6.7.21 zu Winkler: Wie macht man 2 aus 1?

letzten Abschnitt 2.2.:

Wie genau wird hier das Auswahlaxiom verwendet?

$\Rightarrow$ die Menge der Komplemente endlicher Teilmengen einer unendl. Menge X hat eine Auswahlfunktion

$$\mathrm{pick} : \overbrace{\{X \setminus E \mid E \subseteq X, E \text{ endlich}\}}^{=: \mathrm{CoFin}\, X \,\subseteq\, PX} \to X$$

mit $\mathrm{pick}(A) \in A$

- jedes $A \in \{X \setminus E \mid \ldots\}$ ist nicht leer

nach Auswahlaxiom $\exists M \subseteq X \,.\, \forall A \in \mathrm{CoFin}\, X \,.\, \exists m \in M \,.\, m \in A$

$R \subseteq \mathrm{CoFin}\, X \times M$ $\qquad R = \{(A, m) \mid m \in A\}$

$\cup$|
pick, die Funktion ist.

Wir definieren $\forall n:\mathbb{N}.\ A_n \subseteq X$ wie folgt:

$$A_0 = \emptyset$$
$$A_{n+1} = \{\mathrm{pick}(X \setminus A_n)\} \cup A_n \qquad (A_n \subseteq A_{n+1} \ldots)$$

Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq X$ abzählbar unendlich.

Abschnitt 2.4.

Wo genau wird Auswahlaxiom verwendet?

$\Rightarrow$ zur Durchführung der Konstruktion brauchen wir konkrete Bijektionen der abzählbaren Teilmengen zu $\mathbb{N}$!

12.07.21 $\quad$ A abzählbar

$$A^* = \overset{A^0}{\{\varepsilon\}} \cup A \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots \cup A^n \cup \ldots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$$

$$\cong \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \ldots \cup \mathbb{N} \cup \ldots$$

(φ_{A^2}, φ_{A^3}, φ_{A^n})

$$\cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$$

dovetailing: $\quad A = \{a, b, c, d, \ldots\}$

$\varphi_A : \mathbb{N} \to A$ (Bijektion) und auch $\varphi_{A^n} : \mathbb{N} \to A^n$ (Bijektion)

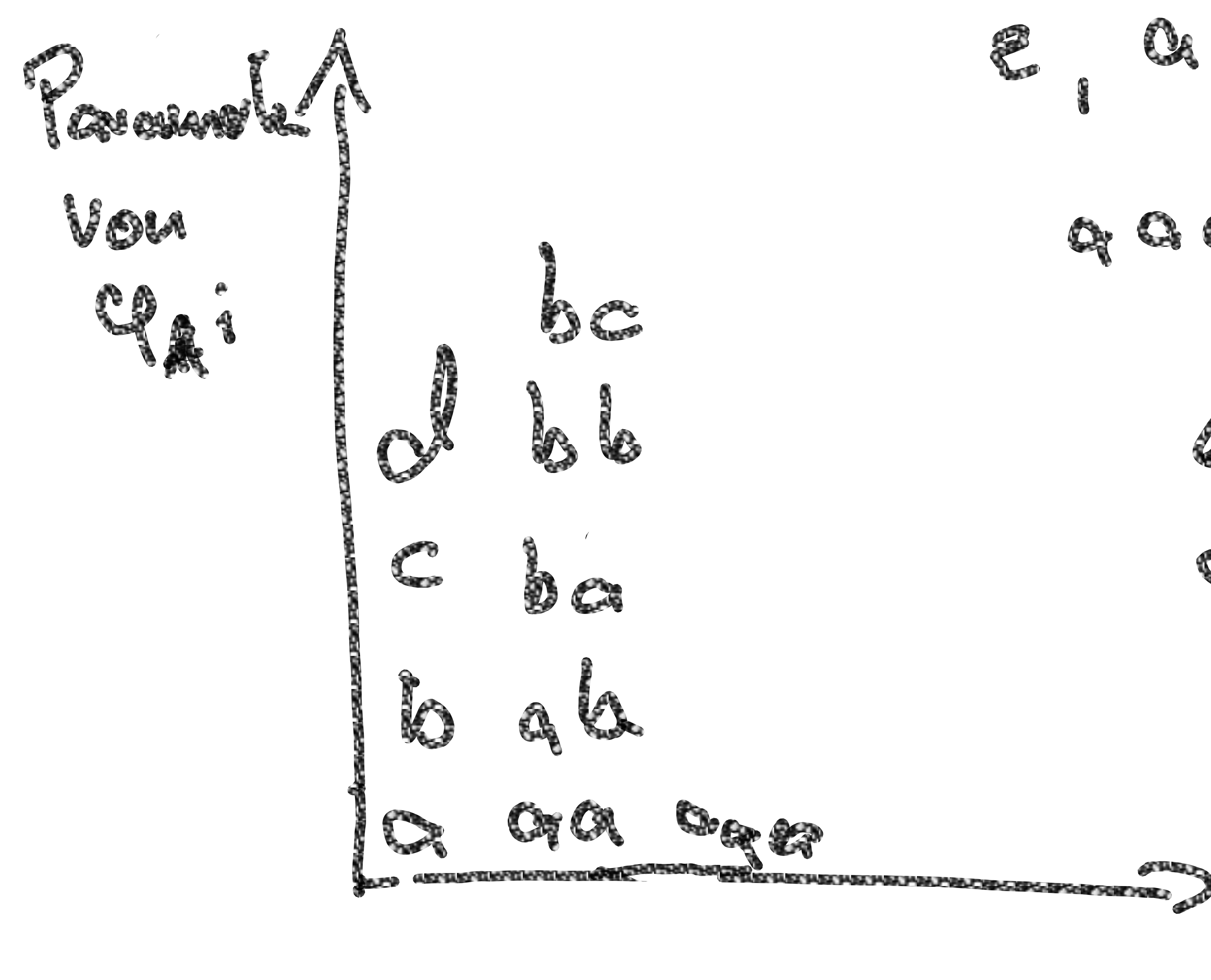
wir konstruieren $\varphi_{A^*} : \mathbb{N} \to A^*$ (Bijektion)

$\varphi_{A^*} 0 = \varepsilon$

$\varphi_{A^*} 1 = \varphi_A 0$

$\varphi_{A^*} 2 = \varphi_A 1$

$\varphi_{A^*} 3 = \varphi_{A^2} 0$



$\varepsilon, a, b, aa, c, ab,$
aaa, d, ba

unendliche Wörter
von Wahl φ_{A^i} abhängig?

Seitenthema: dovetailing in Informatik:

berechnet Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ einen bestimmten Wert $n \in \mathbb{N}$?

Eingabe 0 ein Schritt

↪ Eingaben 0 und 1 zwei Schritte

↪ ... 0, 1, 2 drei Schritte

usw.

Annahme: $\exists\, f : X \to \mathcal{P}X$ surjektiv.

Wir definieren $T := \{ x \in X \mid x \notin f(x) \} \subseteq X$

Wegen Surjektivität $\exists\, x_0 \in X$ mit $f(x_0) = T$.

$* \to$ Ann. $x_0 \in T$.

Dann ist nach Def. von T $x_0 \notin f(x_0) = T$ ↯

Ann. $x_0 \notin T$..

d.h. $x_0 \notin f(x_0)$. Nach Def. von T ist dann aber $x_0 \in T$ ↯. $\square$

Alternative ab $* \to$ (ohne LEM):

Wir zeigen zunächst $x_0 \notin T$. Wäre $x_0 \in T$, dann.

Mit diesem Wissen dann so (ohne Annahme!) ... $\square$

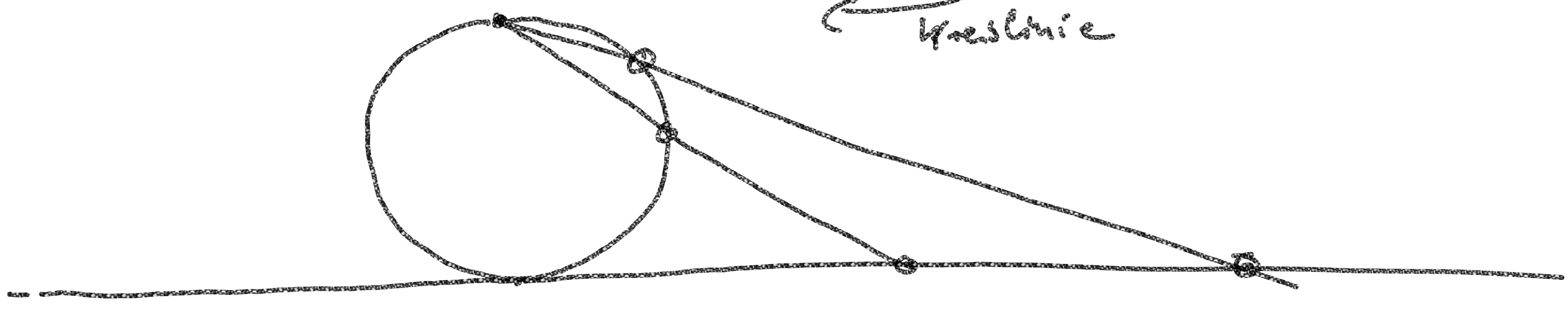
hatten so etwas 2012 :

Lawvere - 1969 - Diagonal Arguments in Cartesian Closed Categories.

22.07.21

Bijektion $(0,2\pi) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$

Kreislinie



$z : \mathbb{N} \to S^1$

$h : S^1 \to S^1$

$hx = x + \alpha$

$D := \operatorname{im} z = \{ zn \mid n \in \mathbb{N} \}$

$h(D) = \{ h(zn) \mid n \in \mathbb{N} \} = \{ z(n+1) \mid n \in \mathbb{N} \}$

$h(zn) = z(n+1)$

$= D \setminus \{ z0 \}$

d.h. $\boxed{h \circ z = z \circ s}$

successor $sn = n+1$

$$A \cup D = S^1 = A \cup h(D) \cup \{z_0\}$$

eigentlicher Witz : $\quad D = h(D) \cup \{z_0\}$

$$\updownarrow$$

Hilbert's Hotel : $\quad \mathbb{N} = \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$

---

jetzt : ~~sei~~ geg. $D \subseteq S^1$, D abzählbar

Suchen $\alpha \in (0, 2\pi)$ derart, daß $h =$ Drehung um α

die Eigenschaft hat, $D, h(D), h^2(D), \dots$

alle disjunkt sind. $\qquad D = \{d_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

Bedingungen an α : insbesondere muß $\forall i \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$h^n(d_i) \notin D$$

d.h. $\forall i \in \mathbb{N} . \forall n \in \mathbb{N} . \forall j \in \mathbb{N} .$

$$h^n(d_i) \neq d_j$$

d.h. $\forall \ldots$

$$n \cdot \alpha + d_i \not\equiv d_j \mod 2\pi$$

Hieraus folgt auch, daß $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ $h^n(D)$ disjunkt zu $h^m(D)$:

Ann.: $\exists\, d_i, d_j$ mit $\quad n \cdot \alpha + d_i \equiv m\alpha + d_j$

$$\Rightarrow (n-m)\alpha + d_i \equiv d_j$$

$$\Rightarrow \quad n \cdot \alpha \not\equiv d_j - d_i \mod 2\pi$$

PuBT $\qquad S^2 \sim S^2 \dot\cup S^2 \dot\cup B_3$

$$S^2 \setminus D \sim S^2 \setminus D \,\dot\cup\, S^2 \setminus D \,\dot\cup\, B_3$$

Zerlegungsgleichheit:

$$A \sim B \overset{\text{def}}{=} \exists n \in \mathbb{N}.\ \exists A_0, \dots, A_{n-1}\ \exists B_0, \dots, B_{n-1}$$

$\exists T_0, \dots, T_{n-1}$ Transformationen sd.

$$A = \bigcup_{i<n} A_i \qquad B = \bigcup_{i<n} B_i$$

und $\forall i<n.\ B_i = T_i A_i$