Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Прикладная математика»

Лабораторная работа №4

по дисциплине «Методы вычислений»

Методы решения проблемы собственных значений

Выполнили студенты группы ФН2-51 *Разумов Т.Е.*
Швечков И.В.

Москва — 2017

Контрольные вопросы

1. Почему нельзя находить собственные числа матрицы A, прямо решая уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, а собственные векторы — «по определению», решая систему $(A - \lambda_j E)e_j = 0$?
2. Докажите, что ортогональное преобразование подобия сохраняет симметрию матрицы.
3. Как преобразование подобия меняет собственные векторы матрицы?
4. Почему на практике матрицу A подобными преобразованиями вращения приводят только к форме Хессенберга, но не к треугольному виду?
5. Оцените количество арифметических операций, необходимое для приведения произвольной квадратной матрицы A к форме Хессенберга.
6. Сойдется ли алгоритм обратных итераций, если в качестве начального приближения взять собственный вектор, соответствующий другому собственному значению? Что будет в этой ситуации в методе обратной итерации, использующем отношение Рэлея?
7. Сформулируйте и обоснуйте критерий останова для QR-алгоритма отыскания собственных значений матрицы.
8. Предложите возможные варианты условий перехода к алгоритму со сдвигами. Предложите алгоритм выбора величины сдвига.
9. Для чего нужно на каждой итерации нормировать приближение к собственному вектору?
10. Приведите примеры использования собственных чисел и собственных векторов в численных методах.

Ответы на контрольные вопросы

1. Пытаясь найти собственные числа матрицы A мы столкнемся с двумя проблемами: нахождение коэффициентов характеристичекого многочлена и нахождения его корней, что для многочлена высокой степени является трудоемким процессом. Находить собственные векторы нельзя, так как в общем случае мы не знаем точных значений собственных чисел, а значит матрица $A-\lambda_j E$ может быть невырожденой и решение системы $(A-\lambda_j E)e_j = 0$ может быть только тривиальным.
2. Рассмотрим симметричную матрицу $A \Rightarrow A^T = A$. Рассмотрим ортогональное преобразование подобия $R = P^{-1}AP$, где $P^{-1} = P^T$, т.е. P-ортогональная матрица. Тогда $R^T = (P^{-1}AP)^T = P^T(P^{-1}A)^T = P^T A^T (P^{-1})^T = P^{-1}AP = R$.
3. Пусть x – собственный вектор матрицы A соответствующий собственному числу λ, тогда, после преобразования подобия $R = T^{-1}AT$, $Ax = \lambda x$ преобразуется к $TRT^{-1}x = \lambda x \Rightarrow RT^{-1}x = \lambda T^{-1}x$, т.е. собственный вектор x преобразуется в $T^{-1}x$.
4. Если мы внимательней посмотрим на алгоритм подобных преобразований вращения, то мы заметим, что обнуляются все элементы, лежащие левее элемеента стоящего на поддиагонали, то построив такую последовательность элементарных вращений, которая приведет матрицу A к форме Хессенберга:

$$A^* = T_{kl}AT_{kl}^{-1} = T_{kl}AT_{kl}^T$$

где T_{kl}-матрица, в которой все элементы главной диагонали равны 1, кроме элементов стоящих на пересечении k-ых столбца и строки и l-ых столбца и строки(они равны $\alpha = \cos\varphi$), а все элементы вне главной диагонали равны 0, за исключением элемента на пересечении k-ого столбца и l-ой строки(он равен $-\beta = -\sin\varphi$) и элемента стоящего на пересечении l-ого столбца и k-ой строки(он равен $\beta = \sin\varphi$), а A^* отличается от матрицы A лишь двумя строками и двумя столбцами с номерами k, l, при этом в матрице A^* элемент $a^*_{l,k-1} = 0$.
По построению матриц T_{kl} видно, что $k > l$ и $k > 1$, а значит можем сделать вывод, что не возможно данными преобразованиями занулить поддиагональные элементы.
5. Для того, чтобы найти матрицу T_{kl} необходимо затратить 5 мультипликативных операций (2 квадрата, один корень и два деления), для того чтобы перемножить T_{kl} и A необходимо затратить $4n$ мультипликативных операций (мы умножаем только 4 элемента матрицы T_{kl} на строки матрицы A), следовательно для нахождения $T_{kl}AT_{kl}^T$ нам потребуется $8n$ мультипликативных операций и это обнулит один элемент матрицы A, так как мы обнуляем только элементы стоящие ниже поддиагонали, то нам потребуется обнулить $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ элементов. Подведя итог, получим: $\frac{(n-1)(n-2)}{2}(8n+5)$, то есть порядка $4n^3$ операций.
6. Так как известные приближения λ_i^* достаточно близки к истинному значению λ_i, то в качестве $x^{(0)}$ можно взять любой нормированный вектор, в том числе и собственный вектор, соответствующий другому собственному значению, и последовательность векторов $x^{(k)}$ довольно быстро сходится к собственному вектору e_i, соответствующему собственому значению λ_i. Комбинированный

метод, использующий метод обратных итераций и соотношение Рэлея, при выборе собственного вектора e_i в качестве начального приближения сойдется к собственному числу λ_i, соответствующему данному собственному вектору.

7. Так как последовательность матриц A_k сходится к верхнетреугольной матрице R, на главной диагонали которой стоят собственные значения, то используя тот факт, что QR-алгоритм последовательно обнуляет элементы начиная с $a_{n,1}$ до $a_{n,n-1}$, то итерационный метод поиска собственного значения следует продолжать пока не будет выполняться неравевство $|a_{n,n-1}| < \varepsilon$, затем считая что $\lambda_i = a_{n,n}$ переходить к задаче меньшей размерности т.е. искать спектр матрицы размерности $(n-1) \times (n-1)$.
8. Можно с помощью леммы Гершгорина оценить диапазон собственных значений и в случае, если оценка диапазона меньше единицы, то мы получим достаточное условие того, что отношение собственных значений близко к единице, и можно будет перейти к алгоритму со сдвигами, взяв в качестве величины сдвига среднее значение из оценки диапазона.
   Так же если элементы $a_{ij}^{(k)}$ матриц $A^{(k)}$, стоящие ниже главной диагонали
   $\frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{ij}^{(k-1)}} \leqslant \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right| \approx 1$, $i > j$, $k = 1, 2, \ldots,$
   то алгоритм будет сходиться очень медленно и следует переходить к алгоритму со сдвигами. В качестве величины сдвига можно взять $a_{n,n}^{(k)}$.
9. Приближение к собственному вектору необходимо нормировать для того чтобы застраховаться от накопления погрешностей и выхода значений перенных за пределы типа.
10. Как и многие явления в математике, к собственным векторам/значениям пришли в следствии рассмотрения конкретных задач. Одна из задач, которая дает геометрическую интерпретацию собственных векторов, есть приведение кривых второго порядка к каноническому виду. Собственные вектора образуют главные направления кривых второго порядка.
    Многие процессы линейны, по-этому теория линейных операторов имеет весьма важное значение. Линейное отображение в общем смысле параллельно перемещает и растягивает (или сжимает). Собственные вектора для линейного оператора это фактически так называемые недвижимые точки.
    В физическом смысле собственные вектора, как и любые «недвижимые точки», это фактически стоки, точки к которым «притягиваются» все остальные точки, расположенные вокруг. Так же, зная собственные значения матрицы системы, описывающий некий процесс можно сделать вывод об её устойчивости.
    В мат. физике основной класс уравнений второго порядка решается благодаря задаче Штурма-Лиувилля - нахождения собственных значений и функций дифференциального оператора определенного вида.
    Зная собственные значения матрицы A можно оценить её обусловленность.