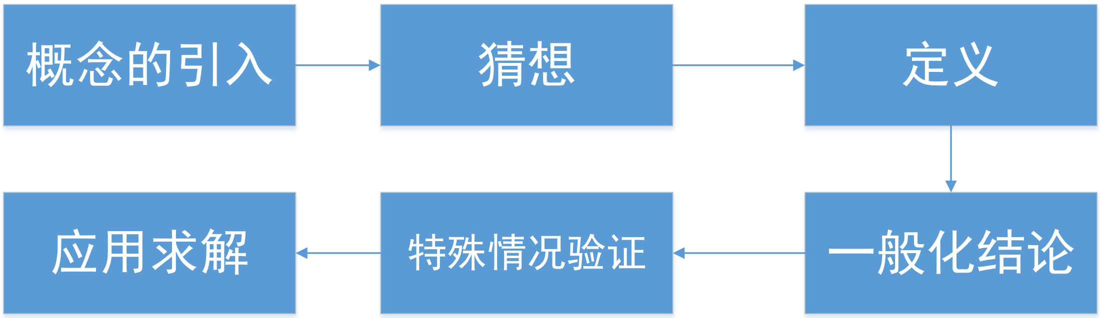
分数阶导数的计算

1. 研究步骤



2. 如何定义分数阶导数

2.1. 对分数阶导数的猜想

通过类比，分数阶导数应该是这样的形式$\frac{d^n y}{dx^n}$，其中 n 为分数。对这个问题的研究，可以从特殊到一般，所以先选择一个最为简单的分数阶导数形式$\dfrac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}$。那么如何得到这个形式呢？

按照在整数阶导数得到的经验，可以采取这样的对策。为了便于表示，设$\dfrac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}=u$。可以设定分数阶导数满足这样的形式：

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}u}{dx^{\frac{1}{2}}}=\frac{dy}{dx}$$

在这样的定义过程中，我发现自己的知识有很多问题。

2.1.1. 问题一：二阶导数$\dfrac{d^2 y}{dx^2}=y''$是怎样的概念，这样的表示方法是一个整体还是可以拆开来看的？

为了得到这个问题的答案，我找了一个例子：$y=x^2$。假设这样的二阶导数是可以拆开的，也就是dx^2可以乘过去。并且假设$d^2y=dy^2$。

到上面，我又发现了一个问题，就是自己的假设根本就是错误的。于是我明白了知识点一：$d^2y\neq dy^2\neq (dy)^2$，并且d^2y的写法是不存在的，因为$\frac{d^2y}{dx^2}$是一个整体。$\frac{d^2y}{dx^2}$含义是 y 关于 x 的二阶导数，dy^2含义是对y^2的微分，$(dy)^2$含义是 y 的微分的平方。

那么，问题一就得到了解决，二阶导数的记法是一个整体的概念，并不能拆开。

2.1.2. 问题二：找到这样的一个线性变换φ：

$$\varphi: F[x]\to F[x]$$

$$f(x)\to \frac{d^{\frac{1}{2}}f}{dx^{\frac{1}{2}}}$$

并且运算满足$\forall f(x)\in F[x]$，$\varphi\circ\varphi(f)=f'(x)$，**即对任意函数进行两次**$\varphi$**变换后得到**$f'(x)$**。**

我想到了两种可能的方案，一种是分析的方法，一种代数的方法。

第一种，分析的方法需要设$a=\frac{d^{\frac{1}{2}}f}{dx^{\frac{1}{2}}}$，然后对$a$进行$\varphi$变换即可得到$f'(x)$，对 a 进行$\varphi^{-1}$即可得到$f(x)$。这又涉及到一个问题，$\varphi$变换是否是可逆的？运用反证法，假设$\varphi$是可逆的，那么$\varphi\circ\varphi$一定也是可逆的，然而$f(x)\to f'(x)$的过程中维数降低了，这说明$\varphi\circ\varphi$并不可逆。很可惜，这条路走不通

第二种，代数的方法。我想到了将求导变换转换成矩阵形式。设$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{n-1}x^{n-1}$，$f(x)\in F[x]_n$，设求导变换 D 为：

$$D: F[x]_n\to F[x]_n$$
$$f(x)\to f'(x)$$

那么在基$1,x,\frac{x^2}{2!},\frac{x^3}{3!},\dots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$下，求基进行求导：

$$D(1,x,\frac{x^2}{2!},\frac{x^3}{3!},\dots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!})=(0,1,x,\frac{x^2}{2!},\dots,\frac{x^{n-2}}{(n-2)!})$$

表示成矩阵的形式：

$$D(1,x,\frac{x^2}{2!},\frac{x^3}{3!},\dots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!})=(1,x,\frac{x^2}{2!},\frac{x^3}{3!},\dots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!})\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

定义$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，那么只需要找到$B\in F^{n\times n}$，使$B^2=A$即可。

```
Command Window
>> A=[0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1;0 0 0 0];
>> sqrtm(A)
Warning: Matrix is singular and may not have a square root.
> In sqrtm (line 92)

ans =

     0   Inf   NaN   NaN
     0     0     0   NaN
     0     0     0   Inf
     0     0     0     0
```

在 Matlab 中以四阶矩阵为例进行运算，发现结果并不存在。又对不同阶矩阵进行运算，均未得到结果，说明猜想是错误的。

经过上述过程，可见分数阶导数的概念并非直观通俗的。在查找资料的过程中，发现分数阶导数也并没有一个明确的概念，而是不同数学家提出过不同的见解。为了理解这些见解，首先要了解几个概念。

2.2. G-L 型分数阶导数和 R-L 型分数阶微积分的定义

2.2.1. “分数”的概念：

从数学分类来看，分数阶微积分是数学分析的一个分支，或整体微积分的一个部分内容，当微分或积分的阶数为整数时，分数阶微积分就转化为经

典的微积分，从这一性质来说，分数阶微积分也可以看成是整数阶微积分的推广。实际上，将非整数阶微积分称之为“分数阶微积分”或“分数阶微积分演算”是一种不严格的命名，因为“分数”是一个不准确的 guilei1，严格地讲，它应该被称为“非整数阶微积分”或“非整数阶微积分演算”。但由于历史原因，“分数阶微积分”已成为习惯用法，所以还是这样称呼。

2.2.2. G-L 型分数阶导数的定义：

令函数 $u(t)$ 定义在区间 (a,b) 上，对任意的实数 μ， μ 的整数部分记为[μ]，若 $u(t)$ 在区间 $[a,t]$ 上存在 m+1 阶连续导数； $\mu > 0, m$ 至少取到[μ]；则次数为 $\mu(m \le \mu \le m+1)$ 的分数阶导数定义为

$$ {}_{\alpha}^{GL}D_t^{\mu}u(t) = \lim_{h\to 0} u_h^{(\mu)}(t) = \lim_{h\to 0^+, nh=t-\alpha} h^{-\mu}\sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix} -\mu \\ t \end{bmatrix} u(t-ih) $$

其中 $\begin{pmatrix} -\mu \\ i \end{pmatrix} = \dfrac{(-\mu)\bullet(-\mu+1)\bullet(-\mu+2)\bullet\ldots\bullet(-\mu+i-1)}{i!}$ 。

2.2.3. R-L 型分数阶微积分的定义：

积分： 设$\alpha \in R^+$如果$f(x) \in L^1(\mathrm{R}^+)$那么

$$ I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds $$

称为$f(x)$的α阶$Riemann-Liouville$分数阶积分。

微分： 设$\alpha \in R^+$，且满足$\mathrm{n}-1 \le \alpha < n$,其中$n \in N$.如果$f(x) \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}}(\mathrm{R})$,那么

$$ D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{\alpha-n+1}} dx $$

称为$f(x)$的α阶$Riemann-Liouville$分数阶导数。

2.3. G-L 型分数阶导数的推导过程

2.3.1. 整数阶导数的递推公式

在经典的微积分教程中，设 $u(t)$ 为连续函数，如果函数 $u(t)$ 的 n 阶导数存在，则 $u(t)$ 的一阶导数定义为

$$u'(t)=\frac{du(t)}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{u(t)-u(t-h)}{h}$$

$u(t)$ 的二阶导数定义为

$$u''(t)=(u'(t))'=\lim_{h\to 0}\frac{u'(t)-u'(t-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(t)-2u(t-h)-u(t-2h)}{h^2}$$

$u(t)$ 的三阶导数定义为

$$u'''(t)=(u''(t))'=\lim_{h\to 0}\frac{u''(t)-u''(t-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(t)-3u(t-h)+3u(t-2h)-u(t-3h)}{h^3}$$

以此类推，由数学归纳法可得到函数 $u(t)$ 关于 t 的 n $(n\in N)$（整数阶）导数为

$$u^{(n)}(t)=\frac{d^n u(t)}{dt^n}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}u(t-ih)$$

2.3.2. G-L 整数意义下的多重导数和积分形式

为了与参考书籍有区别，体现出个人的理解，本证明由个人完成，难免会有疏漏，希望见谅。

将整数阶微积分推广到分数阶微积分，其实思路并不复杂，就是将数域 N 或者 Z 推广即可。再简单一点，就是将公式中变量的域扩展，考虑一下实数域中的情况即可。

$$u^{(n)}(t)=\frac{d^n u(t)}{dt^n}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}u(t-ih)$$

这个式子中由 $n\in N$，可以看到其实也只有 $\sum_{i=0}^{n}$ 和 $\binom{n}{i}$ 这两个部分需要对 n 的数域进行推广。$\sum_{i=0}^{n}$ 的推广显然是推广到积分形式，但 $\binom{n}{i}$ 的推广似乎需要一些成熟的经验，这里直接利用参考书籍 (吴强、黄建华 2016)（这本书中 G-L 型分数阶微积分一节出现了很多错误，本论文已经对其修正）中的概念。

2.3.2.1. 组合数的推广

已知的组合数是 $\binom{n}{i}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-i+1)}{i!}$，其中 $0\le i\le n$，并且 $n,i\in N$。

首先将 n 扩展为任意整数 p（此时 i 仍为自然数），则当 p=-n 时，

$$\binom{-n}{i}=\frac{-n(-n-1)(-n-2)...(-n-i+1)}{i!}=(-1)^i\begin{bmatrix}n\\i\end{bmatrix}$$

其中$\begin{bmatrix}n\\i\end{bmatrix}\overset{def}{=}\frac{n(n+1)(n+2)...(n+i-1)}{i!}$，这个计算公式中，自然数 n 也可以扩展为负整数，且亦有$\binom{-n}{i}=(-1)^i\begin{bmatrix}n\\i\end{bmatrix}$。与组合数性质类似，对一些特殊情形，可以约定$\begin{bmatrix}0\\i\end{bmatrix}=0,\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\binom{0}{0}=1$。

那么，若$0<\mu\le n(\mu\in Z)$，则当$i>\mu$时，

$$\binom{\mu}{i}=\frac{\mu(\mu-1)\cdot\ldots\cdot1\cdot0\cdot\ldots\cdot(\mu-i+1)}{i!}=0=\begin{bmatrix}-\mu\\i\end{bmatrix}。$$

2.3.2.2. 将组合数引入 G-L 定义

有了以上组合数的概念，下面将其引入导数的定义。

以 p 为$u(t)$关于 t 的 p 阶导数。

当$0<p\le n(p\in Z)$时，注意到$\binom{p}{i}=\frac{p(p-1)\cdot\ldots\cdot1\cdot0\cdot\ldots\cdot(p-i+1)}{i!}=0=\begin{bmatrix}-p\\i\end{bmatrix}$

所以有：$u^{(p)}(t)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h^p}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}u(t-ih)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h^p}\sum_{i=0}^{p}\begin{bmatrix}-p\\i\end{bmatrix}u(t-ih)$。此时，只要 n 充分大，或者$n\to\infty$时，上述定义可扩展为如下形式：

$$u^{(p)}(t)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h^p}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\begin{bmatrix}p\\i\end{bmatrix}u(t-ih)。$$

当 p=0 时，理解$\begin{bmatrix}0\\i\end{bmatrix}=0,\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\binom{0}{0}=1$可得$u^{(0)}(t)=u(t)$。

当 p<0 时，设 p=-m$(m\in N)$,z 则：

$$u^{(p)}(t)=u^{(-m)}(t)=\lim_{h\to0}h^m\sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix}m\\i\end{bmatrix}u(t-ih)。$$

2.3.2.3. 将导数与积分联系

由此可见，若固定 n，则$\lim_{h\to0}u^{(p)}(t)=0$对导数和积分的统一化无助。此时，为了与积分联系起来，假设：当$h\to0$时，$n\to\infty$。为此，把 h 看作区间$[a,t]$

的 n 等分长，即$h=\dfrac{t-a}{n}$即可。这样，与积分就联系上了。

经过仔细推证，可以得到：当 $p=-m<0(m\in N)$ 时，

$$u^{(p)}(t)=u^{(-m)}(t)=\lim_{h\to 0}h^m\sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}u(t-ih)$$
$$=\frac{1}{(p-1)!}\int_{\alpha}^{t}(t-\tau)^{p-1}f(\tau)d\tau$$

进一步利用数学归纳法，可以得到：

$$u^{(p)}(t)=\lim_{h\to 0}h^m\sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}u(t-ih)$$
$$=\underbrace{\int_{\alpha}^{t}dt\int_{\alpha}^{t}dt\ldots\int_{\alpha}^{t}f(t)dt}_{m次}$$

它是表示函数$u(t)$的-p=m 次积分。

这样，把多重导数与多次积分统一成：

$$u^{(p)}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^p}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\begin{bmatrix} p \\ i \end{bmatrix}u(t-ih)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^p}\sum_{i=0}^{[\frac{t-a}{h}]}(-1)^i\begin{bmatrix} p \\ i \end{bmatrix}u(t-ih)$$

。

$$=\begin{cases} u^{(p)}(t) & (f(t)\text{的p阶导数})(\mathrm{p}\in \mathrm{Z}^{+}\text{时}) \\ u(t) & (p=0\text{时}) \\ \underbrace{\int_{\alpha}^{t}dt\int_{\alpha}^{t}dt\ldots\int_{\alpha}^{t}f(t)dt}_{-\mathrm{p}次} & (u(t)\text{的}-p\text{次积分})(p\in Z^{-}\text{时}) \end{cases}$$

2.3.2.4.　　G-L 型分数阶微积分的定义

引用 Gamma 函数：Γ（α)=$\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ 及其性质。给出 G-L 型分数阶微积分的定义：

令函数$u(t)$定义在区间(a,b)上，对任意的实数μ， μ的整数部分记为[μ]（即[μ]是小于μ的最大整数），若$u(t)$在区间$[a,t]$上存在 m+1 阶连续导数；μ>0，m 至少取到[μ];则次数为μ $(m\le\mu<m+1)$的分数阶导数定义为：

$$u^{(\mu)}(t)=\frac{d^{\mu}u(t)}{dt^n}=\lim_{h\to 0^+,nh=t-a}\frac{1}{h^{\mu}}\sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix} -\mu \\ i \end{bmatrix}u(t-ih)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^t (t-\tau)^{\mu-1}u(\tau)d\tau\text{ 。}$$

以上，就是 G-L 型分数阶微积分的定义。（下面的计算用的是 R-L 型）

3. 数值计算验证正确性

3.1. 具体题目解答

题目：将一般的整数阶导数$\frac{d^n y}{dx^n}$(即$D^n f$,其中$y=f(x)$)的概念推广到n是分数的情况(即分数阶导数，分数阶导数在力学、电学、化学、控制论等很多应用性的领域中有很重要的作用)：对$\alpha>0$,设n是使得$n-1\le\alpha<n$的整数，D^α的定义为：

$$D^\alpha f(x)=D^n(I^{n-\alpha}f(x))=(\frac{d}{dx})^n\int_0^x\frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}f(t)dt.\text{其中}\Gamma(x)\text{是}\Gamma\text{函数(称为格马(Gamma)函数)}$$

试计算：$D^\alpha x(\alpha>0)$和$D^{\frac{1}{2}}x$

提示：设$n-1\le\alpha<n$，则$\upsilon=n-\alpha>0$,且$I^{n-\alpha}x=I^\upsilon x=\frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\int_0^x(x-t)^{\upsilon-1}tdt$。令$\omega=x-t$,

解：将函数及数值带入，可得：

$$D^\alpha x=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)}x^{1-\alpha}$$

$$D^{\frac{1}{2}}x=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

3.2. 用幂函数验证正确性

用$(t-a)^v$指代幂函数，应用结论

$$D^p(t-a)^v=\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(-p+v+1)}(t-a)^{v-p}$$

这里$(p<0,v>-1)$或(0 ≤ m ≤ p<m+1, v>m)，应用上面的结论，有

$$D^q(D^p f(t))=D^{p+q}f(t)$$

例 取 v=2，即 $f(t)=(t-a)^2$，令 $p=\frac{1}{2},q=\frac{1}{2}$，对其分别求$\frac{1}{2}$阶导。

由幂函数的 R-L 分数阶导数有

$$D^{\frac{1}{2}}(t-a)^2=\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(-p+v+1)}(t-a)^{v-p}=\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})}(t-a)^{\frac{3}{2}}$$

再应用一次幂函数的 R-L 分数阶导数，有

$$D^{\frac{1}{2}}[D^{\frac{1}{2}}(t-a)^2]=D^{\frac{1}{2}}[\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})}(t-a)^{\frac{3}{2}}]=\frac{\Gamma(3)\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}(t-a)^1=2(t-a)$$

这符合 $\frac{d}{dt}(t-a)^2=2(t-a)$，验证了（不完全）所得到定义的正确性。

4. 参考文献

1. 吴强、黄健华.(2016).分数阶微积分.清华大学出版社.
2. 吴佳, & 施伟辰. (2015). 关于分数阶导数定义的商榷. 科技视界(11), 88-89.
3. 林孔容. (2003). 关于分数阶导数的几种不同定义的分析与比较. 闽江学院学报, 24(5), 3-6.
4. 武女则. (2013). 分数阶导数、积分的性质及几何意义. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 29(1), 19-22.
5. 倪致祥. (2001). 从阶乘的推广到分数阶导数. 阜阳师范学院学报(自科版), 18(1), 40-43.
6. 武女则. (2013). 分数阶导数和积分的奇偶性及周期性. 山东理工大学学报(自然科学版)(3), 51-54.
7. 马芳芳, 靳丹丹, & 么焕民. (2011). Grunwald-letnikov 分数阶导数的理论分析. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 27(3), 32-34.
8. 武女则. (2016). 分数阶导数、积分的渐近 ω 周期性和伪 ω 周期性. 聊城大学学报:自然科学版, 29(3), 34-37.
9. 马芳芳. (2012). Grunwald-Letnikov 分数阶导数及其常微分方程解析解的研究. (Doctoral dissertation, 哈尔滨师范大学).
10. 周燕, & 张毅. (2013). 基于 riemann-liouville 导数的分数阶 pfaff-birkhoff 原理和分数阶 birkhoff 方程. 科技通报, 29(3), 4-10.