

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Прикладная математика»



Курсовая работа

по дисциплине «Дифференциальные уравнения»

Подводный старт ракеты

Выполнил

студент группы ФН2-41

Разумов Т.Е.

Научный руководитель

профессор кафедры ФН-2

Кувыркин Г.Н.

Постановка задачи

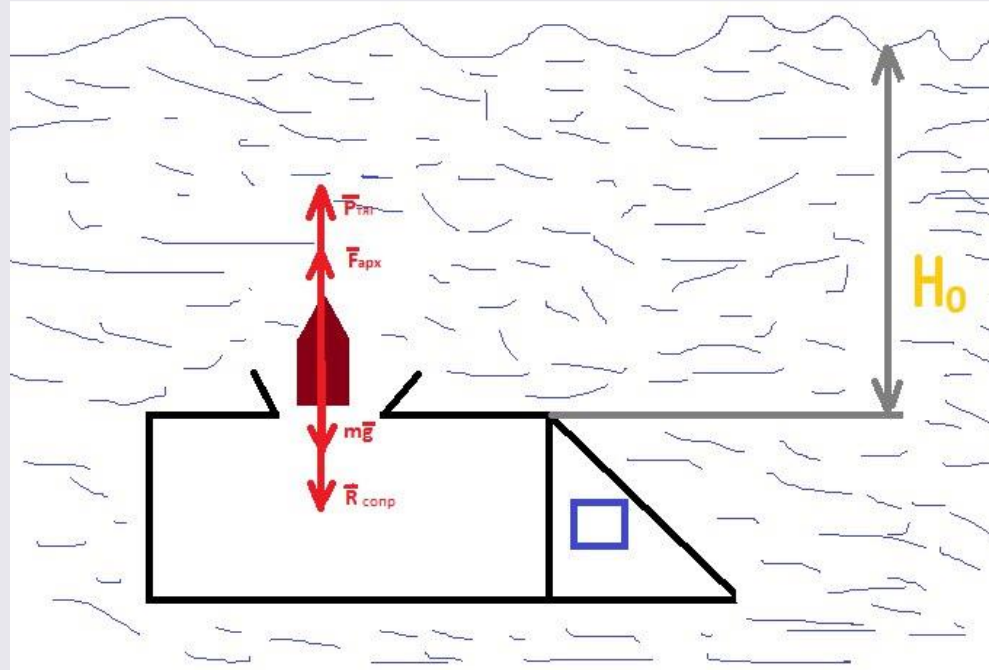
Исследовать вертикальное движение баллистической ракеты на подводном участке траектории после ее выталкивания на глубине H_0 с начальной скоростью v_0 из стартовой шахты подводной лодки. Сила сопротивления движению ракеты в воде $F = kv^n$, где k – коэффициент сопротивления, v – скорость, $n > 0$. На глубине $H_1 \leq H_0$ включается ракетный двигатель, развивающий силу тяги $P = P_0 - aH$, где P_0 – сила тяги на поверхности воды, H – текущее значение глубины, $a > 0$. Объем V_0 и массу m_0 ракеты принять постоянными на подводном участке траектории.

Построить математическую модель вертикального движения ракеты и получить точное аналитическое решение при $n = 1, 2$. Провести численный анализ этой модели при $n = 7/4$ и согласованных с руководителем значениях остальных параметров.

Решение задачи

Дифференциальное уравнение, описывающее движение для
произвольного n

Силы, действующие на ракету



Векторное дифференциальное уравнение:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{арх} + m\vec{g} + \vec{R}_{сопр} + \vec{P}.$$

В проекции на вертикальную ось, направленную вниз:

$$m \frac{dv}{dt} = C + kv^n - P, \text{ где } C = mg - F_{арх}.$$

Решение при $n = 1$ и отсутствии силы тяги

Пусть $n = 1, H_1 \leq H \leq H_0$, тогда

$$P \equiv 0,$$

$m \frac{dv}{dt} = C + kv$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{1}{k} \ln|C + kv| = \frac{t}{m} + C_1,$$

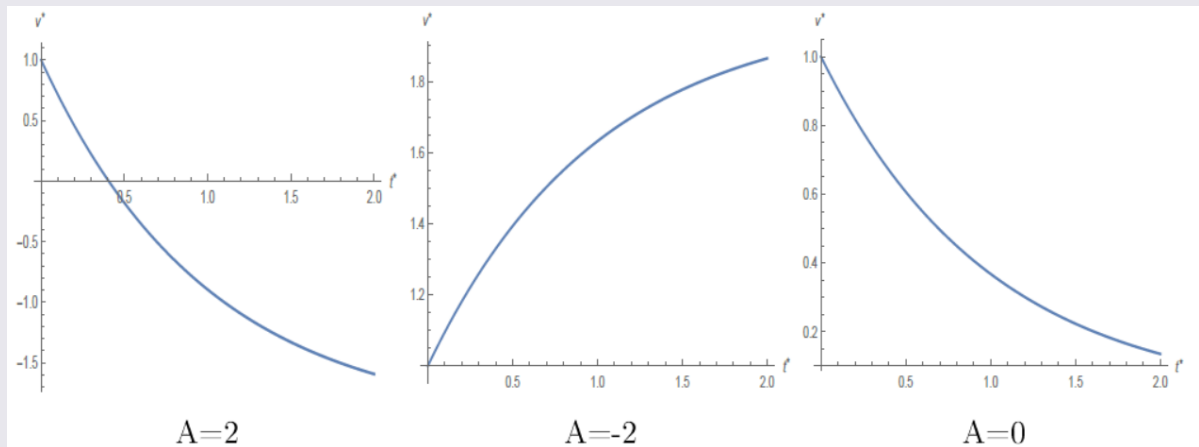
при $t = 0, v = v_0, C_1 = \frac{1}{k} \ln|C + kv_0|$, тогда

$$v(t) = \frac{C + kv_0}{k} e^{\frac{k}{m}t} - \frac{C}{k}.$$

В безразмерном виде

$$v^* = (A + 1)e^{-t^*} - A,$$

где $v^* = \frac{v}{v_0}, t^* = -\frac{k}{m}t, A = \frac{C}{kv_0}$.



Графики решения при различных значениях параметра A

Решение при $n = 1$ и отсутствии силы тяги

$v(t) = \frac{dH}{dt} = \frac{C+kv_0}{k} e^{\frac{k}{m}t} - \frac{C}{k}$ - уравнение с разделяющимися переменными.

$$H(t) = \frac{m(C + kv_0)}{k^2} e^{\frac{k}{m}t} - \frac{C}{k}t + C_2.$$

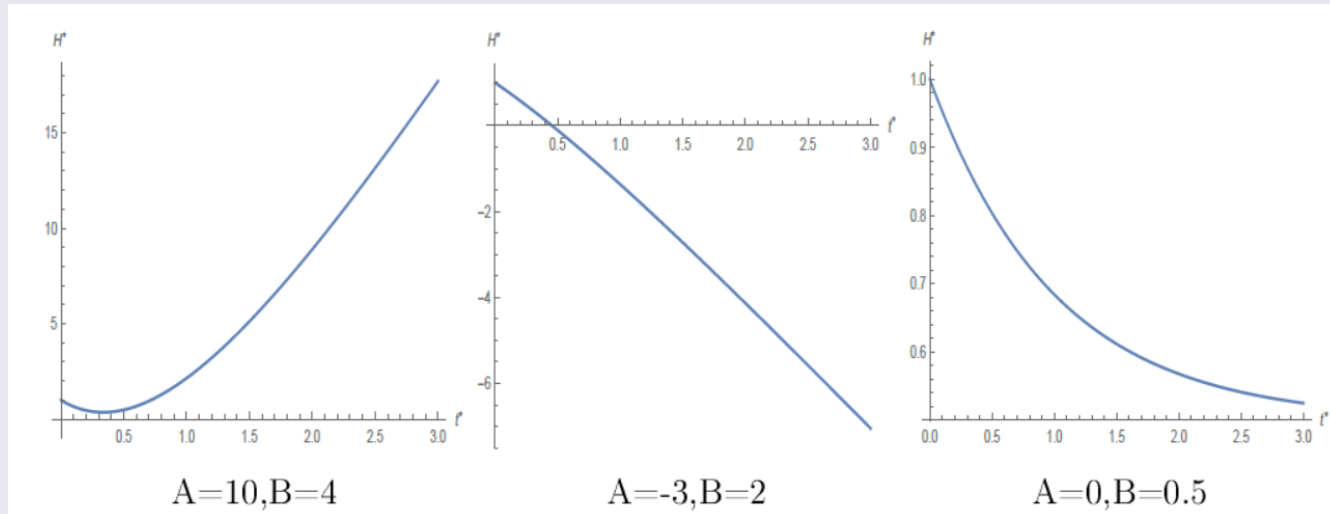
при $t = 0$, $H = H_0$, $C_2 = H_0 - \frac{m(C+kv_0)}{k^2}$, тогда

$$H(t) = \frac{m(C+kv_0)}{k^2} (e^{\frac{k}{m}t} - 1) - \frac{C}{k}t + H_0.$$

В безразмерном виде

$$H^* = (A + B)(e^{-t^*} - 1) + At^* + 1,$$

где $H^* = \frac{H}{H_0}$, $-t^* = \frac{k}{m}t$, $A = \frac{mC}{k^2H_0}$, $B = \frac{mv_0}{kH_0}$.



Графики решения при различных значениях параметров A , B

Решение при $n = 1$ и отсутствии силы тяги

Найдем зависимость $H(v)$. $m \frac{dv}{dt} \frac{dH}{dv} = C + kv$.

$v \frac{dv}{dH} = \frac{C+kv}{m}$ - уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{v}{k} - \frac{C}{k^2} \ln|C + kv| = \frac{H}{m} + C_3.$$

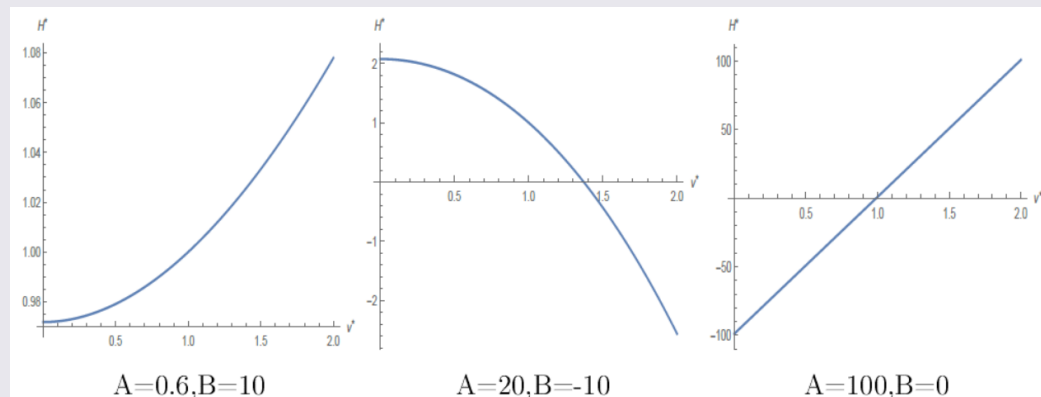
При $H = H_0$, $v = v_0$, $C_3 = \frac{v_0}{k} - \frac{C}{k^2} \ln|C + kv_0| - \frac{H_0}{m}$, тогда

$$H(v) = \frac{m(v - v_0)}{k} - \frac{Cm}{k^2} \ln \left| \frac{C + kv_0}{C + kv} \right| + H_0.$$

В безразмерном виде

$$H^* = A(v^* - 1) - AB \ln \left| \frac{B + v^*}{B + 1} \right| + 1,$$

где $H^* = \frac{H}{H_0}$, $v^* = \frac{v}{v_0}$, $A = \frac{v_0 m}{k H_0}$, $B = \frac{C}{k v_0}$.



Графики решения при различных значениях параметров A , B

Решение при $n = 1$ с силой тяги

Пусть $H \leq H_1$, тогда

$$P = P_0 - aH,$$

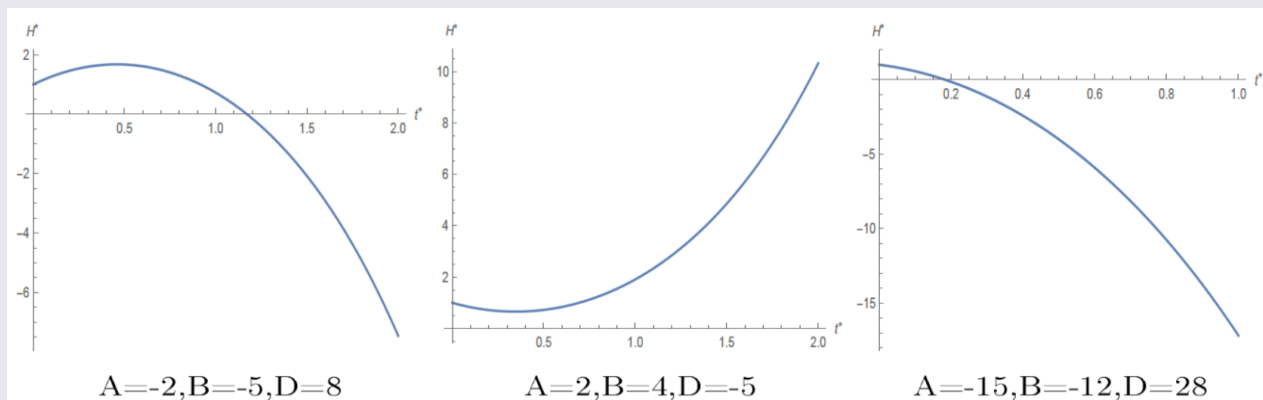
$\frac{d^2 H}{dt^2} - \frac{k}{m} \frac{dH}{dt} - \frac{a}{m} H = \frac{C - P_0}{m}$ - дифференциальное уравнение второго порядка с правой частью.

$$H_{0.0.} = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \text{ где } \alpha_{1,2} = \frac{\frac{k}{m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{m^2} + 4 \frac{a}{m}}}{2}; \quad H_{\text{ч.н.}} = \frac{P_0 - C}{a}; \quad H_{0.н.} = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + \frac{P_0 - C}{a}.$$

При $t = t_1$, $H = H_1, v = v_1$, $C_1 = \frac{v_1 - \alpha_2 \frac{(H_1 - \frac{P_0 - C}{a})\alpha_1 - v_1}{\alpha_1 - \alpha_2}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 t_1}}$, $C_2 = \frac{(H_1 - \frac{P_0 - C}{a})\alpha_1 - v_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)e^{\alpha_2 t_1}}$, тогда

$$H(t) = \left(\frac{v_1}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{(H_1 - \frac{P_0 - C}{a})\alpha_1 - v_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \right) e^{\alpha_1(t-t_1)} + \frac{(H_1 - \frac{P_0 - C}{a})\alpha_1 - v_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2(t-t_1)} + \frac{P_0 - C}{a}.$$

В безразмерном виде $H^* = A e^{t^*} + B e^{-t^*} + D$.



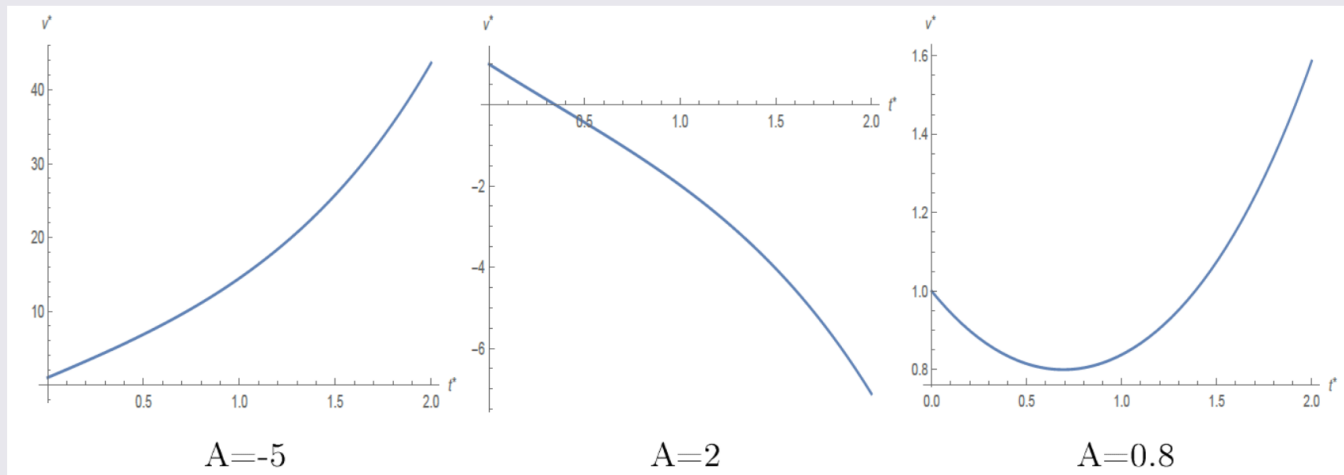
Графики решения при различных значениях параметров A, B, D

Решение при $n = 1$ с силой тяги

$$\frac{dH}{dt} = v(t) = (v_1 - \alpha_2 \frac{(H_1 - \frac{P_0 - C}{a})\alpha_1 - v_1}{\alpha_1 - \alpha_2})e^{\alpha_1(t-t_1)} + \alpha_2 \frac{(H_1 - \frac{P_0 - C}{a})\alpha_1 - v_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2(t-t_1)}.$$

В безразмерном виде

$$v^* = (1 - A)e^{t^*} + Ae^{-t^*}.$$



Графики решения при различных значениях параметра A

Решение при $n = 2$ и отсутствии силы тяги

Пусть $n = 2, H_1 \leq H \leq H_0$, тогда

$$P \equiv 0,$$

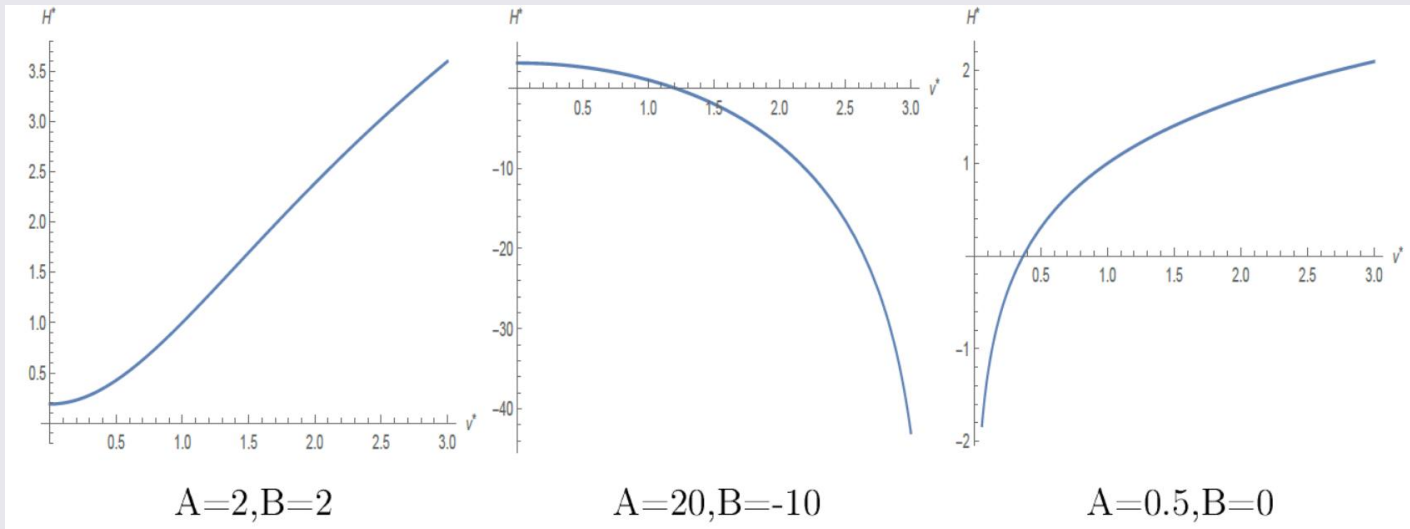
$mv \frac{dv}{dH} = C + kv^2$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$$H(v) = \frac{m}{2k} \ln|C + kv^2| + C_1.$$

При $H = H_0, v = v_0, C_1 = H_0 - \frac{m}{2k} \ln|C + kv_0^2|$, тогда

$$H(v) = \frac{m}{2k} \ln \left| \frac{C + kv^2}{C + kv_0^2} \right| + H_0.$$

В безразмерном виде $H^* = A \ln \left| \frac{B + v^{*2}}{B + 1} \right| + 1$.



Графики решения при различных значениях параметров A, B

Решение при $n = 2$ и отсутствии силы тяги

$m \frac{dv}{dt} = C + kv^2$ - уравнение с разделяющимися переменными,

$$\frac{dv}{C + kv^2} = \frac{dt}{m}.$$

Решение при $mg > F_{\text{арх}}$ ($C > 0$)

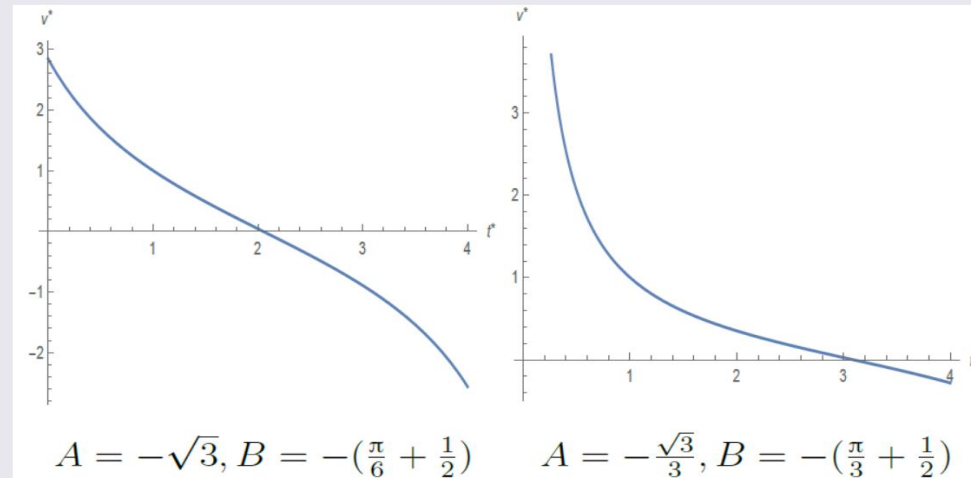
$$\frac{\text{arctg}(\sqrt{\frac{k}{C}}v)}{\sqrt{Ck}} = \frac{t}{m} + C_2,$$

При $t = 0, v = v_0, C_2 = \frac{\text{arctg}(\sqrt{\frac{k}{C}}v_0)}{\sqrt{Ck}}$, тогда

$$v(t) = \sqrt{\frac{C}{k}} \text{tg} \left(\frac{\sqrt{Ck}}{m} t + \text{arctg} \left(\sqrt{\frac{k}{C}} v_0 \right) \right).$$

В безразмерном виде

$$v^* = A \text{tg} \left(\frac{t^*}{2} + B \right).$$



Графики решения при различных значениях параметров A, B

Решение при $n = 2$ и отсутствии силы тяги

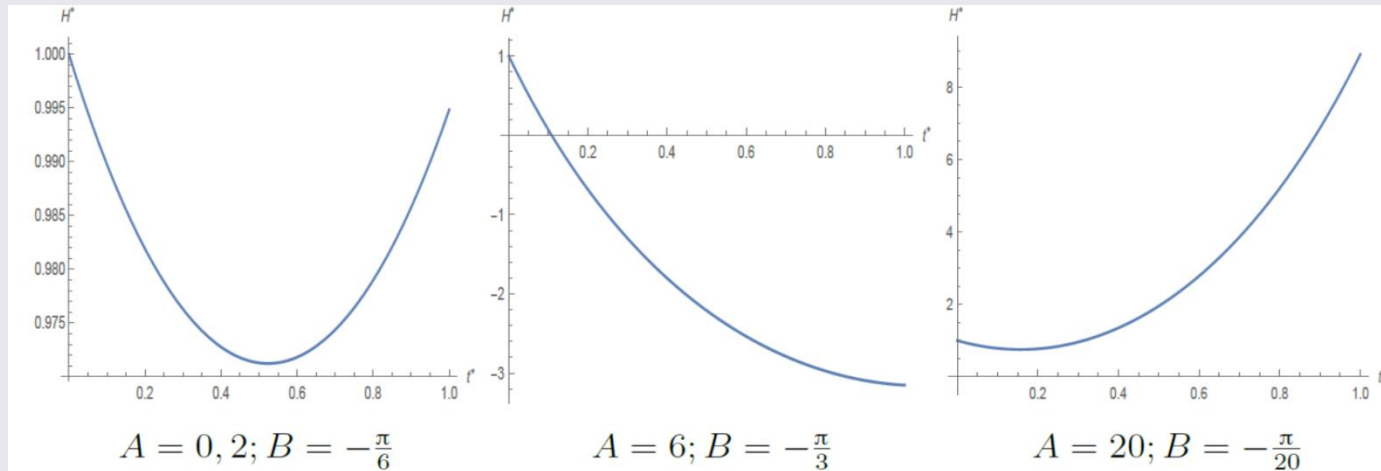
Решение при $mg > F_{\text{арх}}$ ($C > 0$)

$v(t) = \frac{dH}{dt} = \sqrt{\frac{C}{k}} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{Ck}}{m} t + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{k}{C}} v_0 \right) \right)$ - уравнение с разделяющимися переменными.

$$H(t) = \frac{m}{k} \operatorname{Ln} \left| \frac{\cos(B)}{\cos\left(\frac{\sqrt{Ck}}{m} t + B\right)} \right| + H_0,$$

где $B = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{k}{C}} v_0 \right)$.

В безразмерном виде $H^* = A \operatorname{Ln} \left| \frac{\cos(B)}{\cos(t^* + B)} \right| + 1$.



Графики решения при различных значениях параметров А, В

Решение при $n = 2$ и отсутствии силы тяги

Решение при $mg < F_{\text{арх}}$ ($C < 0$)

Обозначим $C = -b$, тогда $\frac{dv}{kv^2 - b} = \frac{dt}{m}$ - уравнение с разделяющимися переменными.

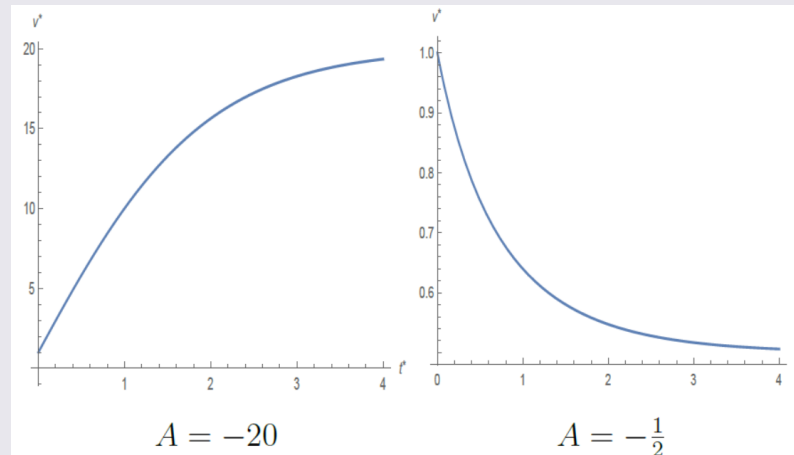
$$\frac{m}{2\sqrt{kb}} \operatorname{Ln} \left| 1 - \frac{2b}{\sqrt{kb}v + b} \right| = t + C_2,$$

при $t = 0, v = v_0, C_2 = \frac{m}{2\sqrt{kb}} \operatorname{Ln} \left| 1 - \frac{2b}{\sqrt{kb}v_0 + b} \right|$, тогда

$$v(t) = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{k} \left(1 + \frac{b - \sqrt{kb}v_0}{\sqrt{kb}v_0 + b} e^{\frac{2\sqrt{kb}}{m}t} \right)} - \sqrt{\frac{b}{k}}.$$

В безразмерном виде

$$v^* = \frac{2A(A+1)}{A+1 + (A-1)e^{t^*}} - A.$$



Графики решения при различных значениях параметра A

Решение при $n = 2$ и отсутствии силы тяги

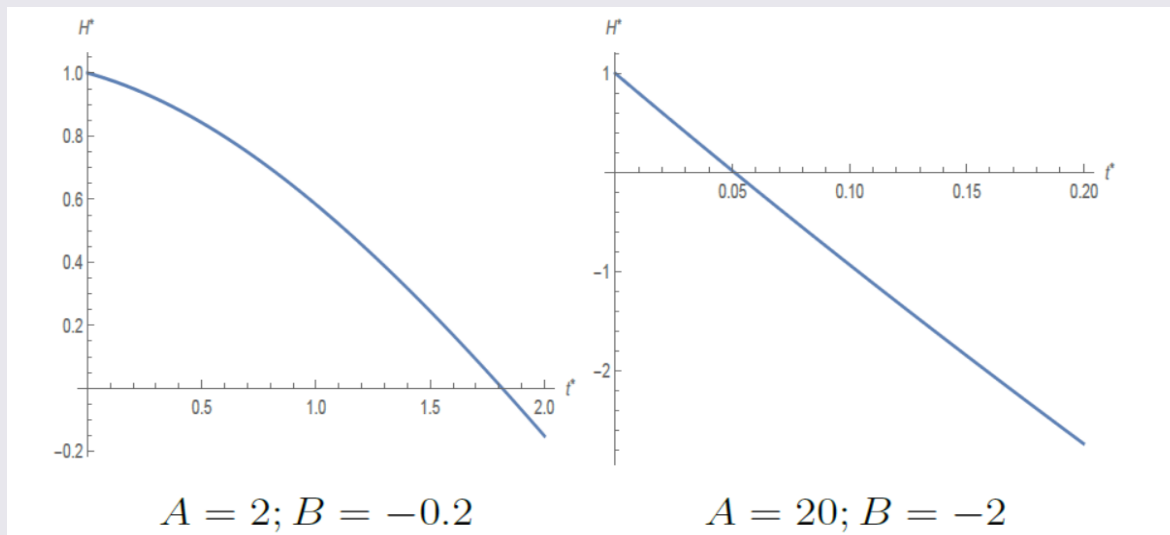
Решение при $mg < F_{\text{арх}}$ ($C < 0$)

$$v(t) = \frac{dH}{dt} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{k} \left(1 + \frac{b - \sqrt{kb}v_0}{\sqrt{kb}v_0 + b} e^{\frac{2\sqrt{kb}}{m}t}\right)} - \sqrt{\frac{b}{k}} \text{ - уравнение с разделяющимися переменными,}$$

$$H(t) = \sqrt{\frac{b}{k}}t + \frac{m}{k} \text{Ln} \left| \frac{2b}{(b - \sqrt{kb}v_0)e^{\frac{2\sqrt{kb}}{m}t} + \sqrt{kb}v_0 + b} \right| + H_0.$$

В безразмерном виде

$$H^* = \frac{At^*}{2} - A \text{Ln} \left| \frac{(1-B)e^{t^*} + B + 1}{2} \right| + 1.$$



Графики решения при различных значениях параметра А

Решение при $n = 2$ и отсутствии силы тяги

Решение при $mg = F_{\text{арх}}$ ($C = 0$)

$\frac{dv}{kv^2} = \frac{dt}{m}$ - уравнение с разделяющимися переменными.

$$v(t) = -\frac{1}{k\left(\frac{t}{m} - \frac{1}{kv_0}\right)}.$$

В безразмерном виде

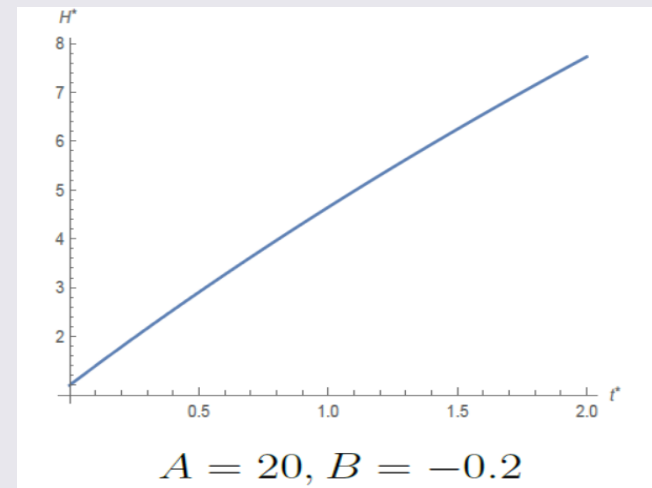
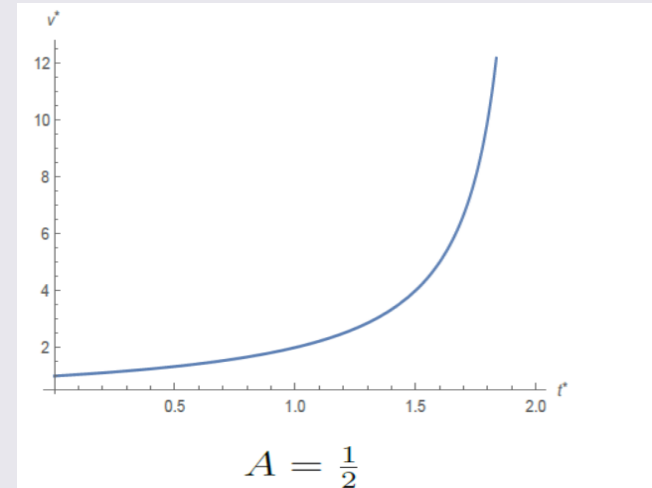
$$v^* = -\frac{1}{At^* - 1}.$$

$$v(t) = \frac{dH}{dt} = -\frac{1}{k\left(\frac{t}{m} - \frac{1}{kv_0}\right)},$$

$$H(t) = \frac{m}{k} \ln \left| \frac{1}{1 - \frac{kv_0}{m}t} \right| + H_0.$$

В безразмерном виде

$$H^* = -A \ln |1 - Bt^*| + 1.$$



Решение при $n = 2$ с силой тяги

Пусть $H \leq H_1$, тогда

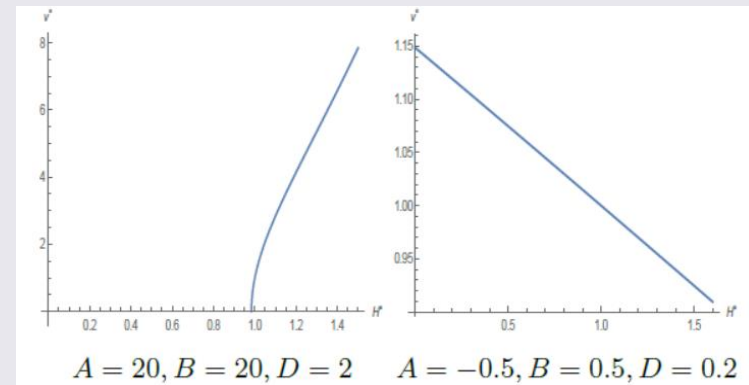
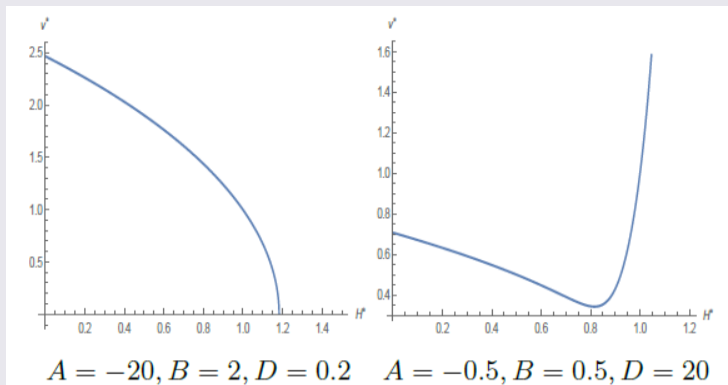
$$P = P_0 - aH,$$

$$mv \frac{dv}{dH} = C + kv^2 - P_0 + aH \Leftrightarrow v \frac{dv}{dH} - \frac{k}{m} v^2 = \frac{C-P_0}{m} + \frac{aH}{m} - \text{уравнение Бернулли.}$$

$$v(H) = \sqrt{-\frac{C-P_0+aH}{K} - \frac{am}{2k^2} + \left(v_1^2 + \frac{C-P_0+aH_1}{k} + \frac{am}{2k^2}\right) e^{2\frac{k}{m}(H-H_1)}}.$$

В безразмерном виде

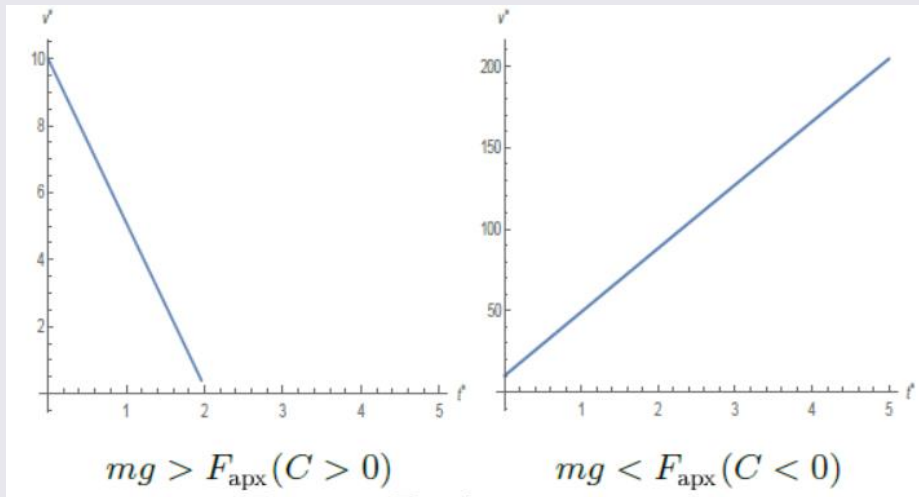
$$v^* = \sqrt{-(A + BH^*) + (1 + A + B)e^{D(H^*-1)}}.$$



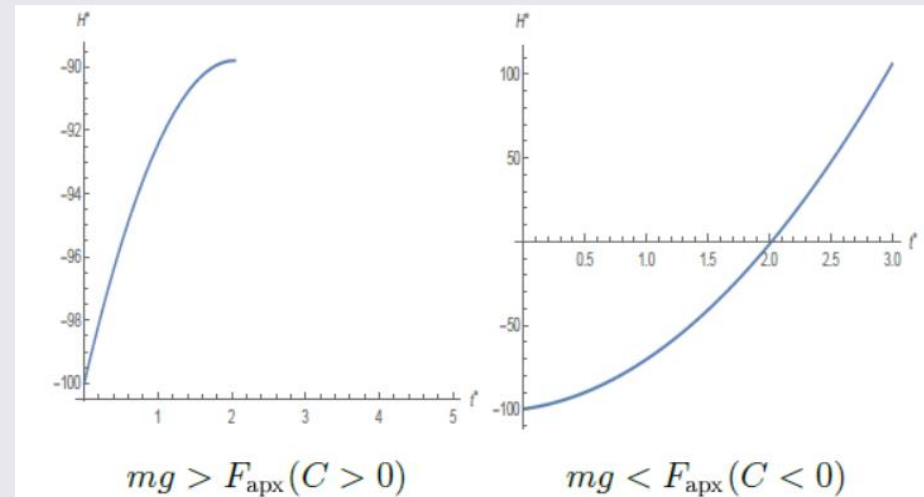
Графики решения при различных значениях параметров A, B, C, D

Численное решение при $n = 7/4$ и отсутствии силы тяги

Пусть $n = 7/4, H_1 \leq H \leq H_0$, тогда $P \equiv 0$, тогда векторное уравнение в проекции на вертикальную ось направленную вверх имеет вид $m \frac{dv}{dt} = -C - kv^{\frac{7}{4}}$. Для получения численного решения воспользуемся пакетом Wolfram Mathematica.



$$v(t), \quad v_0 = 10 \text{ (м/с)}$$

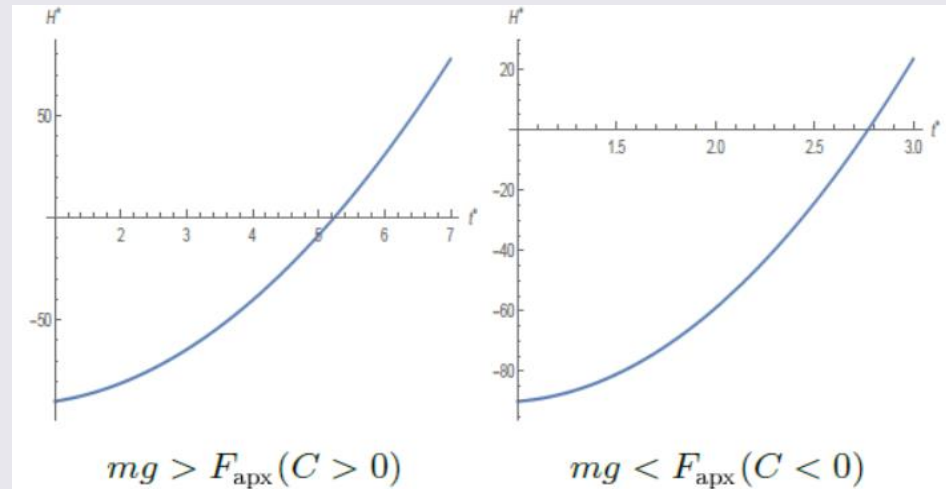


$$H(t), H_0 = 100 \text{ (м)}, v_0 = 10 \text{ (м/с)}$$

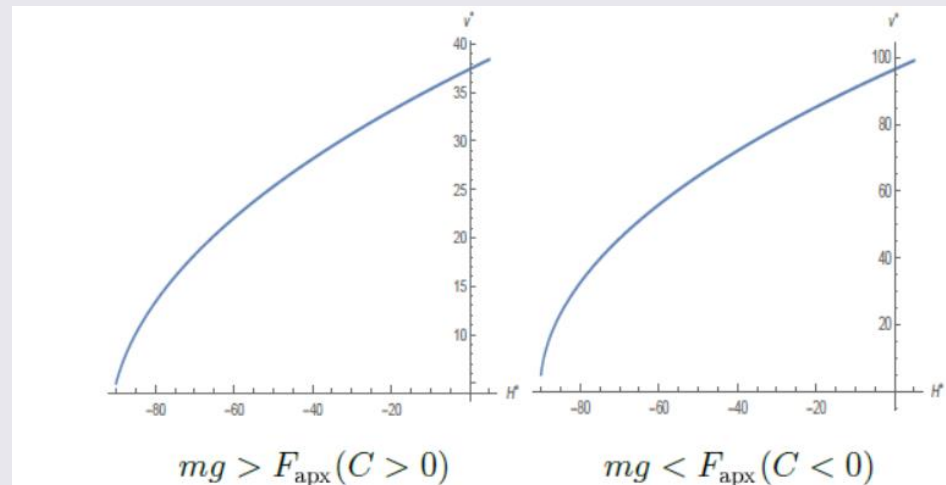
Численное решение при $n = 7/4$ с силой тяги

Пусть $H \leq H_1$, тогда $P = P_0 - aH$, тогда $m \frac{dv}{dt} = -C - kv^{\frac{7}{4}} + P_0 - aH$,

$H(t)$, $t_1 = 1(\text{с})$, $H_1 = 90(\text{м})$, $v_1 = 5 (\text{м/с})$



$v(H)$, $H_1 = 90(\text{м})$, $v_1 = 5 (\text{м/с})$



Выводы

В работе была построена математическая модель вертикального движения баллистической ракеты. Разобраны частные случаи построенной модели и для каждого из них получено точное аналитическое решение и проведено его исследование. Проведен численный анализ этой модели при $n = 7/4$.

$P \equiv 0$			
n	1	$7/4$	2
$v(\text{м/с})$	90.56	93.61	95.05
$H(\text{м})$	102.48	103.21	104.80

Таблица 1

$P = P_0 - aH$			
n	1	$7/4$	2
$v(\text{м/с})$	97.57	96.27	93.46
$H(\text{м})$	6.18	6.84	8.24

Таблица 2

Из таблиц 1,2 заметим, что при изменении параметра n скорость ракеты изменяется нелинейно как с силой тяги, так и без неё. (В качестве остальных параметров были взяты: $m = 2000(\text{кг})$, $V = 10(\text{м}^3)$, $v_0 = 100 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$, $v_1 = 90 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$, $H_0 = 200(\text{м})$, $H_1 = 100(\text{м})$, $P_0 = 250000(\text{Н})$, $a = 25$, $k = 10$, а вычисления текущего значения глубины и скорости для таблиц 1,2 были проведены для моментов времени $t_1 = 1(\text{с})$, $t_2 = 3(\text{с})$ соответственно).

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Прикладная математика»



Курсовая работа

по дисциплине «Дифференциальные уравнения»

Подводный старт ракеты

Выполнил

студент группы ФН2-41

Разумов Т.Е.

Научный руководитель

профессор кафедры ФН-2

Кувыркин Г.Н.