# МЕТОД ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ ЭПИДЕМИИ ИНФЕКЦИОННЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ

## Система уравнений движения индивидов и переноса инфекции

Уравнение переноса инфекции. Уравнение для вероятности нахождения индивида в состояниях модели SIR

$$\frac{\mathrm{d}P_S^{(\alpha)}(t)}{\mathrm{d}t} = -\sum_{\beta\neq\alpha}^{N_0} \Gamma^{(\alpha\beta)}(t) P_I^{(\beta)}(t) P_S^{(\alpha)}(t) ,$$

$$\frac{\mathrm{d}P_I^{(\alpha)}(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{\beta\neq\alpha}^{N_0} \Gamma^{(\alpha\beta)}(t) P_I^{(\beta)}(t) P_S^{(\alpha)}(t) - \Theta^{(\alpha)} P_I^{(\alpha)}(t) ,$$

$$\frac{\mathrm{d}P_R^{(\alpha)}(t)}{\mathrm{d}t} = \Theta^{(\alpha)} P_I^{(\alpha)}(t) .$$

Здесь $P_S^{(\alpha)}, P_I^{(\alpha)}, P_R^{(\alpha)}$ – вероятности нахождения индивида $\alpha$ в состоянии восприимчивом, инфицированном и в стадии тяжелого заболевания соответственно; $\Theta^{(\alpha)}$ – величина, обратная характерному времени «жизни» вируса внутри индивида; $\Gamma^{(\alpha\beta)}$ – характерная скорость передачи вируса индивиду $\alpha$ вследствие его контакта с инфицированными индивидами в популяции.

Считаем, что интенсивность передачи инфекции снижается с увеличением расстояния между индивидами

$$\Gamma^{(\alpha\beta)}(t) = \Gamma_0^{(\alpha\beta)} \exp\left\{ -\frac{\left|\mathbf{X}^{(\alpha)}(t) - \mathbf{X}^{(\beta)}(t)\right|}{L_0} \right\}.$$

Здесь $\Gamma_0^{(\alpha\beta)}$ – некоторая постоянная, зависящая от типа вируса; $\mathbf{X}^{(\alpha)}, \mathbf{X}^{(\beta)}$ – координаты расположения индивидов; $L_0$ – характерное расстояние инфицирования, зависящее от особенностей проживания и общения индивидов.

Уравнение движения индивидов

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V}^{(\alpha)}(t)$$

Скорость перемещения индивидов зависит от их биологического состояния

$$\mathbf{V}^{(\alpha)}(t) = \mathbf{V}^{(\alpha)}\left(t \middle| P_S^{(\alpha)}, P_I^{(\alpha)}\right)$$

Пространство состояний

$$\mathbf{Z}^{(\alpha)}(t) = \left\{P_S^{(\alpha)}, P_I^{(\alpha)}, \mathbf{X}^{(\alpha)}(t), \mathbf{V}^{(\alpha)}(t)\right\}$$
$$P_S^{(\alpha)} + P_I^{(\alpha)} + P_R^{(\alpha)} = 1$$
$$0 \le P_S^{(\alpha)} + P_I^{(\alpha)} \le 1$$
$$0 \le P_S^{(\alpha)} \le 1 \qquad 0 \le P_I^{(\alpha)} \le 1$$

## Индикаторная функция

$$S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}, t\right) = \delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)} - \mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right) P_S^{(\alpha)}(t)$$
$$I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}, t\right) = \delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)} - \mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right) P_I^{(\alpha)}(t)$$
$$R^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}, t\right) = \delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)} - \mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right) P_R^{(\alpha)}(t)$$

Условие реализации $P_S^{(\alpha)} + P_I^{(\alpha)} + P_R^{(\alpha)} = 1$

Актуальное значение в популяции восприимчивых, инфицированных и в состоянии тяжелого заболевания точке $\mathbf{X}^{(\alpha)}$ находим как

$$S\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}, t\right) = \sum_{\alpha=1}^{N_0} S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}, t\right) = \sum_{\alpha=1}^{N_0} \delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)} - \mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right) P_S^{(\alpha)}(t) \ ,$$

$$I\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)=\sum_{\alpha=1}^{N_0} I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)=\sum_{\alpha=1}^{N_0}\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)P_I^{(\alpha)}(t)\ ,$$

$$R\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)=\sum_{\alpha=1}^{N_0} R^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)=\sum_{\alpha=1}^{N_0}\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)P_R^{(\alpha)}(t)\ .$$

Среднее значение восприимчивых, выраженное через индикаторную функцию

$$\begin{aligned}\left\langle S(t)\right\rangle &= \int \mathrm{d}\mathbf{X}^{(\alpha)}\sum_{\alpha=1}^{N_0} S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)=\\ &=\int \mathrm{d}\mathbf{X}^{(\alpha)}\sum_{\alpha=1}^{N_0}\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)P_S^{(\alpha)}(t)=\sum_{\alpha=1}^{N_0}P_S^{(\alpha)}(t)\end{aligned}$$

Условие нормировки для суммарной вероятности одного индивида

$$\begin{aligned}&\int\left\{S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)+I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)+R^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\}\mathrm{d}\mathbf{X}^{(\alpha)}=\\ &=P_S^{(\alpha)}(t)+P_I^{(\alpha)}(t)+P_R^{(\alpha)}(t)=1\end{aligned}$$

$$S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)+I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)+R^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)=\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)$$

## Уравнение для индикаторной функции

Производная по времени от индикаторной функции восприимчивых равна

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)=\frac{\partial}{\partial t}\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)P_S^{(\alpha)}(t)=\\ &=-\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)P_S^{(\alpha)}(t)\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)}{\mathrm{d}t}\right\}+\\ &+\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)\frac{\mathrm{d}P_S^{(\alpha)}(t)}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

В результате подстановки имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)P_S^{(\alpha)}(t)\mathbf{V}^{(\alpha)}\left(t\middle|P_\alpha^{(S)},P_\alpha^{(I)}\right)\right\}-$$

$$-\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)\sum_{\beta\neq\alpha}^{N_0}\Gamma^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)-\mathbf{X}^{(\beta)}(t)\right)P_I^{(\beta)}(t)P_S^{(\alpha)}(t)$$

Уравнение для индикаторной функции инфицированных

$$\frac{\partial}{\partial t}I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)=\frac{\partial}{\partial t}\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)P_I^{(\alpha)}(t)=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)P_I^{(\alpha)}(t)\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)}{\mathrm{d}t}\right\}+$$

$$+\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)\frac{\mathrm{d}P_I^{(\alpha)}(t)}{\mathrm{d}t}$$

В результате подстановки, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{P_I^{(\alpha)}(t)\mathbf{V}^{(\alpha)}\left(t\middle|P_\alpha^{(S)},P_\alpha^{(I)}\right)\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)\right\}+$$

$$+\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)\sum_{\beta\neq\alpha}^{N_0}\Gamma^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)-\mathbf{X}^{(\beta)}(t)\right)P_I^{(\beta)}(t)P_S^{(\alpha)}(t)-$$

$$-\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)\Theta^{(\alpha)}P_I^{(\alpha)}(t)$$

С учетом динамики изменения инфицированных

$$\frac{\partial}{\partial t}I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{P_I^{(\alpha)}(t)\mathbf{V}^{(\alpha)}\left(t\middle|P_\alpha^{(S)},P_\alpha^{(I)}\right)\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)\right\}+$$

$$+\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)\left\{\sum_{\beta\neq\alpha}^{N_0}\Gamma^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)-\mathbf{X}^{(\beta)}(t)\right)P_I^{(\beta)}(t)P_S^{(\alpha)}(t)-\Theta^{(\alpha)}P_I^{(\alpha)}(t)\right\}$$

Уравнение для индикаторной функции с тяжелой формой заболевания

$$\frac{\partial}{\partial t}R^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)P_R^{(\alpha)}(t)\mathbf{V}^{(\alpha)}\left(t\middle|P_\alpha^{(S)},P_\alpha^{(I)}\right)\right\}+$$

$$+\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)\Theta^{(\alpha)}P_I^{(\alpha)}(t)$$

Выполняется условие баланса в точке пространства $\mathbf{X}^{(\alpha)}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)+I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)+R^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\}=$$
$$=-\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)\left[P_S^{(\alpha)}(t)+P_I^{(\alpha)}(t)+P_R^{(\alpha)}(t)\right]\mathbf{V}^{(\alpha)}\left(t\middle|P_\alpha^{(S)},P_\alpha^{(I)}\right)\right\}$$

Или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)+I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)+R^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\}=$$
$$=-\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{\mathbf{V}^{(\alpha)}\left(t\middle|P_\alpha^{(S)},P_\alpha^{(I)}\right)\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)\right\}$$

Учитываем равенство

$$S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)+I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)+R^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)=\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)$$

Получаем уравнение диффузии для концентрации индивидов

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)=-\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{\mathbf{V}^{(\alpha)}\left(t\middle|P_\alpha^{(S)},P_\alpha^{(I)}\right)\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)\right\}$$

## Нелокальное уравнение диффузии

Для слагаемого, учитывающего инфицирование, имеем

$$\left\langle\sum_{\beta\neq\alpha}^{N_0}\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)\Gamma^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)-\mathbf{X}^{(\beta)}(t)\right)P_I^{(\beta)}(t)P_S^{(\alpha)}(t)\right\rangle=$$
$$=\left\langle\sum_{\beta\neq\alpha}^{N_0}\int d\mathbf{X}^{(\beta)}\delta\left(\mathbf{X}^{(\beta)}-\mathbf{X}^{(\beta)}(t)\right)P_I^{(\beta)}(t)\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)P_S^{(\alpha)}(t)\right\rangle\Gamma^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{X}_\alpha-\mathbf{X}_\beta\right)\approx$$
$$\approx\sum_{\beta\neq\alpha}^{N_0}\int d\mathbf{X}^{(\beta)}\left\langle\delta\left(\mathbf{X}^{(\beta)}-\mathbf{X}^{(\beta)}(t)\right)P_I^{(\beta)}(t)\right\rangle\left\langle\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)P_S^{(\alpha)}(t)\right\rangle\Gamma^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{X}_\alpha-\mathbf{X}_\beta\right)=$$
$$=\sum_{\beta\neq\alpha}^{N_0}\int d\mathbf{X}^{(\beta)}\Gamma^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\beta)}\right)\left\langle I^{(\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\beta)},t\right)\right\rangle\left\langle S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle$$

Получаем

$$\sum_{\beta\neq\alpha}^{N_0}\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)\Gamma^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)-\mathbf{X}^{(\beta)}(t)\right)P_I^{(\beta)}(t)P_S^{(\alpha)}(t)=$$

$$=\sum_{\beta\neq\alpha}^{N_0}\int d\mathbf{X}^{(\beta)}\Gamma^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\beta)}\right)I^{(\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\beta)},t\right)S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)$$

Нелокальное уравнение для индикаторной функции восприимчивых

$$\frac{\partial}{\partial t}S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)P_S^{(\alpha)}(t)\mathbf{V}^{(\alpha)}\left(t\middle|P_\alpha^{(S)},P_\alpha^{(I)}\right)\right\}-$$
$$-\sum_{\beta\neq\alpha}^{N_0}\int d\mathbf{X}^{(\beta)}\Gamma^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\beta)}\right)I^{(\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\beta)},t\right)S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)$$

Переписываем в терминах индикаторной функции

$$\frac{\partial}{\partial t}S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\mathbf{V}^{(\alpha)}\left(t\middle|P_\alpha^{(S)},P_\alpha^{(I)}\right)\right\}-$$
$$-\sum_{\beta\neq\alpha}^{N_0}\int d\mathbf{X}^{(\beta)}\Gamma^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\beta)}\right)I^{(\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\beta)},t\right)S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)$$

Уравнение для индикаторной функции инфицированных

$$\frac{\partial}{\partial t}I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\mathbf{V}^{(\alpha)}\left(t\middle|P_\alpha^{(S)},P_\alpha^{(I)}\right)\right\}+$$
$$+\sum_{\beta\neq\alpha}^{N_0}\int d\mathbf{X}^{(\beta)}\Gamma^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\beta)}\right)I^{(\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\beta)},t\right)S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)-\Theta^{(\alpha)}I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\beta)},t\right)$$

Уравнение для индикаторной функции заболевших

$$\frac{\partial}{\partial t}R^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{R^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\mathbf{V}^{(\alpha)}\left(t\middle|P_\alpha^{(S)},P_\alpha^{(I)}\right)\right\}+\Theta^{(\alpha)}I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)$$

## Уравнения баланса для популяции

Суммируем по всем членам популяции

$$\left\langle S\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle=\sum_{\alpha=1}^{N_0}\left\langle S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle$$

Уравнение для осредненной вероятности восприимчивого состояния

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle=-\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\langle S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\mathbf{V}^{(\alpha)}\left(t\left|P_{\alpha}^{(S)},P_{\alpha}^{(I)}\right.\right)\right\rangle-$$
$$-\sum_{\beta\neq\alpha}^{N_0}\int \mathrm{d}\mathbf{X}^{(\beta)}\Gamma^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\beta)}\right)\left\langle I^{(\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\beta)},t\right)\right\rangle\left\langle S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle$$

Раскрываем слагаемое с корреляцией смещения

$$\left\langle S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\mathbf{V}^{(\alpha)}\left(t\left|P_{\alpha}^{(S)},P_{\alpha}^{(I)}\right.\right)\right\rangle=$$
$$=-D^{(\alpha)}\left(t\left|P_{\alpha}^{(S)},P_{\alpha}^{(I)}\right.\right)\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\langle S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle$$

Замкнутое нелокальное уравнение для вероятности восприимчивого состояния с учетом диффузии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle=\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{D^{(\alpha)}\left(t\left|P_{\alpha}^{(S)},P_{\alpha}^{(I)}\right.\right)\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\langle S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle\right\}-$$
$$-\sum_{\beta\neq\alpha}^{N_0}\int \mathrm{d}\mathbf{X}^{(\beta)}\Gamma^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\beta)}\right)\left\langle I^{(\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\beta)},t\right)\right\rangle\left\langle S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle$$

Уравнение диффузии вероятности инфицированного состояния

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle=\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{D^{(\alpha)}\left(t\left|P_{\alpha}^{(S)},P_{\alpha}^{(I)}\right.\right)\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\langle I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle\right\}+$$
$$+\sum_{\beta\neq\alpha}^{N_0}\int \mathrm{d}\mathbf{X}^{(\beta)}\Gamma^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\beta)}\right)I^{(\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\beta)},t\right)S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)-\Theta^{(\alpha)}\left\langle I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\beta)},t\right)\right\rangle$$

Уравнение диффузии вероятности тяжелого заболевания

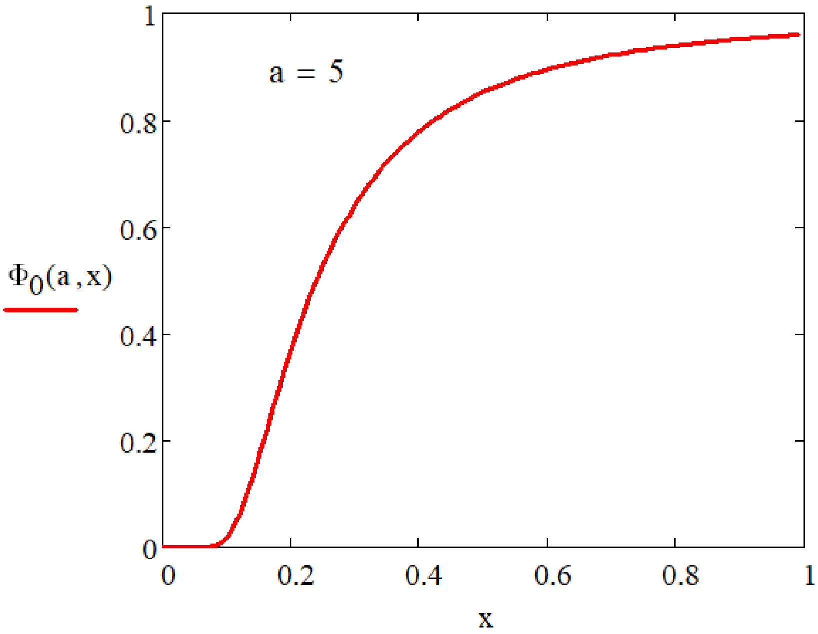
$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle R^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle=\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{D^{(\alpha)}\left(t\left|P_{\alpha}^{(S)},P_{\alpha}^{(I)}\right.\right)\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\langle R^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle\right\}+$$
$$+\Theta^{(\alpha)}\left\langle I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle$$

Аппроксимация коэффициента диффузии

$$D^{(\alpha)}\left(t\middle|P_\alpha^{(S)},P_\alpha^{(I)}\right)=D_0^{(\alpha)}\Phi\left(P_\alpha^{(R)}(t)\right)$$

Здесь

$$\Phi_0(a,x)=\exp\left(-\frac{1}{(ax)^2}\right) \tag{1}$$




Условие баланса

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left\langle S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle+\left\langle I^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle+\left\langle R^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle\right\}=\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)\right\rangle$$

Получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)\right\rangle=\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{D^{(\alpha)}\left(t\middle|P_\alpha^{(S)},P_\alpha^{(I)}\right)\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\langle\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)\right\rangle\right\}$$

Для популяции в целом имеем. Обозначаем для популяции долю восприимчивых, инфицированных и тяжело заболевших как

$$\left\langle S\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle=\sum_{\alpha=1}^{N_0}\left\langle S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle=\sum_{\alpha=1}^{N_0}\left\langle\delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)P_S^{(\alpha)}(t)\right\rangle$$

Получаем

$$\frac{1}{N_0}\left\langle S\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle = \left\langle P_S\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle = \frac{1}{N_0}\sum_{\alpha=1}^{N_0}\left\langle \delta\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)\right)P_S^{(\alpha)}(t)\right\rangle$$

## Уравнения для относительной доли восприимчивых, инфицированных и тяжело больных

Имеем для уравнения восприимчивых в популяции

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{N_0}\sum_{\alpha=1}^{N_0}\left\langle S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle = \\
&=\frac{1}{N_0}\sum_{\alpha=1}^{N_0}\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{D^{(\alpha)}\left(t\left|P_\alpha^{(S)},P_\alpha^{(I)}\right.\right)\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\langle S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle\right\}- \\
&-\frac{1}{N_0}\sum_{\alpha=1}^{N_0}\sum_{\beta\neq\alpha}^{N_0}\int \mathrm{d}\mathbf{X}^{(\beta)}\Gamma^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)}-\mathbf{X}^{(\beta)}\right)\left\langle I^{(\beta)}\left(\mathbf{X}^{(\beta)},t\right)\right\rangle\left\langle S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle
\end{aligned}$$

При условии, что $\Gamma^{(\alpha\alpha)}(0)=0$ получаем с учетом аппроксимации диффузионного слагаемого

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N_0}\sum_{\alpha=1}^{N_0}\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{D^{(\alpha)}\left(t\left|P_\alpha^{(S)},P_\alpha^{(I)}\right.\right)\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\langle S^{(\alpha)}\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle\right\}\approx \\
&\approx\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\{D\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}}\left\langle P_S\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle\right\}
\end{aligned}$$

Здесь эффективный коэффициент диффузии зависит от локальной доли тяжело больных

$$D\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)=D_0\Phi_0\left(\left\langle P_R\left(\mathbf{X}^{(\alpha)},t\right)\right\rangle\right)$$

Для слагаемого с инфицированием в предположении, что осредненные параметры меняются слабо на характерной длине инфицирования, получаем

$$N_0 \frac{1}{N_0^2} \sum_{\alpha=1}^{N_0} \sum_{\beta=1}^{N_0} \int \mathrm{d}\mathbf{X}^{(\beta)} \Gamma^{(\alpha\beta)} \left( \mathbf{X}^{(\alpha)} - \mathbf{X}^{(\beta)} \right) \left\langle I^{(\beta)} \left( \mathbf{X}^{(\beta)}, t \right) \right\rangle \left\langle S^{(\alpha)} \left( \mathbf{X}^{(\alpha)}, t \right) \right\rangle \approx$$
$$\approx N_0 \int \mathrm{d}\mathbf{X}^{(\beta)} \Gamma^{(\alpha\beta)} \left( \mathbf{X}^{(\alpha)} - \mathbf{X}^{(\beta)} \right) \left\langle P_I \left( \mathbf{X}^{(\beta)}, t \right) \right\rangle \left\langle P_S \left( \mathbf{X}^{(\alpha)}, t \right) \right\rangle$$

Окончательно уравнение диффузии для относительной доли восприимчивых принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle P_S \left( \mathbf{X}^{(\alpha)}, t \right) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}} \left\{ D\left( \mathbf{X}^{(\alpha)}, t \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^{(\alpha)}} \left\langle P_S \left( \mathbf{X}^{(\alpha)}, t \right) \right\rangle \right\} -$$
$$- N_0 \int \mathrm{d}\mathbf{X}^{(\beta)} \Gamma^{(\alpha\beta)} \left( \mathbf{X}^{(\alpha)} - \mathbf{X}^{(\beta)} \right) \left\langle P_I \left( \mathbf{X}^{(\beta)}, t \right) \right\rangle \left\langle P_S \left( \mathbf{X}^{(\alpha)}, t \right) \right\rangle$$

Без учета специального индекса у координаты, записываем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left\langle P_S (\mathbf{X}, t) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left\{ D(\mathbf{X}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left\langle P_S (\mathbf{X}, t) \right\rangle \right\} - \\ &- N_0 \int \Gamma(\mathbf{X} - \mathbf{X}') \left\langle P_I (\mathbf{X}', t) \right\rangle \mathrm{d}\mathbf{X}' \left\langle P_S (\mathbf{X}, t) \right\rangle \end{aligned} \tag{2}$$

Аналогично получаем уравнение для относительной доли инфицированных в популяции

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left\langle P_I (\mathbf{X}, t) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left\{ D(\mathbf{X}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left\langle P_I (\mathbf{X}, t) \right\rangle \right\} + \\ &+ N_0 \int \Gamma(\mathbf{X} - \mathbf{X}') \left\langle P_I (\mathbf{X}', t) \right\rangle \mathrm{d}\mathbf{X}' \left\langle P_S (\mathbf{X}, t) \right\rangle - \Theta_0 \left\langle P_I (\mathbf{X}, t) \right\rangle \end{aligned} \tag{3}$$

Уравнение для относительной доли с тяжелой формой заболевания

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle P_R (\mathbf{X}, t) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left\{ D(\mathbf{X}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left\langle P_R (\mathbf{X}, t) \right\rangle \right\} + \Theta_0 \left\langle P_I (\mathbf{X}, t) \right\rangle \tag{4}$$

Здесь коэффициент передачи инфекции аппроксимируем как

$$\Gamma(\mathbf{X} - \mathbf{X}') = \Gamma_0 \exp\left\{ -\frac{|\mathbf{X} - \mathbf{X}'|}{L_0} \right\} \tag{5}$$

Аппроксимация коэффициента диффузии

$$D(\mathbf{X},t) = D_0\Phi_0\left(\left\langle P_R(\mathbf{X},t)\right\rangle\right) \tag{6}$$

## Постановка модельной задачи 1

Характерную длину инфицирования задаем равной $L_0 = 1$ .

Распространение эпидемии в безграничной области. Начальное распределение

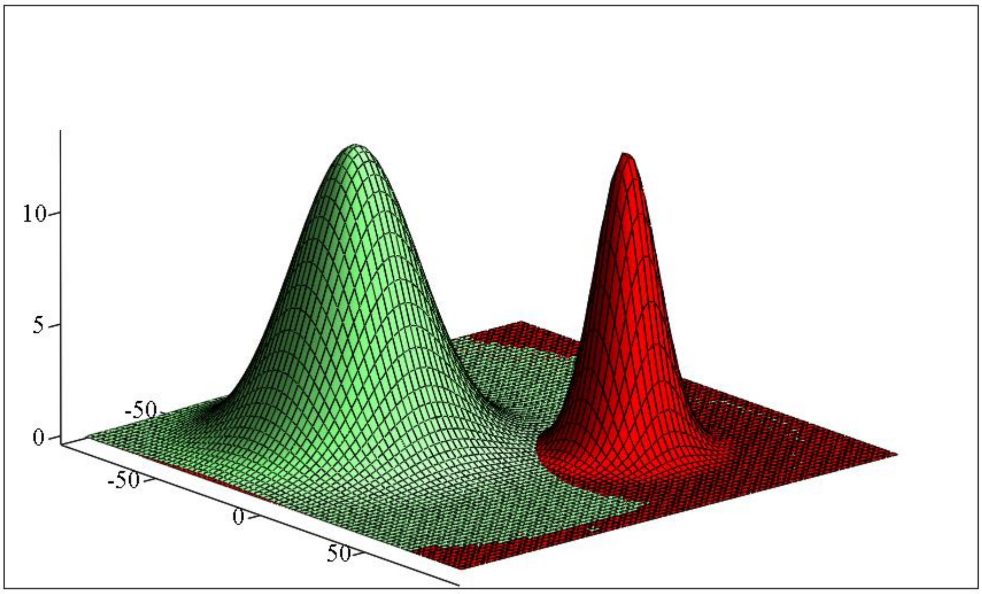



*Рис. 1 . Пример начального распределения восприимчивых и инфицированных*

Уравнения и замыкающие соотношения (1) - (6), $N_0 = 10^3$.

Константы диффузии $D_0$, скорости вырождения вируса $\Theta_0$ и передачи инфекции $\Gamma_0$ подберем по результатам серии расчетов.