Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное учреждение
высшего образования
«**Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана**
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Прикладная математика»

Курсовая работа

по дисциплине «Дифференциальные уравнения»

Подводный старт ракеты

Выполнил	студент группы ФН2-41	Разумов Т.Е.
Научный руководитель	профессор кафедры ФН-2	Кувыркин Г.Н.

Москва 2017

Постановка задачи

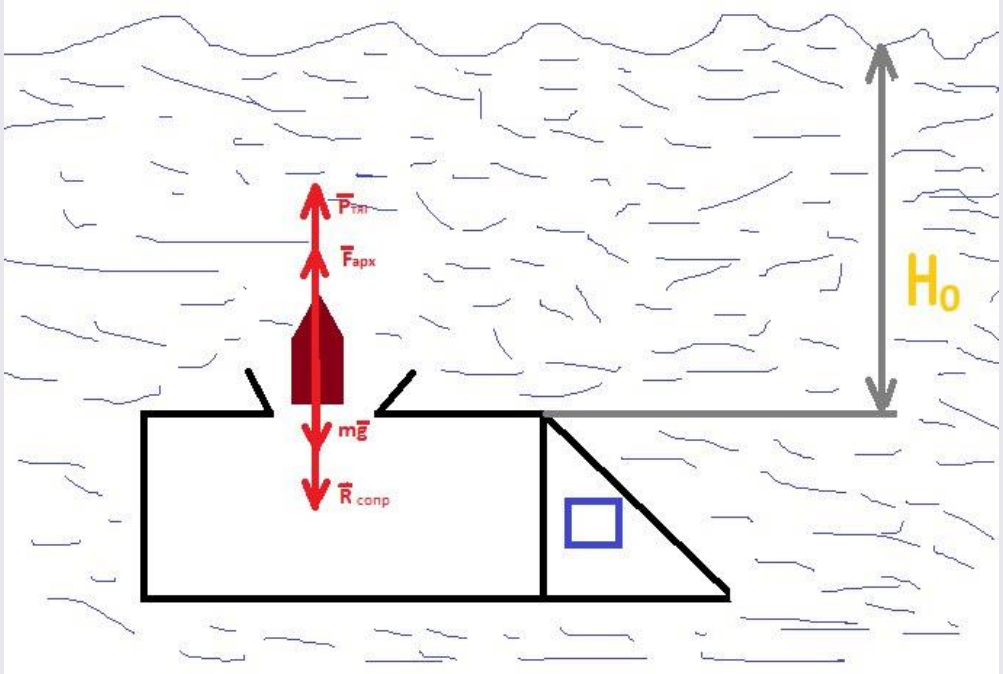
Исследовать вертикальное движение баллистической ракеты на подводном участке траектории после ее выталкивания на глубине H_0 с начальной скоростью v_0 из стартовой шахты подводной лодки. Сила сопротивления движению ракеты в воде $F = kv^n$, где k – коэффициент сопротивления, v – скорость, $n > 0$. На глубине $H_1 \leq H_0$ включается ракетный двигатель, развивающий силу тяги $P = P_0 - aH$, где P_0 – сила тяги на поверхности воды, $H -$ текущее значение глубины, $a > 0$. Объем V_0 и массу m_0 ракеты принять постоянными на подводном участке траектории.

Построить математическую модель вертикального движения ракеты и получить точное аналитическое решение при $n = 1{,}2$. Провести численный анализ этой модели при $n = 7/4$ и согласованных с руководителем значениях остальных параметров.

Решение задачи

Дифференциальное уравнение, описывающее движение для произвольного n

Силы, действующие на ракету



Векторное дифференциальное уравнение:

$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{\text{арх}} + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}_{\text{сопр}} + \boldsymbol{P}$.

В проекции на вертикальную ось, направленную вниз:

$m\frac{dv}{dt} = \mathrm{C} + \mathrm{k}v^n - P$, где $\mathrm{C} = mg - F_{\text{арх}}$.

Решение при $n = 1$ и отсутствии силы тяги

Пусть $n = 1, H_1 \leq H \leq H_0$, тогда $P \equiv 0$,

$m\frac{dv}{dt} = C + kv$ – уравнение с разделяющимися переменными.

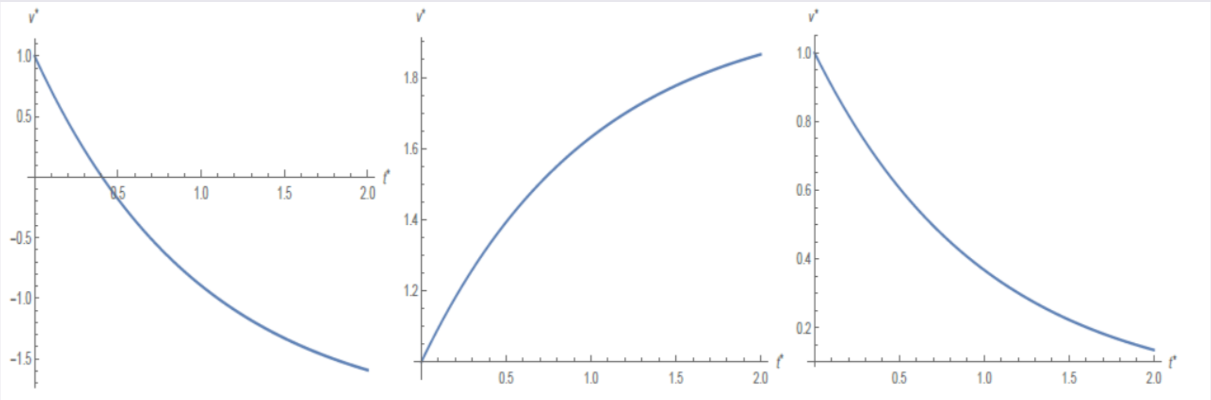
$\frac{1}{k}Ln|C + kv| = \frac{t}{m} + C_1$,

При $t = 0, v = v_0,\ C_1 = \frac{1}{k}Ln|C + kv|$, тогда $v(t) = \frac{C+kv_0}{k}e^{\frac{k}{m}t} - \frac{C}{k}$.

В безразмерном виде $v^* = (\mathrm{A} + 1)e^{-t^*} - A$,

где $v^* = \frac{v}{v_0}, t^* = -\frac{k}{m}t,\ A = \frac{C}{kv_o}$.

Графики решения при различных значениях параметра А



A=2 A=-2 A=0

Решение при $n = 1$ и отсутствии силы тяги

$v(t) = \frac{dH}{dt} = \frac{C+kv_0}{k} e^{\frac{k}{m}t} - \frac{C}{k}$ - уравнение с разделяющимися переменными.

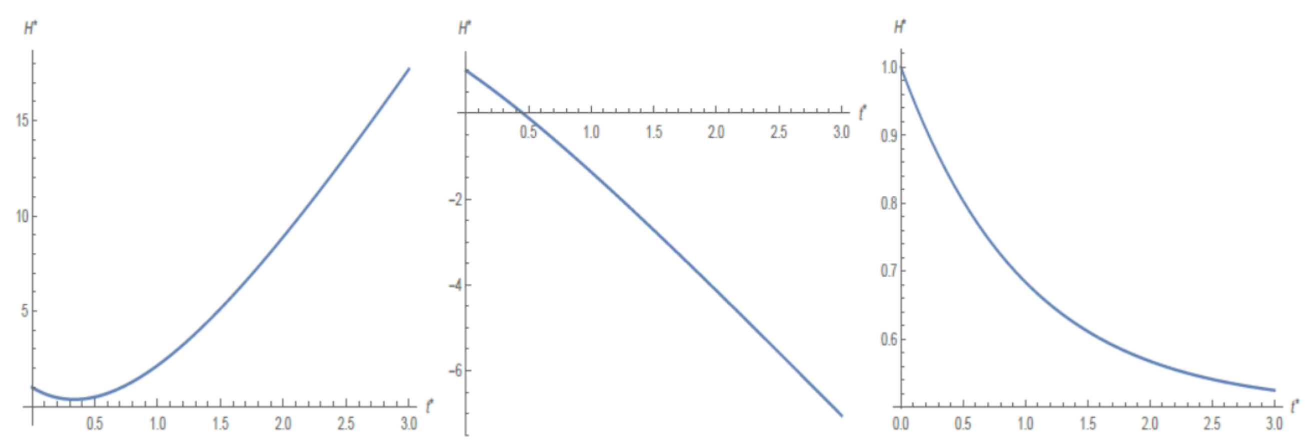
$H(t) = \frac{m(C+kv_0)}{k^2} e^{\frac{k}{m}t} - \frac{C}{k}t + C_2,$

При $t = 0, H = H_0, C_2 = H_0 - \frac{m(C+kv_0)}{k^2},$ тогда $H(t) = \frac{m(C+kv_0)}{k^2}(e^{\frac{k}{m}t} - 1) - \frac{C}{k}t + H_0.$

В безразмерном виде $H^* = (A + B)\left(e^{-t^*} - 1\right) + At^* + 1,$

где $H^* = \frac{H}{H_0},\ -t^* = \frac{k}{m}t,\ A = \frac{mC}{k^2 H_0}, B = \frac{mv_0}{kH_0}.$

Графики решения при различных значениях параметров A, B



A=10,B=4 A=-3,B=2 A=0,B=0.5

Решение при $n = 1$ и отсутствии силы тяги

Найдем зависимость $H(v)$. $m\frac{dv}{dt}\frac{dH}{dH} = C + kv$,

$v\frac{dv}{dH} = \frac{C+kv}{m}$ - уравнение с разделяющимися переменными.

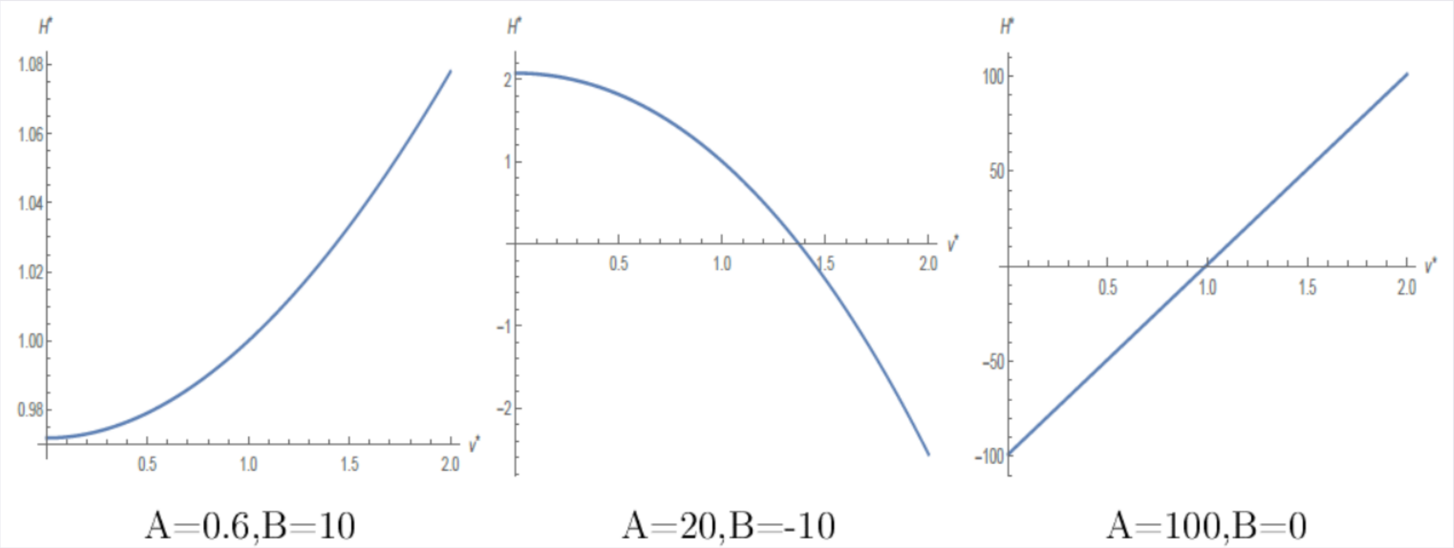
$\frac{v}{k} - \frac{C}{k^2}Ln|C + kv| = \frac{H}{m} + C_3,$

При $H = H_0 , v = v_0$, $C_3 = \frac{v_0}{k} - \frac{C}{k^2}Ln|C + kv_0| - \frac{H_0}{m}$, тогда $H(v) = \frac{m(v-v_0)}{k} - \frac{Cm}{k^2}Ln\left|\frac{C+kv_0}{C+kv}\right| + H_0$.

В безразмерном виде $H^* = A(v^* - 1) - ABLn\left|\frac{B+v^*}{B+1}\right| + 1,$

где $H^* = \frac{H}{H_0}, v^* = \frac{v}{v_0}, A = \frac{v_0 m}{kH_0}, B = \frac{C}{kv_0}$.

Графики решения при различных значениях параметров A, B



Решение при $n = 1$ с силой тяги

Пусть $H \leq H_1$, тогда $P = P_0 - aH$,

$\frac{d^2H}{dt^2} - \frac{k}{m}\frac{dH}{dt} - \frac{a}{m}H = \frac{C-P_0}{m}$ - дифференциальное уравнение второго порядка с правой частью.

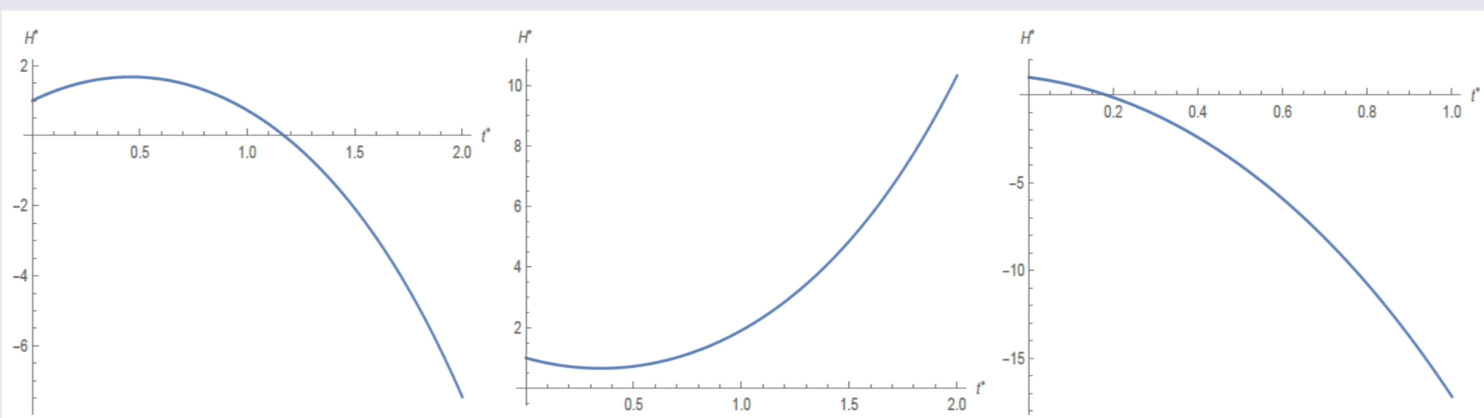
$H_{\text{о.о.}} = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$, где $\alpha_{1,2} = \frac{\frac{k}{m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{m^2} + 4\frac{a}{m}}}{2}$; $H_{\text{ч.н.}} = \frac{P_0 - C}{a}$; $H_{\text{о.н.}} = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + \frac{P_0 - C}{a}$.

При $t = t_1$, $H = H_1, v = v_1$, $C_1 = \frac{v_1 - \alpha_2 \frac{(H_1 - \frac{P_0 - C}{a})\alpha_1 - v_1}{\alpha_1 - \alpha_2}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 t_1}}$, $C_2 = \frac{(H_1 - \frac{P_0 - C}{a})\alpha_1 - v_1}{(\alpha_1 - \alpha_2) e^{\alpha_2 t_1}}$, тогда

$$H(t) = \left(\frac{v_1}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{(H_1 - \frac{P_0 - C}{a})\alpha_1 - v_1}{\alpha_1 - \alpha_2}\right) e^{\alpha_1 (t - t_1)} + \frac{(H_1 - \frac{P_0 - C}{a})\alpha_1 - v_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2 (t - t_1)} + \frac{P_0 - C}{a}.$$

В безразмерном виде $H^* = Ae^{t^*} + Be^{-t^*} + D$.

Графики решения при различных значениях параметров A, B, D



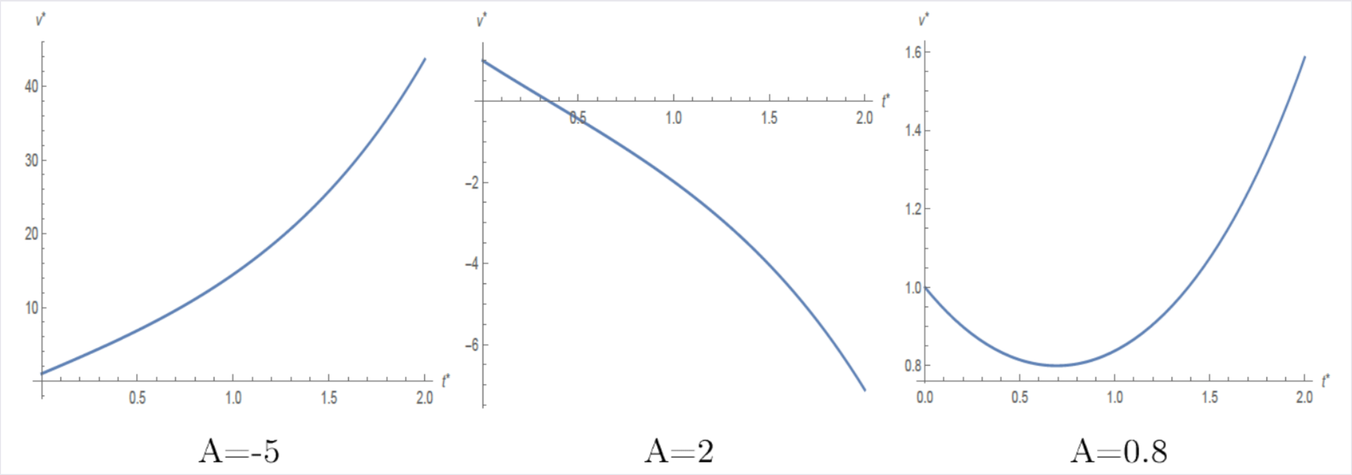
A=-2,B=-5,D=8 A=2,B=4,D=-5 A=-15,B=-12,D=28

Решение при n=1 с силой тяги

$$\frac{dH}{dt} = v(t) = \left(v_1 - \alpha_2 \frac{(H_1 - \frac{P_0 - C}{a})\alpha_1 - v_1}{\alpha_1 - \alpha_2}\right) e^{\alpha_1 (t - t_1)} + \alpha_2 \frac{(H_1 - \frac{P_0 - C}{a})\alpha_1 - v_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2 (t - t_1)}.$$

В безразмерном виде $v^* = (1 - A)e^{t^*} + Ae^{-t^*}$.

Графики решения при различных значениях параметра A



Решение при n=2 и отсутствии силы тяги

Пусть $n = 2, H_1 \leq H \leq H_0$, тогда $P \equiv 0$,

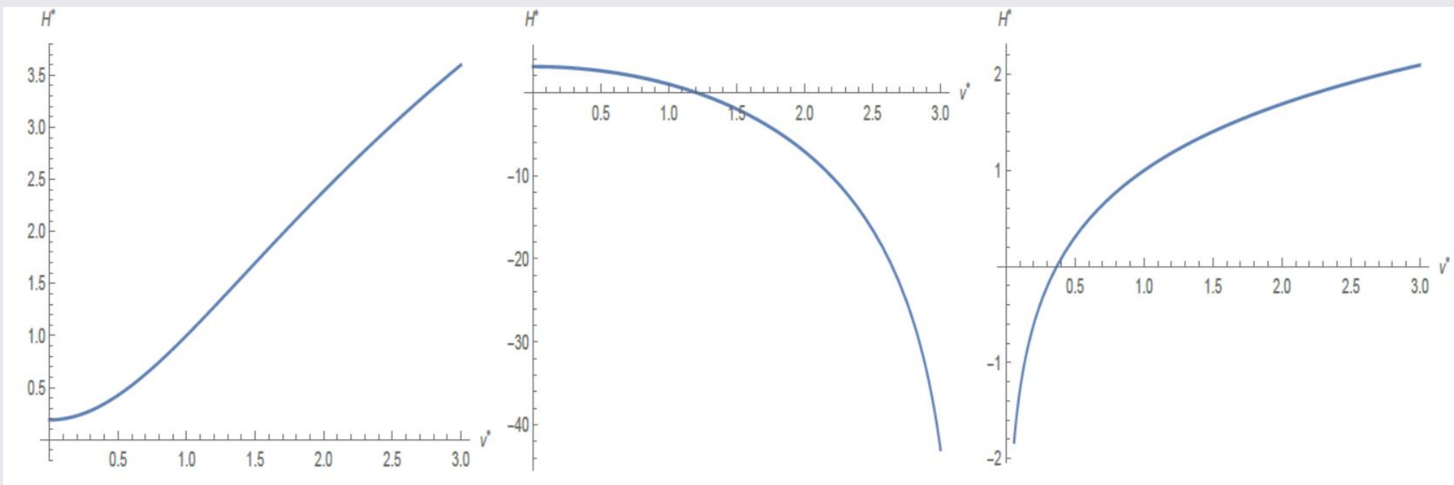
$mv\frac{dv}{dH} = C + kv^2$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$H(v) = \frac{m}{2k} Ln|C + kv^2| + C_1$,

При $H = H_0$, $v = v_0$, $C_1 = H_0 - \frac{m}{2k} Ln\left|C + kv_0^2\right|$, тогда $H(v) = \frac{m}{2k} Ln\left|\frac{C+kv^2}{C+kv_0^2}\right| + H_0$.

В безразмерном виде $H^* = ALn\left|\frac{B+v^*}{B+1}\right| + 1$.

Графики решения при различных значениях параметров A, B



A=2,B=2 A=20,B=-10 A=0.5,B=0

Решение при n=2 и отсутствии силы тяги

$m\frac{dv}{dt} = C + kv^2$ - уравнение с разделяющимися переменными,

$\frac{dv}{C+kv^2} = \frac{dt}{m}$.

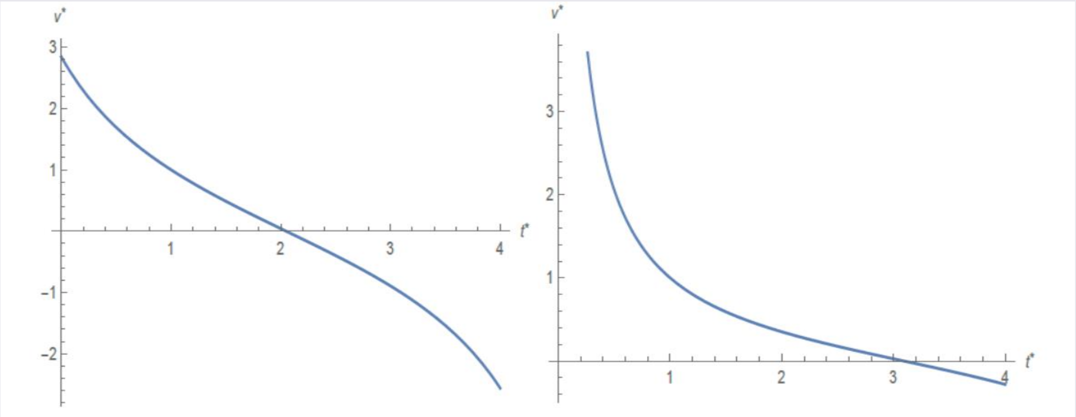
Решение при $mg > F_{\text{арх}}$ (C > 0)

$$\frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k}{C}}v\right)}{\sqrt{Ck}} = \frac{t}{m} + C_2,$$

При $t = 0, v = v_0, C_2 = \frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k}{C}}v_0\right)}{\sqrt{Ck}}$, тогда $v(t) = \sqrt{\frac{C}{k}}\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{Ck}}{m}t + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k}{C}}v_0\right)\right)$.

В безразмерном виде $v^* = A tg\left(\frac{t^*}{2} + B\right)$.

Графики решения при различных значениях параметров A, B



$A = -\sqrt{3}, B = -(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2})$ $A = -\frac{\sqrt{3}}{3}, B = -(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2})$

Решение при n=2 и отсутствии силы тяги

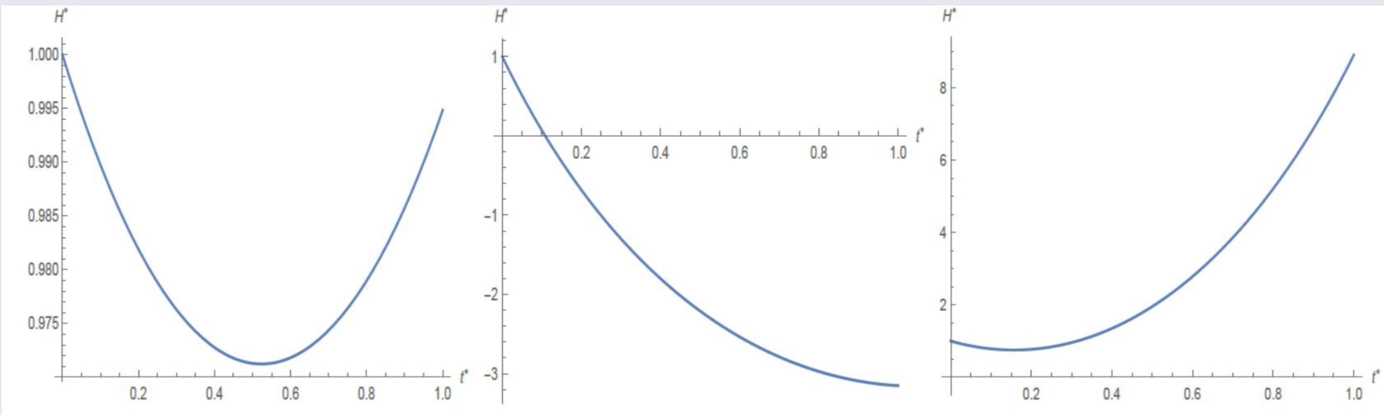
Решение при $mg > F_{\text{apx}}$ $(\mathrm{C} > 0)$

$v(t) = \frac{dH}{dt} = \sqrt{\frac{C}{k}}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\sqrt{Ck}}{m}t + \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{k}{C}}v_0\right)\right)$ - уравнение с разделяющимися переменными.

$H(t) = \frac{m}{k}Ln\left|\frac{Cos(B)}{Cos\left(\frac{\sqrt{Ck}}{m}t+B\right)}\right| + H_0$, где $B = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{k}{C}}v_0\right)$.

В безразмерном виде $H^* = ALn\left|\frac{Cos(B)}{Cos(t^*+B)}\right| + 1.$

Графики решения при различных значениях параметров А, В



$A = 0,2; B = -\frac{\pi}{6}$ $\quad$ $A = 6; B = -\frac{\pi}{3}$ $\quad$ $A = 20; B = -\frac{\pi}{20}$

Решение при n=2 и отсутствии силы тяги

Решение при $mg < F_{\text{арх}}$ (C < 0)

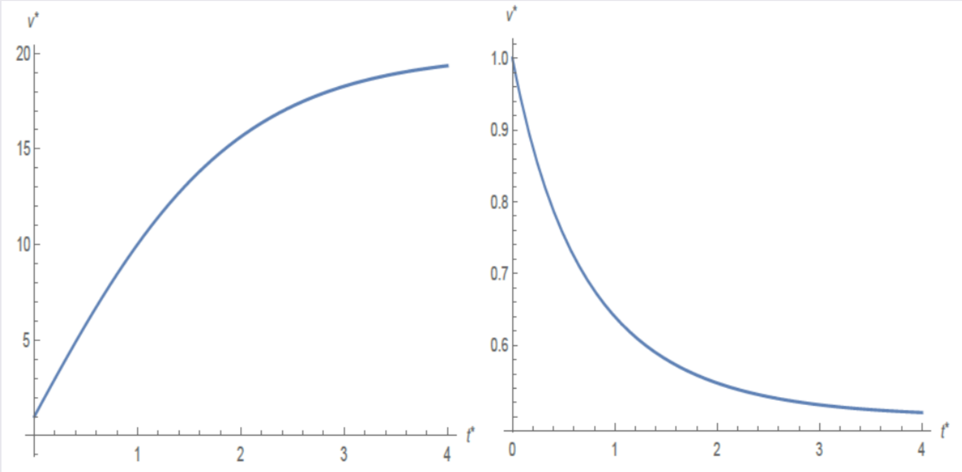
Обозначим $C = -b$, тогда $\frac{dv}{kv^2-b} = \frac{dt}{m}$ - уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{m}{2\sqrt{kb}} Ln\left|1 - \frac{2b}{\sqrt{kb}v+b}\right| = t + C_2,$$

При $t = 0, v = v_0, C_2 = \frac{m}{2\sqrt{kb}} Ln\left|1 - \frac{2b}{\sqrt{kb}v+b}\right|$, тогда $v(t) = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{k}\left(1+\frac{b-\sqrt{kb}v_0}{\sqrt{kb}v_0+b}e^{\frac{2\sqrt{kb}}{m}t}\right)} - \sqrt{\frac{b}{k}}.$

В безразмерном виде $v^* = \frac{2A(A+1)}{A+1+(A-1)e^{t^*}} - A.$

Графики решения при различных значениях параметра A



$A = -20$ $A = -\frac{1}{2}$

Решение при n=2 и отсутствии силы тяги

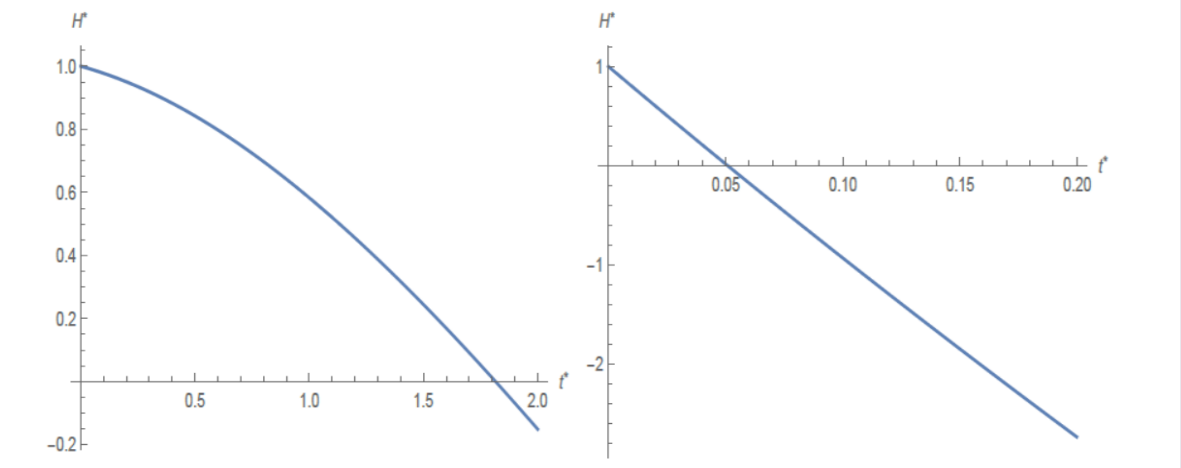
Решение при $mg < F_{\text{арх}}$ $(C < 0)$

$v(t) = \frac{dH}{dt} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{k}\,\left(1+\frac{b-\sqrt{kb}v_0}{\sqrt{kb}v_0+b}e^{\frac{2\sqrt{kb}}{m}t}\right)} - \sqrt{\frac{b}{k}}$ - уравнение с разделяющимися переменными,

$H(t) = \sqrt{\frac{b}{k}}t + \frac{m}{k}Ln\left|\frac{2b}{(b-\sqrt{kb}v_0)e^{\frac{2\sqrt{kb}}{m}t}+\sqrt{kb}v_0+b}\right| + H_0.$

В безразмерном виде $H^* = \frac{At^*}{2} - ALn\left|\frac{(1-B)e^{t^*}+B+1}{2}\right|$+1.

Графики решения при различных значениях параметра A



$A = 2; B = -0.2$ $\quad$ $A = 20; B = -2$

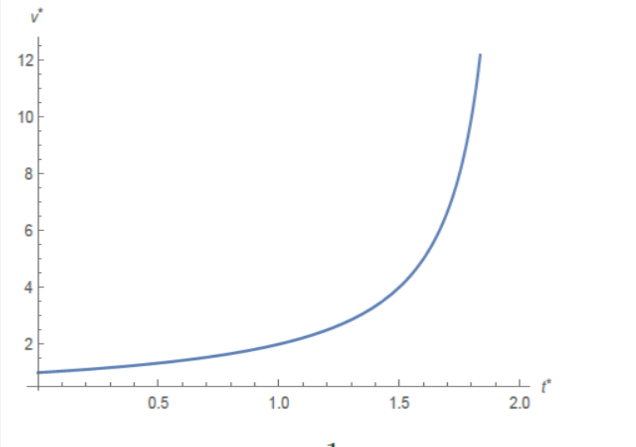
Решение при n=2 и отсутствии силы тяги

Решение при $mg = F_{\text{арх}}$ $(C = 0)$

$\frac{dv}{kv^2} = \frac{dt}{m}$ - уравнение с разделяющимися переменными.

$v(t) = -\frac{1}{k\left(\frac{t}{m} - \frac{1}{kv_0}\right)}$.

В безразмерном виде $v^* = -\frac{1}{At^* - 1}$.

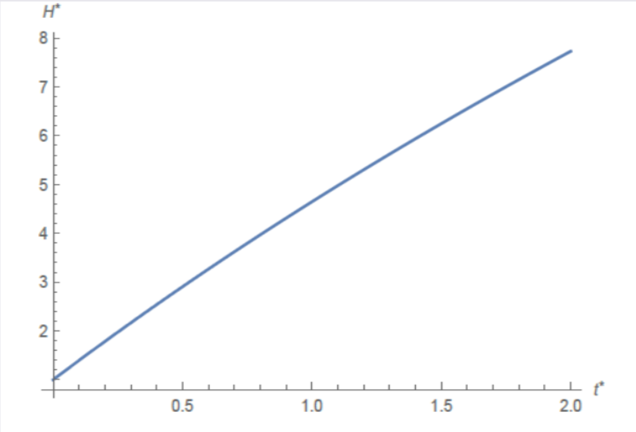


$A = \frac{1}{2}$

$v(t) = \frac{dH}{dt} = -\frac{1}{k\left(\frac{t}{m} - \frac{1}{kv_0}\right)}$,

$H(t) = \frac{m}{k} Ln\left|\frac{1}{1 - \frac{kv_0}{m}t}\right| + H_0$.

В безразмерном виде $H^* = -ALn|1 - Bt^*| + 1$.



$A = 20,\ B = -0.2$

Решение при n=2 с силой тяги

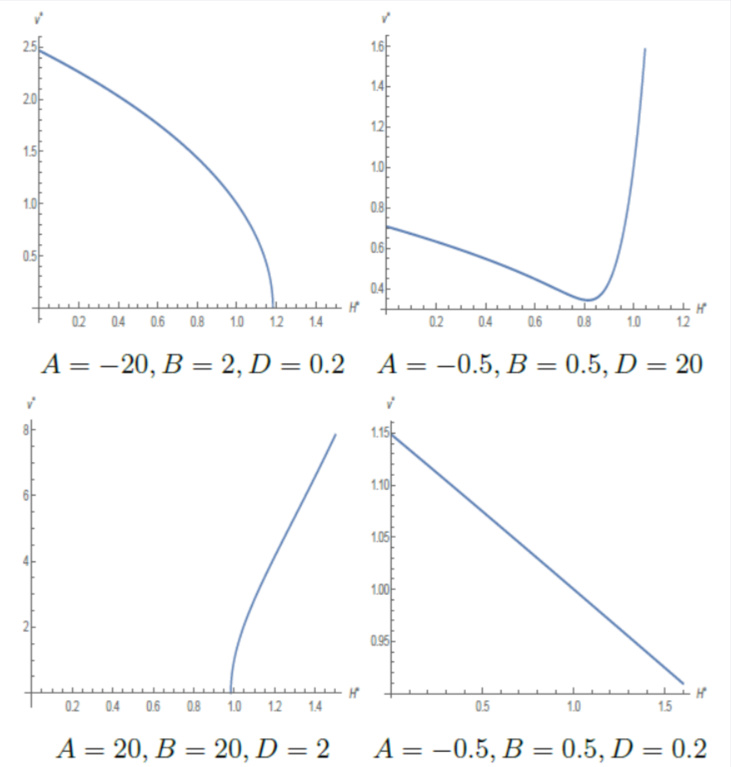
Пусть $H \le H_1$, тогда $P = P_0 - aH$,

$mv\frac{dv}{dH} = C + kv^2 - P_0 + aH \leftrightarrow v\frac{dv}{dH} - \frac{k}{m}v^2 = \frac{C-P_0}{m} + \frac{aH}{m}$ - уравнение Бернулли.

$v(H) = \sqrt{-\frac{C-P_0+aH}{K} - \frac{am}{2k^2} + \left(v_1^2 + \frac{C-P_0+aH_1}{k} + \frac{am}{2k^2}\right)e^{2\frac{k}{m}(H-H_1)}}.$

В безразмерном виде $v^* = \sqrt{-(A+BH^*) + (1+A+B)e^{D(H^*-1)}}.$

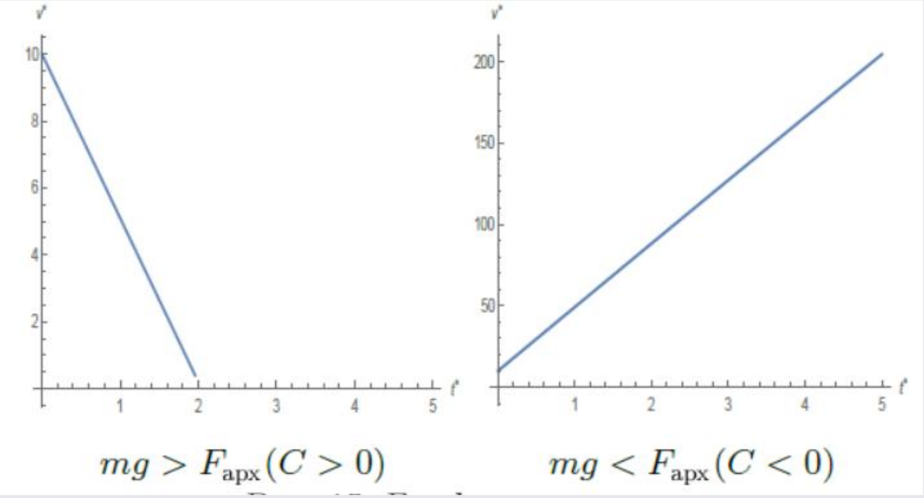
Графики решения при различных значениях параметров A, B, C, D



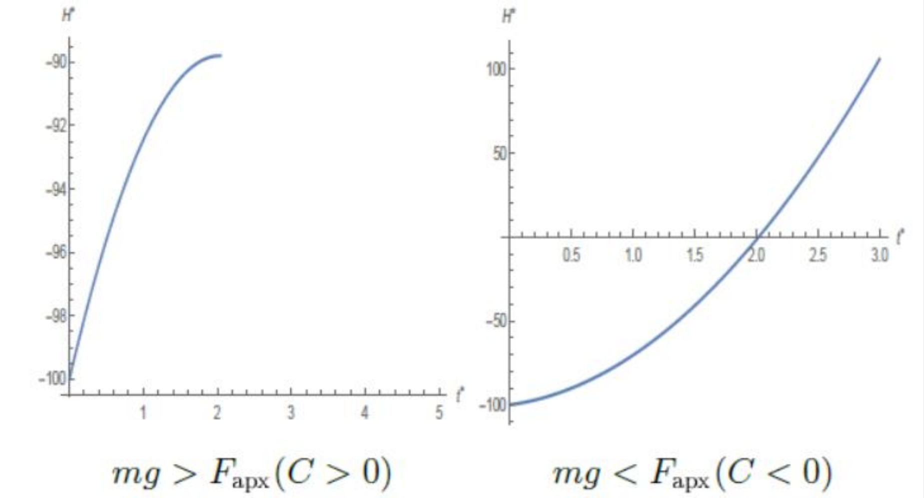
Численное решение при n=7/4 и отсутствии силы тяги

Пусть $n = 7/4, H_1 \le H \le H_0$, тогда $P \equiv 0$, тогда векторное уравнение в проекции на вертикальную ось направленную вверх имеет вид $m\frac{dv}{dt} = -C - kv^{\frac{7}{4}}$. Для получения численного решения воспользуемся пакетом Wolfram Mathematica.

$v(t), \quad v_0 = 10$ (м/c)



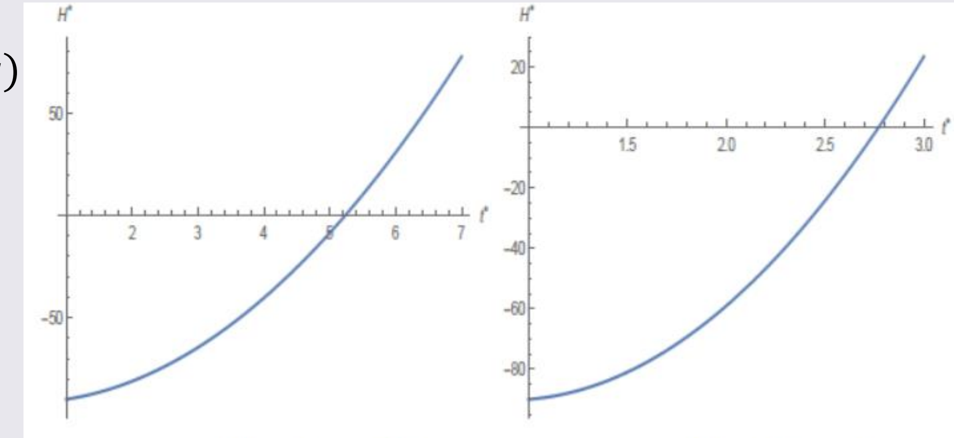
$H(t), H_0 = 100$(м)$, v_0 = 10$ (м/c)



Численное решение при n=7/4 с силой тяги

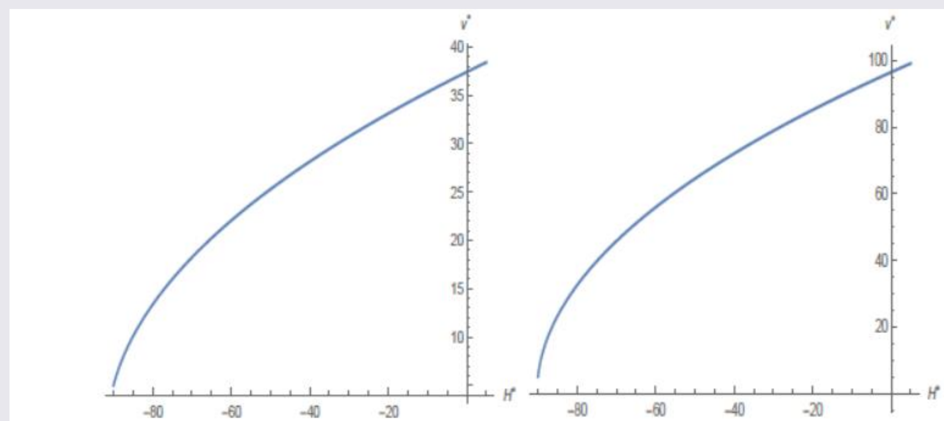
Пусть $H \leq H_1$, тогда $P = P_0 - aH$, тогда $m\frac{dv}{dt} = -C - kv^{\frac{7}{4}} + P_0 - aH$,

$H(t), t_1 = 1(\text{с}), H_1 = 90(\text{м}), v_1 = 5\ (\text{м}/c)$



$mg > F_{\text{apx}}(C > 0)$ $\quad$ $mg < F_{\text{apx}}(C < 0)$

v(H), $H_1 = 90(\text{м})$, $v_1 = 5\ (\text{м}/c)$



$mg > F_{\text{apx}}(C > 0)$ $\quad$ $mg < F_{\text{apx}}(C < 0)$

Выводы

В работе была построена математическая модель вертикального движения баллистической ракеты. Разобраны частные случаи построенной модели и для каждого из них получено точное аналитическое решение и проведено его исследование. Проведен численный анализ этой модели при $n = 7/4$.

$P \equiv 0$			
n	1	7/4	2
v(м/с)	90.56	93.61	95.05
H(м)	102.48	103.21	104.80

Таблица 1

$P = P_0 - aH$			
n	1	7/4	2
v(м/с)	97.57	96.27	93.46
H(м)	6.18	6.84	8.24

Таблица 2

Из таблиц 1,2 заметим, что при изменении параметра n скорость ракеты изменятеся нелинейно как с силой тяги, так и без неё. (В качестве остальных параметров были взяты: $m = 2000$(кг), $V = 10(\text{м}^3)$, $v_0 = 100\left(\frac{\text{м}}{c}\right)$, $v_1 = 90\left(\frac{\text{м}}{c}\right)$, $H_0 = 200(\text{м})$, $H_1 = 100(\text{м})$, $\text{P}_0 = 250000(\text{Н})$, $a = 25$, $k = 10$, а вычисления текущего значения глубины и скорости для таблиц 1,2 были проведены для моментов времени $t_1 = 1(c)$, $t_2 = 3(c)$ соответственно).

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное учреждение
высшего образования
«**Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана**
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Прикладная математика»

Курсовая работа

по дисциплине «Дифференциальные уравнения»

Подводный старт ракеты

Выполнил	студент группы ФН2-41	Разумов Т.Е.
Научный руководитель	профессор кафедры ФН-2	Кувыркин Г.Н.

Москва 2017