Russellsche Antinomie:

Vorgeschichte:
Cantor's Mengentheorie:

$\{x \mid \phi x\}$ z.B. $\{x \mid x$ ist eine Primzahl$\}$

"set comprehension" Eigenschaft

oder $\{x \mid x$ ist oder war ein König$\}$

$y \in \{x \mid \phi x\} \Leftrightarrow \phi y$ (*)

$\{x \mid 1 = 1\}$

oder auch: $\{x \mid x \in x\}$

sei y die "Menge aller abstrakten Mengen"

Gilt $y \in \{x \mid x \in x\}$?

Nach Def. der comprehension gilt $\Leftrightarrow y \in y$

ist die "Menge aller abstrakten Menge" eine abstrakte Menge (ja)

Jetzt sei R die Menge $\{x \mid x \notin x\}$.

Russell'sche Antinomie

Ist $R \in R$?

Annahme $R \in R$. D.h. $R \in \{x \mid x \notin x\}$

Dann gilt nach Def. der comprehension ((*) in Hinrichtung "$\Rightarrow$")

$R \notin R$ $\lightning$

Annahme $R \notin R$. D.h. $R \notin \{x \mid x \notin x\}$.

Nach Def. comprehension (Kontraposition der Rückrichtung von (*))

$\neg(R \notin R)$ $\lightning$.

$= \neg\neg(R \in R) = R \in R$

30.Okt.24

Nicola: Natürliche Frage: Warum gerade bei Negation Probleme?

Sebastian: Tatsächlich auch in anderen Paradoxien Negation wichtig. Ich glaube, es gibt ein Beispiel ohne?

Hatten: $R = \{x \mid \underline{x \notin x}\}$, Hatten bewiesen $\underline{R \notin R}$.

Also $R \in \{x \mid x \notin x\} = R$
(Definition comprehension)

Nicola: sollten das in Agda implementieren...
Tim versucht das...

Sebastian: Schreibe $\phi x \equiv x \notin x$ (Def. ϕ)
Dann ist $R = \{x \mid \phi x\}$. Hatten $R \notin R$, d.h. ϕR
(Def. comprehension) $\phi R \Rightarrow R \in \{x \mid \phi x\} = R$

Abstraction principle

Betrachte $x = x + 1$

$\bullet = \bullet + 1$

Georg: a black hole satisfies the equation!

$\sin x \rightsquigarrow \sin \bullet$

$2 = 1 + 1 \rightsquigarrow 2 = 1 \bullet 1$

oder

$\rightsquigarrow 2 = 1 + \bullet$

Maria ist größer als Peter $\rightsquigarrow$ • ist größer als Peter

oder

$\rightsquigarrow$ Maria • Peter

$\rightsquigarrow$ Maria ist größer als •

Beispiel "Schönfinkeling" ("Currying")

Moses Schönfinkel
Haskell B. Curry

z.B. Addition,

Frege	λ-Kalkül	Typen
a) $1 + 2$	$1+2$	$\mathbb{N}$
Abst. principle 1.		
f1) $\bullet + 2$	$\lambda x . x + 2$	$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
Abst. princ. 2		
f2) $\bullet + \blacksquare$	$\lambda y . \lambda x . x + y$	$\underline{\mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})}$

Margarete hätte erwartet $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

uncurry : $(\mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})) \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N})$

ist Bijektion

allgemeiner:
uncurry : $(\overbrace{A \to (B \to C))}^{\text{1. Arg.}} \to (A \times B \to C)$

$$\mathrm{eval} : (A \to B) \to A \to B$$

$$\mathrm{eval}\ f\ a = f\ a$$

oder $\mathrm{eval}\ f = f$ ← pointfree definitions

oder $\mathrm{eval} = \mathrm{id}$

das nimmt Argumente "gemischter" Levels : ~~ko~~ Argument "Funktion"
2. Argument "Objekt"

im Ψ zu S.13 unten?

Margareta: Nein! Durch Schönfinkeling muß Frege nur einstellige Funktionen betrachten

---

7.5. Ergänzung Nicola: auch die Verwendung von Paaren (Tupeln) ist dazu da, mehrstellige Funktionen auf einstellige Funktionen zurückzuführen.

```
data Either : Set -> Set -> Set where
  inl : {A B : Set} -> A -> Either A B
  inr : {A B : Set} -> B -> Either A B
```

$(A+B)' = A' + B'$

Derivatives of data structures
(McBride, Sattler, ...)

Sebastian: zu Freges Zeit war noch keinerlei Formalismus da! Wie schwer muß es gewesen sein, über higher order functions nachzudenken!

Nicola: Wann war Frage? ≈1880

was ist mit Leibniz, Newton? ← Calculus variationum

Sebastian/Nicola: zwei "Welten": Calculus (Physik, New)

Logik

Nicola: Heute haben wir mit Typentheorie so etwas wie, aber wir benutzen sie nicht (oder zu wenig).

Buch S. 14

"Ontologischer Gottesbeweis":

Sebastian: "Ontologisch" = "das Sein betreffend"

Nicola: bis Mitte/Ende 19. Jahrhundert wurde die Physik als ontologische Wissenschaft angesehen: sie beschreibt das Sein (die Natur).

Ab Quantenmechanik: Beobachter kann nicht als außen stehend angesehen werden ⟶ in der Physik

War der "Abschied von der "Realität"" 20 - 30 Jahre früher als die Unvollständigkeitsresultate der Mathematik.

Sebastian/Tim/Nicola : Unterschiede Mathematik / Physik diskutiert

Begründungen vs. Axiome vs. Experimente

Nicola zitiert Einstein: Wenn eine Aussage sicher ist, hat sie nichts mit der Realität zu tun ... und umgekehrt...

Zurück zum ont. Gottesbeweis : (Anselm von Canterbury)
1033/4 – 1109

Gott := "das, worüber hinaus nichts Größeres gedacht werden kann" (Georg : Gott : String)

Annahme: Gott existiert nicht.

Wir definieren

Gott* := „das, worüber nichts Größeres gedacht werden kann und das existiert"

Formalisierungsversuch

Götter := Menge der Dinge, über die hinaus nichts Größeres gedacht werden kann.

$$\text{Götter}' := \{ \underset{:X}{x} + \underset{:\mathrm{Prop}}{Ex} \mid x \in \text{Götter} \}$$

Tim: ich versteh' das nicht ☹

E die Existenzeigenschaft

$E : \cancel{X} \to \mathrm{Prop}$

$\_+\_ : X \to \mathrm{Prop} \to X$

$x + P$ bedeutet: „das Objekt, das wie x ist, für das aber P gilt"

Götter := Menge der Dinge, über die hinaus nichts Größeres gedacht werden kann.

$$\text{Götter}' := \{\underbrace{x}_{:X} + \underbrace{Ex}_{:\mathrm{Prop}} \mid x \in \text{Götter}\}$$

E die Existenzeigenschaft

$E : X \to \mathrm{Prop}$

(da x nicht existiert laut Annahme)

$x + Ex$ ist "größer" als x, d.h. über x kann doch etwas Größeres gedacht werden $\lightning$.

$\Rightarrow$ Annahme falsch $\Rightarrow$ mindestens ein Gott existiert

14.05.24

Frege → Logizist

<u>Seb.:</u> heute gibt es "nur noch" Neo-Logizist

ϕ has the same "course-of-values" as ψ $\iff$ ϕ and ψ have always the same value for the same argument

heute oft $\phi \doteq \psi$ "extensional gleich" oder "punktweise gleich"

Was genau bedeutet "same" auf der rechten Seite, insbesondere wenn ϕ und ψ für jedes x eine Funktion liefern ... ?

Sebastian: – keine Definition von "Werteverlauf" ("course of value") !

nur: ϕ und ψ haben den gleichen Werteverlauf

– vgl. auch Frege's Definition von Zahlen !?

Wenn wir mit Boolschen Wahrheitswerten rechnen, können wir das Beispiel im Text mittels Wahrheitswert-Tabellen überprüfen:

x	$\neg x$	$x \wedge \neg x$	$x \Leftrightarrow \neg x$
0	1	0	0
1	0	0	0

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\Leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

Versuchen, die Herleitung auf Seite 15 zu formalisieren.

$$f(x) = \neg\forall\varphi\,[\grave{\alpha}\varphi(\alpha) = x \rightarrow \varphi(x)]$$

Wir geben Typen an.

f : Object $\longrightarrow$ Prop

$\grave{\varepsilon}\,\_\,(\varepsilon)$: Function $\longrightarrow$ Object

$\Uparrow$

ist Prop $\subseteq$ Object ?

Welchen Typen hat φ oben in der Formel ?

φ : Object $\longrightarrow$ Prop

$\_=\_$: Object $\rightarrow$ Object $\rightarrow$ Prop

$\_\rightarrow\_$: Prop $\rightarrow$ Prop $\rightarrow$ Prop

$\forall\,\_\,[\_]$: (Object $\rightarrow$ Prop) $\rightarrow$ Formula $\rightarrow$ Prop

28.05.24

Wir lesen Chapter 2.

Nicola: Irgendwann versuchen, Russell-Zitat S. 19
zu formalisieren.

Nicola: Russell stand vor dem Problem, <u>was</u> man
weglassen kann, um die Widersprüche zu vermeiden,
aber trotzdem eine nützliche Logik zu haben.
Ähnlich: Einstein: hat sich entschieden,
das Relativitätsprinzip zu <u>modifizieren</u>, nicht
weg zu werfen!

Beispiele Viscious circle principle

"Whatever involves <u>all</u> of a collection must not be one of the collection"

- $X := \{x \mid x \notin x\}$ oder allgemein $X := \{x \mid \phi x\}$ mit einer Aussagefunktion ϕ

- der/die größte Schüler/in einer Klasse von <u>unterschiedlich großen Schüler/innen</u>.

x größte ~~von~~ X

$\equiv$

$\forall y \in X \quad y \leq x$

- Verallgemeinert in Typentheorie
(Wolle den "größten" Typen definieren, wobei $\forall X, Y : \mathrm{Type}$

$$X \geq Y \iff \exists f : Y \to X)$$ ⟵ Margarete: warum? schon Antisymmetrie ist problematisch

```
data Largest : Type where
  One : ({A : Type} → (A → Largest)) → Largest
```

Sie

Theorie T ist ~~prä~~ prädikativ $\overset{\text{def}}{\iff}$ Viscious circle wird strikt befolgt (durch die formalen Regeln der

Leibniz equality: $\quad x = y \iff f(x) \leftrightarrow f(y)$

für alle prop. functions f

Sind x, y Funktionen, die punktweise gleich sind. Dann folgt nicht unbedingt die Leibniz Gleichheit.

ÜA: Zeige, daß Leibniz-Gleichheit eine Äquivalenz ist!

Warum "relation symbols"?

$3 > 5$ ist eine Aussage

"drei ist größer als fünf"

Seite 22.: in moderner Modelltheorie:

F – Funktionssymbole

R – Relationssymbole

~~V – Variablen~~

in Modell mit Individuenbereich (Universum) U wird n-äre Funktionsymbol $f \in F$ interpretiert als Funktion $U^n \to U$, hingegen werden Relationssymbole als Teilmengen von U^n interpretiert

n-äre Relation R ist also Teilmenge von U^n. $(n>0)$

Kann auch interpretiert werden als Funktion:

$$f_R : U^n \longrightarrow \mathrm{Bool}$$

oder auch als Funktion

$$g_R : U^{n-1} \longrightarrow \mathcal{P}(U)$$

(Allgemeiner): Binäre Relationen (A, B Menge)

$$\mathcal{P}(A \times B) \qquad A \times B \to \mathrm{Bool} \qquad A \to \mathcal{P}(B)$$

$$R \longmapsto (a,b) \mapsto \begin{cases} \text{True, falls } (a,b) \in R \\ \text{False sonst} \end{cases}$$

$$\left\{ w \in A \times B \;\middle|\; \chi_R(w) = \text{True} \right\} \longleftarrow\!\shortmid \chi_R$$

$$\mathcal{P}(A \times B) \longrightarrow A \to \mathcal{P}(B)$$

$$R \longmapsto \eta_R \quad \text{mit}$$

$$\eta_R\, a = \{ b \in B \mid (a,b) \in R \}$$

? Hausaufgabe! $\longleftarrow\!\!\!\!\dashv\; h$

Beispiel: $>$ als Relation auf $\mathbb{N}$

$$\eta_> 2 = \{0, 1\}.$$

$$\eta_> 0 = \emptyset$$

Beispiel Formalisierung: gesucht ist ein Typ, der alle natürliche Zahlen größer als 5 repräsentiert

$$\mathrm{Big5} : \mathrm{Type} := \sum_{n : \mathbb{N}} n > 5$$