28.11.23

$$P_n = \frac{n}{2} \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{n^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{n^5 \cdot 5!}$$

$$= \pi - \frac{\pi^3}{3!\, n^2} + \frac{\pi^5}{5! \cdot n^4} \mp \dots$$

$$= \pi + A/n^2 + B/n^4 + \dots$$

mit $A = -\frac{\pi^3}{3!}$ und

$B = +\frac{\pi^5}{5!}$

Taylorentwicklung:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt, d.h. ∞ oft differenzierbar bei $0 \in \mathbb{R}$.

Dann heißt der Ausdruck

$$T_f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0)\, x^2 + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(0) \cdot x^n$$

die Taylorentwicklung von f an der Stelle 0.

z.B. $f = \exp$

$\leadsto$ $$T\exp(x) = \sum_{n \geq 0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n .$$

Hier sogar $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

und betrachte

$\lambda x .\ \exp(ix)$ als Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\exp(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i \cdot x)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (i \cdot x)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (i \cdot x)^{(2k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \cdot (-1)^k \cdot x^{2k} + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \cdot (-1)^k \cdot x^{(2k+1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x + i \cdot \sin x$$

"... Specifically ..."

Wissen $P_n = \pi + A/n^2 + B/n^4 + \ldots$

(dabei sind A und B unabh. von n)

$$\Rightarrow \quad P_{2n} = \pi + A/(2n)^2 + B/(2n)^4 + \ldots$$

$$= \pi + A/4 \cdot n^2 + B/16 \cdot n^4 + \ldots$$

$$\frac{4P_{2n} - P_n}{3} = \frac{\left(4\pi + A/n^2 + B/4n^4 + \ldots\right) - \pi - A/n^2 - B/n^4 \ldots}{3}$$

$$= \frac{3\pi - \frac{3}{4} B/n^4 \pm \ldots}{3}$$

$$= \pi - \frac{1}{4} B/n^4 \pm \ldots$$

5.12.23 even-better-pi-sequence

$$Q_n = \pi - B/4n^4 \pm \dots$$

$$\Rightarrow Q_{2n} = \pi - B/4 \cdot 16 \cdot n^4 \pm \dots$$

$$\hookrightarrow 16 \cdot Q_{2n} = 16\pi - B/4 \cdot n^4 \pm \dots$$

$$\hookrightarrow 16 \cdot Q_{2n} - Q_n = 15\pi \dots \pm \dots$$

$$\hookrightarrow \frac{16 \cdot Q_{2n} - Q_n}{15} = \pi + \dots$$