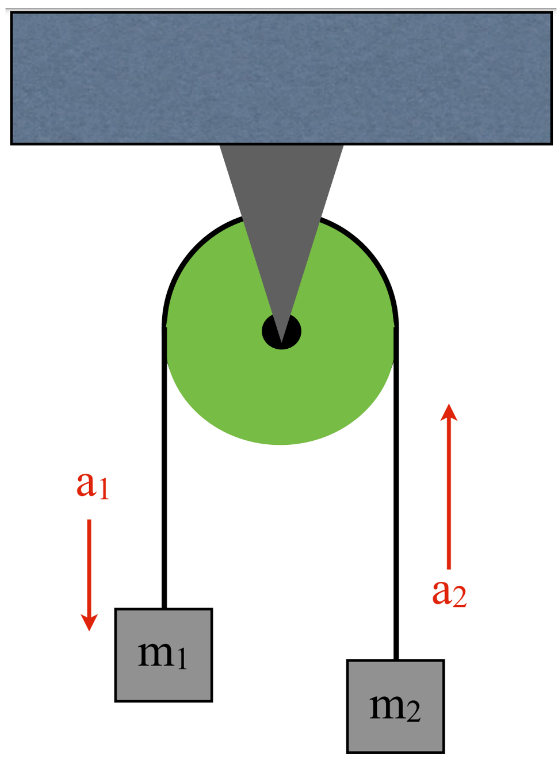
Toestel van Atwood

Natuurkunde PO Periode 2, Atheneum 4

Tim Wezeman A4F
Luuk Schouten A4F
Tom de Groot A4F



H.N. Werkman Stadslyceum
Sectie Natuurkunde:
Nynke Visser
Groningen, Nederland
6 juni 2024

Abstract

In dit verslag laten wij zien hoe wij de valversnelling hebben berekend met de methode van Atwood. Aan de hand van twee gewichtjes met een verschil in massa (massa 1 bedraagt 150 gram en massa 2 bedraagt 170 gram), en hoe lang ze erover deden om een bepaalde afstand te vallen, moesten wij de versnelling en vervolgens de valversnelling berekenen.

Door de gemeten tijd te verwerken in een x, t en een x, t^2 diagram, kunnen wij op twee manieren de versnelling, en daarmee uiteindelijk ook de valversnelling berekenen. Nadat we het gemiddelde van de valversnelling hebben genomen, zijn wij er achter gekomen dat dit overeenkomt met de hypothese ($g < 9,81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$).

Hieruit maken wij op dat we andere omstandigheden hadden, of onze proef niet goed hebben uitgevoerd. Het is immers vaak genoeg bewezen dat de valversnelling in Nederland gelijk is aan $9,81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$. Waarschijnlijk valt deze inconsistentie toe te schrijven aan de weerstand van de katrol, en de niet precieze manier van het meten van de tijd.

Inhoudsopgave

1 Inleiding

In dit verslag beschrijven wij de resultaten van onze onderzoeksvraag: meten wij de in Binas genoemde valversnelling van Nederland? De valversnelling is de grootte en richting van het zwaartekrachtsveld. $\vec{F_z}$ is dan de enige kracht. Als je een voorwerp in een vacuüm laat vallen, versnelt deze met de valversnelling.

Dit betekent dat twee voorwerpen met een verschillende massa met dezelfde snelheid vallen in een vacuüm. In elk ander geval is dit niet van toepassing, omdat je te maken hebt met de luchtweerstand. Het gewicht heeft geen invloed op de luchtweerstand, de vorm van het voorwerp wel. [1]

Toch vallen twee voorwerpen met dezelfde vorm en een andere massa niet even snel. Dit komt omdat de kracht van de luchtweerstand op een kleine massa een kleinere vertraging geeft dan op een grote massa. Dit komt door tweede wet van Newton: ($\vec{F} = m\vec{a}$). [2]

De valversnelling kunnen we meten met het toestel van Atwood. De wiskundige George Atwood heeft in 1784 het toestel van Atwood uitgevonden, met als doel om de eenparig versnelde beweging en de valversnelling te onderzoeken [3].

Het toestel van Atwood bestaat uit een statief met katrol, waaraan een touw met aan beide uiteinden een massa (m_1 & m_2) hangt. We gaan dan uit van een inelastisch touw (niet elastisch vervormbaar) en een wrijvingsloos katrol. [4]

Afhankelijk van de massa's van (m_1 & m_2) kunnen we twee conclusies trekken:

Als $m_1 = m_2$ zijn de gewichten in evenwicht, onafhankelijk op welke hoogte deze hangen. In dit geval is er sprake van $F_{res} = 0$.

Als $m_1 \neq m_2$ worden beide gewichten eenparig versneld, onafhankelijk van de starthoogte. In dit geval is er sprake van $F_{res} > 0$.

In ons geval is $m_1 < m_2$.

Voor een eenparige versnelling kunnen we de som van de krachten $\sum_i \vec{F_i}$ berekenen door eerst naar de afzonderlijke massa's te kijken met behulp van de spankracht($\vec{F}_{span}$) en de zwaartekracht($\vec{F_z} = mg$). Deze is voluit geschreven:

$$\begin{aligned} &\sum \vec{F_1} = \vec{F}_{span_1} - m_1 g \\ &\sum \vec{F_2} = m_2 g - \vec{F}_{span_2} \\ &\sum_i \vec{F_i} = (\vec{F}_{span_1} - m_1 g) + (m_2 g - \vec{F}_{span_2}) = g(m_2 - m_1) \end{aligned} \tag{1}$$

Met de tweede wet van Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$) kunnen we ook de som van krachten $\sum_i \vec{F}$ berekenen, met behulp van de versnelling. Hierin is m de som van beide massa's. Hieruit volgt dat:

$$\sum_i \vec{F_i} = (m_1 + m_2)\vec{a} \tag{2}$$

Eerder hebben we de som van krachten berekend met de valversnelling. Deze twee oplossingen zijn dus gelijk aan elkaar. We kunnen hiermee een formule voor de valversnelling opstellen:

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F_i} =& (m_1 + m_2)\vec{a} \\ =& g(m_2 - m_1) \\ =& g(m_2 - m_1) = (m_1 + m_2)\vec{a} \end{aligned} \tag{3}$$

Als we g willen berekenen, hebben we de 2 massa's, en de versnelling a nodig. De 2 massa's zijn makkelijk te achterhalen met een weegschaal. De versnelling a kunnen we berekenen met de formule voor afgelegde afstand. [5] We drukken a dan uit in d en t. De afstand en tijd meten we met het toestel van Atwood.

$$s = \frac{1}{2}at^2 \qquad a = \frac{2s}{t^2} \qquad 0.5a = \frac{s}{t^2} \tag{4}$$

2 Hypothese

Atwood heeft als eerste de valversnelling gemeten, maar je kan de valversnelling ook berekenen met de formule:

$$g = G \cdot \frac{M}{r^2} \tag{5}$$

Hier is g de valversnelling in $\mathrm{m\,s^{-2}}$, G de gravitatie constante, M de massa van het hemellichaam in kg en r de afstand van oppervlak tot kern in m. [6] [7]

Omdat de afstand tussen de aardkorst en aardkern niet overal gelijk is, verschilt de valversnelling ook op aarde. Dit komt onder andere omdat de aarde bij de polen een beetje is afgeplat door de draaiing van de aarde. De draaiing van de aarde heeft ook een tegenovergesteld effect bij de evenaar. en de verdeling van massa (bijvoorbeeld land / water) speelt ook nog een rol. [7]

De valversnelling in Nederland is gelijk aan $9,81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$. [8] Onze hypothese is dat wij een $g < 9,81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ meten. Wij denken dat hij kleiner is, omdat wij onze proef niet in een weerstandsloze omgeving doen (lucht- en katrolweerstand).

3 Materialen & werkwijze

Op een tafel is een statief met een katrol geklampt. Aan dit katrol hangt ruim 1 meter touw, met aan beide uiteinden een blokje met een gegeven massa.

De massa m_1 bedraagt 150 gram, opgebouwd uit een houder van 10 g, 4 schijfjes van 10 g en 2 schijfjes van 50 g.

De massa m_2 bedraagt 170 gram, opgebouwd uit een houder van 10 g, 1 schijfje van 10 g en 3 schijfjes van 50 g.

Langs het katrol is een meetlint gehangen. Aangezien we de tijd om de 20 cm moesten meten, hebben we om de 20 cm een gele sticky note geplakt voor beter zicht.

We hebben de tijd gemeten met een timer op de telefoon. Deze kan rondetijden genereren. In totaal zijn de volgende materialen gebruikt:

- 1x statief met katrol.
- 1x touw van grofweg 1 m
- 2x massa-houder van 10 g
- 1x gewicht m_1 van 150 g $((1 \cdot 10 \text{ g}) + (4 \cdot 10 \text{ g}) + (2 \cdot 50 \text{ g}))$
- 1x gewicht m_2 van 170 g $((1 \cdot 10 \text{ g}) + (1 \cdot 10 \text{ g}) + (3 \cdot 50 \text{ g}))$
- 1x Xiaomi Redmi note 10 Pro als rondetijden stopwatch.
- 6x gele sticky note
- 1x meetlint

Als eerste hebben we de twee massa-houders gevuld met gewichtsschijfjes. Deze zijn vervolgens aan het touw om de katrol bevestigd.

Boven in het statief hebben we een meetlint bevestigd. De eerste sticky note is bij $40cm$ geplaatst, aangezien dat de hoogte is waarvan m_2 valt. Verder hebben we om de $20cm$ een sticky note geplakt.

Vervolgens heeft Tom het gewicht m_1 op de grond vastgehouden, afgeteld en losgelaten. Tim heeft op rondetijd gedrukt op de stopwatch elke keer als m_2 een sticky note (20 cm) passeerde. Deze waarde heeft Luuk genoteerd in een tabel.

Wij hebben deze meting 6x gedaan en per 20 cm de Δt_{gem} berekend. Deze waarden zijn vervolgens in een tabel, een x, t diagram en een x, t^2 diagram verwerkt. Het doel hiervan is om de valversnelling (g) te berekenen.

4 Resultaten

Wij hebben de berekening voor de valversnelling op twee manieren uitgewerkt:

Manier I maakt gebruik van formule 4. Deze is makkelijk toepasbaar, maar minder nauwkeurig omdat je het gemiddelde van maar 6 punten neemt.

Manier II maakt gebruik van de r.c. van een trendlijn, en vervolgens ook van formule 4. Deze is nauwkeuriger, omdat je het gemiddelde over de hele lijn neemt. De trendlijn zelf is wel moeilijker om te tekenen.

In tabel 1 staan onze meetwaarden. Hier is Δx in cm, en Δt in s. Met berekening 6 berekenen wij de gemiddelde tijd. De laatste kolom geeft het kwadraat van Δt_{gem}. Dit wordt gebruikt voor manier II.

Tabel 1: Δx in cm & Δt in s

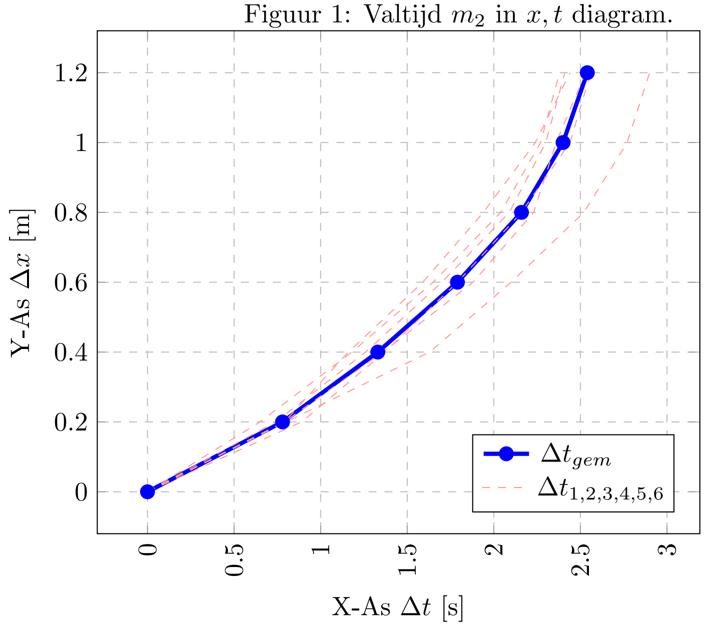
Δx	Δt_1	Δt_2	Δt_3	Δt_4	Δt_5	Δt_6	Δt_{gem}	Δt_{gem}^2
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
20	0,80	0,79	0,74	0,79	0,65	0,89	0,78	0,60
40	1,63	1,36	1,26	1,16	1,18	1,37	1,33	1,76
60	2,10	1,88	1,70	1,59	1,65	1,79	1,79	3,19
80	2,52	2,23	2,09	1,94	2,04	2,16	2,16	4,68
100	2,77	2,36	2,30	2,24	2,27	2,44	2,40	5,76
120	2,90	2,53	2,41	2,44	2,38	2,56	2,54	6,43

Door de handmatige (minder nauwkeurige) meting hebben veel significante cijfers geen toegevoegde waarde. Daarom hebben wij er voor gekozen om de eindresultaten op 2 significante cijfers te geven. De antwoorden van de berekeningen 9, 12, 13, 14, 15 zijn ook on-afgerond gegeven, omdat dit tussenresultaten zijn.

$$
\begin{aligned}
\Delta t_{gem}(20) &= \frac{0,80+0,79+0,74+0,79+0,65+0,89}{6} = 0,78 \text{ s} \\
\Delta t_{gem}(40) &= \frac{1,63+1,36+1,26+1,15+1,18+1,37}{6} = 1,33 \text{ s} \\
\Delta t_{gem}(60) &= \frac{2,10+1,88+1,70+1,59+1,65+1,79}{6} = 1,79 \text{ s} \\
\Delta t_{gem}(80) &= \frac{2,52+2,23+2,09+1,94+2,04+2,16}{6} = 2,16 \text{ s} \\
\Delta t_{gem}(100) &= \frac{2,77+2,36+2,30+2,24+2,27+2,44}{6} = 2,40 \text{ s} \\
\Delta t_{gem}(120) &= \frac{2,90+2,53+2,41+2,44+2,38+2,56}{6} = 2,54 \text{ s}
\end{aligned} \tag{6}
$$

4.1 Manier I

Figuur 1: Valtijd m_2 in x, t diagram.



Om de versnelling van het blokje te berekenen, vullen we de meetwaarden van t in in formule 4. Hiermee berekenen we de gemiddelde versnelling.

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 0,20\text{m}}{0,78^2} &= 0,66\ \mathrm{m\,s^{-2}} & \frac{2 \cdot 0,80\text{m}}{2,16^2} &= 0,34\ \mathrm{m\,s^{-2}} \\ \frac{2 \cdot 0,40\text{m}}{1,33^2} &= 0,45\ \mathrm{m\,s^{-2}} & \frac{2 \cdot 1,00\text{m}}{2,40^2} &= 0,35\ \mathrm{m\,s^{-2}} \\ \frac{2 \cdot 0,60\text{m}}{1,79^2} &= 0,37\ \mathrm{m\,s^{-2}} & \frac{2 \cdot 1,20\text{m}}{2,54^2} &= 0,37\ \mathrm{m\,s^{-2}} \end{aligned} \tag{7}$$

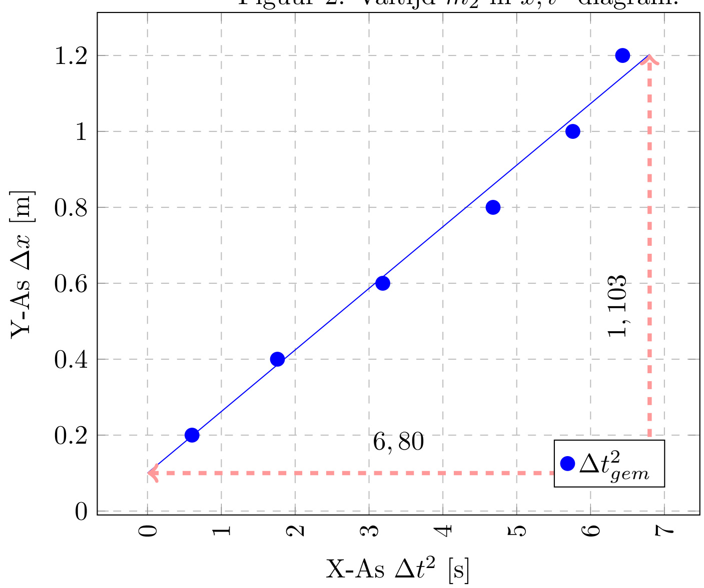
$$\frac{0,66 + 0,45 + 0,37 + 0,34 + 0,35 + 0,37}{6} = 0,42\ \mathrm{m\,s^{-2}} \tag{8}$$

Nu kunnen we formule 3 invullen met $a = 0,42\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, en zo g berekenen.

$$\begin{aligned} &g(m_2 - m_1) = (m_1 + m_2)\vec{a} \\ &= g(0,170 - 0,150) = (0,150 + 0,170) \cdot 0,42 \\ &= 0,02g = 0,1344 \\ &= g = \frac{0,1344}{0,02} = 6,72 \approx 6,7\ \mathrm{m\,s^{-2}} \end{aligned} \tag{9}$$

4.2 Manier II

Figuur 2: Valtijd m_2 in x, t^2 diagram.



In deze grafiek is de afstand (m) uitgedrukt in tijd kwadraat (s). Dit komt overeen met de formule voor versnelling. De versnelling is dus hetzelfde als de r.c. van de trendlijn. Deze berekenen wij met $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \left(\frac{s}{t^2}\right) = 0,5a$, want:

$$a = \frac{2s}{t^2} \qquad 0,5a = \frac{s}{t^2} \tag{10}$$

Versnelling a berekenen door $\Delta y = 1,103$, en $\Delta x = 6,80$ in te vullen:

$$0,5a = \frac{1,103}{6,80} \qquad 0,5a = 0.1622 \qquad a = 0,3244 \approx 0,32 \text{ m s}^{-2} \tag{11}$$

Nu kunnen we formule 3 invullen en g berekenen.

$$\begin{aligned} & g(m_2 - m_1) = (m_1 + m_2)\vec{a} \\ & = g(0,170 - 0,150) = (0,150 + 0,170) \cdot 0,32 \\ & = 0,02g = 0,1042 \\ & = g = \frac{0,1024}{0,02} = 5,12 \approx 5,1 \text{ m s}^{-2} \end{aligned} \tag{12}$$

5 Conclusie

Wij hebben nu met twee verschillende manieren de versnelling berekend, om vervolgens de valversnelling te berekenen. Bij manier I kwamen we op een $a = 0,42$ en $g = 6,72$. Bij manier II kwamen we op een $a = 0,32$ en $g = 5,12$.

De verwerking van de data volgens manier II vinden wij nauwkeuriger, aangezien je het gemiddelde van het hele traject neemt in plaats van 6 meetpunten. Hierdoor heeft een uitschieter in de metingen minder invloed op het uiteindelijke gemiddelde. Bij manier I hebben we inderdaad bij de eerste meting een stuk hogere versnelling dan bij de andere metingen. Wij willen alleen niet zomaar de uitkomsten van manier I negeren.

Daarom berekenen wij een gewogen gemiddelde van de twee manieren. Manier I geven we een weegfactor van 1. Manier II geven we een weegfactor van 2. Dit doen wij zowel voor het berekenen van de valversnelling, als voor de versnelling.

Berekenen gewogen gemiddelde van de versnelling:

$$a = \frac{0,42 + 0,32 \cdot 2}{3} = 0,35\bar{3} \approx 0,35 \text{ m s}^{-2}. \tag{13}$$

Berekenen gewogen gemiddelde van de valversnelling:

$$g = \frac{6,72 + 5,12 \cdot 2}{3} = 5,65\bar{3} \approx 5,7 \text{ m s}^{-2}. \tag{14}$$

Bij onze hypothese verwachtten wij een valversnelling van $g < 9,81$ m s^{-2} te vinden. Met onze proef kwamen wij inderdaad lager uit, namelijk $5,7$ m s^{-2}. Onze hypothese is hierdoor bevestigd. Wij hadden alleen niet verwacht dat het verschil zo groot zou zijn.

6 Discussie

Als we terug gaan naar de inleiding, vinden we direct waarom onze gemeten waarde niet overeenkomt met de genoemde waarde uit de Binas. In de vijfde alinea van de inleiding stellen wij dat we in het ideale geval onder andere een wrijvingsloos katrol hebben. In het echt is dit natuurlijk niet van toepassing.

We kunnen de weerstand van het katrol onder andere berekenen met ($\vec{F}_{w,katrol} = \vec{F}_z - \vec{F}_{res}$). We hebben eerder geconstateerd dat dit hetzelfde is als de tweede wet van Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$). Hierin is m de som van beide massa's, en a het verschil tussen de versnelling van een $g = 9,81$ en de gemeten versnelling.

Voordat we de weerstand kunnen berekenen, moeten wij eerst de maximaal mogelijke versnelling berekenen. Dit kunnen we doen door formule 3 in te vullen. In plaats van de versnelling, vullen we nu de echte valversnelling in:

$$\begin{aligned} &g(m_2 - m_1) = (m_1 + m_2)\vec{a} \\ &= 9,81 \cdot (0,170 - 0,150) = (0,150 + 0,170)\vec{a} \\ &= 0,1962 = 0,320 \cdot \vec{a} \\ &= \vec{a} = \frac{0,1962}{0,320} = 0,613125 \approx 0,613 \text{ m s}^{-2} \end{aligned} \tag{15}$$

We kunnen nu $\vec{F} = m\vec{a}$ invullen met de massa's en het verschil in versnelling.

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{w,katrol} &= (m_1 + m_2)\vec{a} & &= (m_2 - m_1)g \\ &= 0,320 \cdot \Delta\vec{a} & &= 0,02 \cdot \Delta g \\ &= 0,320(0,613125 - 0,35\bar{3}) & &= 0,02(9,81 - 5,65\bar{3}) \\ &= 0,320 \cdot 0,25\bar{6} & &= 0,02 \cdot 4,15\bar{6} \\ &= 0,0831\bar{3} \approx 0,083 \text{ N} & &= 0,0831\bar{3} \approx 0,083 \text{ N} \end{aligned} \tag{16}$$

In dit geval gaan wij ervan uit dat de katrol als enige een remmende werking op de twee massa's heeft, en dat we onder andere de luchtweerstand mogen verwaarlozen. Een betere benaming is dan dat $0,083$ N de totale weerstand is.

Om in het vervolg een nauwkeuriger beeld van de valversnelling te krijgen, moeten we de weerstand van het katrol verminderen. Dit is mogelijk door onder andere een kogellager te gebruiken, of materialen met een lagere C_w waarde.

Naast imperfecte omstandigheden, is de proef niet goed uitgevoerd. Het blokje valt heel snel. Als het blokje de 80 cm was gepasseerd, drukten wij zo snel op de timer als mogelijk. De laatste metingen maten dus meer onze reactiesnelheid, dan de valsnelheid van het blokje. In het vervolg kan er beter een licht of ultrasone sensor gebruikt worden, om de tijd nauwkeuriger te bepalen. [9]

7 Nawoord

Toen we deze opdracht kregen, hadden we verwacht dat het anders zou lopen dan het in werkelijkheid deed. Het meten van de verschillende waarden die we nodig hadden voor het berekenen van de valversnelling, bleek een stuk moeizamer te gaan dan verwacht.

Een ander groepje kwam met het idee om sticky notes te gebruiken om de afstanden beter te kunnen zien. Na twee miserabel gefaalde pogingen om de tijd te meten, hebben wij besloten dit ook te doen.

Met deze waarden zijn we uiteindelijk verder gegaan. Luuk en Tim hebben met de gemeten tijd elk afzonderlijk de versnelling en valversnelling berekend, om hier vervolgens samen een conclusie uit te trekken.

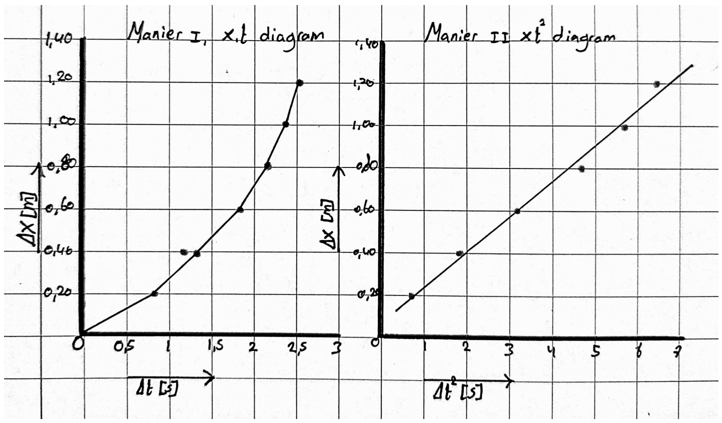
Nadat Luuk en Tim elkaar hebben gecontroleerd, en op dezelfde antwoorden zijn uitgekomen, zijn ze verder gegaan met de bonusvraag (berekenen weerstand katrol: $\vec{F}_{w,katrol}$). Dit bleek eenvoudiger te zijn dan verwacht.

Het meest leerzame deel van deze opdracht was het verwerken van onze bevindingen in een verslag. Wij hebben gekozen voor het programma LaTeX, omdat hier zeer makkelijk berekeningen in weer te geven zijn. Voorbeelden hiervan zijn het sommatie teken $\sum$, en de vector $\vec{F}$. Tim heeft dit enkele keren eerder gebruikt. Luuk niet, maar gelukkig bleek het niet heel moeilijk om de beginselen aan te leren.

In totaliteit hebben wij zeer veel van deze opdracht geleerd. Van Newton en Atwood, maar voornamelijk over de wetenschappelijke verslaglegging en LaTeX. Toekomstige projecten zullen wij op dezelfde manier aanpakken en uitvoeren, met uitzondering van de manier van meten.

I Getekende grafieken

Figuur 3: Getekende grafieken



II Lijst van tabellen

III Lijst van figuren

IV Lijst van berekeningen

Literatuur

[1] Wikipedia-bijdragers. (2023b, oktober 2). Valversnelling. Wikipedia. Geraadpleegd op 21 december 2023. https://nl.wikipedia.org/wiki/Valversnelling

[2] Wikipedia-bijdragers. (2023a, juli 15). Wetten van Newton. Wikipedia. Geraadpleegd op 6 december 2023. https://nl.wikipedia.org/wiki/Wetten_van_Newton

[3] Wikiwand - toestel van Atwood. (z.d.). Wikiwand. Geraadpleegd op 5 december 2023. https://www.wikiwand.com/nl/Toestel_van_Atwood#google_vignette

[4] Wikipedia-bijdragers. (2021, 22 februari). Toestel van Atwood. Wikipedia. Geraadpleegd op 5 december 2023. https://nl.wikipedia.org/wiki/Toestel_van_Atwood

[5] Bouwens, R, & Kranendonk, W, & Lune, J.van. (2022). Binas Tabel 35A1. Groningen: Noordhoff Uitgevers.

[6] Wikipedia-bijdragers. (2023d, oktober 24). Gravitatieconstante. Wikipedia. Geraadpleegd op 21 december 2023. https://nl.wikipedia.org/wiki/Gravitatieconstante

[7] Natuurkunde.nl - Valversnelling en vallen. (z.d.). Stichting natuurkunde.nl. Geraadpleegd op 21 december 2023. https://www.natuurkunde.nl/artikelen/3415/valversnelling-en-vallen

[8] Bouwens, R, & Kranendonk, W, & Lune, J.van. (2022). Binas Tabel 7A. Groningen: Noordhoff Uitgevers.

[9] Willems, R.H.M - Krachten - practicum Atwood. (z.d.). RWI. Geraadpleegd op 18 december 2023. https://www.rwi-natuurkunde.nl/aanteken/VWO/31%20Practicum%20Krachten%20-%20atwood.pdf

*Scribbr met APA 7 gebruikt voor bron notatie: https://www.scribbr.nl/bronvermelding/generator