Kettenbruchentwicklung von Quadratwurzeln

Quadratwurzeln haben *periodische* Kettenbrüche.

Wir geben 2 Beispiele:

$$4 < \sqrt{17} < 5$$

$$\sqrt{17} = 4 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{17}-4}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{17}-4} = \frac{\sqrt{17}+4}{17-16} = \sqrt{17}+4$$

$$= 4 + \frac{1}{\sqrt{17}+4}$$

$$8 < \sqrt{17}+4 < 9$$

$$= 4 + \frac{1}{8 + \sqrt{17}-4}$$

$$= 4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{\sqrt{17}+4}}$$

$$= 4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \dots}}} = [4; \overline{8}]$$

Die Wurzelausdrücke in den Nennern bekommt man durch geeignetes Erweitern (und Benützung der 3. binomischen Formel $(n+m)(n-m) = n^2 - m^2$) weg!

$$\sqrt{13} = 3 + \sqrt{13} - 3 \qquad 3 < \sqrt{13} < 4$$

$$= 3 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{13}+3}{4}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{13}-3} = \frac{\sqrt{13}+3}{13-9} = \frac{\sqrt{13}+3}{4}$$

$$6 < \sqrt{13}+3 < 7$$

$$\hookrightarrow \quad 1 < \frac{\sqrt{13}+3}{4} < 2$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{13}-1}{4}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{13}-1} = \frac{4\sqrt{13}+4}{13-1} = \frac{\sqrt{13}+1}{3}$$

$$4 < \sqrt{13}+1 < 5$$

$$\hookrightarrow \quad 1 < \frac{\sqrt{13}+1}{3} < 2$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{13}+1}{3}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{13}-2}{3}}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{13}-2} = \frac{3\cdot\sqrt{13}+3\cdot 2}{13-4} = \frac{\sqrt{13}+2}{3}$$

$$5 < \sqrt{13}+2 < 6$$

$$\hookrightarrow \quad 1 < \frac{\sqrt{13}+2}{3} < 2$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{13}+2}{3}}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{\sqrt{13}+2}{3}}}}$$

$$5 < \sqrt{13} + 2 < 6$$

$$\hookrightarrow 1 < \frac{\sqrt{13}+2}{3} < 2$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{\sqrt{13}-1}{3}}}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{13}-1} = \frac{3\sqrt{13}+3}{13-1}$$

$$= \frac{\sqrt{13}+1}{4}$$

$$4 < \sqrt{13} + 1 < 5$$

$$\hookrightarrow 1 < \frac{\sqrt{13}+1}{4} < 2$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{\sqrt{13}+1}{4}}}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{\sqrt{13}-3}{4}}}}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{13}-3} = \frac{4(\sqrt{13}+3)}{13-9}$$

$$= \sqrt{13} + 3$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{13}+3}}}}}$$

$\longrightarrow$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{13} + 3}}}}}$$

$$\sqrt{13} + 3 = 6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{13} + 3}}}}}$$

$$= [6; \overline{1, 1, 1, 1}] \quad \text{periodisch}$$

Damit ist auch

$$\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}] \quad \text{periodisch.}$$

Hier noch die einfachste Kettenbruch-entwicklung, die für den goldenen Schnitt:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} =$$

$$1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{5}-1}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}$$

$$= [1; 1, 1, \dots]$$

$\hookrightarrow 2 < \sqrt{5} < 3$

$\hookrightarrow 3 < \sqrt{5}+1 < 4$

$\hookrightarrow 1 < \frac{\sqrt{5}+1}{2} < 2$

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$