождения коэффициентов сплайна, хорошо обусловлены, что позволяет получать их с высокой точностью, так же матрицы системы уравнений для коэффициентов c являются трехдиагональными, что позволяет использовать метод прогонки для нахождения решения, который, в силу диагонального преобладания, будет всегда устойчив. В результате, при увеличении количества узлов вычислительный алгоритм не теряет устойчивость, и погрешность будет только уменьшаться.
   Достоинство полиномиальной интерполяции состоит в том, что полином один, причем единственный, а в сплайн-интерполяции строятся несколько полиномов, а именно их количество равно количеству инервалов, внутри которых мы производим интерполяцию. При полиномиальной интерполяции мы можем говорить об экстраполяции и ее оценке, в отличие от сплайн-интерполяции. Так же реализация алгоритма полиномиальной интерполяции весьма проста, по сравнению с интерполяцией сплайнами. Но в отличие от сплайн интерполяции при увеличении количества узлов происходит резкое накопление погрешностей вследсвие чего вблизи границ отрезка происходят осциляции.
6. Полином Чебышева первого рода имеет вид:

$$\omega(x) = T_{n+1}(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} cos\Big((n+1)arccos\frac{2x - (b+a)}{b-a}\Big),$$

   Он является полиномом $(n+1)$-го порядка и является наимение уклоняющимся от нуля.
   корни полинома определяются следующим соотношением:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)},\ k = 1, \ldots, n,$$

при этом они являются узлами интерполяции. Для такого набора узлов

$$||\omega||_C = \frac{1}{2^{2n+1}(b-a)^{n+1}},$$

и

$$||f - L_n||_C \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

где $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[x_0,x_n]} |y^{(n+1)}(x)|$.
Полученная оценка называется равномерной оценкой погрешности и является неулучшаемой.
Приведем некоторые свойства многочленов Чебышева:

- При четном n многочлен $T_n(x)$ содержит только четные степени x и является четной функцией, а при нечетном n многочлен $T_n(x)$ содержит только нечетные степени x и является нечетной функцией.
- Для любого многочлена $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, отличного от $T_n(x)$, справедливо неравенство:

$$2^{1-n} = \max_{[-1,1]} |T_n(x)| < \max_{[-1,1]} |P_n(x)|$$

Выбор корней многочлена Чебышева первого рода в качестве узлов сетки позволяет уменьшить погрешность интерполяции. Так же можно заметить, что корни и точки экстремума Чебышевского полинома сгущаются к концам отрезка.