

Санкт-Петербургский государственный университет

АНИКУШИН Василий Александрович

Выпускная квалификационная работа

***Прогнозирование численности населения мира и стран на основе
балансовой модели эпидемии***

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02

«Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа: СВ.5005.2020 «Прикладная
математика, фундаментальная информатика и программирование»

Научный руководитель:

Доктор физ.-мат. наук,
профессор кафедры математического
моделирования энергетических систем
Захаров Виктор Васильевич

Рецензент:

Кандидат физ.-мат. наук,
доцент кафедры математической
теории экономических решений
Раевская Анастасия Павловна

Санкт-Петербург

2024

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Постановка задачи.....	6
Обзор литературы.....	7
Глава 1 Математическая модель роста населения со стохастическими параметрами.....	9
Глава 2. Выбор прогнозных значений параметров.....	13
2.1 Стационарность простых и интегральных рядов притока и оттока.....	13
2.2 Прогнозирование динамики процентных приростов для Индии	14
2.3 Прогнозирование процентных приростов для интегральной модели населения Земли.....	18
Глава 3. Результаты прогнозирования численности населения.....	28
3.1 Прогнозирование численности населения Индии.....	28
3.2 Прогнозирование численности населения Китая.....	31
3.3 Прогнозирование численности населения Земли.....	35
Выводы	39
Заключение	41
Список литературы	42
Приложение	45

Введение

На протяжении всей истории человечества прогнозирование численности населения всегда занимало важное место в научных исследованиях, обуславливая разработку стратегий социального, экономического и экологического развития общества. Численность и рост населения в стране напрямую влияют на ситуацию в экономике, политике, культуре, образовании и окружающей среде этой страны, определяют разведку и стоимость природных ресурсов. Поэтому важно внимательно отслеживать демографические тенденции и принимать меры для их коррекции и улучшения.

Впервые в истории численность населения Земли достигла 1 миллиарда человек в 1804 году. За последние 200 лет темпы роста этого показателя были беспрецедентными, вследствие чего число людей на Земле возросло в восемь раз. В начале 1900-х годов на планете было 1,6 миллиарда человек, в 1950-х годах — 2,6 миллиарда, к началу 2000-х годов число жителей достигло 6 миллиардов, в 2011 году — 7 миллиардов, а сейчас уже более 8 миллиардов. Такой стремительный рост объясняется развитием медицины, достижениями в области санитарии, расширением доступа к питьевой воде и широкому охвату вакцинации. Несмотря на постоянное увеличение численности населения, темпы его прироста в последнее время замедляются. Пик был достигнут в 1965–1970-х годах, когда ежегодный рост составлял 2,1 %. Затем его темпы замедлились до 1,2 % в год, в 2020 году этот показатель впервые опустился ниже 1 %.

Более трети численности населения Земли приходится на две страны: Китай и Индию. Эти страны стали абсолютными лидерами по этому показателю, и их население продолжает расти быстрыми темпами. Китаю, принявшему политику контроля над рождаемостью в конце 1960-х годов, удалось выйти из традиционной стадии, характеризующейся высокой рождаемостью, высокой смертностью и высоким естественным приростом, до

современного этапа, характеризующегося низкой рождаемостью, низкой смертностью и низким естественным приростом, демографического перехода всего за три десятилетия, добившись впечатляющего чуда демографического развития [1].

Однако наряду с вышеперечисленными достижениями существуют и такие проблемы, как «стареть раньше, чем разбогатеть». Китай также сталкивается с дисбалансом в соотношении полов среди новорожденных, который ведет его к старению общества, несмотря на недостаточный уровень экономического развития страны [2, 3]. В последние годы китайское правительство пытается обуздать негативные последствия, такие как нехватка рабочей силы и «стареть раньше, чем разбогатеть», возникающие в результате предыдущей политики контроля над рождаемостью посредством реализации общей политики в отношении второго ребенка. Эта политика направлена на снижение бремени зависимости молодых людей путем улучшения возрастной структуры семей и всего населения, а также на содействие гармоничному демографическому и экономическому развитию. Как известно, быстрый рост населения когда-то обеспечивал достаточное количество рабочей силы для экономического развития Китая [4], но по мере изменения возрастной структуры населения и первых демографических дивидендов, массовое население в последние годы постепенно становится огромным бременем. [5].

Индия, одна из самых густонаселенных стран мира, уступающая только Китаю, также является крупной аграрной экономикой с большим сельским населением и огромным разрывом в уровне благосостояния. Некоторые исследователи в результате сравнительных исследований населения Китая и Индии обнаружили, что в ближайшие пятнадцать-двадцать лет Индия превзойдет Китай как самую богатую страну по ресурсам рабочей силы, а более того, превзойдет Китай с точки зрения национальной конкурентоспособности [6]. Напротив, Китай из-за нехватки ресурсов рабочей силы потеряет свое преимущество в международной конкуренции. Но постоянно растущее население Индии, тем не менее, оказывает огромное

давление как на национальную, так и на глобальную экономику, ресурсы и окружающую среду. В отличие от Китая, население Индии характеризуется высоким уровнем брачности, молодым возрастом вступления в брак, высоким уровнем рождаемости, высоким уровнем неграмотности, предпочтением сыновей, низким уровнем урбанизации и высокой плотностью населения в крупных городах. Будучи в 2020 г. второй по численности населения страной в мире, а также развивающейся страной с самой быстрорастущей экономикой, Индия имеет территории, составляющие всего одну треть от площади Китая, и насчитывает 1.4 миллиарда человек, и это число по-прежнему растет, что приводит к большим конфликтам между демографическим и экономическим развитием.

По данным ООН, на 2023 год численность населения Китая составляет 1,4257 миллиарда человек, а Индии — 1,4286 миллиарда человек [7]. Таким образом, Индия опережает Китай по численности населения на 2,9 миллиона человек. Как две самые населенные страны в мире, которые напрямую влияют на мировую экономику, необходимо уметь прогнозировать такой важный показатель, как численность населения, этих стран.

В данной работе представлены прогнозы численности населения Китая и Индии до 2062 г., основанные на балансовой модели эпидемии.

Постановка задачи

Целью данной работы является построение прогноза численности населения Китая и Индии на основе балансовой модели эпидемии.

С учетом цели работы были определены задачи, которые необходимы для ее выполнения:

1. Провести анализ и изучить математические модели и методы прогнозирования численности населения;
2. Изучить и построить балансовую модель эпидемии для прогнозирования численности населения Китая и Индии;
3. Построить прогнозы численности населения Китая и Индии до 2062 г., используя различные способы прогнозирования коэффициентов процентных приростов интегральных рядов притока и оттока;
4. Дать оценку полученным прогнозам.

Обзор литературы

Существует множество исследований по прогнозированию численности населения с использованием различных методов. Пожалуй, самый популярный сегодня метод прогнозирования среди демографов, лежащий в основе демографических оценок и прогнозов: CCMPP – cohort-component method for projecting population [8]. Проблемы роста населения планеты были представлены в известном докладе Римскому клубу по проекту о затруднительном положении человечества (Project on the Predicament of Mankind) [9], который широко известен как “Пределы роста”. Хейнц фон Ферстер в своей статье [10] сформулировал Закон гиперболического роста численности населения Земли и представил прогноз наступления “Судного дня” 13 ноября 2026 г., при приближении к которому численность населения Земли должна устремиться в бесконечность.

Народонаселение Земли как совокупность, всех людей, живущих в данное время на Земле, представляет собой сложную систему, на эволюцию которой влияют многочисленные факторы. В этой системе можно выделить динамические процессы притока и оттока. Объемы притока и оттока в значительной степени определяют динамику изменения численности населения. Динамические процессы притока и оттока исследуются не только в демографии, но и в таких областях научной и практической деятельности, как математическое моделирование в иммунологии, важнейший вклад в которую внесли научные труды академика Г.И. Марчука его учеников [11,12], моделирования распространения инфекционных заболеваний [13, 14] и др.

Важной особенностью динамики процессов притока и оттока является свойство сбалансированности интегральных объемов притока и оттока. Значительный вклад в разработку системного подхода к исследованию динамики роста населения Земли внесли сформулированные в статье академика С.П. Капицы [15] основы феноменологической теории роста. В этой модели введен специальный параметр τ , названный макроскопическим

параметром феноменологии и призванный ограничить скорость роста численности населения в окрестности предельной точки роста, указанной Ферстером. Как отмечено в статье [16], модель Капицы со значением τ , равным 42 г., как и модель, использованная для прогноза динамики численности населения Земли, достаточно точно (около 99%) прогнозируют рост численности населения Земли до 2005 г., однако уже прогноз на 2010 г. демонстрирует, точность лишь около 92%.

Попытки спрогнозировать общую численность населения Китая и Индии предпринимаются многими исследователями. Чтобы спрогнозировать общую численность населения Китая, различные ученые использовали серое предсказание, методы нейронных сетей, а также логистические и популяционные модели Мальтуса [17-23]. Эти методы предоставили ценный исследовательский опыт для прогнозирования численности населения с использованием прочной математической основы с учетом общих характеристик развития населения или присущих серых атрибутов демографической системы. Другие ученые использовали методы, позволяющие прогнозировать структуру населения, в том числе модель Лесли [24] и модель «популяция-развитие-окружающая среда» (PDE). Модель (PDE) была разработана Лутцем в 1994 году [25]. Он подробно объяснил философию, лежащую в основе модели, утверждая, что любой прогноз тенденции по одному измерению, игнорирующий другие важные факторы, должен быть оторван от реальности. Однако модель должна быть, максимально краткой и прямой, чтобы избежать операций «черного ящика». В последующих исследованиях китайские учёные использовали модель (PDE) для прогнозирования численности и структуры населения Китая [26]. Некоторые ученые использовали этот метод для прогнозирования численности населения определенных территорий [27] и определенных возрастных групп [28], что дает основу для мелкомасштабных прогнозов численности населения. Используя эти методы, ученые также использовали множество типов схем прогнозирования, обогащая литературу.

Глава 1 Математическая модель роста населения со стохастическими параметрами

В соответствии с информацией о рождаемости и смертности и информации о миграционных потоках в Китае и Индии в период с 1950 года по 2022 год для каждой из стран имеем временные ряды значений ежегодного количества родившихся детей $B(t) > 0$, умерших людей $D(t) > 0$ и чистого миграционного потока выехавших из страны или въехавших в нее соответственно: $NM^-(t) < 0$, $NM^+(t) \geq 0$, в каждой из стран для любого t от 1950 до 2022 года. То есть в год t приток в систему народонаселения страны равен сумме количества родившихся детей и объема положительного чистого миграционного потока, а отток сумме количества умерших людей и объема отрицательного чистого миграционного потока. Начальный 1950 год имеющейся статистики обозначим через t_0 , конечный момент времени $T = 2021$. Обозначим $B(t) + NM^+(t) = BNM(t)$ общий объем родившихся и въехавших в страну людей, а $D(t) - NM^-(t) = DNM(t)$ общий объем умерших и выехавших из страны людей.

Рассмотрим возрастающие относительно t функции

$$IntBNM(t_0, t) = \sum_{\tau}^t BNM(\tau),$$

$$IntDNM(t_0, t) = \sum_{\tau}^t DNM(\tau),$$

где

$IntBNM(t_0, t)$ - интегральный объем притока в систему на промежутке времени от t_0 до t ,

$IntDNM(t_0, t)$ - интегральный объем оттока из системы на промежутке времени от t_0 до t .

Временные ряды $IntBNM(t_0, t)$ и $IntDNM(t_0, t), t = t_0, t_0 + 1, \dots, T$, будем называть интегральными рядами притока

и оттока. Полученные интегральные ряды представляют собой интегральную форму временных рядов $BNM(t)$ и $DNM(t)$.

Балансовое уравнение демографического процесса имеет следующий вид

$$N(t) = N(t_0) + IntBNM(t_0, t) - IntDNM(t_0, t), t > t_0, \quad (1)$$

где $N(t)$ - значение численности населения на 1 января года t .

Обозначим через $r_{BNM}(t)$ - процентный прирост интегрального объема притока в систему, вычисляемый по формуле

$$r_{BNM}(t) = 100 \frac{IntBNM(t_0, t) - IntBNM(t_0, t-1)}{IntBNM(t_0, t-1)}, t > t_0,$$

а через $r_{DNM}(t)$ - процентный прирост интегрального объема оттока из системы

$$r_{DNM}(t) = 100 \frac{IntDNM(t_0, t) - IntDNM(t_0, t-1)}{IntDNM(t_0, t-1)}, t > t_0.$$

Рассмотрим систему дискретных уравнений со стохастическими параметрами $r_{BNM}(t)$ и $r_{DNM}(t)$ при $t > t_0$

$$IntBNM(t_0, t) = \left(1 + \frac{r_{BNM}(t)}{100}\right) IntBNM(t_0, t-1), \quad (2)$$

$$IntDNM(t_0, t) = \left(1 + \frac{r_{DNM}(t)}{100}\right) IntDNM(t_0, t-1), \quad (3)$$

$$N(t) = N(t_0) + \left(1 + \frac{r_{BNM}(t)}{100}\right) IntBNM(t_0, t-1) - \left(1 + \frac{r_{DNM}(t)}{100}\right) IntDNM(t_0, t-1). \quad (4)$$

Обратим внимание на то, что для любого года t , начиная с 1951 г., найдется такое $\tau < t$, при котором значение $IntDNM(t_0, \tau)$ превосходит значения $IntBNM(t_0, \tau)$. Например, интегральный объем оттока в 1951 г. Больше интегрального объема притока в 1950 г.

Можно также отметить, что интегральный объем оттока в Индии в 2000 г. больше интегрального объема притока в Индии 1973 г., но меньше интегрального объема притока в 1974 г. Такое свойство

интегральных объемов оттока и притока будем называть их интервальной динамической сбалансированностью. Можно сказать, что Индии интегральный объем оттока в 2000 г. сбалансирован с интервалом прошлых значений интегральных объемов притока, зафиксированных в статистике на 26 и 27 лет раньше.

Сформулируем следующую задачу нахождения минимальных значений τ при фиксированном t и при условии выполнения неравенства $IntBNM(t_0, \tau) \geq IntDNM(t_0, t)$. Рассмотрим задачу целочисленного программирования для каждого года t

$$\min_{t_0 < \tau \leq t} \tau, \quad (5)$$

при условии

$$IntBNM(t_0, \tau) \geq IntDNM(t_0, t). \quad (6)$$

Учитывая монотонное возрастание функций $IntBNM(t_0, t)$ и $IntDNM(t_0, t)$ и справедливость для любого t неравенства $IntBNM(t_0, t) \geq IntDNM(t_0, t)$, задача (5)-(6) имеет единственное решение. Это решение обозначим $\tau(t)$.

Теорема [16] (принцип динамического баланса демографического процесса)

Предположим, что для любого $t > t_0$ справедливо неравенство $IntB(t) > IntD(t)$. Пусть $\tau(t)$ есть решение задачи (5)-(6) при $t > t_0$. Тогда для любого года $t > t_0$ выполняется следующее условие интервальной согласованности, выраженное неравенством

$$IntB(\tau(t)) \geq IntD(t) \geq IntB(\tau(t) - 1). \quad (7)$$

Доказательство.

Имеем, что для любого года $t > t_0$ выполнено неравенство (6), т.е. $IntB(\tau(t)) \geq IntD(t)$. А поскольку $\tau(t)$ есть минимальное значение задачи (5)-(6), то очевидно выполнено и неравенство $IntD(t) \geq IntB(\tau(t) - 1)$.

Теорема доказана.

Будем называть функцию $\theta(t) = t - \tau(t)$ характеристикой динамического баланса демографического процесса. Характеристика динамического баланса в модели (2-4) также как интегральные объемы оттока и притока и процентные приросты этих интегральных объемов имеет стохастическую природу и может рассматриваться в модели как стохастический параметр. Значения характеристики динамического баланса $\theta(t)$ приведены в соответствующих таблицах.

Построенную математическую модель демографического процесса, как процесса притока и оттока с параметрами $r_{BNM}(t), r_{DNM}(t)$ и $\theta(t)$, динамика которого описывается системой дискретных уравнений (2-4) и неравенством (7), будем называть балансовой моделью притока и оттока населения страны.

Глава 2. Выбор прогнозных значений параметров

Для выбора прогнозных значений параметров модели будут рассмотрены два метода:

1. Прогнозирование на основе динамики линейных трендов.
2. Прогнозирование моделью ARIMA.

А также будут построены ретроспективные прогнозы численности населения Индии и Земли при помощи этих методов.

2.1 Стационарность простых и интегральных рядов притока и оттока

Рассмотрим одно из важнейших свойств временного ряда – стационарность. Временной ряд называется стационарным, если он не имеет тренда, демонстрирует постоянную дисперсию во времени и имеет постоянную структуру автокорреляции во времени. Для того, чтобы определить, является ли временной ряд стационарным, нужно выполнить тест Дики-Фуллера. В тесте используются следующие нулевая и альтернативная гипотезы:

- H_0 : временной ряд является нестационарным
- H_A : временной ряд является стационарным.

Если p -значение из теста меньше уровня значимости 0,05, то мы можем отвергнуть нулевую гипотезу и сделать вывод, что временной ряд является стационарным.

Проведем исследование временных рядов притока и оттока для Китая, Индии и Земли, а также их интегральных версий. В таблице 1 приведены результаты для временных рядов притока и их интегральных версий для рассматриваемых стран и Земли. Обычные ряды во всех случаях не являлись стационарными. А интегральные оказались стационарными в Китае и Индии. Интегральный ряд притока Земли также не является стационарным.

Таблица 1. Тесты Дики-Фуллера для рядов притока

	$BNM(t)$	$IntBNM(t)$
--	----------	-------------

	Статистика	p-value	Статистика	p-value
Китай	-2.056074	0.262540	-9.348362	0.000000
Индия	-0.549799	0.881927	-7.779452	0.000000
Земля	-2.269762	0.181906	0.090808	0.965428

В таблице 2 приведены результаты для временных рядов оттока и их интегральных версий для рассматриваемых стран и Земли. Из таблицы видно, что все эксперименты завершились с одинаковым результатом: p-значение теста Дикки-Фуллера больше 0,05 для всех рядов всех стран, что означает нестационарность рядов.

Таблица 2. Тесты Дикки-Фуллера для рядов оттока

	$DNM(t)$		$IntDNM(t)$	
	Статистика	p-value	Статистика	p-value
Китай	-0.504814	0.891074	1.884003	0.998502
Индия	-1.760705	0.400137	0.091108	0.965449
Земля	1.293781	0.996574	0.883270	0.992868

2.2 Прогнозирование динамики процентных приростов для Индии

Анализ ежегодных значений рождаемости, смертности и чистого миграционного потока в Индии в период с 1950 по 2021 год в таблице 3 показывает, что годовые значения притока $BNM(t)$ и оттока $DNM(t)$ на разных промежутках то возрастают, то убывают, однако, для всех значений t приток превышает отток. Для интегральных значений объемов притока и оттока выполняется неравенство $IntBNM(t) > IntDNM(t)$. При этом процентный прирост интегрального объема притока $r_{BNM}(t)$ монотонно убывает. То же до 2018 года демонстрирует и процентный прирост $r_{DNM}(t)$.

Таблица 3. Статистические данные Индии с 1950 по 2021 г.

Год	$N(t)$	$BNM(t)$	$DNM(t)$	$IntBNM(t)$	$IntDNM(t)$	$r_{BNM}(t)$	$r_{DNM}(t)$	$\theta(t)$
1950	353104276	15776154	7942496	15776154	7942496			
1951	360937923	16139911	8171043	31916065	16113539	102,31%	102,88%	0
1952	368906796	16474125	8293345	48390190	24406884	51,61%	51,46%	1
1953	377087580	16857475	8577221	65247665	32984105	34,84%	35,14%	1
1954	385367830	17246702	8519552	82494367	41503657	26,43%	25,83%	2

1955	394094982	17549401	8583374	100043768	50087031	21,27%	20,68%	2
1956	403061003	17843839	8652655	117887607	58739686	17,84%	17,28%	3
1957	412252191	18127957	8761540	136015564	67501226	15,38%	14,92%	3
1958	421618608	18369733	9015423	154385297	76516649	13,51%	13,36%	4
1959	430972917	18592576	8737705	172977873	85254354	12,04%	11,42%	4
1960	440827788	19009882	8756300	191987755	94010654	10,99%	10,27%	5
1961	451081369	19415253	8874247	211403008	102884901	10,11%	9,44%	5
1962	461622383	19772948	8969316	231175956	111854217	9,35%	8,72%	6
1963	472426004	20079580	9064358	251255536	120918575	8,69%	8,10%	6
1964	483441235	20412818	9176669	271668354	130095244	8,12%	7,59%	7
1965	494677383	20697754	9823825	292366108	139919069	7,62%	7,55%	7
1966	505551309	20913381	10030769	313279489	149949838	7,15%	7,17%	8
1967	516433925	21193323	10087034	334472812	160036872	6,76%	6,73%	8
1968	527540214	21454180	9670789	355926992	169707661	6,41%	6,04%	9
1969	539323603	21704442	9722310	377631434	179429971	6,10%	5,73%	9
1970	551305737	22042928	9651797	399674362	189081768	5,84%	5,38%	10
1971	563696866	22482719	9878097	422157081	198959865	5,63%	5,22%	10
1972	576301490	22835036	9762065	444992117	208721930	5,41%	4,91%	11
1973	589374455	23229501	9763451	468221618	218485381	5,22%	4,68%	11
1974	602840510	23558643	9795764	491780261	228281145	5,03%	4,48%	12
1975	616603393	23660096	9818449	515440357	238099594	4,81%	4,30%	12
1976	630445045	24020807	10007991	539461164	248107585	4,66%	4,20%	13
1977	644457850	24041856	9586295	563503020	257693880	4,46%	3,86%	13
1978	658913406	24242925	9534224	587745945	267228104	4,30%	3,70%	14
1979	673622113	24767075	9514537	612513020	276742641	4,21%	3,56%	14
1980	688874653	25437351	9529884	637950371	286272525	4,15%	3,44%	15
1981	704782116	25706638	9532282	663657009	295804807	4,03%	3,33%	15
1982	720956480	25964421	9538450	689621430	305343257	3,91%	3,22%	16
1983	737382451	26375634	9487429	715997064	314830686	3,82%	3,11%	16
1984	754270641	26777350	9528326	742774414	324359012	3,74%	3,03%	17
1985	771519671	27001359	9556536	769775773	333915548	3,64%	2,95%	18
1986	788964497	27521504	9692514	797297277	343608062	3,58%	2,90%	18
1987	806793489	27477888	9632611	824775165	353240673	3,45%	2,80%	19
1988	824638760	27654404	9472559	852429569	362713232	3,35%	2,68%	19
1989	842820602	27733329	9349187	880162898	372062419	3,25%	2,58%	20
1990	861204744	27800708	9305873	907963606	381368292	3,16%	2,50%	20
1991	879699586	27937351	9453009	935900957	390821301	3,08%	2,48%	21
1992	898183926	28065334	9285086	963966291	400106387	3,00%	2,38%	21
1993	916964171	28056955	9282709	992023246	409389096	2,91%	2,32%	22
1994	935738422	28316754	9269679	1020340000	418658775	2,85%	2,26%	23

1995	954785495	28313788	9326515	1048653788	427985290	2,77%	2,23%	23
1996	973772763	28304911	9288010	1076958699	437273300	2,70%	2,17%	24
1997	992789672	28342122	9251005	1105300821	446524305	2,63%	2,12%	24
1998	1011880789	28380714	9273131	1133681535	455797436	2,57%	2,08%	25
1999	1030988362	28365313	9341930	1162046848	465139366	2,50%	2,05%	26
2000	1050011745	28614635	9370785	1190661483	474510151	2,46%	2,01%	26
2001	1069255606	28842611	9412011	1219504094	483922162	2,42%	1,98%	27
2002	1088686207	28647659	9393987	1248151753	493316149	2,35%	1,94%	27
2003	1107939870	28355763	9405268	1276507516	502721417	2,27%	1,91%	28
2004	1126890377	28098682	9350267	1304606198	512071684	2,20%	1,86%	29
2005	1145638789	27645749	9645896	1332251947	521717580	2,12%	1,88%	29
2006	1163638637	27228667	9758363	1359480614	531475943	2,04%	1,87%	30
2007	1181108939	27029549	9863813	1386510163	541339756	1,99%	1,86%	30
2008	1198274680	26890100	9969848	1413400263	551309604	1,94%	1,84%	31
2009	1215194931	26848279	9957821	1440248542	561267425	1,90%	1,81%	32
2010	1232085388	26598911	9542455	1466847453	570809880	1,85%	1,70%	32
2011	1249141852	26342016	9383325	1493189469	580193205	1,80%	1,64%	33
2012	1266100530	26026697	9253337	1519216166	589446542	1,74%	1,59%	33
2013	1282873899	25739527	9223192	1544955693	598669734	1,69%	1,56%	34
2014	1299390228	24899418	9186863	1569855111	607856597	1,61%	1,53%	35
2015	1315102790	24828119	9300695	1594683230	617157292	1,58%	1,53%	35
2016	1330630219	24851144	8838896	1619534374	625996188	1,56%	1,43%	36
2017	1346642460	24253964	9147521	1643788338	635143709	1,50%	1,46%	37
2018	1361748899	24168443	9659634	1667956781	644803343	1,47%	1,52%	37
2019	1376257714	23583089	9874411	1691539870	654677754	1,41%	1,53%	38
2020	1389966387	23138532	10297047	1714678402	664974801	1,37%	1,57%	38
2021	1402807867	23113533	13601588	1737791935	678576389	1,35%	2,05%	39

Рассмотрим тестовый пример построения прогноза с 2011 по 2021 г. по данным статистики до 2010 г. Для выбора прогнозных значений параметров $r_{BNM}(t)$ и $r_{DNM}(t)$ мы используем подход, успешно зарекомендовавший себя при прогнозировании значений процентного прироста общего количества заболевших в период пандемии COVID-19, подробно рассмотренный в статьях [13,14]. Анализируя динамику уменьшения процентных приростов интегральных рядов притока и оттока в таблице 3, следует обратить внимание на монотонное снижение этих значений и на то, что начиная с 1970 г., продолжительность периода снижения этих показателей на 1% по сравнению с текущими значениями возрастает. Например, $r_{BNM}(t)$ с уровня 6.76% в 1967

г. снижается до уровня 5.84% в 1970 г. за три года, а от отметки 5.84% до уровня 4.81% уже за пять лет, с уровня 4.81% до уровня 3.91% за семь лет, с уровня 3.91% до уровня 2.91% - за 10 лет, а с уровня 2.91% до уровня 1.9% - за 15 лет. С учетом этих наблюдений прогноз процентного прироста интегрального объема притока в систему, основанный на данных статистики с 1950 до 2010 г. можно построить, предположив, что его снижение с уровня 1.9% в 2010 г. до уровня на 1 процент меньше может продолжаться примерно от 17 до 23 лет. Если взять в качестве оценки продолжительности такого снижения 20 года, то равномерно убывающий тренд прогнозируемых значений прироста интегрального объема притока можно представить в виде

$$\tilde{r}_{BNM}(t) = r_{BNM}(2010) - 0.05(t - 2010), \quad (8)$$

а с учетом аналогичных рассуждений равномерно убывающий тренд значений процентного прироста интегрального объема оттока в виде

$$\tilde{r}_{DNM}(t) = r_{DNM}(2010) - 0.02(t - 2010). \quad (9)$$

Вычисленные при использовании формул (8) и (9) значения процентных приростов $\tilde{r}_{BNM}(t)$ и $\tilde{r}_{DNM}(t)$ подставим в уравнение системы (2)-(4) и получим прогнозные траектории интегрального объема притока $IntB\tilde{N}M(t)$, интегрального объема оттока $IntD\tilde{N}M(t)$ и численности населения Индии $\tilde{N}(t)$ на промежутке от 2011 до 2021 г. Полученные значения представлены в таблице 4.

Таблица 4. Тестовый пример прогнозирования населения Индии с помощью линейных трендов

Год	$N(t)$	$\tilde{N}(t)$	$\tilde{r}_{BNM}(t)$	$\tilde{r}_{DNM}(t)$	Точность(%)	$\tilde{\theta}(t)$	$\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$
2011	1249141852	1248698118	1,80%	1,77%	99,96446427	33	33
2012	1266100530	1265005269	1,75%	1,75%	99,91341849	33	33
2013	1282873899	1280978875	1,70%	1,73%	99,8520644	34	34
2014	1299390228	1296590889	1,65%	1,71%	99,78410004	35	35
2015	1315102790	1311813247	1,60%	1,69%	99,74923697	35	35
2016	1330630219	1326617931	1,55%	1,67%	99,69755511	36	36
2017	1346642460	1340977023	1,50%	1,65%	99,57751424	37	36
2018	1361748899	1354862773	1,45%	1,63%	99,49174733	37	37
2019	1376257714	1368247656	1,40%	1,61%	99,41457545	38	37
2020	1389966387	1381104440	1,35%	1,59%	99,35834346	39	38
2021	1402807867	1393406244	1,30%	1,57%	99,32527768	39	39

В предпоследний столбец таблицы 4 внесены прогнозные значения характеристики динамического баланса с учетом наблюдения о возрастании ее значения на единицу раз в два года два раза подряд, а затем один раз за один год. Значения характеристики динамического баланса $\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$ в последнем столбце таблицы 4 вычислены при решении задачи (5)-(6), в которой использованы прогнозируемые значения интегральных объемов оттока $IntD\tilde{N}M(t)$, полученные при использовании тренда (9). Заметим, что значения $\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$ и $\tilde{\theta}(t)$ в последнем и предпоследнем столбцах почти совпадают. Оценка точности прогноза численности населения в год t , выраженная в процентах, вычисляется по формуле

$$\text{Точность} = \left(1 - \frac{|N(t) - \tilde{N}(t)|}{N(t)} \right) 100\%.$$

Отметим, что точность прогнозирования численности населения Индии, указанная в столбце 7 таблицы 4 достаточно высока. Близость фактической и прогнозируемой траектории характеристики динамического баланса, построенной на основе выбранных трендов процентных приростов интегральных объемов притока и оттока может свидетельствовать о хорошем прогнозе.

2.3 Прогнозирование процентных приростов для интегральной модели населения Земли

Рассматриваемым методом построения модели временного ряда является модель Бокса-Дженкинса (Box-Jenkins approach). Часто эту модель называют моделью авторегрессии проинтегрированного скользящего среднего (АРПСС) или в англоязычном варианте Autoregressive Integrated Moving Average mode (ARIMA). Процедуры оценки параметров и прогнозирования, предполагают, что математическая модель процесса известна. В реальных данных часто нет отчетливо выраженных регулярных составляющих. Отдельные наблюдения содержат значительную ошибку, что мешает не только выделить регулярные компоненты, но также построить

прогноз. Методология ARIMA, разработанная Боксом и Дженкинсом, позволяет это сделать. Данный метод чрезвычайно популярен во многих приложениях, и практика подтвердила его мощностъ и гибкость. В модели рассматривают 2 основных процесса:

1. Процесс авторегрессии (AR): если временной ряд содержит элементы, которые последовательно зависят друг от друга, то эту зависимость можно представить в следующем виде:

$$y_t = v + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3 y_{t-3} + \dots + \varepsilon_t,$$

где: v – константа (свободный член), а $a_1, a_2, a_3 \dots$ – параметры авторегрессии. Видно, что каждый элемент ряда является суммой случайной компоненты и линейной комбинации предыдущих наблюдений.

2. Процесс скользящего среднего (MA): в отличие от предыдущего процесса, в процессе скользящего среднего на каждое наблюдение оказывается суммарное воздействие предыдущих ошибок. Такой процесс имеет следующий вид:

$$y_t = \mu + e_t - b_1 \varepsilon_{t-1} - b_2 \varepsilon_{t-2} - b_3 \varepsilon_{t-3} - \dots,$$

где: μ – константа, $b_1, b_2, b_3 \dots$ – параметры скользящего среднего. Значит текущее наблюдение ряда является суммой случайной компоненты в этот момент и линейной комбинации случайных воздействий в предыдущие моменты времени.

В эконометрических исследованиях чаще всего используют модели ARIMA(p, d, q), значения параметров которой принимают значения не больше числа 2. При этом параметры p и q определяют порядок авторегрессионной составляющей и порядок скользящего среднего (для этого рассматривают модели ARMA(p, q) – модели авторегрессии со скользящими средними) соответственно, а параметр d – порядок разности (дискретной производной).

Общий вид ARIMA модели имеет вид: где ε_t – стационарный временной ряд, c, a_i, b_j – параметры модели, а Δd – оператор разности.

Для преобразования ряда к стационарному используют сдвиг ряда с фиксированным лагом. Чаще всего используют сдвиг с лагом равным 1 или 2. В этом случае ряд преобразуется следующим образом: $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ для всех значений $t = \overline{1, n}$ для первой разности и $\Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1}$ для второй. Этот порядок и определяет коэффициент d .

Используя балансовую моделью притока и оттока населения страны, описанную в Главе 1, рассмотрим тестовый пример построения прогноза численности населения Земли с 2011 по 2021 г. по данным статистики до 2010 г. Статистические данные демографических параметров с 1950 по 2021 г. отображены в таблице 5. В случае прогнозирования численности населения Земли нужно отметить важный момент, касающийся интегральных рядов притока и оттока. В мире, в случае Земли, отсутствует миграция, в отличие от стран и частей света. Поэтому значение чистого миграционного потока во все года равняется нулю, и интегральные ряды притока и оттока формируются только за счет значений ежегодного количества родившихся и умерших людей.

Таблица 5. Статистические данные Земли с 1950 по 2021 г.

Год	$N(t)$	$B(t)$	$D(t)$	$IntBNM(t)$	$IntDNM(t)$	$r_{BNM}(t)$	$r_{DNM}(t)$	$\theta(t)$
1950	2477674732	92083258	48788536	92083258	48788536			
1951	2520969582	92836900	48514552	184920158	97303088	100,82%	99,44%	0
1952	2565291179	97606684	47646612	282526842	144949700	52,78%	48,97%	1
1953	2615250618	97555839	47499083	380082681	192448783	34,53%	32,77%	1
1954	2665306975	100348054	47002805	480430735	239451588	26,40%	24,42%	2
1955	2718651703	101807356	46966099	582238091	286417687	21,19%	19,61%	2
1956	2773492579	101827191	46806573	684065282	333224260	17,49%	16,34%	3
1957	2828512683	105977909	47269070	790043191	380493330	15,49%	14,19%	3
1958	2887221030	104557392	46782736	894600583	427276066	13,23%	12,30%	4
1959	2944995164	101921643	51327051	996522226	478603117	11,39%	12,01%	5
1960	2995589212	102262439	54973677	1098784665	533576794	10,26%	11,49%	5
1961	3042877656	100989852	50003182	1199774517	583579976	9,19%	9,37%	5
1962	3093863563	112053316	46406404	1311827833	629986380	9,34%	7,95%	6
1963	3159509922	119818714	47279567	1431646547	677265947	9,13%	7,50%	7
1964	3232048572	117393293	47065427	1549039840	724331374	8,20%	6,95%	7
1965	3302376104	117932234	48459854	1666972074	772791228	7,61%	6,69%	8
1966	3371847862	117182361	48043572	1784154435	820834800	7,03%	6,22%	8
1967	3440986209	116839776	47915489	1900994211	868750289	6,55%	5,84%	9
1968	3509910122	121750025	47947975	2022744236	916698264	6,40%	5,52%	9

1969	3583711493	122122848	48234879	2144867084	964933143	6,04%	5,26%	10
1970	3657599057	124117185	48534128	2268984269	1013467271	5,79%	5,03%	10
1971	3733181615	123647417	49683953	2392631686	1063151224	5,45%	4,90%	11
1972	3807144569	123275037	47961807	2515906723	11111113031	5,15%	4,51%	11
1973	3882457201	123269476	47680360	2639176199	1158793391	4,90%	4,29%	12
1974	3958045806	122436994	47493921	2761613193	1206287312	4,64%	4,10%	12
1975	4032988348	120491005	47592762	2882104198	1253880074	4,36%	3,95%	13
1976	4105886113	120647815	47407648	3002752013	1301287722	4,19%	3,78%	14
1977	4179125652	120040242	46745923	3122792255	1348033645	4,00%	3,59%	14
1978	4252419327	121337099	46859945	3244129354	1394893590	3,89%	3,48%	15
1979	4326896089	124287659	46913597	3368417013	1441807187	3,83%	3,36%	15
1980	4404269653	126793222	47316613	3495210235	1489123800	3,76%	3,28%	16
1981	4483745758	129152540	47388185	3624362775	1536511985	3,70%	3,18%	17
1982	4565509559	132513060	47561960	3756875835	1584073945	3,66%	3,10%	17
1983	4650460182	130982626	48133880	3887858461	1632207825	3,49%	3,04%	18
1984	4733308294	133397031	48341286	4021255492	1680549111	3,43%	2,96%	18
1985	4818363854	135419518	48685438	4156675010	1729234549	3,37%	2,90%	19
1986	4905097372	138419612	48487102	4295094622	1777721651	3,33%	2,80%	20
1987	4995029307	140544952	48634087	4435639574	1826355738	3,27%	2,74%	20
1988	5086939683	139993375	49284175	4575632949	1875639913	3,16%	2,70%	21
1989	5177648264	141176680	49064192	4716809629	1924704105	3,09%	2,62%	21
1990	5269760352	142451012	49619695	4859260641	1974323800	3,02%	2,58%	22
1991	5362591372	137391599	50082059	4996652240	2024405859	2,83%	2,54%	22
1992	5449900363	135753655	50181618	5132405895	2074587477	2,72%	2,48%	23
1993	5535471822	134692831	50769036	5267098726	2125356513	2,62%	2,45%	24
1994	5619395224	134185338	51519238	5401284064	2176875751	2,55%	2,42%	24
1995	5702060762	133673134	51355462	5534957198	2228231213	2,47%	2,36%	25
1996	5784378146	133052993	51518770	5668010191	2279749983	2,40%	2,31%	25
1997	5865912450	132597541	51459177	5800607732	2331209160	2,34%	2,26%	26
1998	5947050072	132286772	51761764	5932894504	2382970924	2,28%	2,22%	27
1999	6027574888	132364211	51996609	6065258715	2434967533	2,23%	2,18%	27
2000	6107942028	134014028	52099819	6199272743	2487067352	2,21%	2,14%	28
2001	6189855922	133877730	52095282	6333150473	2539162634	2,16%	2,09%	28
2002	6271638043	134020459	52481447	6467170932	2591644081	2,12%	2,07%	29
2003	6353176677	134302047	52858472	6601472979	2644502553	2,08%	2,04%	29
2004	6434620053	135228145	52965047	6736701124	2697467600	2,05%	2,00%	30
2005	6516882903	135800237	53213356	6872501361	2750680956	2,02%	1,97%	31
2006	6599469335	136909897	53015851	7009411258	2803696807	1,99%	1,93%	31
2007	6683363101	138562817	53391816	7147974075	2857088623	1,98%	1,90%	32
2008	6768533988	140164401	54037662	7288138476	2911126285	1,96%	1,89%	32
2009	6854660556	141200888	53910189	7429339364	2965036474	1,94%	1,85%	33
2010	6941951260	141633320	54329194	7570972684	3019365668	1,91%	1,83%	33
2011	7029254950	142134919	54393800	7713107603	3073759468	1,88%	1,80%	34
2012	7116995900	144194060	54789783	7857301663	3128549251	1,87%	1,78%	34
2013	7206399942	143421589	55034447	8000723252	3183583698	1,83%	1,76%	35
2014	7294786798	143670855	55217575	8144394107	3238801273	1,80%	1,73%	36
2015	7383240040	142608081	55893034	8287002188	3294694307	1,75%	1,73%	36
2016	7469955033	143238900	56200615	8430241088	3350894922	1,73%	1,71%	37

2017	7556993443	142624116	56965958	8572865204	3407860880	1,69%	1,70%	37
2018	7642651364	139628713	57351675	8712493917	3465212555	1,63%	1,68%	38
2019	7724928292	137984248	57938525	8850478165	3523151080	1,58%	1,67%	38
2020	7804973773	135132602	63174308	8985610767	3586325388	1,53%	1,79%	39
2021	7876931987	133974696	69248154	9119585463	3655573542	1,49%	1,93%	39

Для выбора прогнозных значений параметров $r_{BNM}(t)$ и $r_{DNM}(t)$ в данном примере будет использована модель ARIMA. Для её оценки будет использовано несколько критериев, такие как: тест Льюинг-Бокса, тест Харке-Бера, тест Уайта и тест Дики-Фуллера, а также визуальный анализ графиков остатков.

Тест Льюинг-Бокса представляет собой статистический тест, который проверяет наличие автокорреляции во временном ряду. Он широко используется в эконометрике и в других областях, в которых распространены данные временных рядов. Нулевая гипотеза предполагает, что остатки распределяются независимо. В противном случае остатки не распределяются независимо. Мы хотим принять нулевую гипотезу, то есть чтобы р-значение теста было больше 0,05, потому что это означает, что остатки для нашей модели временных рядов независимы.

Тест Харке-Бера — это критерий согласия, который определяет, имеют ли выборочные данные асимметрию и эксцесс, соответствующие нормальному распределению. В тесте проверяется гипотеза о том, что остатки модели распределены нормально, против гипотезы о ненормальном распределении. Р-значение теста должно быть больше 0,05, чтобы мы могли сказать, что данные не имеют асимметрию и эксцесс, которые значительно отличаются от нормального распределения.

Тест Уайта используется для определения наличия гетероскедастичности в регрессионной модели. Гетероскедастичность относится к неравному разбросу остатков на разных уровнях переменной отклика, что нарушает предположение о том, что остатки одинаково разбросаны на каждом уровне переменной отклика. В тесте Уайта используются следующие нулевая и альтернативная гипотезы:

- H_0 : присутствует гомоскедастичность (остатки равномерно разбросаны)
- H_A : присутствует гетероскедастичность (остатки разбросаны неравномерно).

Чтобы не отвергнуть нулевую гипотезу необходимо, чтобы p -значение было не меньше 0,05.

Рассмотрим прогнозирование процентного прироста $\tilde{r}_{BNM}(t)$. Изначально ряд не является стационарным. Для приведения его к стационарности необходимо два последовательных дифференцирования. После этого тест Дики-Фуллера дает положительный результат о стационарности ($p - value < 0.05$). Выбор модели делается на основе информационного критерия Акаике (Akaike information criterion – AIC): меньшее значение AIC указывает на лучшую подгонку модели. В данном случае, лучшей моделью оказалась модель ARIMA(1,2,0) со значением AIC равным -462.990. Вывод модели представлен на рисунке 1.

SARIMAX Results						
=====						
Dep. Variable:	TPopulation1Jan		No. Observations:		39	
Model:	ARIMA(1, 2, 0)		Log Likelihood		233.495	
Date:	Sat, 11 May 2024		AIC		-462.990	
Time:	21:34:27		BIC		-459.768	
Sample:	0		HQIC		-461.854	
	- 39					
Covariance Type:	opg					
=====						
	coef	std err	z	P> z	[0.025	0.975]

ar.L1	-0.3783	0.136	-2.775	0.006	-0.645	-0.111
sigma2	1.885e-07	3.15e-08	5.979	0.000	1.27e-07	2.5e-07
=====						
Ljung-Box (L1) (Q):		0.29	Jarque-Bera (JB):		19.61	
Prob(Q):		0.59	Prob(JB):		0.20	
Heteroskedasticity (H):		0.05	Skew:		-1.11	
Prob(H) (two-sided):		0.09	Kurtosis:		5.79	
=====						

Рисунок 1. Модель ARIMA(1,2,0) для прогнозирования процентного прироста притока с 2011 по 2021 г.

Оценим полученную модель по приведенным на рисунке 5 критериям. Коэффициенты модели статистически значимые, т.к. каждое значение $P > |z|$

меньше 0,05. Тест Льюинг-Бокса с p -значением $Prob(Q) = 0,59 > 0,05$ указывает на то, что остатки модели не коррелируют между собой. Тест Харке-Бера с p -значением $Prob(JB) = 0,20 > 0,05$ говорит о том, что остатки нормально распределены. Тест Уайта: p -значение $Prob(H) = 0,09 > 0,05$ указывает на не гетероскедастичные остатки. Ряд остатков был проверен на стационарность с помощью теста Дики-Фуллера. Значение теста равно 0,015, что меньше, чем пороговое значение 0,05. Значит остатки, ко всему прочему, стационарны. Оценим графики остатков модели, приведенные на рисунке 2.

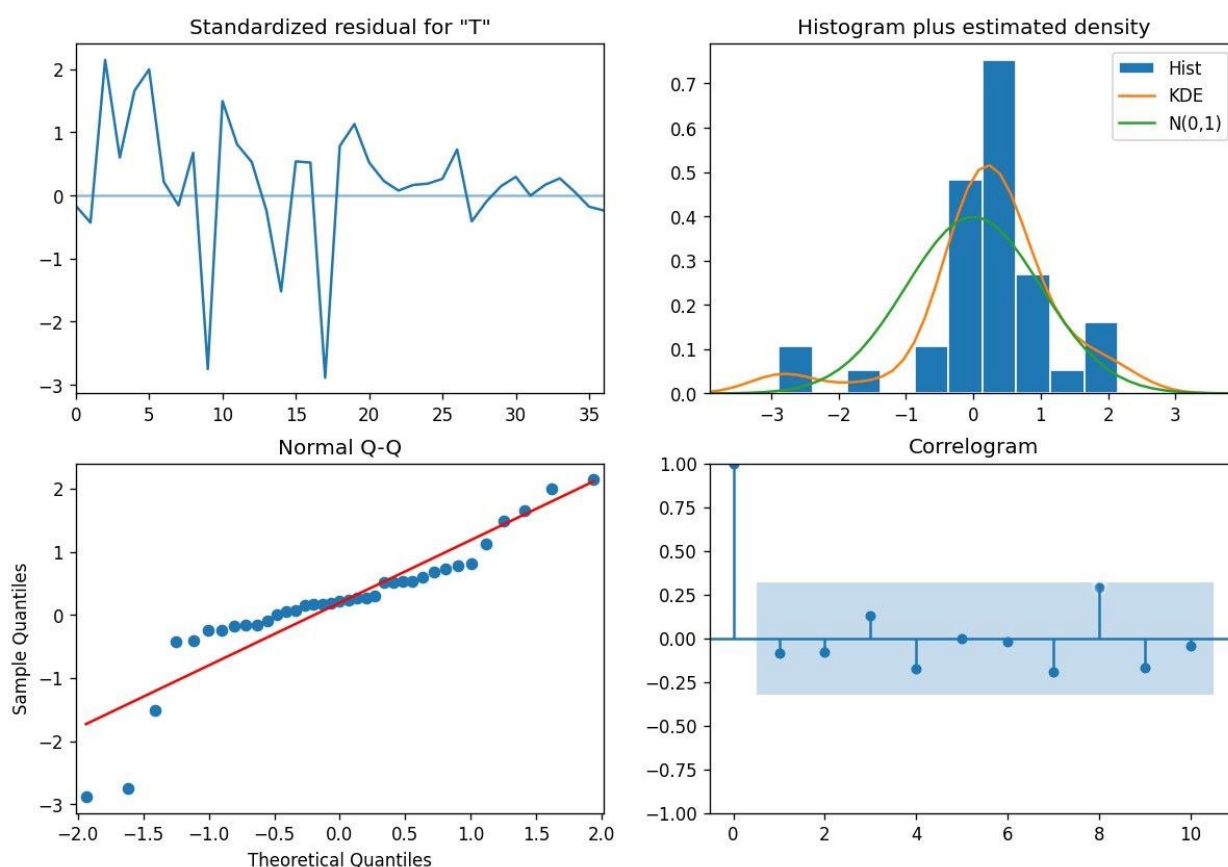


Рисунок 2. Модель ARIMA(1,2,0), графики остатков

На графике стандартизованных остатков нет очевидных закономерностей, что указывает на хорошую модель. На гистограмме отображено измеренное распределение остатков. Оранжевая линия показывает кривую KDE (сглаженная версия гистограммы), а зеленая линия показывает нормальное распределение. Оранжевая линия не очень похожа на зеленую, что указывает на проблемы в модели. На графике коррелограммы 95% корреляций внутри синей области, что также означает хорошую модель.

На графике нормального квантиля (Q-Q) большинство точек данных не лежат на прямой линии, что может быть признаком ненормального распределения остатков.

Теперь рассмотрим прогнозирование процентного прироста $\tilde{r}_{DNM}(t)$. Также, как и ряд процентного прироста $\tilde{r}_{BNM}(t)$, временной ряд процентного прироста $\tilde{r}_{DNM}(t)$ изначально не является стационарным. После взятия двух последовательных разностей тест Дики-Фуллера показывает стационарность. Подбор параметров модели также происходит по информационному критерию AIC. Модель ARIMA(1,2,1) с AIC равным -442.970 является лучшей. Вывод модели представлен на рисунке 3.

SARIMAX Results						
=====						
Dep. Variable:	TPopulation1Jan		No. Observations:		33	
Model:	ARIMA(1, 2, 1)		Log Likelihood		224.485	
Date:	Sat, 11 May 2024		AIC		-442.970	
Time:	19:48:02		BIC		-438.668	
Sample:	0		HQIC		-441.568	
	- 33					
Covariance Type:	opg					
=====						
	coef	std err	z	P> z	[0.025	0.975]

ar.L1	-0.2489	0.092	-2.697	0.007	-0.430	-0.068
ma.L1	-0.4878	0.095	-5.162	0.000	-0.673	-0.303
sigma2	2.839e-08	7.58e-09	3.744	0.000	1.35e-08	4.33e-08
=====						
Ljung-Box (L1) (Q):		1.66	Jarque-Bera (JB):		0.15	
Prob(Q):		0.20	Prob(JB):		0.93	
Heteroskedasticity (H):		0.30	Skew:		0.02	
Prob(H) (two-sided):		0.07	Kurtosis:		2.66	
=====						

Рисунок 3. Модель ARIMA(1,2,1) для прогнозирования процентного прироста оттока с 2011 по 2021 г.

Оценим полученную модель по приведенным на рисунке 6 критериям. Из рисунка видно, что коэффициенты модели статистически значимые, т.к. каждое значение $P > |z|$ меньше 0,05. Тест Льюинг-Бокса показывает на то, что остатки модели не коррелируют между собой, значение $Prob(Q) = 0,2 > 0,05$. Тест Харке-Бера со значением $Prob(JB) = 0,93 > 0,05$ говорит о том,

что остатки нормально распределены. Тест Уайта с p -значением $Prob(H) = 0,07 > 0,05$ говорит о не гетероскедастичных остатках. Также ряд остатков проверен на стационарность с помощью теста Дики-Фуллера. Значение теста равно 0,002, что меньше, чем пороговое значение 0,05. Значит остатки стационарны. Оценим графики остатков модели, приведенные на рисунке 4.

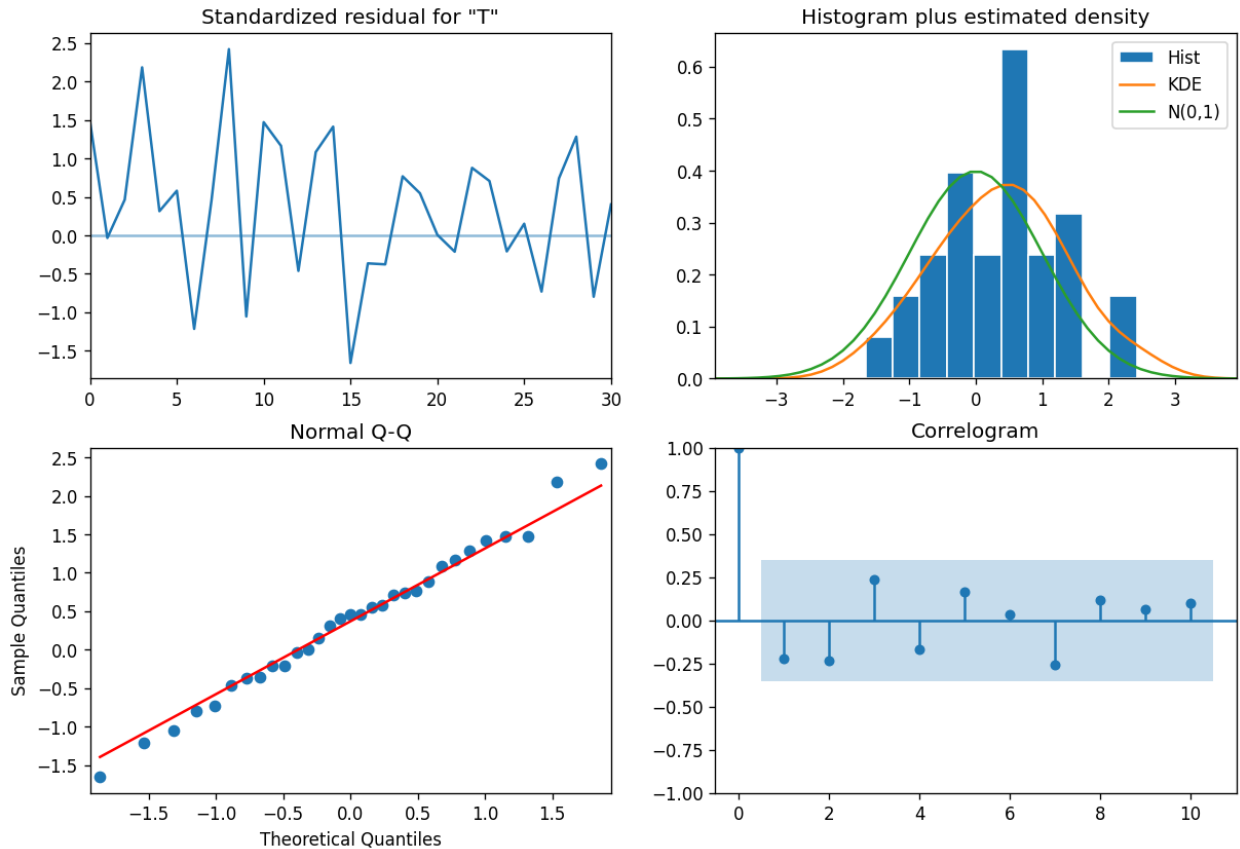


Рисунок 4. Модель ARIMA(1,2,1), графики остатков

На графике стандартизованных остатков нет очевидных закономерностей, что указывает на хорошую модель. На гистограмме оранжевая линия не очень похожа на зеленую, что указывает на возможные проблемы в модели. На графике коррелограммы 95% корреляций внутри синей области, что говорит о хорошей модели. На графике нормального квантиля (Q-Q) большинство точек данных лежат на прямой линии, что указывает на нормальное распределение остатков. Полученный ретроспективный прогноз представлен в таблице 6.

Таблица 6. Тестовый пример прогнозирования с помощью ARIMA

Год	$N(t)$	$\tilde{N}(t)$	$\tilde{r}_{BNM}(t)$	$\tilde{r}_{DNM}(t)$	Точность(%)	$\tilde{\theta}(t)$	$\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$
-----	--------	----------------	----------------------	----------------------	-------------	---------------------	---

2011	7029254950	7029281748	1,88%	1,80%	99,99961876	34	34
2012	7116995900	7117052375	1,85%	1,78%	99,99920648	35	34
2013	7206399942	7205016378	1,82%	1,75%	99,9808009	35	35
2014	7294786798	7293226910	1,79%	1,73%	99,9786164	36	36
2015	7383240040	7381588132	1,76%	1,70%	99,97762625	36	36
2016	7469955033	7470069860	1,73%	1,68%	99,99846282	37	37
2017	7556993443	7558610729	1,71%	1,65%	99,97859882	37	37
2018	7642651364	7647161956	1,68%	1,62%	99,94098132	38	38
2019	7724928292	7735667664	1,65%	1,60%	99,86097772	39	38
2020	7804973773	7824073820	1,62%	1,57%	99,75528365	39	39
2021	7876931987	7912324282	1,59%	1,55%	99,55068427	40	39

Точность прогноза во все года до 2020 г. больше 99,8%, а после 2020 г. находится на уровне больше 99,5%, что, скорее всего, связано с пандемией COVID-19. Такая высокая точность говорит о том, что данный метод прогнозирования процентных приростов успешен и его можно использовать для прогнозирования будущих значений. Также стоит отметить, что значения характеристики динамического баланса $\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$ полностью совпадают со значениями $\tilde{\theta}(t)$, за исключением 2021 г., что подтверждает гипотезу о динамической согласованности интегральных рядов притока и оттока.

Глава 3. Результаты прогнозирования численности населения

В данной главе будут представлены долгосрочные прогнозы численности населения Китая, Индии и Земли, построенные по описанной модели в Главе 1 при помощи прогнозирования процентных приростов методами, описанными в Главе 2.

3.1 Прогнозирование численности населения Индии

Прогноз значений параметров модели и демографических показателей в Индии с 2022 по 2062 г., приведенный в приложении 2, построен по той же методике, что и прогноз для рассмотренного тестового примера на основе линейных трендов. Некоторые значения этого прогноза приведены в таблице 7. В качестве оценки продолжительности снижения процентного прироста $\tilde{r}_{BNM}(t)$ с уровня 1.35% на 1% при расчетах взято 40 лет, поэтому равномерно убывающий тренд прогнозируемых значений прироста интегрального объема притока до 2062 г. можно представить в виде

$$\tilde{r}_{BNM}(t) = r_{BNM}(2021) - 0.025(t - 2021).$$

Тренд процентного прироста $\tilde{r}_{DNM}(t)$ выбран на основе предыдущей статистики и вычисляется до 2062 г. по формуле

$$\tilde{r}_{DNM}(t) = r_{DNM}(2021) - 0.0143(t - 2021).$$

Таблица 7. Прогноз демографических показателей Индии на основе линейных трендов в некоторые года

Год	$\tilde{N}(t)$	$IntB\tilde{N}M(t)$	$IntD\tilde{N}M(t)$	$\tilde{r}_{BNM}(t)$	$\tilde{r}_{DNM}(t)$	$\tilde{\theta}(t)$	$\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$
2022	1412319822	1760637770	689055444,8	1,31%	1,54%	40	40
2023	1424686601	1783490507	699597889,1	1,30%	1,53%	40	40
2024	1436996894	1806193996	710201688,7	1,27%	1,52%	41	41
2025	1449096584	1828734948	720864752,5	1,25%	1,50%	41	41
2030	1506044542	1938533705	774991857,7	1,12%	1,43%	44	44
2040	1597799039	2138265491	886328843,2	0,87%	1,29%	50	50
2050	1651536507	2300833295	999463240,4	0,62%	1,14%	56	56
2056	1661942005	2375751815	1066905636	0,47%	1,06%	60	60
2057	1661950455	2386394723	1078047018	0,45%	1,04%	61	60

2058	1661451981	2396488711	1089150740	0,42%	1,03%	61	61
2060	1658917313	2415000285	1111230918	0,37%	1,00%	62	62
2061	1656873642	2423404018	1122200187	0,35%	0,99%	63	63
2062	1654308107	2431231144	1133117423	0,32%	0,97%	64	64

Из полученных результатов видно, что значения характеристики динамического баланса $\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$ и $\tilde{\theta}(t)$ совпадают почти во все рассматриваемые года и отличаются на единицу всего лишь в четырех местах. Такая точность позволяет делать предположение о надежности данного прогноза как на малом горизонте прогнозирования, так и на большом.

В приложении 3 приведен прогноз значений параметров модели и демографических показателей в Индии с 2022 по 2062 г., построенный с помощью модели ARIMA. Лучшая модель выбиралась по информационному критерию AIC, графикам остатков и ранее упомянутых критериев. Лучшей оказалась модель с параметрами ARIMA(0,2,1) для обоих рассматриваемых рядов процентного прироста. Вывод моделей представлен на рисунках 5 и 6. Обе модели имеют статистически значимые коэффициенты. Для обеих моделей выполняются тесты Льюинг-Бокса, Харке-Бера и Уайта. Остатки случайны, не коррелируют между собой и нормально распределены. По критерию Дикки-Фуллера р-значение меньше 0,05, что означает стационарность остатков.

```

SARIMAX Results
=====
Dep. Variable:      TPopulation1Jan    No. Observations:      42
Model:              ARIMA(0, 2, 1)    Log Likelihood          261.440
Date:               Fri, 10 May 2024   AIC                     -518.880
Time:                15:15:21          BIC                     -515.502
Sample:              0                 HQIC                    -517.658
                        - 42
Covariance Type:    opg
=====
              coef      std err          z      P>|z|      [0.025      0.975]
-----
ma.L1          -0.5634      0.141     -4.002      0.000     -0.839     -0.288
sigma2         1.184e-07    2.21e-08     5.356      0.000     7.51e-08    1.62e-07
=====
Ljung-Box (L1) (Q):                0.26   Jarque-Bera (JB):                2.09
Prob(Q):                           0.61   Prob(JB):                  0.35
Heteroskedasticity (H):              2.10   Skew:                      -0.21
Prob(H) (two-sided):                0.19   Kurtosis:                   4.04
=====

```

Рисунок 5. Модель ARIMA для прогнозирования процентного прироста оттока в Индии

```

SARIMAX Results
=====
Dep. Variable:      TPopulation1Jan    No. Observations:      43
Model:              ARIMA(0, 2, 1)    Log Likelihood          290.774
Date:               Fri, 10 May 2024   AIC                     -577.549
Time:                15:18:52          BIC                     -574.121
Sample:              0                 HQIC                    -576.301
                        - 43
Covariance Type:    opg
=====
              coef      std err          z      P>|z|      [0.025      0.975]
-----
ma.L1          -0.7221      0.156     -4.620      0.000     -1.028     -0.416
sigma2         3.919e-08     1e-08     3.918      0.000     1.96e-08    5.88e-08
=====
Ljung-Box (L1) (Q):                0.20   Jarque-Bera (JB):                2.96
Prob(Q):                           0.65   Prob(JB):                  0.23
Heteroskedasticity (H):              0.64   Skew:                      -0.64
Prob(H) (two-sided):                0.41   Kurtosis:                   3.28
=====

```

Рисунок 6. Модель ARIMA для прогнозирования процентного прироста притока в Индии

Можно заметить, что с 2056 г. значение процентного прироста $\tilde{r}_{BNM}(t)$ становится отрицательным. Такого быть не может, ведь каждое значение

интегрального ряда больше, чем предыдущее. Такой результат связан с довольно большим горизонтом прогнозирования, быстрым убыванием параметра и его небольшим значением в 2021 г. Поэтому, прогноз с 2056 г. нельзя рассматривать как возможный. А также весь прогноз, построенный с помощью этой модели, ставится под сомнение, как минимум на большом горизонте прогнозирования. В таблице 8 приведены некоторые значения полученного прогноза.

Таблица 8. Прогноз демографических показателей Индии на основе модели ARIMA в некоторые года

Год	$\tilde{N}(t)$	$IntB\tilde{N}M(t)$	$IntD\tilde{N}M(t)$	$\tilde{r}_{BNM}(t)$	$\tilde{r}_{DNM}(t)$	$\tilde{\theta}(t)$	$\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$
2022	1412319822	1760542208	689597655,1	1,31%	1,62%	40	40
2023	1424048829	1782906655	700974920,2	1,27%	1,65%	40	40
2024	1435036011	1804862856	712719806,7	1,23%	1,68%	41	41
2025	1445247325	1826388573	724844408,6	1,19%	1,70%	41	41
2030	1483455030	1926798954	791622085,2	1,00%	1,83%	44	44
2040	1481400581	2083477962	962209195,8	0,61%	2,09%	50	48
2050	1344014346	2167582974	1199330011	0,22%	2,34%	56	49
2055	1212486256	2179022542	1351633163	0,03%	2,47%	59	49
2056	1180493655	2178779519	1385381145	-0,01%	2,50%	60	49
2057	1146502650	2177690451	1420327333	-0,05%	2,52%	61	48

Анализируя полученные значения $\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$ и $\tilde{\theta}(t)$ можно сделать вывод, о хорошем прогнозе лишь на небольшом промежутке до 2040 г., где значения характеристики динамического баланса отличаются от предполагаемых на маленькое значение. После 2040 г. значения отличаются в разы больше, разность доходит до 13 пунктов, что говорит о сильном расхождении предполагаемых значений и несовершенстве модели и прогноза.

3.2 Прогнозирование численности населения Китая

Спрогнозированные значения параметров модели и демографических показателей Китая с 2022 по 2062 г. приведены в приложении 4. Статистические данные демографических параметров с 1950 по 2021 г. отображены в приложении 1. В таблице 9 выбраны ключевые года по значениям численности населения Китая. Оценка продолжительности снижения процентного прироста $\tilde{r}_{BNM}(t)$ проводилась до 2020 г., т.к в 2020 и 2021 г. значение резко падает из-за пандемии COVID-19. Таким образом,

можно предположить, что снижение процентного прироста с уровня 0,95% до уровня на 1% произойдет за промежуток от 45 до 75 лет, и в качестве оценки параметра взято среднее значение в 60 лет. Значит равномерно убывающий тренд прогнозируемых значений прироста интегрального объема притока до 2062 г. можно представить в виде

$$\tilde{r}_{BNM}(t) = r_{BNM}(2019) - 0.016(t - 2019).$$

Тренд процентного прироста $\tilde{r}_{DNM}(t)$ рассчитывался на основе статистики до 2021 г. Временной промежуток снижения параметра с уровня 1,58% на 1% от 60 до 90 лет. Таким образом, в качестве оценки параметра взято значение в 75 лет, а убывающий тренд прогнозируемых значений оттока интегрального объема оттока до 2062 г. представлен в виде

$$\tilde{r}_{DNM}(t) = r_{DNM}(2021) - 0.013(t - 2021).$$

Таблица 9. Прогноз демографических показателей Китая на основе линейных трендов в некоторые года

Год	$\tilde{N}(t)$	$IntB\tilde{N}M(t)$	$IntD\tilde{N}M(t)$	$\tilde{r}_{BNM}(t)$	$\tilde{r}_{DNM}(t)$	$\tilde{\theta}(t)$	$\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$
2022	1425925354	1597182718	706615386,5	0,93%	1,57%	45	46
2023	1429757337	1611781395	717587633,6	0,91%	1,55%	46	46
2024	1433383767	1626244878	728634578,1	0,90%	1,54%	46	46
2025	1436800304	1640567109	739754434,2	0,88%	1,53%	47	47
2030	1450587744	1709848807	796380903,4	0,80%	1,46%	49	49
2038	1460282463	1811192480	890032107,3	0,66%	1,35%	53	53
2039	1460350378	1822917417	901953694,1	0,65%	1,34%	54	54
2040	1460153728	1834414437	913914704,8	0,63%	1,33%	54	54
2045	1455109447	1888297970	974216217,1	0,55%	1,26%	57	57
2050	1443092062	1935725335	1035083314	0,46%	1,19%	59	60
2060	1397413981	2009021565	1156970361	0,30%	1,06%	64	64
2061	1391241210	2014660756	1169073688	0,28%	1,05%	65	64
2062	1384777073	2019979999	1181147754	0,26%	1,03%	65	64

Значения $\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$, полученные после прогноза, почти совпадают со значениями $\tilde{\theta}(t)$, которые предполагались в качестве продолжения ряда характеристики динамического баланса. Расхождение между ними достигает максимум в единицу, например в 2045 г. Это означает, что полученный прогноз можно считать хорошим на всем промежутке прогнозирования.

Рассмотрим прогноз процентных приростов в Китае с помощью модели ARIMA. Полученные результаты прогноза представлены в приложении 5. В таблице 10 приведены некоторые значения прогноза.

Таблица 10. Прогноз демографических показателей Китая на основе модели ARIMA в некоторые года

Год	$\tilde{N}(t)$	$IntB\tilde{N}M(t)$	$IntD\tilde{N}M(t)$	$\tilde{r}_{BNM}(t)$	$\tilde{r}_{DNM}(t)$	$\tilde{\theta}(t)$	$\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$
2022	1425925354	1593746861	706256495,5	0,71%	1,51%	45	46
2023	1426680370	1603877383	716867891,4	0,64%	1,50%	46	46
2024	1426199497	1612822405	727539432,2	0,56%	1,49%	46	46
2025	1424472978	1620560449	738275808,8	0,48%	1,48%	47	47
2030	1396493968	1640586216	792823640,1	0,09%	1,41%	49	49
2031	1386952581	1640786457	803892823,7	0,01%	1,40%	50	50
2032	1376083639	1639708066	815010101,4	-0,07%	1,38%	50	50
2033	1363887969	1637352566	826173238	-0,14%	1,37%	51	51
2034	1350369333	1633724468	837379892,8	-0,22%	1,36%	51	52
2035	1335534580	1628831256	848627704,6	-0,30%	1,34%	52	52

Лучшей моделью при прогнозировании процентного прироста притока стала модель ARIMA(1,2,0) со значением AIC равным -483,081, в то время как для процентного прироста оттока – ARIMA(0,2,1) со значением AIC равным -661,004. Вывод моделей представлен на рисунках 7 и 8. Т.к все значения $P > |z|$ меньше 0,05, то обе модели имеют статистически значимые коэффициенты. Для обеих моделей выполняются тест Льюинг-Бокса ($Prob(Q) = 0,24 > 0,05$ и $Prob(Q) = 0,67 > 0,05$), но для модели прогнозирования процентного прироста притока не выполняются тесты Харке-Бера и Уайта. Р-значения тестов меньше порогового значения в 0,05. Остатки случайны и не коррелируют между собой. По критерию Дикки-Фуллера р-значение меньше 0,05, что означает стационарность остатков для обеих моделей.

```

SARIMAX Results
=====
Dep. Variable:      TPopulation1Jan    No. Observations:      55
Model:              ARIMA(0, 2, 1)    Log Likelihood          243.541
Date:               Fri, 10 May 2024   AIC                     -483.081
Time:                16:37:32          BIC                     -479.141
Sample:              0                 HQIC                    -481.566
                        - 55
Covariance Type:    opg
=====
              coef    std err          z      P>|z|      [0.025      0.975]
-----
ma.L1          -0.7115      0.118     -6.015      0.000     -0.943     -0.480
sigma2         5.873e-06    5.7e-07    10.296      0.000     4.75e-06    6.99e-06
=====
Ljung-Box (L1) (Q):                1.41    Jarque-Bera (JB):                409.34
Prob(Q):                            0.24    Prob(JB):                      0.00
Heteroskedasticity (H):              0.03    Skew:                          2.26
Prob(H) (two-sided):                0.00    Kurtosis:                     15.84
=====

```

Рисунок 7. Модель ARIMA для прогнозирования процентного прироста притока в Китае

```

SARIMAX Results
=====
Dep. Variable:      TPopulation1Jan    No. Observations:      54
Model:              ARIMA(1, 2, 0)    Log Likelihood          332.502
Date:               Fri, 10 May 2024   AIC                     -661.004
Time:                15:55:10          BIC                     -657.101
Sample:              0                 HQIC                    -659.508
                        - 54
Covariance Type:    opg
=====
              coef    std err          z      P>|z|      [0.025      0.975]
-----
ar.L1          -0.5154      0.077     -6.701      0.000     -0.666     -0.365
sigma2         1.623e-07    2.89e-08    5.614      0.000     1.06e-07    2.19e-07
=====
Ljung-Box (L1) (Q):                0.18    Jarque-Bera (JB):                6.14
Prob(Q):                            0.67    Prob(JB):                      0.05
Heteroskedasticity (H):              0.42    Skew:                          -0.72
Prob(H) (two-sided):                0.08    Kurtosis:                     3.88
=====

```

Рисунок 8. Модель ARIMA для прогнозирования процентного прироста оттока в Китае

Как и в результатах прогнозирования Индии, в Китае можно наблюдать, что при использовании модели ARIMA значение процентного прироста $\tilde{r}_{BNM}(t)$ с 2032 г. становится отрицательным. Т.к это невозможно, то результаты прогноза после 2032 г. нельзя рассматривать как возможные. Такой результат объясним быстрым убыванием параметра с 2018 по 2021 г., его небольшими значениями в это время, например в 2021 г. значение процентного прироста $\tilde{r}_{BNM}(t)$ было равно 0,69%, и несовершенством

полученной модели прогнозирования параметра. Для модели не выполнились тесты Харке-Бера и Уайта, а это значит, что остатки гетероскедастичны и не имеют нормального распределения. Но несмотря на все недостатки, значения $\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$, полученные после прогноза, почти совпадают со значениями $\tilde{\theta}(t)$, которые предполагались в качестве продолжения ряда характеристики динамического баланса.

3.3 Прогнозирование численности населения Земли

Прогноз значений параметров модели и демографических показателей Земли с 2022 по 2062 г. приведен в приложении 6. В таблице 11 выбраны ключевые значения численности населения Земли, а также соответствующие им значения других параметров. На основе предыдущей статистики можно предположить, что снижение процентного прироста $\tilde{r}_{BNM}(t)$ с уровня 1,49% до уровня на 1% произойдет за промежуток от 40 до 70 лет, поэтому в качестве оценки параметра взято среднее значение в 50 лет. Равномерно убывающий тренд прогнозируемых значений прироста интегрального объема притока до 2062 г. можно представить в виде

$$\tilde{r}_{BNM}(t) = r_{BNM}(2021) - 0.02(t - 2021).$$

В качестве оценки параметра процентного прироста $\tilde{r}_{DNM}(t)$ взято значение в 80 лет, а тренд процентного прироста $\tilde{r}_{DNM}(t)$ представлен в виде

$$\tilde{r}_{DNM}(t) = r_{DNM}(2021) - 0.0125(t - 2021).$$

Таблица 11. Прогноз демографических показателей Земли на основе линейных трендов в некоторые года

Год	$\tilde{N}(t)$	$IntB\tilde{N}M(t)$	$IntD\tilde{N}M(t)$	$\tilde{r}_{BNM}(t)$	$\tilde{r}_{DNM}(t)$	$\tilde{\theta}(t)$	$\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$
2022	7984981503	9253733793	3725701858	1,47%	1,92%	40	40
2023	8049001517	9388004687	3796709799	1,45%	1,91%	40	40
2024	8112264470	9522346240	3868596487	1,43%	1,89%	41	41
2025	8174719334	9656705739	3941360700	1,41%	1,88%	41	41
2030	8473056228	10326875051	4318276796	1,31%	1,82%	44	43
2040	8978797428	11636326507	5136167812	1,11%	1,69%	49	47
2050	9318750866	12854984858	6034333667	0,91%	1,57%	54	51
2057	9430578766	13621646186	6705673591	0,77%	1,48%	57	53
2058	9436942177	13723943596	6804139322	0,75%	1,47%	58	53
2059	9440773855	13824264462	6903200402	0,73%	1,46%	58	53

2060	9442033642	13922553812	7002840806	0,71%	1,44%	59	54
2061	9440682588	14018757480	7103044059	0,69%	1,43%	59	54
2062	9436683004	14112822157	7203793234	0,67%	1,42%	60	54

Анализ полученных значений характеристики динамического баланса $\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$ показывает, что модель справилась хуже, чем в предыдущих прогнозах. Сильное расхождение в значениях начиная с 2050 г. может свидетельствовать о том, что на большом горизонте прогнозирования модель дает неточные результаты. Тем не менее, до 2050 г. различие значений $\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$ и $\tilde{\theta}(t)$ можно считать небольшим и полученный прогноз до этого времени считать хорошим.

Рассмотрим спрогнозированные значения процентных приростов интегральных рядов притока и оттока с помощью модели ARIMA в мире с 2022 по 2062 г. приведены в приложении 7. В таблице 12 отражены ключевые года для параметра численности населения Земли и процентных приростов $\tilde{r}_{BNM}(t)$ и $\tilde{r}_{DNM}(t)$.

Таблица 12. Прогноз демографических показателей Земли на основе модели ARIMA в некоторые года

Год	$\tilde{N}(t)$	$IntB\tilde{N}M(t)$	$IntD\tilde{N}M(t)$	$\tilde{r}_{BNM}(t)$	$\tilde{r}_{DNM}(t)$	$\tilde{\theta}(t)$	$\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$
2022	7941686653	9251536442	3715331383	1,45%	1,63%	40	40
2023	8013879791	9381615835	3775604149	1,41%	1,62%	40	40
2024	8083686418	9509571682	3836385270	1,36%	1,61%	41	41
2025	8150861144	9635313353	3897667878	1,32%	1,60%	41	41
2030	8443311572	10225898756	4211341908	1,11%	1,54%	44	44
2040	8762976942	11166156566	4871494601	0,70%	1,41%	49	49
2050	8646792133	11697281245	5566459049	0,28%	1,29%	54	54
2056	8341472606	11789961035	5994740786	0,03%	1,21%	57	57
2057	8272894981	11788243604	6066649997	-0,01%	1,20%	57	57
2058	8199268340	11781601915	6138667499	-0,06%	1,19%	58	58

Рассмотрим прогноз процентных приростов на Земле с помощью модели ARIMA. Лучшая модель, как и раньше, выбиралась по информационному критерию AIC, графикам остатков и статистическим тестам. Вывод моделей представлен на рисунках 9 и 10.

SARIMAX Results

```

=====
Dep. Variable:      TPopulation1Jan    No. Observations:      50
Model:              ARIMA(1, 2, 0)     Log Likelihood          308.179
Date:               Fri, 10 May 2024   AIC                     -612.358
Time:               00:49:23           BIC                     -608.616
Sample:             0                  HQIC                    -610.944
                  - 50
Covariance Type:    opg
=====
              coef    std err          z      P>|z|      [0.025    0.975]
-----
ar.L1          -0.3915     0.111     -3.527     0.000     -0.609    -0.174
sigma2         1.535e-07   2.04e-08     7.518     0.000     1.14e-07   1.94e-07
=====
Ljung-Box (L1) (Q):                0.25   Jarque-Bera (JB):                33.02
Prob(Q):                           0.62   Prob(JB):                      0.16
Heteroskedasticity (H):             0.07   Skew:                          -1.03
Prob(H) (two-sided):               0.06   Kurtosis:                      6.51
=====

```

Рисунок 9. Модель ARIMA для прогнозирования процентного прироста притока населения Земли

SARIMAX Results

```

=====
Dep. Variable:      TPopulation1Jan    No. Observations:      46
Model:              ARIMA(0, 2, 1)     Log Likelihood          312.112
Date:               Thu, 09 May 2024   AIC                     -620.225
Time:               22:51:08           BIC                     -616.656
Sample:             0                  HQIC                    -618.901
                  - 46
Covariance Type:    opg
=====
              coef    std err          z      P>|z|      [0.025    0.975]
-----
ma.L1          -0.4274     0.107     -3.988     0.000     -0.637    -0.217
sigma2         3.931e-08   7.1e-09     5.539     0.000     2.54e-08   5.32e-08
=====
Ljung-Box (L1) (Q):                1.65   Jarque-Bera (JB):                1.38
Prob(Q):                           0.20   Prob(JB):                      0.50
Heteroskedasticity (H):             0.14   Skew:                          0.36
Prob(H) (two-sided):               0.00   Kurtosis:                      3.49
=====

```

Рисунок 10. Модель ARIMA для прогнозирования процентного прироста оттока населения Земли

Модель ARIMA(0,2,1) на рисунке 9 имеет наименьший AIC со значением -612,358, значимые коэффициенты, т.к все значения $P > |z|$ меньше 0,05, стационарные нормально распределенные и не гетероскедастичные

остатки, что подтверждается различными тестами и дополнительным анализом графиков. Модель ARIMA(1,2,0) на рисунке 10 также выбрана по наименьшему AIC, имеет значимые коэффициенты, стационарные и нормально распределенные остатки. Но тест Уайта указывает на гетероскедастичные остатки, о чем свидетельствует параметр $Prob(H) = 0,00 < 0,05$. Остатки обеих моделей случайны и не коррелируют между собой. Критерий Дикки-Фуллера дает р-значение меньше 0,05 в обоих случаях, что означает стационарность остатков.

Можно заметить, что с 2057 г. значение процентного прироста $\tilde{r}_{BNM}(t)$ становится отрицательным. Как уже было сказано ранее, такого быть не может. Этот результат может быть связан с довольно большим горизонтом прогнозирования и быстрым убыванием параметра. Поэтому, прогноз с 2057 г. нельзя рассматривать как возможный. Из полученных результатов видно, что значения характеристики динамического баланса $\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$ и $\tilde{\theta}(t)$ совпадают почти во все рассматриваемые года. Такая точность параметров позволяет делать предположение о надежности данного прогноза как минимум до 2057 г.

Выводы

В данной работе рассмотрена задача построения численности населения Земли и стран Азии: Китая и Индии на основе балансовой модели эпидемии. Прогнозирование параметров модели производилось двумя методами:

1. С помощью анализа линейных трендов рядов процентных приростов интегральных рядов
2. С помощью модели ARIMA

Отметим основные результаты прогнозов при помощи первого метода:

- Население Земли достигнет своего максимума в 2060 г. и будет составлять 9,442 млрд. человек.
- В 2050 г. численность населения Земли достигнет значения 9.318 млрд.
- В 2061 г. смертность на Земле впервые превысит рождаемость.
- Население Китая по прогнозу увеличится на 344 млн. за 18 лет и достигнет пика своего значения в 2039 г. на уровне 1.460 млрд.
- После 2039 г. численность населения в Китае начнет падать и к 2062 г. составит 1,384 млрд., что примерно соответствует уровню численности на 2025 г.
- В 2057 г., согласно прогнозу, численность населения в Индии станет наибольшей, ее значение достигнет 1,662 млрд. человек.

Основные результаты прогнозов при помощи модели ARIMA:

- Численность населения Индии станет наибольшей в 2035 г. и составит 1,497 млрд., после чего начнет снижаться и опустится на уровень 1,2 млрд в 2055 г.
- Согласно прогнозу второй рассматриваемой модели, численность населения Земли достигнет максимума в 8,777 млрд. человек в 2043 г.
- В 2062 г. значение численности населения опустится от максимального в 2043 г. на 922 млн. и составит 7,854 млрд., что соответствует уровню численности в 2021 г.

- Максимум численности населения в Китае по данным статистики до 2021 г. будет достигнут в 2023 г.

Оценка построенных прогнозов происходила по анализу полученной и прогнозируемой траектории характеристики динамического баланса, построенной на основе выбранных трендов процентных приростов интегральных объемов притока и оттока. Для метода анализа линейных трендов два из трех прогнозов можно считать хорошими. Для модели ARIMA всего один прогноз оказался успешен.

Заключение

В данной работе рассмотрена задача прогнозирования численности населения Земли, Китая и Индии до 2062 г. на основе балансовой модели эпидемии. Все задачи исследования выполнены в полном объеме.

С помощью различных методов прогнозирования интегральных рядов притока и оттока, таких как линейный тренд и авторегрессионная модель скользящего среднего ARIMA, были получены численные результаты стохастических параметров Земли и стран, а также проведена оценка полученных прогнозов, с помощью характеристики динамического баланса.

Список литературы

1. Yuan X, Wu CP, Li JM, Wang GX, Gui SX. Sixty-year's of Population of New China. Population Research. 2009;(05):42–67. (in Chinese).
2. Wang GX. Fertility Decline and the Effects of China's Family Planning Policy. Social Sciences in Nanjing. 2012;(10):66–70. (in Chinese)
3. Wei Y, Huang C, Li J, Xie L. An evaluation model for urban carrying capacity: A case study of China's mega-cities. Habitat International. 2016; 53:87–96. <https://doi.org/10.1016/j.habitatint.2015.10.025>
4. Wei Y, Cui H, Lam PTI, Yuan Z. Sustainable urban development: A review on urban carrying capacity assessment. Habitat International. 2015; 46:64–71. <https://doi.org/10.1016/j.habitatint.2014.10.015>
5. Meng LG, Li CL, Hu G. Predictions of China's Population Structure Based on the PDF Model. China Population, Resources and Environment. 2014;(02):132–41. (in Chinese).
6. Programme UND. India, Human Development Reports 2017 [cited 2017 July 7]. Available from: <http://hdr.undp.org/en/countries/profiles/IND>.
7. United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division. World Population Prospects 2022: Methodology of the United Nations population estimates and projections. UN DESA/POP/2022/TR/NO. 4, <https://population.un.org/wpp/>
8. Preston S. H., Heuveline P., Guillot M. Demography: measuring and modeling population processes. // Blackwell Publishing Ltd. 2001. 306 p
9. Donella M.H. et al. Limits of growth. // Universe Books. 1972. 205 p.
10. Foerster H. von, Mora P., Amlot L. Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026 // Science. 1960. V. 132. P. 1291–1295.
11. Марчук Г.И. Избранные труды: Математическое моделирование в иммунологии и медицине, т. 4 // Российская академия наук, Институт вычислительной математики. [отв. ред. Г.А. Бочаров]. М: РАН, 2018. 650 с.

12. Романюха А.А. Математические модели в иммунологии и эпидемиологии инфекционных заболеваний. М.: Лабораторий знаний, 2020. 296 с.
13. Захаров В. В., Балыкина Ю. Е. Балансовая модель эпидемии COVID-19 на основе процентного прироста // Информатика и автоматизация. 2021. № 5(20). С. 1034–1065.
14. Zaharov V., Balykina Y., Ilin I., Tick A. Forecasting a New Type of Virus Spread: A Case Study of COVID-19 with Stochastic Parameters // Mathematics. 2022. V. 10. P. 3725.
15. Капица С. П. Феноменологическая теория роста населения Земли // УФН. 1996. Т. 166. № 1. 63–80 с.
16. Захаров В. В. Принцип динамического баланса демографического процесса и пределы роста населения Земли. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 513. № 1. 108-114 с.
17. Li WZ. Analysis of the Population Problem in Vietnam. SOUTHEAST ASIAN STUDIES. 2000;(4):12–6. (in Chinese).
18. Meng LG, Hu G. Study on the Demographic Dividend Model of Southeast Asian Countries. Southeast Asian Studies. 2013;(03):31–40. (in Chinese).
19. Chen N, Lin ZJ, Wang QM, Zhu HC. The forecast on the population spatial distribution pattern based on the grey theory. Economic Geography. 2006; 26(5):759–62. (in Chinese).
20. Li YF, Lu Q, Zhou CH. The prediction of Beijing floating population in 2010. Geographical Research. 2006;(01):131–40. (in Chinese).
21. Ren Q, Hou DD. Stochastic Model for Population Forecast: Based on Leslie Matrix and ARMA Model. Population Research. 2011;(02):28–42. (in Chinese).
22. Wang ZM, Pan H. Application of Grey System Model in Population Forecast in China. Statistics and Decision. 2005;(01):19. (in Chinese).

- 23.Zhang HF, Yang P, LI CH, Zhou Q, Gao LW, Chen Q. Population prediction of Xining City based on multi-models. *Arid Land Geography*. 2013;(05):955–62. (in Chinese).
- 24.Billari FC, Graziani R, Melilli E. Stochastic population forecasting based on combinations of expert evaluations within the Bayesian paradigm. *Demography*. 2014; 51(5):1933–54. <https://doi.org/10.1007/s13524-014-0318-5> PMID: 25124024
- 25.Su CG. The Future Population Forecasting in Hunan Province and the Development Trend Analysis. *Economic Geography*. 2014;(07):20–7. (in Chinese).
- 26.Wilson T. Evaluation of alternative cohort-component models for local area population forecasts. *Population Research and Policy Review*. 2016; 35(2):241–61.
- 27.Ballard KP, Wendling RM. The national-regional impact evaluation system: a spatial model of US economic and demographic activity. *Journal of Regional Science*. 1980; 20(2):143–58. PMID: 12263178
- 28.Plaut TR. An econometric model for forecasting regional population growth. *International Regional Science Review*. 1981; 6(1):53–70. PMID: 12312182

Приложение

Приложение 1. Статистические данные Китая

Таблица 13. Статистические данные Китая с 1950 по 2021 г.

Год	$N(t)$	$BNM(t)$	$DNM(t)$	$IntBNM(t)$	$IntDNM(t)$	$r_{BNM}(t)$	$r_{DNM}(t)$	$\theta(t)$
1950	539190005	22350731	12772271	22350731	12772271			
1951	548768461	22197814	12506768	44548545	25279039	99,32%	97,92%	0
1952	558459515	25480190	12490167	70028735	37769206	57,20%	49,41%	1
1953	571449530	24151009	12292704	94179744	50061910	34,49%	32,55%	1
1954	583307835	25426945	12170609	119606689	62232519	27,00%	24,31%	2
1955	596564173	25708735	12196784	145315424	74429303	21,49%	19,60%	2
1956	610076120	24379882	11966086	169695306	86395389	16,78%	16,08%	3
1957	622489923	27011624	11985425	196706930	98380814	15,92%	13,87%	3
1958	637516126	24301954	11751036	221008884	110131850	12,35%	11,94%	4
1959	650067035	20457256	16232942	241466140	126364792	9,26%	14,74%	4
1960	654291352	19490632	19731954	260956772	146096746	8,07%	15,62%	4
1961	654050032	17152672	14731976	278109444	160828722	6,57%	10,08%	5
1962	656470729	26932558	10644708	305042002	171473430	9,68%	6,62%	5
1963	672758570	33567340	11277381	338609342	182750811	11,00%	6,58%	6
1964	695048544	30215170	11124708	368824512	193875519	8,92%	6,09%	7
1965	714138999	30282564	10867862	399107076	204743381	8,21%	5,61%	7
1966	733553699	29388140	10598458	428495216	215341839	7,36%	5,18%	8
1967	752343382	27588921	10263176	456084137	225605015	6,44%	4,77%	8
1968	769669139	31678219	10272569	487762356	235877584	6,95%	4,55%	9
1969	791074773	30923151	10210757	518685507	246088341	6,34%	4,33%	9
1970	811787180	31541150	10046600	550226657	256134941	6,08%	4,08%	10
1971	833281720	29749961	9742558	579976618	265877499	5,41%	3,80%	10
1972	853289127	28553437	9450892	608530055	275328391	4,92%	3,55%	11
1973	872391679	27608339	9087536	636138394	284415927	4,54%	3,30%	11
1974	890912481	25654251	8743930	661792645	293159857	4,03%	3,07%	12
1975	907822798	22960535	8356806	684753180	301516663	3,47%	2,85%	13
1976	922426524	21882372	7983574	706635552	309500237	3,20%	2,65%	13
1977	936325323	20207974	7695951	726843526	317196188	2,86%	2,49%	14
1978	948837342	20144421	7541225	746987947	324737413	2,77%	2,38%	15
1979	961440543	21194207	7477351	768182154	332214764	2,84%	2,30%	16
1980	975157395	21891113	7460972	790073267	339675736	2,85%	2,25%	16
1981	989587537	22796182	7452253	812869449	347127989	2,89%	2,19%	17
1982	1004931467	24611652	7508250	837481101	354636239	3,03%	2,16%	18
1983	1022034864	21818526	7434444	859299627	362070683	2,61%	2,10%	19
1984	1036418949	22980371	7473884	882279998	369544567	2,67%	2,06%	19
1985	1051925445	24192240	7563169	906472238	377107736	2,74%	2,05%	20
1986	1068554513	26128159	7696132	932600397	384803868	2,88%	2,04%	21
1987	1086986534	27628409	7897795	960228806	392701663	2,96%	2,05%	22
1988	1106717151	26390996	8045696	986619802	400747359	2,75%	2,05%	22
1989	1125062453	27195685	8491138	1013815487	409238497	2,76%	2,12%	23

1990	1143766993	28202492	8327975	1042017979	417566472	2,78%	2,03%	24
1991	1163641512	22736392	8767083	1064754371	426333555	2,18%	2,10%	25
1992	1177610829	21083903	8678782	1085838274	435012337	1,98%	2,04%	25
1993	1190015949	20132480	8453270	1105970754	443465607	1,85%	1,94%	26
1994	1201695166	19397587	8214575	1125368341	451680182	1,75%	1,85%	27
1995	1212878184	18826919	8294435	1144195260	459974617	1,67%	1,84%	27
1996	1223410668	18083906	8307567	1162279166	468282184	1,58%	1,81%	28
1997	1233187003	17482506	8253629	1179761672	476535813	1,50%	1,76%	29
1998	1242415893	16978997	8138574	1196740669	484674387	1,44%	1,71%	30
1999	1251256317	16689598	8335753	1213430267	493010140	1,39%	1,72%	30
2000	1259610155	17394901	8417084	1230825168	501427224	1,43%	1,71%	31
2001	1268587983	16472561	8169355	1247297729	509596579	1,34%	1,63%	32
2002	1276891180	16315491	8245618	1263613220	517842197	1,31%	1,62%	33
2003	1284961061	16210272	8385653	1279823492	526227850	1,28%	1,62%	33
2004	1292785672	16482670	8420601	1296306162	534648451	1,29%	1,60%	34
2005	1300847750	16663108	8583481	1312969270	543231932	1,29%	1,61%	35
2006	1308927373	16933400	8615008	1329902670	551846940	1,29%	1,59%	35
2007	1317245762	17286419	8751491	1347189089	560598431	1,30%	1,59%	36
2008	1325780685	17787573	9014661	1364976662	569613092	1,32%	1,61%	37
2009	1334553612	18085283	8941302	1383061945	578554394	1,32%	1,57%	38
2010	1343697578	17941969	8954400	1401003914	587508794	1,30%	1,55%	38
2011	1352685158	17826962	9006318	1418830876	596515112	1,27%	1,53%	39
2012	1361505803	19235424	9125394	1438066300	605640506	1,36%	1,53%	40
2013	1371615833	18255844	9286893	1456322144	614927399	1,27%	1,53%	40
2014	1380584782	18711604	9501832	1475033748	624429231	1,28%	1,55%	41
2015	1389794555	17446888	9605107	1492480636	634034338	1,18%	1,54%	42
2016	1397636342	18283156	9776470	1510763792	643810808	1,23%	1,54%	42
2017	1406143019	18427645	10161776	1529191437	653972584	1,22%	1,58%	43
2018	1414408894	15504679	10183525	1544696116	664156109	1,01%	1,56%	43
2019	1419730043	14633834	10365854	1559329950	674521963	0,95%	1,56%	44
2020	1423998019	12243398	10379881	1571573348	684901844	0,79%	1,54%	44
2021	1425861543	10881567	10817722	1582454915	695719566	0,69%	1,58%	45

Приложение 2. Прогноз численности населения Индии с помощью линейных трендов

Таблица 14. Прогноз демографических показателей Индии на основе линейных трендов с 2022 по 2062 г.

Год	$\tilde{N}(t)$	$IntB\tilde{N}M(t)$	$IntD\tilde{N}M(t)$	$\tilde{r}_{BNM}(t)$	$\tilde{r}_{DNM}(t)$	$\tilde{\theta}(t)$	$\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$
2022	1412319822	1760637770	689055444,8	1,31%	1,54%	40	40
2023	1424686601	1783490507	699597889,1	1,30%	1,53%	40	40
2024	1436996894	1806193996	710201688,7	1,27%	1,52%	41	41
2025	1449096584	1828734948	720864752,5	1,25%	1,50%	41	41
2026	1460974471	1851100022	731584932,4	1,22%	1,49%	42	42
2027	1472619366	1873275842	742360022,9	1,20%	1,47%	43	43
2028	1484020096	1895249006	753187762,1	1,17%	1,46%	43	43
2029	1495165519	1917006097	764065831,6	1,15%	1,44%	44	44

2030	1506044542	1938533705	774991857,7	1,12%	1,43%	44	44
2031	1516646123	1959818430	785963411,1	1,10%	1,42%	45	45
2032	1526959295	1980846902	796978008,3	1,07%	1,40%	46	46
2033	1536973170	2001605794	808033111,5	1,05%	1,39%	46	46
2034	1546676959	2022081834	819126129,9	1,02%	1,37%	47	47
2035	1556059980	2042261819	830254419,8	1,00%	1,36%	47	47
2036	1565111676	2062132632	841415286	0,97%	1,34%	48	48
2037	1573821622	2081681250	852605982,3	0,95%	1,33%	49	48
2038	1582179544	2100894765	863823712,4	0,92%	1,32%	49	49
2039	1590175329	2119760393	875065630,6	0,90%	1,30%	50	50
2040	1597799039	2138265491	886328843,2	0,87%	1,29%	50	50
2041	1605040924	2156397569	897610409,5	0,85%	1,27%	51	51
2042	1611891435	2174144304	908907342,1	0,82%	1,26%	52	51
2043	1618341237	2191493554	920216609,1	0,80%	1,24%	52	52
2044	1624381221	2208433375	931535134,5	0,77%	1,23%	53	53
2045	1630002517	2224952030	942859799,6	0,75%	1,22%	53	53
2046	1635196506	2241038002	954187444,3	0,72%	1,20%	54	54
2047	1639954834	2256680014	965514868,4	0,70%	1,19%	55	54
2048	1644269421	2271867033	976838832,8	0,67%	1,17%	55	55
2049	1648132477	2286588292	988156061	0,65%	1,16%	56	56
2050	1651536507	2300833295	999463240,4	0,62%	1,14%	56	56
2051	1654474330	2314591832	1010757024	0,60%	1,13%	57	57
2052	1656939084	2327853996	1022034032	0,57%	1,12%	58	57
2053	1658924239	2340610185	1033290853	0,55%	1,10%	58	58
2054	1660423608	2352851123	1044524044	0,52%	1,09%	59	59
2055	1661431355	2364567866	1055730138	0,50%	1,07%	59	59
2056	1661942005	2375751815	1066905636	0,47%	1,06%	60	60
2057	1661950455	2386394723	1078047018	0,45%	1,04%	61	60
2058	1661451981	2396488711	1089150740	0,42%	1,03%	61	61
2059	1660442247	2406026272	1100213235	0,40%	1,02%	62	62
2060	1658917313	2415000285	1111230918	0,37%	1,00%	62	62
2061	1656873642	2423404018	1122200187	0,35%	0,99%	63	63
2062	1654308107	2431231144	1133117423	0,32%	0,97%	64	64

Приложение 3. Прогноз численности населения Индии с помощью модели ARIMA

Таблица 15. Прогноз демографических показателей Индии на основе модели ARIMA с 2022 по 2062 г.

Год	$\tilde{N}(t)$	$IntB\tilde{N}M(t)$	$IntD\tilde{N}M(t)$	$\tilde{r}_{BNM}(t)$	$\tilde{r}_{DNM}(t)$	$\tilde{\theta}(t)$	$\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$
2022	1412319822	1760542208	689597655,1	1,31%	1,62%	40	40
2023	1424048829	1782906655	700974920,2	1,27%	1,65%	40	40
2024	1435036011	1804862856	712719806,7	1,23%	1,68	41	41
2025	1445247325	1826388573	724844408,6	1,19%	1,70%	41	41
2026	1454648440	1847461786	737361312,1	1,15%	1,73%	42	42
2027	1463204750	1868060733	750283616	1,11%	1,75%	43	42
2028	1470881393	1888163942	763624954,4	1,08%	1,78%	43	43
2029	1477643263	1907750274	777399519,4	1,04%	1,80%	44	43
2030	1483455030	1926798954	791622085,2	1,00%	1,83%	44	44

2031	1488281144	1945289611	806308034,1	0,96%	1,86%	45	44
2032	1492085853	1963202312	821473382,1	0,92%	1,88%	46	45
2033	1494833206	1980517600	837134807,9	0,88%	1,91%	46	45
2034	1496487068	1997216525	853309681,2	0,84%	1,93%	47	45
2035	1497011120	2013280682	870016094	0,80%	1,96%	47	46
2036	1496368864	2028692242	887272892,4	0,77%	1,98%	48	46
2037	1494523626	2043433987	905099710,2	0,73%	2,01%	49	47
2038	1491438553	2057489341	923517005	0,69%	2,03%	49	47
2039	1487076612	2070842400	942546094,5	0,65%	2,06%	50	47
2040	1481400581	2083477962	962209195,8	0,61%	2,09%	50	48
2041	1474373042	2095381558	982529466,4	0,57%	2,11%	51	48
2042	1465956367	2106539476	1003531047	0,53%	2,14%	52	48
2043	1456112705	2116938791	1025239106	0,49%	2,16%	52	48
2044	1444803961	2126567386	1047679888	0,45%	2,19%	53	49
2045	1431991774	2135413979	1070880762	0,42%	2,21%	53	49
2046	1417637492	2143468141	1094870276	0,38%	2,24%	54	49
2047	1401702141	2150720322	1119678208	0,34%	2,27%	55	49
2048	1384146390	2157161863	1145335627	0,30%	2,29%	55	49
2049	1364930513	2162785020	1171874950	0,26%	2,32%	56	49
2050	1344014346	2167582974	1199330011	0,22%	2,34%	56	49
2051	1321357239	2171549848	1227736122	0,18%	2,37%	57	49
2052	1296918002	2174680717	1257130147	0,14%	2,39%	58	49
2053	1270654846	2176971619	1287550571	0,11%	2,42%	58	49
2054	1242525324	2178419565	1319037586	0,07%	2,45%	59	49
2055	1212486256	2179022542	1351633163	0,03%	2,47%	59	49
2056	1180493655	2178779519	1385381145	-0,01%	2,50%	60	49
2057	1146502650	2177690451	1420327333	-0,05%	2,52%	61	48
2058	1110467394	2175756278	1456519583	-0,09%	2,55%	61	48
2059	1072340971	2172978925	1494007906	-0,13%	2,57%	62	47
2060	1032075296	2169361298	1532844571	-0,17%	2,60%	62	47
2061	989621003,3	2164907279	1573084218	-0,21%	2,63%	63	46
2062	944927336,8	2159621719	1614783974	-0,24%	2,65%	64	46

Приложение 4. Прогноз численности населения Китая с помощью линейных трендов

Таблица 16. Прогноз демографических показателей Китая на основе линейных трендов с 2022 по 2062 г.

Год	$\tilde{N}(t)$	$IntB\tilde{N}M(t)$	$IntD\tilde{N}M(t)$	$\tilde{r}_{BNM}(t)$	$\tilde{r}_{DNM}(t)$	$\tilde{\theta}(t)$	$\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$
2022	1425925354	1597182718	706615386,5	0,93%	1,57%	45	46
2023	1429757337	1611781395	717587633,6	0,91%	1,55%	46	46
2024	1433383767	1626244878	728634578,1	0,90%	1,54%	46	46
2025	1436800304	1640567109	739754434,2	0,88%	1,53%	47	47
2026	1440002680	1654742047	750945359	0,86%	1,51%	47	47
2027	1442986693	1668763670	762205452,9	0,85%	1,50%	48	48
2028	1445748222	1682625980	773532759,5	0,83%	1,49%	48	48
2029	1448283225	1696323005	784925266	0,81%	1,47%	49	49
2030	1450587744	1709848807	796380903,4	0,80%	1,46%	49	49
2031	1452657908	1723197483	807897546,7	0,78%	1,45%	50	50

2032	1454489942	1736363173	819473015,1	0,76%	1,43%	50	50
2033	1456080163	1749340058	831105072,5	0,75%	1,42%	51	51
2034	1457424990	1762122370	842791427,7	0,73%	1,41%	51	51
2035	1458520947	1774704394	854529735,3	0,71%	1,39%	52	52
2036	1459364664	1787080474	866317595,4	0,70%	1,38%	52	52
2037	1459952883	1799245013	878152554,8	0,68%	1,37%	53	53
2038	1460282463	1811192480	890032107,3	0,66%	1,35%	53	53
2039	1460350378	1822917417	901953694,1	0,65%	1,34%	54	54
2040	1460153728	1834414437	913914704,8	0,63%	1,33%	54	54
2041	1459689737	1845678231	925912477,9	0,61%	1,31%	55	55
2042	1458955759	1856703576	937944301,4	0,60%	1,30%	55	55
2043	1457949280	1867485331	950007413,9	0,58%	1,29%	56	56
2044	1456667922	1878018447	962099005,2	0,56%	1,27%	56	56
2045	1455109447	1888297970	974216217,1	0,55%	1,26%	57	57
2046	1453271758	1898319043	986356144,4	0,53%	1,25%	57	58
2047	1451152903	1908076910	998515835,9	0,51%	1,23%	58	58
2048	1448751079	1917566922	1010692295	0,50%	1,22%	58	59
2049	1446064632	1926784540	1022882482	0,48%	1,21%	59	59
2050	1443092062	1935725335	1035083314	0,46%	1,19%	59	60
2051	1439832026	1944384997	1047291664	0,45%	1,18%	60	60
2052	1436283338	1952759334	1059504367	0,43%	1,17%	60	61
2053	1432444972	1960844280	1071718219	0,41%	1,15%	61	61
2054	1428316066	1968635892	1083929974	0,40%	1,14%	61	62
2055	1423895922	1976130358	1096136353	0,38%	1,13%	62	62
2056	1419184010	1983324001	1108334040	0,36%	1,11%	62	62
2057	1414179966	1990213276	1120519683	0,35%	1,10%	63	63
2058	1408883599	1996794780	1132689899	0,33%	1,09%	63	63
2059	1403294886	2003065249	1144841273	0,31%	1,07%	64	63
2060	1397413981	2009021565	1156970361	0,30%	1,06%	64	64
2061	1391241210	2014660756	1169073688	0,28%	1,05%	65	64
2062	1384777073	2019979999	1181147754	0,26%	1,03%	65	64

Приложение 5. Прогноз численности населения Китая с помощью модели ARIMA

Таблица 17. Прогноз демографических показателей Китая на основе модели ARIMA с 2022 по 2062 г.

Год	$\tilde{N}(t)$	$IntB\tilde{N}M(t)$	$IntD\tilde{N}M(t)$	$\tilde{r}_{BNM}(t)$	$\tilde{r}_{DNM}(t)$	$\tilde{\theta}(t)$	$\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$
2022	1425925354	1593746861	706256495,5	0,71%	1,51%	45	46
2023	1426680370	1603877383	716867891,4	0,64%	1,50%	46	46
2024	1426199497	1612822405	727539432,2	0,56%	1,49%	46	46
2025	1424472978	1620560449	738275808,8	0,48%	1,48%	47	47
2026	1421474645	1627072723	749071684,3	0,40%	1,46%	47	47
2027	1417191044	1632343197	759926887,7	0,32%	1,45%	48	48
2028	1411606314	1636358665	770838466,1	0,25%	1,44%	48	48
2029	1404710204	1639108805	781804842,1	0,17%	1,42%	49	49
2030	1396493968	1640586216	792823640,1	0,09%	1,41%	49	49
2031	1386952581	1640786457	803892823,7	0,01%	1,40%	50	50

2032	1376083639	1639708066	815010101,4	-0,07%	1,38%	50	50
2033	1363887969	1637352566	826173238	-0,14%	1,37%	51	51
2034	1350369333	1633724468	837379892,8	-0,22%	1,36%	51	52
2035	1335534580	1628831256	848627704,6	-0,30%	1,34%	52	52
2036	1319393556	1622683358	859914248,2	-0,38%	1,33%	52	52
2037	1301959115	1615294116	871237058,2	-0,46%	1,32%	53	53
2038	1283247063	1606679730	882593617,5	-0,53%	1,30%	53	53
2039	1263276118	1596859207	893981364,3	-0,61%	1,29%	54	54
2040	1242067848	1585854285	905397689,4	-0,69%	1,28%	54	55
2041	1219646601	1573689356	916839939,2	-0,77%	1,26%	55	55
2042	1196039422	1560391373	928305414,7	-0,85%	1,25%	55	56
2043	1171275963	1545989755	939791374	-0,92%	1,24%	56	56
2044	1145388386	1530516274	951295031,8	-1,00%	1,22%	56	57
2045	1118411247	1514004939	962813561,2	-1,08%	1,21%	57	57
2046	1090381383	1496491872	974344094,4	-1,16%	1,20%	57	58
2047	1061337783	1478015177	985883723,8	-1,23%	1,18%	58	59
2048	1031321458	1458614796	997429502,9	-1,31%	1,17%	58	59
2049	1000375299	1438332373	1008978447	-1,39%	1,16%	59	60
2050	968543930,5	1417211096	1020527537	-1,47%	1,14%	59	60
2051	935873564,4	1395295549	1032073714	-1,55%	1,13%	60	61
2052	902411840,4	1372631554	1043613889	-1,62%	1,12%	60	61
2053	868207669,8	1349266008	1055144939	-1,70%	1,10%	61	62
2054	833311074	1325246724	1066663708	-1,78%	1,09%	61	62
2055	797773020,8	1300622266	1078167010	-1,86%	1,08%	62	63
2056	761645260,4	1275441787	1089651632	-1,94%	1,07%	62	63
2057	724980160	1249754864	1101114330	-2,01%	1,05%	63	64
2058	687830539,3	1223611338	1112551836	-2,09%	1,04%	63	64
2059	650249507,5	1197061152	1123960856	-2,17%	1,03%	64	65
2060	612290300,6	1170154193	1135338075	-2,25%	1,01%	64	65
2061	574006123,3	1142940140	1146680152	-2,33%	1,00%	65	-1
2062	535449992,3	1115468310	1157983731	-2,40%	0,99%	65	-1

Приложение 6. Прогноз численности населения Земли с помощью линейных трендов

Таблица 18. Прогноз демографических показателей Земли на основе линейных трендов с 2022 по 2062 г.

Год	$\tilde{N}(t)$	$IntB\tilde{N}M(t)$	$IntD\tilde{N}M(t)$	$\tilde{r}_{BNM}(t)$	$\tilde{r}_{DNM}(t)$	$\tilde{\theta}(t)$	$\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$
2022	7984981503	9253733793	3725701858	1,47%	1,92%	40	40
2023	8049001517	9388004687	3796709799	1,45%	1,91%	40	40
2024	8112264470	9522346240	3868596487	1,43%	1,89%	41	41
2025	8174719334	9656705739	3941360700	1,41%	1,88%	41	41
2026	8236314621	9791029699	4015000860	1,39%	1,87%	42	42
2027	8296998421	9925263887	4089515034	1,37%	1,86%	42	42
2028	8356718435	10059353362	4164900923	1,35%	1,84%	43	42
2029	8415422022	10193242504	4241155858	1,33%	1,83%	43	43
2030	8473056228	10326875051	4318276796	1,31%	1,82%	44	43

2031	8529567836	10460194134	4396260313	1,29%	1,81%	44	44
2032	8584903403	10593142316	4475102596	1,27%	1,79%	45	44
2033	8639009301	10725661629	4554799445	1,25%	1,78%	45	45
2034	8691831766	10857693616	4635346261	1,23%	1,77%	46	45
2035	8743316937	10989179367	4716738044	1,21%	1,76%	46	46
2036	8793410905	11120059563	4798969388	1,19%	1,74%	47	46
2037	8842059757	11250274519	4882034477	1,17%	1,73%	47	46
2038	8889209624	11379764227	4965927082	1,15%	1,72%	48	47
2039	8934806727	11508468397	5050640551	1,13%	1,71%	48	47
2040	8978797428	11636326507	5136167812	1,11%	1,69%	49	47
2041	9021128277	11763277844	5222501366	1,09%	1,68%	49	48
2042	9061746060	11889261554	5309633283	1,07%	1,67%	50	48
2043	9100597853	12014216687	5397555201	1,05%	1,66%	50	49
2044	9137631068	12138082244	5486258317	1,03%	1,64%	51	49
2045	9172793509	12260797228	5575733394	1,01%	1,63%	51	49
2046	9206033416	12382300691	5665970748	0,99%	1,62%	52	50
2047	9237299525	12502531783	5756960251	0,97%	1,61%	52	50
2048	9266541113	12621429802	5848691330	0,95%	1,59%	53	50
2049	9293708054	12738934245	5941152960	0,93%	1,58%	53	50
2050	9318750866	12854984858	6034333667	0,91%	1,57%	54	51
2051	9341620772	12969521685	6128221523	0,89%	1,56%	54	51
2052	9362269743	13082485121	6222804148	0,87%	1,54%	55	51
2053	9380650555	13193815962	6318068704	0,85%	1,53%	55	52
2054	9396716840	13303455456	6414001902	0,83%	1,52%	56	52
2055	9410423136	13411345354	6510589994	0,81%	1,51%	56	52
2056	9421724942	13517427960	6607818776	0,79%	1,49%	57	52
2057	9430578766	13621646186	6705673591	0,77%	1,48%	57	53
2058	9436942177	13723943596	6804139322	0,75%	1,47%	58	53
2059	9440773855	13824264462	6903200402	0,73%	1,46%	58	53
2060	9442033642	13922553812	7002840806	0,71%	1,44%	59	54
2061	9440682588	14018757480	7103044059	0,69%	1,43%	59	54
2062	9436683004	14112822157	7203793234	0,67%	1,42%	60	54

Приложение 7. Прогноз численности населения Земли с помощью модели ARIMA

Таблица 19. Прогноз демографических показателей Земли на основе модели ARIMA с 2022 по 2062 г.

Год	$\tilde{N}(t)$	$IntB\tilde{N}M(t)$	$IntD\tilde{N}M(t)$	$\tilde{r}_{BNM}(t)$	$\tilde{r}_{DNM}(t)$	$\tilde{\theta}(t)$	$\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_{DNM}(.))$
2022	7941686653	9251536442	3715331383	1,45%	1,63%	40	40
2023	8013879791	9381615835	3775604149	1,41%	1,62%	40	40
2024	8083686418	9509571682	3836385270	1,36%	1,61%	41	41
2025	8150861144	9635313353	3897667878	1,32%	1,60%	41	41
2026	8215320208	9758687284	3959444807	1,28%	1,58%	42	42
2027	8276917209	9879566353	4021708592	1,24%	1,57%	42	42
2028	8335532493	9997814738	4084451466	1,20%	1,56%	43	43
2029	8391038004	10113302202	4147665362	1,16%	1,55%	43	44

2030	8443311572	10225898756	4211341908	1,11%	1,54%	44	44
2031	8492231580	10335477113	4275472431	1,07%	1,52%	44	45
2032	8537679414	10441912046	4340047953	1,03%	1,51%	45	45
2033	8579538825	10545080973	4405059192	0,99%	1,50%	45	46
2034	8617696513	10644864053	4470496564	0,95%	1,49%	46	46
2035	8652042220	10741144468	4536350180	0,90%	1,47%	46	47
2036	8682469020	10833808631	4602609847	0,86%	1,46%	47	47
2037	8708873516	10922746414	4669265071	0,82%	1,45%	47	48
2038	8731156075	11007851362	4736305053	0,78%	1,44%	48	48
2039	8749221041	11089020906	4803718696	0,74%	1,42%	48	49
2040	8762976942	11166156566	4871494601	0,70%	1,41%	49	49
2041	8772336697	11239164151	4939621070	0,65%	1,40%	49	50
2042	8777217812	11307953947	5008086109	0,61%	1,39%	50	50
2043	8777542570	11372440905	5076877428	0,57%	1,37%	50	51
2044	8773238209	11432544809	5145982442	0,53%	1,36%	51	51
2045	8764237099	11488190449	5215388277	0,49%	1,35%	51	52
2046	8750476904	11539307770	5285081769	0,44%	1,34%	52	52
2047	8731900733	11585832023	5355049467	0,40%	1,32%	52	53
2048	8708457289	11627703901	5425277635	0,36%	1,31%	53	53
2049	8680100997	11664869661	5495752261	0,32%	1,30%	53	54
2050	8646792133	11697281245	5566459049	0,28%	1,29%	54	54
2051	8608496927	11724896376	5637383435	0,24%	1,27%	54	55
2052	8565187673	11747678655	5708510581	0,19%	1,26%	55	55
2053	8516842806	11765597638	5779825384	0,15%	1,25%	55	56
2054	8463446986	11778628904	5851312477	0,11%	1,24%	56	56
2055	8404991159	11786754110	5922956237	0,07%	1,22%	56	57
2056	8341472606	11789961035	5994740786	0,03%	1,21%	57	57
2057	8272894981	11788243604	6066649997	-0,01%	1,20%	57	57
2058	8199268340	11781601915	6138667499	-0,06%	1,19%	58	58
2059	8120609148	11770042233	6210776685	-0,10%	1,17%	58	58
2060	8036940280	11753576987	6282960709	-0,14%	1,16%	59	59
2061	7948291009	11732224746	6355202503	-0,18%	1,15%	59	59
2062	7854696975	11706010188	6427484773	-0,22%	1,14%	60	60

Приложение 8. Часть кода обучения и выбора модели ARIMA

```

from tqdm import tqdm

import statsmodels.api as sm

from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA

from statsmodels.tsa.statespace.sarimax import SARIMAX

results = []

best_aic = float("inf")

for param in tqdm(parameters_list):

```

```

try:
    model=sm.tsa.statespace.SARIMAX(df.TPopulation1Jan, order=(param[0], d,
param[1]),
                                seasonal_order=(param[2], D, param[3], 0)).fit(dispatch=-1)
except ValueError:
    print('wrong parameters:', param)
    continue
aic = model.aic
if aic < best_aic:
    best_model = model
    best_aic = aic
    best_param = param
results.append([param, model.aic])
result_table = pd.DataFrame(results)
result_table.columns = ['parameters', 'aic']
print(result_table.sort_values(by = 'aic', ascending=True).head())

```