28.11.23

$$P_n = \frac{n}{2} \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{n^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{n^5 \cdot 5!}$$

$$= \pi - \frac{\pi^3}{3!\, n^2} + \frac{\pi^5}{5! \cdot n^4} \mp \ldots$$

$$= \pi + A/n^2 + B/n^4 + \ldots$$

mit $A = -\frac{\pi^3}{3!}$ und

$B = +\frac{\pi^5}{5!}$

Taylorentwicklung:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt, d.h. ∞ oft differenzierbar bei $0 \in \mathbb{R}$.

Dann heißt der Ausdruck

$$T_f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0)\, x^2 + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(0) \cdot x^n$$

die <u>Taylorentwicklung von f an der Stelle 0</u>.

z.B. $f = \exp$

$\hookrightarrow$ $$T\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n .$$

Hier sogar $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

und betrachte

$\lambda x . \exp(ix)$ als Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\exp(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\cdot x)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(i\cdot x)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(i\cdot x)^{(2k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(-1)^k \cdot x^{2k} + i\cdot\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\cdot(-1)^k \cdot x^{(2k+1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x + i\cdot \sin x$$

"...Specifically..."

Wissen $P_n = \pi + A/n^2 + B/n^4 + \ldots$

(dabei sind A und B unabh. von n)

$$\Rightarrow \quad P_{2n} = \pi + A/(2n)^2 + B/(2n)^4 + \ldots$$

$$= \pi + A/4\cdot n^2 + B/16\cdot n^4 + \ldots$$

$$\frac{4P_{2n} - P_n}{3} = \frac{\left(4\pi + A/n^2 + B/4n^4 + \dots\right) - \pi - A/n^2 - B/n^4 \dots}{3}$$

$$= \frac{3\pi - \frac{3}{4} B/n^4 \pm \dots}{3}$$

$$= \pi - \frac{1}{4} B/n^4 \pm \dots$$

5.12.23 even-better-pi-sequence

$$Q_n = \pi - B/4n^4 \pm \ldots$$

$$\Rightarrow \quad Q_{2n} = \pi - B/4 \cdot 16 \cdot n^4 \pm \ldots$$

$$\hookrightarrow \quad 16 \cdot Q_{2n} = 16\pi - B/4 \cdot n^4 \pm \ldots$$

$$\hookrightarrow \quad 16 \cdot Q_{2n} - Q_n = 15\pi \ \ldots \pm \ldots$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{16 \cdot Q_{2n} - Q_n}{15} = \pi + \ldots$$

$$R(h) = A + Bh^{p_1} + Ch^{p_2} + Dh^{p_3} + \dots \text{ mit } p_1, p_2, p_3, \dots$$

ist ein **Ansatz** $\qquad p_1 < p_2 < p_3 < \dots$

Insbesondere, falls $\underline{p_1 > 1}$, steckt in diesem Ansatz die Information, daß $\frac{d}{dh} R(0) = 0$!!

(usw. für andere Exponenten, die <u>nicht</u> unter den p_i vorkommen: z.B. $5 \notin \{p_1, p_2, \dots\} \Rightarrow \frac{d^5 R}{dh^5}(0) = 0$

zum Beispiel für $R(h) = \sqrt{h}$ wäre ein solcher Ansatz <u>nicht</u> sinnvoll.

Seite 2 rechts unten:

"infer approximation order (smallest p_i) numerically" (?)

Sei

$s_1 = R(h)$

$s_2 = R(h/2)$ $\quad$ $t_1 = R'(h)$

$\vdots$ $\quad\quad$ $\vdots$

$s_5 = R(h/2^5)$ $\quad$ $t_4 = R'(h/2^4) \ldots$

Ansatz

$$R(h) = A + Bh^{p_1} + Ch^{p_2} + \ldots$$

$\hookrightarrow R'(h)$

$\hookrightarrow R''(h)$

Wollen die approximation order der verschiedenen Spalten numerisch bestimmen $\Rightarrow$ nächstes mal...