Modus ponens $\dfrac{A \to B \quad A}{B}$

Prolog konkret:

a

$b \leftarrow a$

Answer sets: $\{a, b\}$ ist die einzige Antwortmenge von

Modelle der zugeh. Theorie $th = \{a, a \to b\}$ in klassischer AL:

$$\{\{a,b\}, \{a,b,c\}, \ldots \{a,b,c,d,e,\ldots\} \ldots\}$$

$$\Updownarrow$$

$m : \{a,b,c,d \ldots\} \to \mathbb{B}$ $\quad$ $m\,b = \mathrm{True}$

$m\,a = \mathrm{True}$ $\quad$ $m\,x = \mathrm{False}$

Klassisch: Abzählbare Menge von Aussage-variablen:

$Var = \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$

$Operatoren = \{\wedge, \vee, \neg\}$

$(\mathbb{IP} =)$ Interpretation $= Var \longrightarrow \mathbb{B}$

$\wedge_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

$\vee_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

$\neg_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

Formeln:

data F where

$V : Var \longrightarrow F$

$\wedge : F \to F \to F$

$\vee : F \to F \to F$

$\neg : F \longrightarrow F$

$eval : \mathbb{IP} \to F \longrightarrow \mathbb{B}$

$eval\ f\ (V x) = f\ x$

$eval\ f\ (A \wedge B) =$
$(eval\ f\ A) \wedge_{\mathbb{B}} (eval\ f\ B)$

$eval\ f\ (A \vee B) =$
$(eval\ f\ A) \vee_{\mathbb{B}} (eval\ f\ B)$

$eval\ f\ (\neg A) = \neg_{\mathbb{B}} (eval\ f\ A)$

Klassisch: Abzählbare Menge von Aussagevariablen:

$Var = \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$

Operatoren $= \{\wedge, \vee, \neg\}$

(IP =) Interpretation $= Var \to \mathbb{B}$

$\wedge_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

$\vee_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

$\neg_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

data F where

$V : Var \to F$

$\wedge : F \to F \to F$

$\vee : F \to F \to F$

$\neg : F \to F$

$eval : IP \to F \to \mathbb{B}$

$eval\ f\ (V x) = f x$

$eval\ f\ (A \wedge B) = (eval\ f\ A) \wedge_{\mathbb{B}} (eval\ f\ B)$

$eval\ f\ (A \vee B) = (eval\ f A) \vee_{\mathbb{B}} (eval\ f B)$

$eval\ f\ (\neg A) = \neg_{\mathbb{B}} (eval\ f\ A)$

Theorie:

$Th : Type$

$Th = List\ F$ (eigentlich $\mathcal{P}(F)$)

Modell:

$Mo : Th \to Type$

$$Mo\ th = \sum_{m:IP} \underbrace{\prod_{f:F} f \in th \to (eval\ m\ f =_{\mathbb{B}} True)}_{:Type}$$

$m : IP$ ist ein Modell einer Theorie $th : Th$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\forall f : F .\ f \in th \to$

$eval\ m\ f = True$

Alternativ (vielleicht besser?):

Modellrelation:

$MR : Th \to IP \to Type$

$$MR\ th\ m = \prod_{f:F} f \in th \to eval\ m\ f =_{\mathbb{B}} True$$

$\_\models\_ : IP \to Th \to Type$

Unter Verwendung von MR ist dann:

$$Mo\ th = \sum_{m:IP} MR\ th\ m$$

25.05.

Wrong question!

In what sense "equivalent"?

Is rule equivalent to formula?

$$Y \Leftarrow X \qquad\qquad \neg X \vee Y$$

Defined semantically, i.e. via (classical) models

Classically: $(X \to Y) \leftrightarrow \neg X \vee Y$ is a tautology!

$$\vDash (X \to Y) \leftrightarrow \neg X \vee Y$$

i.e. the type family

$$MR\big((X \to Y) \leftrightarrow (\neg X \vee Y)\big)$$

$$: \mathbb{P} \to \mathrm{Type}$$

has a "section"!

We had

$$m \vDash [f] \quad : \mathrm{Type}$$

$$m \vDash [f] = \prod_{g : [f]} \mathrm{eval}\ m\ g =_{\mathbb{B}} \mathrm{True}$$

with abuse of notation (single formula on the right):

$$m \vDash f = \mathrm{eval}\ m\ f =_{\mathbb{B}} \mathrm{True}$$

another abuse of notation: "f is a tautology"

if every $m : \mathbb{P}$ is a model of f: $\qquad \vDash f :\equiv \prod_{m : \mathbb{P}} m \vDash f$

or

$\vdash (x \to y) \Leftrightarrow (\neg x \vee y)$ "Beweisbarkeitsrelation"

$\models f \Leftrightarrow \vdash f$ <u>provability</u> : formula is <u>provable</u> (without any assumption!)

"$\Rightarrow$" Completeness
"$\Leftarrow$" Soundness

$\left.\begin{array}{l}\text{"}\Rightarrow\text{" Completeness}\\ \text{"}\Leftarrow\text{" Soundness}\end{array}\right\}$ of classical propositional logic

---

Locality of formula "packing":

$$\begin{array}{ll} a \leftarrow b & a \leftarrow c \wedge \neg d \\ e \vee p \leftarrow b & e \vee p \leftarrow c \wedge \neg d \end{array} \qquad (1)$$

is ~~strongly~~ equivalent to

$$a \wedge (e \vee p) \leftarrow b \vee (c \wedge \neg d) \qquad (2)$$

also with context. e.g. (1) and (2) also equivalent to

$$a \wedge (e \vee p) \leftarrow b \qquad a \leftarrow c \wedge \neg d \qquad e \vee p \leftarrow c \wedge \neg d$$

Let A, B be sets of (logic program) rules
(or, better, propositional theories)

A is "strongly equivalent" to B

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall$ C (set of rules) (or, better, proposit. theories)

$A \cup C$ has the same answer sets as

$B \cup C$

$p \leftarrow 0 \leq \{q = 1, r = -1\}$ is an "aggregation",

it is an abbreviation for

$p \leftarrow \neg q \wedge \neg r$ $\quad$ $p \leftarrow q \wedge \neg r$ $\quad$ $p \leftarrow q \wedge r$

$\cancel{p \leftarrow \neg q \wedge r}$

$p \leftarrow \neg(\neg q \wedge r)$

"$\Leftrightarrow$"

$p \leftarrow q \vee \neg r$

"$\Leftrightarrow$"

$p \leftarrow (q \leftarrow r)$

Equivalence of (3) and (4) is at least plausible

1.6.

originally : 90th (Gelfond, Lifschitz) ... verallgemeinert...

$p \leftarrow (q \leftarrow r)$

$p \leftarrow \neg r$

$p \leftarrow q$

$p \vee \neg q \vee r \leftarrow$

claim : these are strongly equivalent ?!

As (classical) propositional formulas :

$(r \to q) \to p$

$\equiv_{PL_0} p \vee \neg(r \to q)$

$\equiv_{PL_0} p \vee \neg(q \vee \neg r)$

$\equiv_{PL_0} p \vee (\neg q \wedge \neg\neg r)$

$\equiv_{PL_0} p \vee (\neg q \wedge r)$

and also

$$(p \leftarrow q) \vee r \qquad p \vee r \leftarrow q$$
$$\neg q \vee r \leftarrow \neg p$$

main result is proved in two ways:

(1) with syntactic rec. transf.

(2) starting from countermodels (in Here-and-There)

in analogy to CNF transform in classical logic:

(1') with syntactic rec. transf.

(2') starting from countermodels (classical)

Interpretation $(X,Y) \mathrel{\hat{=}} f : \Sigma \to \mathbb{B}$ mit

(partieller Funktion)

one possibility

$$f\,p = \begin{cases} \text{true} & \text{if } p \in X \\ \text{false} & \text{if } p \notin Y \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases}$$

or $(X,Y) \mathrel{\hat{=}} f : \Sigma \longrightarrow \text{Maybe } \mathbb{B}$

$$f\,p = \begin{cases} \text{Just true} & ; \text{if } p \in X \\ \text{Just false} & ; \text{if } p \notin Y \\ \text{Nothing} & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

```
data Maybe : U -> U where
  Nothing : {A : U} -> Maybe A
  Just    : {A : U} -> A -> Maybe A
```

$\forall\, X \subseteq Y \in \Sigma$:

$$\Big((X,Y) \models_{HT\text{"ohne"}} F \Big) \overset{?}{\Longleftrightarrow} \Big(X \models_{PL.} F \Big)$$

or intuitionistic?

! check : $X \models \neg\neg a \to a$

$$(X,Y) \models_{HT\text{ohne}} \neg\neg\varphi \to \varphi$$

Ab hier $\models \; := \; \models_{HT\text{ohne}}$

$(X,Y) \models \neg\neg\varphi \to \varphi$

$\Longleftrightarrow \Big((X,Y) \models \neg\neg\varphi$ implies $(X,Y) \models \varphi \Big)$

$\Longleftrightarrow \Big(\big((X,Y) \models \neg\varphi$ implies $(X,Y) \models \bot \big)$ implies $(X,Y) \models \varphi \Big)$

$\Longleftrightarrow \Big(\big(((X,Y) \models \varphi$ implies $(X,Y) \models \bot)$ implies $(X,Y) \models \bot \big)$ implies $(X,Y) \models \varphi \Big)$

negate $(X,Y) \not\models \neg\neg\varphi \to \varphi$

$\iff \Big(\big(((X,Y) \models \varphi$ implies $(X,Y) \models \bot)$ implies $(X,Y) \models \bot \big)$ ~~implies~~ $(X,Y) \models \varphi \Big)$

$\iff \Big(\big(((X,Y) \models \varphi$ implies $(X,Y) \models \bot)$ implies $(X,Y) \models \bot \big)$ and $(X,Y) \not\models \varphi$

$(X,Y) \models \neg\varphi$
$\iff (X,Y) \not\models \varphi$

Tarski

!! "HT value"

negate again :

$(X,Y) \models \neg\neg\varphi \to \varphi$

$\iff \Big(\big(((X,Y) \models \varphi$ implies $(X,Y) \models \bot)$ ~~implies~~ $(X,Y) \models \bot \big)$ or $(X,Y) \models \varphi$

$\iff \Big(\big(((X,Y) \models \varphi$ implies $(X,Y) \models \bot)$ and $(X,Y) \not\models \bot \big)$ or $(X,Y) \models \varphi$

$\iff \big(((X,Y) \models \varphi$ implies $(X,Y) \models \bot)$ or $(X,Y) \models \varphi$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\big((X,Y) \not\models \varphi \text{ or } (X,Y) \models \bot \big) \text{ or } (X,Y) \models \varphi$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(X,Y) \not\models \varphi \text{ or } (X,Y) \models \varphi$$

Zusammenfassung: Wird die Metalogik als klassisch angenommen, so liefert $(\cdot,\cdot) \models_{HT \text{ohne}}$. wieder die klassische Logik

---

N.B. $\varphi \to \neg\neg\varphi$ gilt auch in intuitionistischer Logik

Prop. 2 Für alle Formeln F, $X \subseteq Y \subseteq V$

gilt $(X,Y) \models \neg F \iff Y \models \neg F$

$(X,Y) \models \neg F$

$\iff$ { Def. }

$\Big(\underbrace{(X,Y) \models F \text{ implies } (X,Y) \models \bot} \Big) \text{ and } Y \models \neg F$

$\iff$ { ~~siehe oben~~ ... }

$(X,Y) \not\models F$ and $Y \models \neg F$

$\iff$

$(X,Y) \not\models F$ and $Y \not\models F$

$\iff$ $(X,Y) \not\models F$ and $(Y,Y) \not\models F$

$\iff$ { ua kapos. Prop. 1 }

$(Y,Y) \not\models F \iff Y \not\models F \iff Y \models \neg F$

15.06. natural deduction: (natürliches Schließen)

in Abgrenzung zum Hilbertkalkül mit einziger Schlußregel Modus Ponens $\dfrac{A \to B \quad A}{B}$

Axiome: $\dfrac{}{\bot \to A}$ (oder $\dfrac{\bot}{A}$) (vgl. auch LEM: $\dfrac{}{A \vee \neg A}$)

Ableitungsregeln: z. B. $\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$ $\wedge$-Intr.

... und für andere Junktoren

hypothetical derivations:

$$\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[a : A] \\ \vdots \\ Pa\end{matrix}}{\forall a : A \, . \, Pa}$$

wollen intuitionisch zeigen:

$$\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$$

<u>Beweis</u> Seien $\neg\neg\neg\varphi$ und φ angenommen.
Wir führen dies zu einem Widerspruch.
Aus φ erhalten wir $\neg\neg\varphi$.
$(\lambda a.\lambda\psi.\psi a : A \to (A \to \bot) \to \bot)$

Aus $\neg\neg\neg\varphi$ und $\neg\neg\varphi$ erhalten wir den geforderten Widerspruch.

(5) $\quad F \vee (F \to G) \vee \neg G$

(DM) $\quad \neg(F \wedge G) \to \neg F \vee \neg G$

Wollen zeigen: (5) $\to$ (DM).

Seien (5) und $\neg(F \wedge G)$ angenommen. Es ist $\neg F \vee \neg G$ zu zeigen. Nach Fallunterscheidung bei (5):

1. F gilt. Dann gilt auch $\neg G$. Denn gälte G, gäbe es Wid. zu $\neg(F \wedge G)$.

3. $\neg G$ gilt. ✓

2. $F \to G$ gilt. Wir zeigen $\neg F$. Sei dafür F angenommen, wir leiten Wid. her. Aus F und $F \to G$ erhalten wir G, also auch $F \wedge G$ im W zu $\neg(F \wedge G)$.

Äquivalenz von $F \vee G$ und ?

$$((F \to G) \to G) \wedge ((G \to F) \to F)$$

Zumindest „$\longrightarrow$" ist klar: 2 symmetrische Fälle:

1. F gilt oder 2. G gilt.

1.: Dann gilt $(G \to F) \to F$ trivialerweise.

$(F \to G) \to G$: Sei $(F \to G)$ angenommen, mit gegebenem F und Modus ponens haben wir G. ◻

Für "$\Longleftarrow$" müssen wir wahrscheinlich bei Lukasiewicz (1941) schauen.

Bemerkung Jan: "Program completion" gibt Intuition

Bemerkung Thomas: "Twelf definitions of a stable model".

Bemerkung Sebastian:

Warum ist $Y \models T \wedge \nexists X \subset Y \,.\, (X \models T)$

<u>keine</u> geeignete Definition für Answerset?