

28.11.23

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\sin x = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(2q+1)!} x^{2q+1}$$

$$\begin{aligned} &= \pi - \frac{\pi^3}{3! \cdot n^2} + \frac{\pi^5}{5! \cdot n^4} - \dots \\ &= \pi + \frac{A}{n^2} + \frac{B}{n^4} + \dots \\ &\quad \sin \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{n^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{n^5 \cdot 5!} \end{aligned}$$

mit $A = -\frac{\pi^3}{3!}$ und

$$B = +\frac{\pi^5}{5!}$$

Taylorentwicklung:

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, d.h. so oft differenzierbar wie $0 \in \mathbb{R}$.

Dann heißt der Ausdruck

$$T_f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \cdot x^n$$

die Taylorentwicklung von f an der Stelle 0.

z.B. $f = \exp$

$$\hookrightarrow T_{\exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Hier sogar

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

und betrachten

$\lambda x. \exp(ix)$ als Funktion

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned}
 \exp(ix) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i \cdot x)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (i \cdot x)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (i \cdot x)^{(2n+1)} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-1)^n \cdot x^{2n} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n \cdot x^{(2n+1)}
 \end{aligned}$$

$$(=) \quad \cos x + i \cdot \sin x$$

"... Specifically..."

Wissen

$$P_n = \pi + A/u^2 + B/u^4 + \dots$$

(dabei sind A und B unabh. von u)

$$\Rightarrow P_{2n} = \pi + A/(2u)^2 + B/(2u)^4 + \dots$$

$$= \pi + A/4 \cdot u^2 + B/16 \cdot u^4 + \dots$$

$$\frac{4P_{2n} - P_n}{3} = \frac{(4\pi + A_{n^2} + B_{\frac{1}{4}n} + \dots) - \pi - A_{\frac{1}{4}n^2} - B_{\frac{1}{4}n} \dots}{3}$$

$$= \frac{3\pi - \frac{3}{4}B_{\frac{1}{4}n} \pm \dots}{3}$$

$$= \pi - \frac{1}{4}B_{\frac{1}{4}n} \pm \dots$$

5.12.23 even-better- π -sequence

$$Q_n = \pi - \frac{B/4}{4^n} \pm \dots$$

$$\Rightarrow Q_{2n} = \pi - \frac{B}{4 \cdot 16 \cdot 4^n} \pm \dots$$

$$\hookrightarrow 16 \cdot Q_{2n} = 16\pi - \frac{B}{4 \cdot 4^n} \pm \dots$$

$$\hookrightarrow 16 \cdot Q_{2n} - Q_n = 15\pi \dots \pm \dots$$

$$\hookrightarrow \frac{16 \cdot Q_{2n} - Q_n}{15} = \pi \dots$$

$$R(h) = A + B h^{p_1} + C h^{p_2} + D h^{p_3} + \dots \text{ mit } p_1, p_2, p_3, \dots$$

ist ein Ausatz

$$p_1 < p_2 < p_3 < \dots$$

Insbesondere, falls $p_1 \geq 1$, steckt in diesem Ansatz
die Information, daß $\frac{d}{dh} R(0) = 0$!!

(usw. für andere Exponenten, die nicht null

z.B. $5 \notin \{p_1, p_2, \dots\} \Rightarrow$

den p_i vor kommt:

$$\frac{d^5 R}{dh^5}(0) = 0$$

zum Beispiel für $R(h) = \sqrt{h}$ wäre ein solcher Ansatz nicht

Sinnvoll.

Seite 2 rechts unten:

"infer approximation order (smallest P_i)
numerically" (?)

Sei

$$s_1 = R(h)$$

$$s_2 = R(h/2)$$

\vdots

$$s_5 = R(h/5)$$

$$t_1 = R'(h)$$

\vdots

$$t_4 = R'(h/4) \dots$$

Ansatz

$$R(h) = A + B h^{P_1} + C h^{P_2} + \dots$$

$$\hookrightarrow R'(h)$$

$$\hookrightarrow R''(h)$$

Wollen die approximation order der verschiedenen
Spalten numerisch bestimmen \Rightarrow nächstes mal...

12.12.

$$\lim_{q \rightarrow \infty} S_q = S_\infty$$

$$S_h = S(h/2^q)$$

$$S_q - S_\infty \stackrel{!}{=} \text{Fehler des Ansatz}$$

$$= \alpha \cdot \left(\frac{h}{2^q}\right)^\beta$$

\Rightarrow implementieren!

\hookrightarrow aus Liste $[S_1, \dots, S_n]$ kann man

Liste von Paaren x, β berechnen

Folgender β 's approximiert die approximativ
Ordnung von \mathbb{R} .