Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Прикладная математика»

Лабораторная работа №2

по дисциплине «Методы вычислений»

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Выполнили студенты группы ФН2-51 *Разумов Т.Е.*
Швечков И.В.

Москва — 2017

Контрольные вопросы

1. Почему условие $||C||$ гарантирует сходимость итерационных методов?
2. Каким следует выбрать итерационный параметр τ в методе простой итерации для увеличения скорости сходимости? Как выбрать начальное приближние x^0?
3. На примере системы из двух уравнений с двумя неизвестными дайте геометрическую интерпретацию метода метода Якоби, метода Зейделя, метода релаксации.
4. При каких условиях сходятся метод простой итерации, метод Якоби, метод Зейделя и метод релаксации? Какую матрицу называют положительно определенной?
5. Выпишите матрицу C для методов Зейделя и релаксации.
6. Почему в общем случае для остановки итерационного процесса нельзя использовать критерий $\| x^k - x^{k-1} \| < \varepsilon$?

7*. Какие еще критерии окончания итерационного процесса Вы можете предложить?

Ответы на контрольные вопросы

1. Пусть $||C|| < 1$. Вычтем из равенства $x^{x+1} = Cx^k + y$ равенство $x = Cx + y$, получим
$$x^{k+1} - x = C(x^k - x) \Rightarrow ||x^{k+1} - x|| = ||C(x^k - x)|| \leqslant ||C||||x^k - x||,$$
так как это неравентсво верно $\forall k \geqslant 0 \Rightarrow$
$$||x^n - x|| \leqslant ||C||||x^{n-1} - x|| \leqslant ||C||^2||x^{n-2} - x|| \leqslant \cdots \leqslant ||C||^n||x^0 - x||.$$
Так как $||x^0 - x|| = const \geqslant 0$ не зависит от n, $||C||^n \to 0$ при $n \to \infty$, то $||x^n - x|| \to 0$ при $n \to \infty$.
2. Метод простой итетрации сходится при $\tau < \frac{2}{\lambda_{max}}$. Итерационный процесс $x^{k+1} = Cx^k + y$ сходится к решению $Ax = f$ каково бы ни было начальное приближение тогда и только тогда, когда $\rho(C) < 1$, из оценки $||x^n - x|| \leqslant ||C||^n||x^0 - x||$ следует, что начальное приближение x^0 желательно выбрать наиболее близким к точному решению. $\tau_{\text{опт}} = \frac{2}{\lambda_{max}+\lambda_{min}}$.
3.

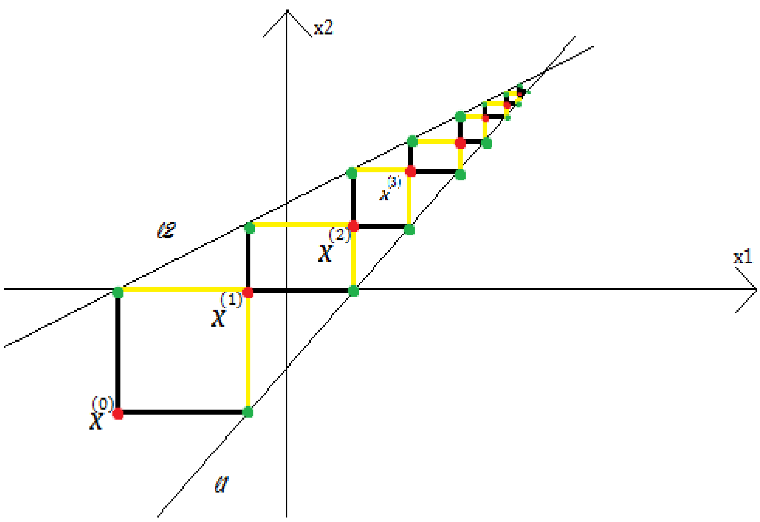

Рис. 1. Метод Якоби.

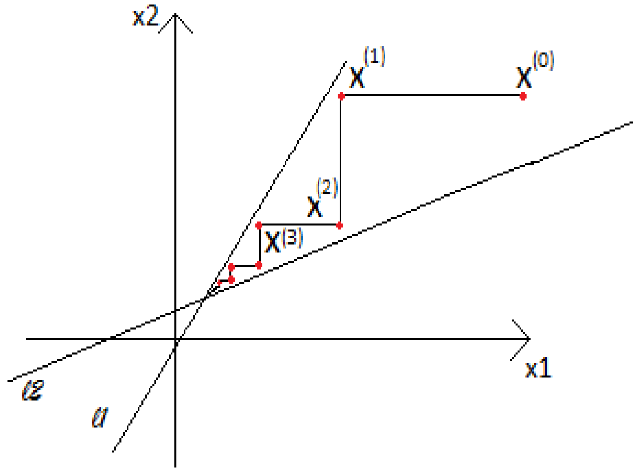

Рис. 2. Метод Релаксации при $\omega < 1$.

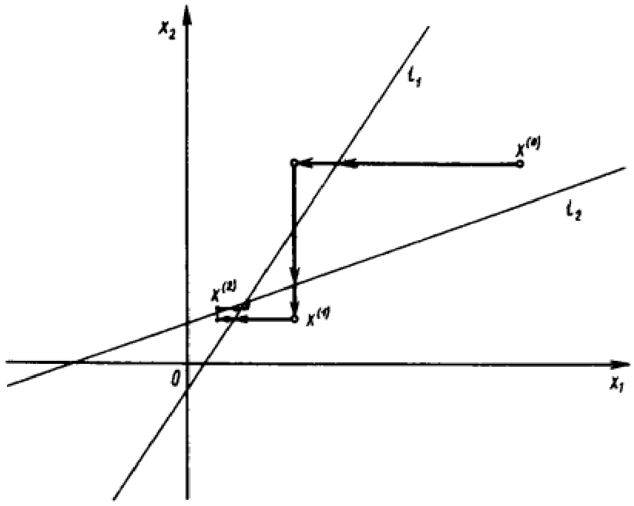

Рис. 3. Метод Релаксации при $\omega > 1$.

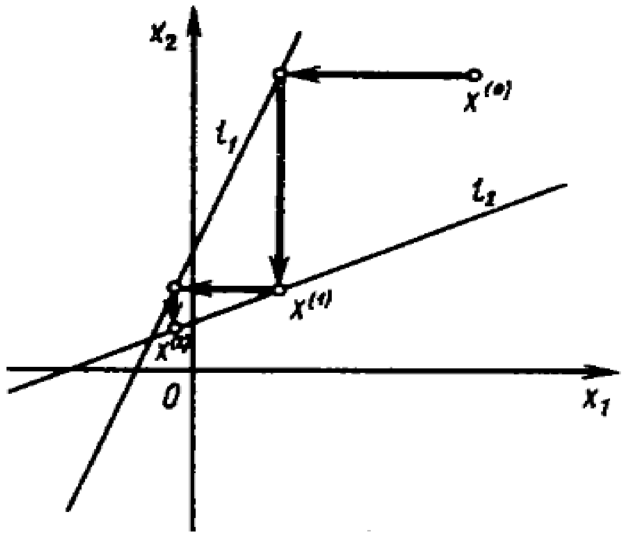

Рис. 4. Метод Зейделя.

4. Если A - симметричная положительно определенная матрица, $\tau > 0$ и выпол-

нено неравенство

$$B - 0,5\tau A > 0.$$

Тогда стационарный итерационный метод

$$B\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} + Ax_k = f$$

сходится.

Если к условию симметричности и положительной определенности матрицы A добавить условие диагонального преобладания, то метод Якоби сходится.

Метод верхней релаксации сходится при симметричности и положительно определенности матрицы A и $\omega \in (0,2)$.

Матрица A называется положительно определенной, если $(Ax, x) > 0\ \forall x \neq 0$.

5. Выпишем матрицу для метода релаксации:

$$(D + \omega L)\frac{(x^{k+1} - x^k)}{\omega} + Ax^k = b,$$

$$(D + \omega L)\frac{x^{k+1}}{\omega} + \left(-\frac{D + \omega L}{\omega} + A\right)x^k = b,$$

$$(D + \omega L)x^{k+1} = (D + \omega L - \omega A)x^k + \omega b,$$

$$x^{k+1} = (D+\omega L)^{-1}(D+\omega L-\omega A)x^k+\omega(D+\omega L)^{-1}b \Rightarrow C = (D+\omega L)^{-1}(D+\omega L-\omega A).$$

Или, если представить матрицу A в виде: $A = L + D + U$, то

$$C = (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)D - \omega U).$$

Для метода Зейделя ($\omega = 1$):

$$x^{k+1} = (D + L)^{-1}(D + L - A)x^k + (D + L)^{-1}b \Rightarrow C = (D + L)^{-1}(D + L - A).$$

Или, если представаить матрицу A в виде: $A = L + D + U$, то $C = -(D + L)^{-1}U$.

6. Потому что указанное условние прерывание итерационного процесса оперирует не нормой погрешности численного решения, а нормами его изменения за одну итерацию. Иногда это приводит к неверному заключению о сходимости метода, если, например, метод очень медленно сходится.

7*.

$$\| x_k - x_{k-1} \| < \varepsilon \| x_k \| + \varepsilon_0,$$

$$\left\|\frac{x_k - x_{k-1}}{\| x_k \| + \varepsilon_0}\right\| < \varepsilon,$$

$$||Ax_{k+1} - f|| < \varepsilon,$$

$$\| x_k - x_{k-1} \| < \frac{1 - ||C||}{||C||}\varepsilon.$$

Так же для метода Зейделя:

$$\| x_k - x_{k-1} \| < \frac{1 - ||C||}{||C_U||}\varepsilon.$$