Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Прикладная математика»

Лабораторная работа №5

по дисциплине «Методы вычислений»

Методы решения нелинейных уравнений

Выполнили студенты группы ФН2-51 *Разумов Т.Е.*
Швечков И.В.

Москва — 2017

Контрольные вопросы

1. Можно ли использовать методы бисекции и Ньютона для нахождения кратных корней уравнения $f(x) = 0$ (т. е. тех, в которых одна или несколько первых производных функций $f(x)$ равны нулю)? Обоснуйте ответ.
2. При каких условиях можно применять метод Ньютона для поиска корней уравнения $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$? При каких ограничениях на функцию $f(x)$ метод Ньютона обладает квадратичной скоростью сходимости? В каких случаях можно применять метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений?
3. Каким образом можно найти начальное приближение?
4. Можно ли использовать метод Ньютона для решения СЛАУ?
5. Предложите альтернативный критерий окончания итераций в методе бисекции, в котором учитывалась бы возможность попадания очередного приближения в очень малую окрестность корня уравнения.
6. Предложите различные варианты модификаций метода Ньютона. Укажите их достоинства и недостатки.
7. Предложите алгоритм для исключения зацикливания метода Ньютона и выхода за пределы области поиска решения?

Ответы на контрольные вопросы

1. Метод бисекции применим только в случае, если кратность корня нечетна, так как должно выполняться условие $f(a_k)f(b_k) < 0$, которое верно, если $f(x)$ в некотрой окрестности x^* меняет знак (в случае, если кратность корня четна, функция не меняет знак). Метод Ньютона применим для поиска корней любой кратности, но скорость сходимости становится линейной, если кратность корня больше единицы.
2. Для решения уравнения $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$ методом Ньютона, необходимо чтобы функция $f(x)$ была непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем, если в некотрой окрестности корня x^* выполнены условия:
$$|f'(x)| \geqslant m > 0, \qquad |f''(x)| \leqslant M, \qquad \frac{|f(x)f''(x)|}{(f'(x))^2} < 1,$$
где M, m – константы, то метод Ньютона сходится с квадратичной скоростью при попадании очередного приближения в эту окрестность.
В случае решения систем нелинейных уравнений для применимости метода Ньютона необходимо сущестование матрицы, обратной матрице $F'(x^k)$. Как и в скалярном случае, метод сходится с квадратичной скоростью, если выбрано хорошее начальное приближение.
3. Для решения уравнения $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$ начальное приближение к корню на отрезке локализации можно найти используя метод хорд или метод деления отрезка пополам. Для решения систем нелинейных уравнений приближение к корню находят визуально.
4. Метод Ньютона применим для решения СЛАУ $Ax = b$, если матрица обратима (т.е. когда СЛАУ имеет единственное решение), причем метод сойдется за одну итерацию, так как он основан на линеаризации систем.
5. Итерационный процесс метода бисекции для нахождения корня так же можно продолжать до тех пор пока не будет выполнено неравенство $|f(x)| < \varepsilon$. Так же для нахождения решения с точностью не меньше ε требуется выполнить следующее число итераций:
$$n = \left[\frac{\ln \frac{b-a}{2\varepsilon}}{\ln 2}\right] + 1.$$
где $[\cdot]$ - целая часть числа.
6. Рассмотрим следующие модификации метода Ньютона:
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{f\left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)}{f'(x_k)}.$$
Скорость сходимости данного метода является кубической, но происходит увеличение вычислительных затрат.
Если вычисление второй производной рассматриваемой функции не вызывает проблем, то можно использовать другую модификацию метода Ньютона:
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{f''(x_k)(f(x_k))^2}{2(f'(x_k))^3},$$

так же дающую кубическую скорость сходимости.
Если вычислять производную в одной точке на всех итерациях

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)},$$

то данная модификация будет обладать линейной скоростью сходимости, но уменьшатся вычислительные затраты.
Аналогичную модификацию можно провести и метода Ньютона, используемого для нахождения корней нелинейных систем уравнений:

$$F'(x_0)(x^{k+1} - x^k) + F(x^k) = 0,$$

что уменьшит вычислительные затраты и скорость сходимости.
Так же можно предложить следующую модификацию:

$$F'(x_0)\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau_{k+1}} + F(x^k) = 0.$$

Скорость сходимости которой зависит выбора от параметра τ_{k+1}.

7. Если при поиске решения нелинейного уравнения или систем линейных уравнений произошло зацикливание, то после 20 итераций следует сменить начальное приближение и начать алгоритм заново. Если же следующее начальное приближение выходит за отрезок локализации, то следует применить следующую модификацию метода Ньютона:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

или для систем:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \alpha(F'(X^{(k)}))^{-1}F(X^{(k)}).$$

Или же используя метод хорд:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{b - x_k}{f(b) - f(x_k)}.$$

Так же можно сменить начальное приближение и возобновить алгоритм.