Московский физико-технический институт

Вопрос по выбору

Точки Лагранжа. Положение, устойчивость равновесия и применение

Семестр: 1

Работу выполнил:

Степанов Тимофей

Группа: Б02-308

1 Определение

Ограниченной задачей трех тел называют частный случай задачи трех тел, когда масса одного из тел достаточно мала, чтобы его влиянием на два других можно было пренебречь. В этом случае два тела большей массы будут двигаться тому как они двигаться в задаче двух тел, а 3-е двигаться под влиянием двух других.

Точками Лагранжа называют точки в системе ограниченной задачи трех тел движущихся по круговой траектории, в которых меньшее тело будет оставаться неподвижным относительно 2-х других.

Прежде чем рассматривать систему трех тел следует получить несколько фактов о характере движения двух тел.

2 Задача двух тел

Покажем, что два изолированных гравитирующих тела будут вращаться вокруг своего центра масс с одинаковой угловой сокростью Ω.

Введем неподвижную систему отсчета с началом в точке O. Пусть $\vec{r_{1,2}}$ - радиус-векторы тел, $\vec{r_g}$ - радиус вектор центра масс.

Введем $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$. Тогда второй закон Ньютона для каждого из тел запишется как:

$$m_1\ddot{\vec{r_1}} = G\frac{m_1m_2}{r^2}\vec{e_r};\ m_2\ddot{\vec{r_2}} = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\vec{e_r} \tag{1}$$

Тогда

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r_2}} - \ddot{\vec{r_1}} = -G\frac{m_1+m_2}{r^2}\vec{e_r} \tag{2}$$

Это можно выражение можно записать как:

$$m_1\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2}m_1\vec{e_r} \tag{3}$$

где $\mu = G(m_1+m_2)$.

Для понимания физического смысла полученного выражения следует ввести понятие Кеплеровой задачи. **Кеплерова задача** - задача о движении тела в инерциальной системе отсчета, начало которой совпадает с "источником"центрального поля силы, зависящей обратно квадратично от расстояния между телом и началом координат системы и направленной по прямой, соединяющей тело и начало координат, т.е. $F = \frac{\alpha}{r^2}\vec{e_r}$. Таким образом движение тела под гравитационным влиянием другого, закрепленного в начале координат (задача одного тела) является примером Кеплеровой задачи с $\alpha = -GM$, а решение данной задачи можно считать известным. Далее говоря о Кеплеровой задаче будем подразумевать случай именно гравитационной силы.

Теперь, учитывая, что вектор $\vec{r}$ имеет физический смысл положения тела m_2 относительно m_1, а полученное уравнение соответствует уравнению для Кеплеровой задачи с $\mu = G(m_1+m_2)$ можем интерпретировать полученный результат как то, что тело m_2 будет двигаться так, как если бы тело m_1 покоится и его гравитационный параметр равен $G(m_1+m_2)$.

Записав третий закон Кеплера в форме $\frac{1}{\Omega^2} = \frac{R^3}{\mu}$ (здесь мы уже пользуемся тем, что орбиты круговые, иначе длина не всегда R), получим

$$\Omega^2 R^3 = \mu = G(m_1 + m_2) \tag{4}$$

Здесь Ω - угловая скорость вращения около m_1, а не центра масс, так что остается доказать что они будут совпадать. Для этого введем вектор $\vec{R_2} = \vec{r_2} - \vec{r_G}$. Он соответствует положению m_2 относительно центра масс. По определению центра масс $\vec{R_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} = k\vec{r}$. Подставляя в (3)

$$m_1\ddot{\vec{R_2}} = -\frac{\mu'}{R_2} m_1 e_{\vec{R_2}}, \mu' = k^3\mu \tag{5}$$

снова получим уравнение Кеплеровой задачи, тогда можем записать аналогично записать 3 закон Кеплера. Получим

$$\omega^2 = \frac{\mu'}{R_2^3} = \frac{k^3\mu}{k^3 r^3} = \Omega^2 \tag{6}$$

Аналогичные рассуждения будут верны и для m_1. Таким образом мы доказали наше утверждение и нашли угловую скорость вращения тел вокруг центра масс.

3 Ограниченная задача трех тел. Положение точек Лагранжа

Теперь рассмотрим ограниченную задачу трех тел и найдем положение точек Лагранжа. Пусть в соответствии с формулировкой задачи $m << m_1, m_2$. На малое тело будет действовать будут только силы притяжения двух других тел. Выберем систему остчета, начало которой связано с центром масс. Пусть $\vec{r_1}$ - радиус вектор тела m_1, $\vec{r_2}$ - радиус вектор тела m_2, $\vec{r}$ - радиус вектор тела m. Тогда второй закон Ньютона запишется как:

$$\vec{F_G} = -\frac{Gmm_1}{|\vec{r} - \vec{r_1}|^3}(\vec{r} - \vec{r_1}) - \frac{Gmm_2}{|\vec{r} - \vec{r_2}|^3}(\vec{r} - \vec{r_2}) \tag{7}$$

По определению в точках Лагранжа $\vec{F} = 0$. Сложность заключается в том, что $\vec{r_1}$ и $\vec{r_2}$ зависят от t, причем неизвестным нам образом. Таким образом данную задачу можно разрешить, найдя в явном виде выражения для $\vec{r_1}$ и $\vec{r_2}$, однако данный способ весьма громоздкий. Однако выше, мы показали, что тела m_1 и m_2 движутся в одинаковой угловой скоростью вокруг центра масс. Тогда в неинерциальной системе отсчета, аналогичной изначальной, но вращающейся со скоростью $\Omega = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{R^3}}$ они будут неподвижны. Тогда намного удобнее перейти в нее и учитывать влияние сил инерции на тело m.

Если m находится в точке Лагранжа, она будет неподвижна относительно системы, а значит сила Кореолиса в ней будет равна нулю. Также, как было показано выше, $\Omega = const$, а значит одна из компонент переносного ускорения тоже обнулится. В результате получим:

$$\vec{F_\Omega} = \vec{F_G} - m(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})) \tag{8}$$

Вводя ПДСК $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, такой $\vec{i}$ коллинеарен оси x, т.е. направлен от m_1 к m_2, а направление $\vec{k}$ совпадает с нарпавление Ω, имеем:

$$\begin{aligned}
&\vec{\Omega} = \Omega\vec{k} \\
&\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \\
&\vec{r_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}R\vec{i} = -\alpha R\vec{i} \\
&\vec{r_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}R\vec{i} = \beta R\vec{i}
\end{aligned} \tag{9}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\vec{F_G} &= -Gm(m_1\frac{\vec{i}(x+\alpha R)+\vec{j}y}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + m_2\frac{\vec{i}(x-\beta R)+\vec{j}y}{((x-\beta R)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}) = \\
&= -Gm\left(\vec{i}\left(\frac{m_1(x+\alpha R)}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{m_2(x-\beta R)}{((x-\beta R)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \right. \\
&\left. +\vec{j}\left(\frac{m_1 y}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{m_2 y}{((x-\beta R)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

Отсюда, учитывая что, $\Omega^2R^3 = \frac{G}{\alpha}m_1 = \frac{G}{\beta}m_2$, получаем:

$$\begin{aligned}
\vec{F_\Omega} = m\Omega^2 &\left(\vec{i}\left(x - \frac{\beta(x+\alpha R)m_1}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\alpha(x-\beta R)R^3}{((x-\beta R)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \right. \\
&\left. +\vec{j}\left(y - \frac{\beta y R^3}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\alpha y R^3}{((x-\beta R)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\right)
\end{aligned} \tag{11}$$

Один из способов найти положение точек Лагранжа, это приравнять обе компоненты к нулю и решить систему из двух уравнений 14 степени. Понятно, что такой подход одновременно чрезмерно громоздкий, поэтому следует воспользоваться некоторыми физическими соображениями, чтобы успростить задачу. Заметим, что центробежная сила всегда будет направлена вдоль отрезка, соединяющего центр масс и тело m. Тогда на компоненту по направлению перпендикулярному относительно него будут влиять только силы притяжения. Тогда рассмотрение проекций на эти два направления, описываемые векторами $x\vec{i}+y\vec{j} = \vec{r}$ и $y\vec{i}-x\vec{j}$ позволит упростить задачу в математическом смысле. Сначала найдем перпендикулярную проекцию:

$$\begin{aligned}
F_\Omega^\perp &= \frac{\vec{F_\Omega}\cdot\vec{r_\perp}}{|\vec{r_\perp}|} = \frac{m\Omega^2}{|\vec{r_\perp}|}\left(\frac{-\beta y R^3\cdot\alpha R}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha y R^3\cdot\beta R}{((x-\beta R)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \\
&= \frac{m\alpha\beta y\Omega^2R^4}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{1}{((x-\beta R)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)
\end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, если $y \neq 0$, то для точки Лагранжа должно выполняться $(x-r_2)^2 = (x+r_1)^2$. Выражение в скобках слева это расстояние от точки до m_1, а справа - расстояние до m_2. Т.е. мы получили что если точки, у которых $y \neq 0$, должны лежать посередине между m_1 и m_2. Отсюда $x = \frac{R}{2}\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)$ Теперь рассмотрим проекцию на $\vec{r}$:

$$\vec{F_\Omega^{\|}} = \frac{\vec{F_\Omega}\cdot\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{m\Omega^2}{|\vec{r}|}\left(x^2+y^2-\frac{\beta x(x+\alpha R)R^3+\beta y^2R^3}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\alpha x(x-\beta R)R^3+\alpha y^2R^3}{((x-\beta R)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{13}$$

Учитывая, что в соответствии с полученным выше, знаменатели должны быть равны, можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned}\vec{F_\Omega^{\|}} &= \frac{m\Omega^2}{|\vec{r}|}\left(x^2+y^2-\frac{(x^2+y^2)R^3(\alpha+\beta)}{((x-\beta R)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \\ &= m\Omega^2R^3\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{((x-\beta R)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\end{aligned} \tag{14}$$

Из равенства этого выражения нулю следует, что $R^2 = \rho_2 + y^2$, где $\rho_2 = \rho_1 = \rho = \frac{R}{2}$ - расстояние от точки до m_2 (равное, как было показано выше, расстоянию до m_1). Отсюда получаем $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}R$.

Таким образом, мы показали что существует строго 2 точки, не лежащих на прямой соединяющей тела большей массы. При этом их координаты в системе с началом в центре масс, в которой центр масс неподвижен $\left(\frac{R}{2}\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right), \pm\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)$ или, иными словами, они лежат на вершинах правильного треугольника, одной из сторон которого является отрезок, соединяющий массивные тела, по разную сторону от него. Эти точки называются L_4 **и** L_5 **- 4-я и 5-я точки Лагранжа**.

Теперь осталось только рассмотреть случай $y = 0$. Тогда в соответствии с (11) компонента по y обнулится, и остается только найти точки в которых обнуляется горизонтальная компонента. Причем теперь задача представляет собой уже уравнение 5-ой степени, упростить решение которого физическими рассуждениями не получится.

Преобразуем, сделав замену $x = R(u+\beta)$. Тогда $x+\alpha R = R(u+1)$, $x-\beta R = Ru$ и уравнение приобретает вид:

$$u+\beta-\beta\frac{sign(u+1)}{|u+1|^2}-\alpha\frac{sign(u)}{|u|^2} = 0 \tag{15}$$

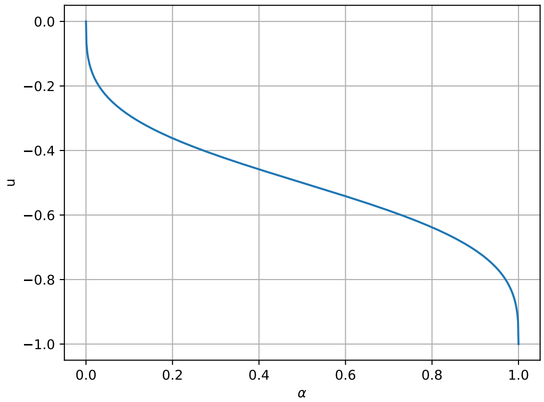
Обозначим $s_0 = sign(u)$ и $s_1 = sign(u+1)$ и преобразовав получим:

$$u^2((u+1)^3-s_1) = \alpha(u^2(u+1)^2+s_0((u+1)^2-s_1u^2) \tag{16}$$

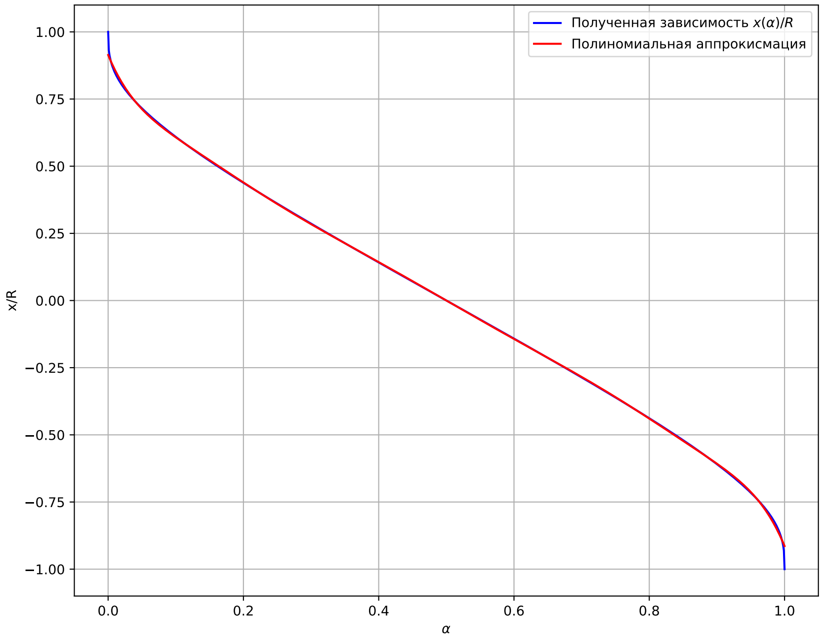
Таким образом, мы свели задачу к решению уравнения пятой степени для трех случаев значений пары s_0, s_1. Решить данное уравнение аналитически не представляется возможным, поэтому воспользуемся численными методами. Причем из-за ограничения $0 < \alpha < 1$ мы можем рассматривать конечный набор точек (в нашем случае 1000) не теряя в общности.

3.1 Точка L_1

1-я точка Лагранжа соответствует случаю $s_0 = -1, s_1 = 1$. Получаем следующее решение:

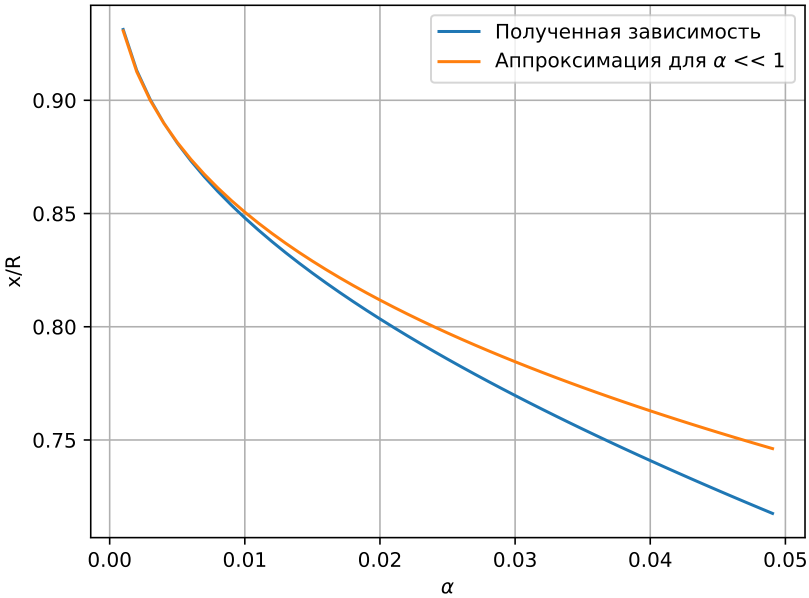


Соотвественно $x(\alpha)$:



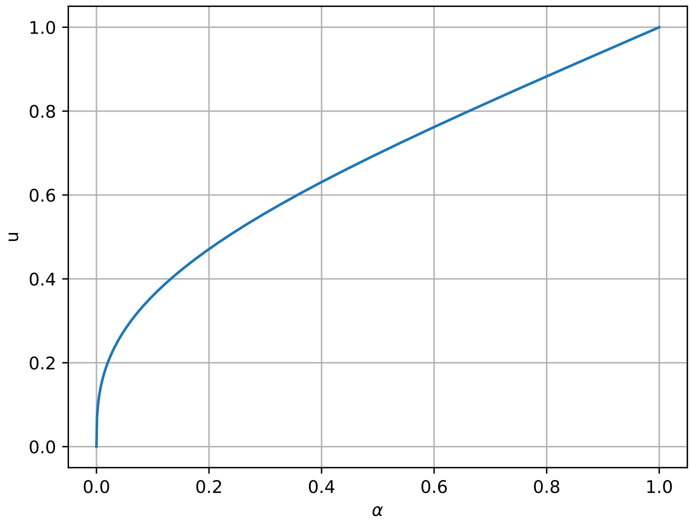
В общем случае можем аппроксисмировать полученную зависимость с помощью многочлена 10-ой степени с коэфициентами $a_{10}...a_0$ (индекс соответствует степени) = () с точностью 1.1%

Для $\alpha \ll 1$ подходит известное $x = R\left(1 - (\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}}\right)$:

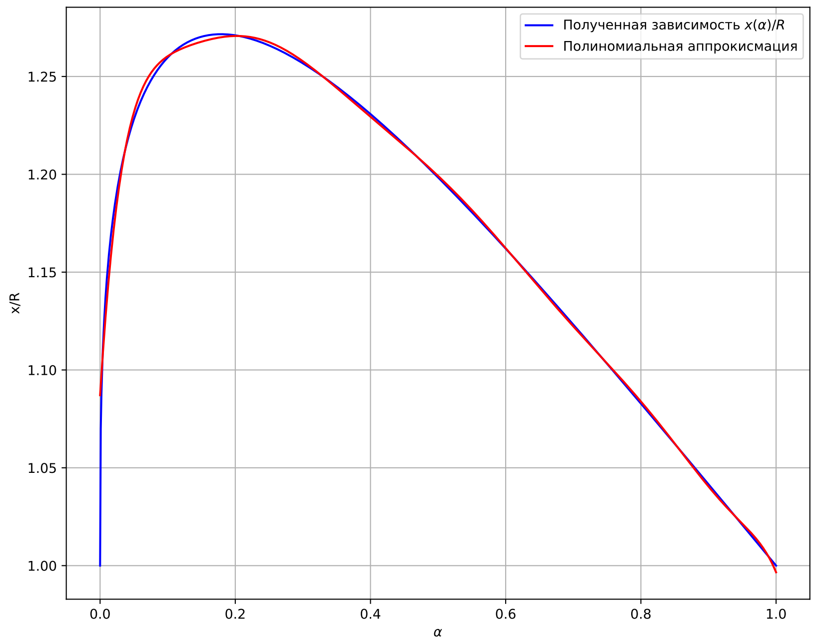


3.2 Точка L_2

2-я точка Лагранжа соответствует случаю $s_0 = 1, s_1 = 1$. Получаем следующее решение:

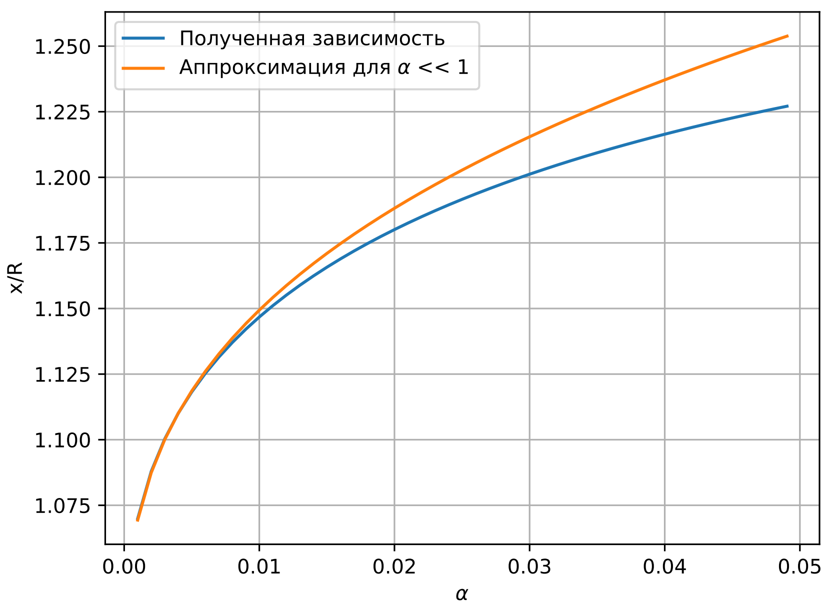


Соотвественно $x(\alpha)$:



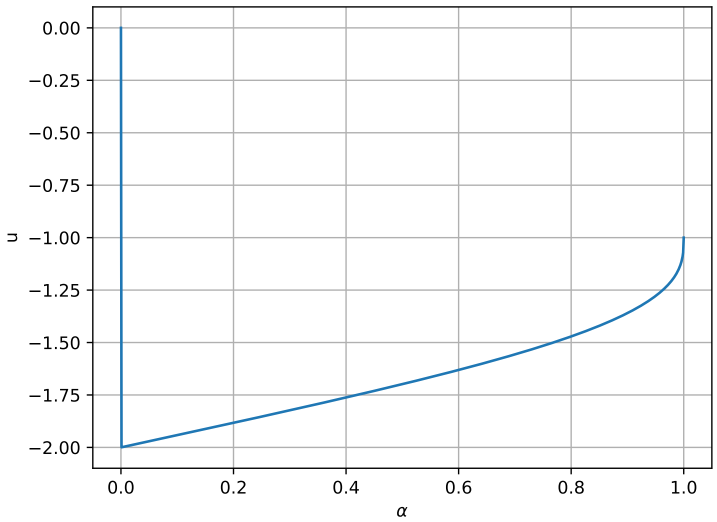
В общем случае можем аппроксисмировать полученную зависимость с помощью многочлена 10-ой степени с коэфициентами $a_{10}...a_0$ (индекс соответствует степени) = () с точностью 1.2%

Для $\alpha \ll 1$ подходит известное $x = R\left(1 + (\frac{\alpha}{3})^{\frac{1}{3}}\right)$:

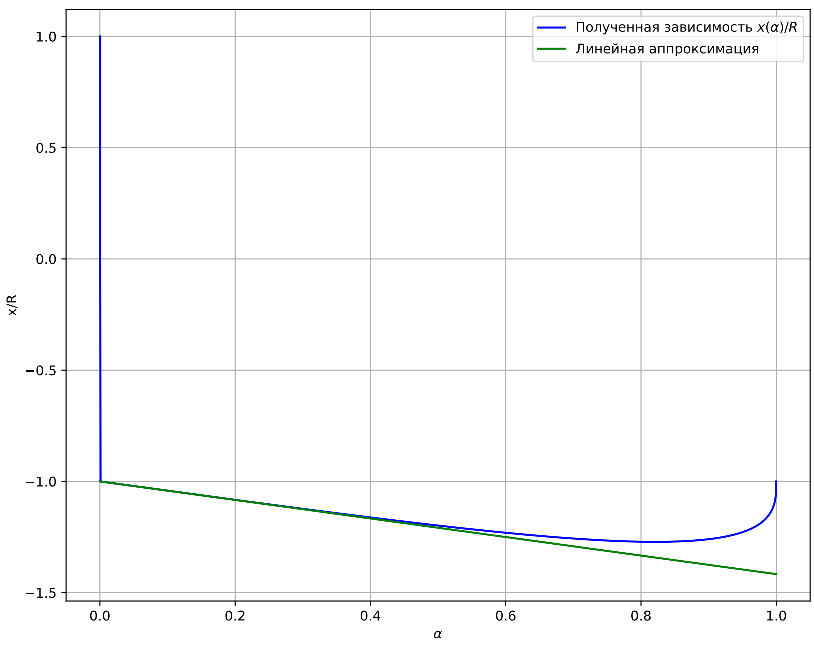


3.3 Точка L_3

3-я точка Лагранжа соответствует случаю $s_0 = -1, s_1 = -1$. Получаем следующее решение:



Соотвественно $x(\alpha)$:



Эту функцию аппроксисировать полиномом мы не будем, т.к. для $\alpha \leq\sim 0.5$ лучшей (и менее громоздкой) аппроксимацией будет $x = -R\left(1 + \frac{5}{12}\alpha\right)$

4 Анализ устойчивости равновесия в точках Лагранжа

Анализ равновесия положения заключается в определении того, как будет вести себя тело, при отклонении на малое расстояние от точки Лагранжа.

Мы будем рассматривать только плоское движение, тогда новые координаты тела при смещении от точки Лагранжа, можно записать как:

$$\begin{aligned} x &= x_i + x_p \\ y &= y_i + y_p \\ z &= z_p \end{aligned} \tag{17}$$

Учитывая, что при отклонении от точки Лагранжа на тело будет дейтсвовать ненулевая сила Кореолиса, запишем (8) в следующем виде:

$$\ddot{\vec{r}} + 2(\Omega \times \frac{d\vec{r}}{dt}) = -\nabla(\varphi_G - \frac{1}{2}\Omega^2\vec{r}^2) \tag{18}$$

Аргумент оператора набла в правой части называется псевдопотенциалом или обощенным потенциалом. Обозначим его как U_Ω.

Записав это уравнение покомпонентно, пользуясь тем, что градиент псевдопотенциала в точке Лагранжа 0 (т.к. это точка экстремума псевдопотенциала), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_p}{dt^2} - 2\Omega\frac{dy_p}{dt} &= -\frac{d^2U_\Omega}{dx^2}x_p - \frac{d^2U_\Omega}{dxdy}y_p - \frac{d^2U_\Omega}{dxdz}z_p \\ \frac{d^2y_p}{dt^2} + 2\Omega\frac{dx_p}{dt} &= -\frac{d^2U_\Omega}{dx^2}x_p - \frac{d^2U_\Omega}{dxdy}y_p - \frac{d^2U_\Omega}{dxdz}z_p \end{aligned} \tag{19}$$

Запишем её в матричном виде:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ \frac{dx_p}{dt} \\ \frac{dy_p}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{d^2U_\Omega}{dx^2} & \frac{d^2U_\Omega}{dxdy} & 0 & 2\Omega \\ \frac{d^2U_\Omega}{dxdy} & \frac{d^2U_\Omega}{dy^2} & -2\Omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ \frac{dx_p}{dt} \\ \frac{dy_p}{dt} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Если λ - собственное значение линейного преобразования справа, то данное выражение эквивалентно:

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V \tag{21}$$

Решение данного уравнение известно: $V = ce^{\lambda t}$. Таким образом, если все собственные значения буду только мнимыми, система является затухающим осциллятором, т.е. в точке устойчивое равновесие. В ином случае величины отклонения будут экспоненциально расти, а значит в точке равновесие неустойчивое.

Для разных точек различаются только величины второй производной псевдопотенциала, которые можно получить непосредственно продифференцировав.

Для L_1 и L_2 получим:

$$\frac{d^2U_\Omega}{dx^2} = \pm 9\Omega^2,\ \frac{d^2U_\Omega}{dy^2} = \pm 3\Omega^2,\ \frac{d^2U_\Omega}{dxdy} = 0. \tag{22}$$

По формуле $\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$, где τ - след, Δ - определитель нашей матрицы получаем:

$$\lambda = \pm\Omega\sqrt{1 + 2\sqrt{7}} \tag{23}$$

Таким образом, в L_1 и L_2 равновесие неустойчивое.
Для L_3:

$$\frac{d^2U_\Omega}{dx^2} = \pm - 3\Omega^2,\ \frac{d^2U_\Omega}{dy^2} = \frac{7m_2}{8m_1}\Omega^2,\ \frac{d^2U_\Omega}{dxdy} = 0. \tag{24}$$

Отсюда:

$$\lambda = \pm\Omega\sqrt{\frac{3m_1}{8m_2}} \tag{25}$$

Т.е. в L_3 равновесие неустойчивое
Для L_4 и L_5:

$$\frac{d^2U_\Omega}{dx^2} = \pm\frac{3}{4}\Omega^2,\ \frac{d^2U_\Omega}{dy^2} = \frac{9}{4}\Omega^2,\ \frac{d^2U_\Omega}{dxdy} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\gamma\Omega^2 \tag{26}$$

где $\gamma = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$
Получаем:

$$\lambda = \pm i\frac{\Omega}{2}\sqrt{2 - \sqrt{27\gamma^2 - 23}} \tag{27}$$

Таким образом, в точках L_4 и L_5 равновесие будет устойчивым, если:

$$\gamma \geq \frac{23}{27} \text{ и } \sqrt{27\gamma^2 - 23} \leq 2 \tag{28}$$

Второе условие выполняется всегда, а первое потребует:

$$m_1 \geq 25m_2\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4/625}}{2}\right) \tag{29}$$

5 Заключение

Точки Лагранжа являются важным объектом в современной астрофизике. В частности, их свойства прямым образом используются для размещения в них космических обсерваторий ("Джеймс Уэбб"в L_2 или SOHO в L_1) для наблюдений как за дальним космосом, так и за нашей солнечной системой.

В нашей работе мы рассмотрели ограниченную задачу трех тел, нашли положение всех точек Лагранжа с помощью аналитических и численных методов, а также области корректного применения разных аппроксимаций. Кроме того, мы исследовали устойчивость равновесия каждой точки, что является довольно ценным результатом.